

**AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI**  
**H. M. ABDULLAYEV adına FİZİKA İNSTİTUTU**

---

---

*Əlyazması hüququnda*

**MƏFKURƏ VAQİF qızı QOCAYEVA**

**ADİ VƏ SUPERSİMMETRİK KVANT MEXANİKASINDA**  
**ŞREDİNGER, KLEYN-FOK-QORDON VƏ DİRAK**  
**TƏNLİKLƏRİNİN BƏZİ EKSPONENSİAL TIPLİ**  
**POTENSİALLAR ÜÇÜN ANALİTİK HƏLLƏRİ**

**2212.01 – Nəzəri fizika**

Fizika üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi  
almaq üçün təqdim olunmuş dissertasiyanın

**A V T O R E F E R A T I**

**BAKİ – 2018**

Dissertasiya işi AMEA-nın Fizika İnstitutunda yerinə yetirilmişdir.

**Elmi rəhbər:** Fizika üzrə elmlər doktoru  
**A. İ. Əhmədov**

**Rəsmi opponentlər:** fizika-riyaziyyat elmlər doktoru,  
professor **S. Q. Əbdülvahabova**,  
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi,  
dosent **F. T. Xəlil-zadə**

**Aparıcı təşkilat:** Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye  
Universiteti (Fizika kafedrası)

Müdafiə " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2018-ci il tarixdə, saat " \_\_\_\_ "-da  
AMEA Fizika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən D.01.011 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

*Ünvan:* AZ-1143, Bakı şəh., H. Cavid pr., 131

Dissertasiya ilə AMEA Fizika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Avtoreferat " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2018-ci ildə göndərilmişdir.

**Dissertasiya Şurasının elmi katibi,  
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru,  
professor**

**D. H. Arash**

## İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

**Mövzunun aktuallığı.** Məlumdur ki, kvant sistemlərinin davranışlarını təsvir edən dalğa tənliklərinin tətbiq baxımından vacib olan potensiallar üçün analitik həll edilməsi məsələsi həm relyativistik, həm də qeyri-relyativistik kvant mexanikasının başlıca məsələlərindən biridir. Çünki, dalğa tənlikləri həll edilərək, əldə olunan dalğa funksiyalarından kvant obyektləri haqqında mühüm məlumatları almaq mümkündür. Ona görə də Şredinger, Kleyin-Fok-Qordon və Dirak tənliklərinin analitik və ədədi həlləri mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Bu nöqtəyi-nəzərdən xarici potensial sahədə hərəkət edən atomun və ya atomlar sisteminin nəzəri və təcrübi tədqiqi, enerji spektrlərinin və məxsusi funksiyalarının analitik və ədədi hesablanması, hərəkət tənliklərinin kvant ədədlərindən asılı olaraq fiziki həllərinin tapılması kvant mexanikasının və nəzəri fizikanın başlıca aktual və ciddi məsələlərindən biridir.

Sferik simmetrik və qeyri-sferik simmetrik xarici sahələrdə kvant mexaniki sistemlər üçün qeyri-relyativistik və relyativistik dalğa tənliklərinin analitik həllərinin tapılması və onların üzərində kvant ədədlərindən asılılığını müəyyənləşdirən fiziki həllərin qurulması, enerji spektrinin idarə olunması olduqca ciddi və maraqlı problemlərdən hesab olunur.

Hülten və Hülten üstəgəl Manning-Rosen potensialları göstərilən tip potensiallara aiddir. İş ondadır ki, ədəbiyyatda uyğun məsələlər üçün orbital kvant ədədinin  $l=0$  qiymətində analitik həllər qurulmuşdur və bu səbəbdən də analitik həllərin  $l \neq 0$  qiymətlərinə ümumiləşməsi öz həllini gözləyən mühüm kvant mexaniki məsələlərdən biridir.

Bu cür məsələlər supersimmetrik kvant mexanikası çərçivəsində tədqiqi aktual və vacib problemlərdəndir. Supersimmetriya kvant fizikasında keçən əsrin sonlarından başlayaraq fermion və bozon arasında əlaqəni ifadə edən yeni növ simmetriya kimi daxil edilmişdir.

Supersimmetrik kvant mexanikasına görə kvantmexaniki dalğa tənliyində əsas halın  $u_0(r)$  məxsusi funksiyasını aşağıdakı formada yazmaq olar:

$$u_0(r) = N \exp\left(-\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int W(r) dr\right)$$

burada  $N$  normallaşma sabiti,  $W(r)$  isə superpotensialdır. Supercüt  $V_1(r)$  və  $V_2(r)$  potensialları ilə  $W(r)$  superpotensial arasında əlaqə isə aşağıdakı şəkildədir:

$$V_1(r) = W^2(r) - \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} W'(r) + E, \quad V_2(r) = W^2(r) + \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} W'(r) + E.$$

Supersimmetrik kvant mexanikasında ixtiyari potensiallı sahə üçün sistemin məxsusi funksiyalarını və enerji spektrini tapmaq üçün  $W(r)$  superpotensialını seçərək, yuxarıdakı Rikkati tənliklərindən hər hansı birini həll etmək lazımdır.

Son zamanlar yüksək və həssas texnologiyaların inkişafı və onların nanotexnologiya, kvant kompüterlərinin qurulmasına və inkişaf etdirilməsinə, kosmik sənayeyə, elementar zərrəciklər fizikasına tətbiqi, belə məsələlərin yüksək dəqiqlikli həllərinin tapılması zərurətini qarşıya qoymaqdadır. Dissertasiya işində qarşıya qoyulan problemi həll etmək üçün müxtəlif metodlardan və yaxınlaşmalardan istifadə olunub. Bu riyazi aparatlar uyğun paraqraflarda şərh olunmuşdur.

Beləliklə, dissertasiya işi yuxarıda qeyd edilən yüksək və həssas texnologiyalar üçün olduqca vacib olan atom sistemlərinin alınması və onların enerji spektrlərinin və məxsusi funksiyalarının aşkar ifadələrinin tapılması baxımından kifayət qədər aktual sayılan bir problemə həsr olunub.

**Dissertasiyanın məqsədi.** Dissertasiya işinin məqsədi Hülten, Manning-Rosen, Rinq-Şaped və onların qarışığından alınan mürəkkəb potensiallar üçün Şredinger, Kleyn-Fok-Qordon və Dirak tənliklərini adi və supersimmetrik kvant mexanikası çərçivəsində analitik şəkildə həll edərək əlaqəli halların enerji spektri və dalğa funksiyaları üçün analitik həllərin tapılmasından ibarətdir. Bu məqsədi həyata keçirmək üçün aşağıdakı məsələləri həll etmək qarşıya qoyulmuşdur:

1. Hülten potensiallı sahədə üç və  $D$  ölçülü Şredinger tənliyini adi və supersimmetrik kvant mexanikasında orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün analitik həll edərək enerjinin məxsusi qiymətlər və məxsusi funksiyaları üçün analitik ifadələrin tapılması;

2. Hülten üstəgəl Manning-Rosen və Hülten üstəgəl Rinq-Şaped potensiallı sahədə hərəkət edən zərrəcik üçün Şredinger tənliyini adi və supersimmetrik kvant mexanikasında orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətlərində analitik həll edərək enerjinin məxsusi qiymətləri və məxsusi funksiyaları üçün analitik ifadələrin tapılması;

3. Hülten və Hülten üstəgəl Rinq-Şaped potensiallı sahədə Kleyn-Fok-Qordon tənliyini adi və supersimmetrik kvant mexanikasında orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün Hülten potensialı skalyar və vektor potensiallardan təşkil olunduğu halda analitik həll edərək enerjinin məxsusi qiymətləri və məxsusi funksiyaları üçün analitik ifadələrin tapılması və

relyativistik həllərdən qeyri-relyativistik həllərin alınması;

4. Dirak tənliyinin Hülten potensialı sahə üçün dəqiq spin və psevdospin simmetriyası halları daxilində analitik formada həll edərək enerji spektrləri və məxsusi funksiyaları üçün analitik ifadələrin tapılması;

5. Dirak tənliyinin Hülten üstəgəl Manning-Rosen potensialı sahə üçün dəqiq spin və psevdospin simmetriyası halları daxilində analitik formada həll edərək enerji spektrləri və məxsusi funksiyaları üçün analitik ifadələrin tapılması.

**Elmi nəticələrin alınmasında müəllifin rolu.** Müdafiəyə təqdim olunan dissertasiyanın elmi nəticələri bilavasitə müəllif tərəfindən alınmışdır. Alınan nəticələrin formulə olunmasında, məsələnin həllinin istiqamətləndirilməsində, metodların seçilməsi və məsələnin mükəmməl şəkildə həll edilməsində, lazımı riyazi aparatın təkmilləşdirilməsində, nəzəri tədqiqatın və alınmış nəticələrin analizində, alınmış nəticələrin məqalə şəklində yazılmasında müəllifin rolu həlledicidir.

**Elmi yenilik.** Müdafiəyə təqdim olunan dissertasiyanın elmi nəticələri yenidir, adi və supersimmetrik kvant mexanikasında ciddi əhəmiyyətə malikdir. Dissertasiyada dalğa tənliklərinin bəzi eksponensial tipli mərkəzi və qeyri-mərkəzi potensiallar üçün orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətlərində analitik formada həll etmək üçün mərkəzəqaçma həddinə edilən yaxınlaşma metodu təkmilləşdirilmiş və inkişaf etdirilmişdir. İlk dəfə olaraq Hülten, Manning-Rosen, Rinq-Şaped potensialları və onların qarışığından alınan mürəkkəb potensiallar üçün Şredinger, Kleyn-Fok-Qordon və Dirak tənliklərini adi kvant mexanikasında Nikiforov-Uvarov və supersimmetrik kvant mexanikasında isə forma invariantlığı metodlarını tətbiq edərək əlaqəli hallarının enerji spektri və dalğa funksiyaları üçün üst-üstə düşən analitik və kvantlanan ifadələr alınmışdır. Sistemlərin məxsusi funksiyaları Yakobi polinomları və hiperhəndəsi funksiyalarla ifadə olunmuşdur. Normallanma sabitlərinin aşkar ifadələri tapılmışdır. Tapılan analitik ifadələr ətraflı analiz olunmuşdur.

**İşin elmi və praktiki əhəmiyyəti.** Qeyri-relyativistik və relyativistik dalğa tənliklərini fiziki məna kəsb edən potensiallar üçün konkret sistemlərə tətbiq edərək həllini analitik şəkildə əldə etdikdən sonra bu kvant mexaniki sistemləri idarə etmək olduqca asanlaşır. Bu baxımdan dissertasiyada qoyulan məsələlərin analitik həll olunması kvant mexaniki sistemlərin, atom və molekulyar sistemlərinin, nanokompozitlərin alınması və onların tətbiq sahələrinin göstərilməsini proqnozlaşdırmaq mümkündür. Bu cür məsələlərin analitik həlləri kvant sistemlərinin dinamik xarakteristikalarını mükəmməl tədqiq etməyə və müasir texnologiyalardan istifadə edə-

rək müxtəlif şərtlər daxilində obyektlərin hərəkətini nəzəri tənzimləməyə imkan verən yeni riyazi metodların işlənilib hazırlanmasına zəmin yaradır. Alınan nəticələr günümüzdə olduqca aktual problemlərdən sayılan kvant nöqtələrinin, nanokompozitlərin və müxtəlif birləşmələrin alınmasında və həmçinin kvant kompüterlərinin qurulmasında böyük tətbiqi əhəmiyyətə malikdir. Bu baxımdan dissertasiyada həll edilən məsələlər həm nəzəri, həm də praktiki nöqtəyi-nəzərdən mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Dissertasiyada alınan nəticələr Birləşmiş Nüvə Tədqiqatları İnstitutunda (Dubna, Rusiya), Fermilab (Bataviya, ABD), DEZİ (Almaniya) və sairə laboratoriyalarda tətbiq oluna bilər.

**Alınmış nəticələrin dürüstlüyü.** Dissertasiyanın bütün əsas nəticələri riyazi olaraq ciddi isbat olunub. Alınmış nəticələrin xüsusi hallarda elmi ədəbiyyatda məlum klassik nəticələrə keçməsi onların dürüstlüyünü nümayiş etdirir.

**Tədqiqat metodları.** Adi və supersimmetrik kvant mexanikası metodları, diferensial tənliklər, Nikiforov-Uvarov metodu, Qendenşteyn-Krive metodu, forma invariantlığı metodu, müasir hesablama metodlarından, müasir proqramlaşdırma və hesablama texnologiyalarından və tətbiqi proqram paketlərindən istifadə olunmuşdur.

**İşin aprobeiası.** Dissertasiyada alınmış nəticələr aşağıdakı konfranslarda məruzə edilmişdir:

- The XXV International Colloquium on Integrable Systems (ISQS-25), Prague, June 23-29, 2016;
- Gənc Tədqiqatçıların «Fizika və Astronomiya Problemləri» Beynəlxalq Elmi Konfransı, Bakı, 24-25 may, 2018;
- The 6<sup>th</sup> International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, July 11-13, 2018, Bakı, Azərbaycan.

**Müdafiyyə çıxarılan əsas müddəalar:**

1. Hülten potensiallı sahə üçün üç və D ölçülü Şredinger tənliyini adi və supersimmetrik kvant mexanikasında orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün analitik həll edərək bağlı halların enerjisinin məxsusi qiymətləri və məxsusi funksiyaları üçün analitik ifadələr tapılmışdır. İsbat olunmuşdur ki, adi və supersimmetrik kvant mexanikasında alınan analitik ifadələr üst-üstə düşür.

2. Hülten üstəgəl Manning-Rozen potensiallı sahədə hərəkət edən zərrəcik üçün Şredinger tənliyini adi və supersimmetrik kvant mexanikasında orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün müəyyən şərtlər daxilində mərkəzəqaçma potensialına yeni yaxınlaşma tətbiq edərək analitik formada həll edərək sistemin dalğa funksiyalarını və enerji spektrini

təsvir edən və kvantlanan analitik düsturlar alınmışdır.

3. İlk dəfə olaraq Hülten üstəgəl Rinq Şaped potensialı sahə üçün Şredinger tənliyini adi və supersimmetrik kvant mexanikasında orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün analitik həll edərək enerjinin məxsusi qiymətləri və məxsusi funksiyaları üçün analitik ifadələr tapılmışdır. Azimutal komponentin enerjiyə və məxsusi funksiyaya verdiyi əlavələri göstərən toplananlar müəyyənləşdirilmişdir..

4. İlk dəfə olaraq Hülten potensialı sahə üçün Kleyin-Fok-Qordon tənliyini adi və supersimmetrik kvant mexanikasında orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün Hülten potensialı skalyar və vektor potensialardan təşkil olunduğu və onların müxtəlif halları üçün analitik həll edərək enerjinin məxsusi qiymətləri və məxsusi funksiyaları üçün analitik ifadələr tapılmış və relyativistik həllərdən qeyri-relyativistik həllərin alındığı göstərilmişdir.

5. Hülten üstəgəl Rinq Şaped potensialı sahə üçün Kleyin-Fok-Qordon tənliyini adi və supersimmetrik kvant mexanikasında orbital kvant ədədinin  $l \neq 0$  ixtiyari qiymətləri üçün Hülten potensialının skalyar və vektor potensiallarının cəmindən qurulduğu və onların müxtəlif halları üçün analitik həll edərək radial, azimutal dalğa funksiyaları və enerjinin məxsusi qiymətləri üçün analitik ifadələr tapılmışdır.

6. Hülten potensialı sahədə hərəkət edən relyativistik zərrəcik üçün dəqiq spin və psevdospin simmetriya halları daxilində Dirak tənliyini analitik formada həll edərək enerji spektri və məxsusi funksiyaları üçün kvantlanan analitik ifadələr tapılmışdır. Tapılan ifadələrdən istifadə edərək daxili kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün enerjini və sistemin məxsusi funksiyalarını hesablamaq mümkündür.

7. Hülten üstəgəl Manning-Rosen potensialı sahədə hərəkət edən relyativistik zərrəcik üçün dəqiq spin və psevdospin simmetriya halları daxilində Dirak tənliyini analitik formada həll edərək enerji spektri və məxsusi funksiya üçün kvantlanan analitik ifadələr tapılmışdır. Tapılan ifadələrdən istifadə edərək daxili kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün enerjini və sistemin məxsusi funksiyalarını hesablamaq mümkündür.

**Nəşrlər:** Dissertasiyanın əsas nəticələri Thomson Reuters bazasına daxil olmaqla müəllifin 5 məqaləsində və 3 tezisində çap olunmuşdur.

**Dissertasiyanın quruluşu və həcmi.** Dissertasiya işi giriş, 3 fəsil (12 yarımfəsil), yekun nəticə, istinad olunmuş 126 adda ədəbiyyatın bibliografik siyahısından ibarətdir. İş 4 şəkil və 2 cədvəl də daxil olmaqla ümumilikdə 185 səhifəni əhatə edir.

## İŞİN QISA MƏZMUNU

**Dissertasiya işi** giriş, üç fəsil, əsas nəticələr və istifadə edilmiş ədəbiyyatın biblioqrafik siyahısından ibarətdir.

**Girişdə** işin mövzusunun aktuallığı və məqsədi, qoyulmuş məqsədə nail olmaq üçün həll edilmiş nəzəri məsələlər, işin elmi yeniliyi və elmi-praktiki əhəmiyyəti, eləcə də aprobasiya və publikasiyası haqqında yığcam məlumat verilir.

**Birinci fəsilə** Şredinger tənliyi Hülten (üç ölçülü və  $D$  ölçü fəzalarda), Hülten üstəgəl Manning-Rosen və Hülten üstəgəl Rinq-Şaped potensialları üçün adi və supersimmetrik kvant mexanikasında orbital momentin  $l \neq 0$  ixtiyari sıfırdan fərqli qiymətlərində analitik həll edilmişdir. Qeyd etmək lazımdır ki, adi kvant mexanikasında Şredinger tənliyi bəzi mürəkkəb çevirmələrdən sonra hiperhəndəsi tənliyə gətirilərək həll edilir, supersimmetrik kvant mexanikasında isə Şredinger tənliyi Rikatti tənliyinə gətirilərək analitik həll edilmişdir. Hülten potensiallı sahə üçün radial Şredinger tənliyi yalnız orbital momentin  $l = 0$  halları üçün analitik həll oluna bilər. Orbital momentin ixtiyari sıfırdan fərqli qiymətləri üçün bağlı halların enerjisinin məxsusi qiymətləri üçün analitik ifadənin tapılması məqsədilə bir sıra üsullardan istifadə etmək mümkündür. Biz burada bu problemi aradan qaldırmaq üçün mərkəzəqaçma potensialına unikal bir yaxınlaşma tətbiq edirik.  $\delta \cdot r \ll 1$  – bu şərt ödəndikdən sonra radial Şredinger tənliyi hiperhəndəsi tip tənliyə gətirilə bilər. Ondan sonra isə Nikiforov-Uvarov metodunun köməyi ilə hiperhəndəsi tənlik mükəmməl şəkildə həll edilə bilər. Eyni problem supersimmetrik kvant mexanikasında isə superpotensialı tapmaqla Rikatti tənliyi həll edilmişdir və tam ekvivalent ifadələr alınmışdır.

Şredinger tənliyini Hülten potensialı üçün orbital kvant ədədinin sıfırdan fərqli  $l \neq 0$  ixtiyari qiymətlərində analitik həll edərək enerji spektri üçün aşağıdakı analitik ifadə alınmışdır:

$$E_{n,l} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{l+n+1}{2} \delta - \frac{\frac{\mu Z}{\hbar^2} e^2}{l+n+1} \right]^2 + \frac{\hbar^2 \delta^2}{2\mu} l(l+1) C_0. \quad (1)$$

Enerji spektrinin ifadəsindən görüldüyü kimi enerji spektri diskretdir və orbital və radial kvant ədədlərinin ixtiyari qiymətləri üçün onu hesablamaq mümkündür. Məxsusi funksiya üçün isə hiperhəndəsi funksiya ilə təsvir olunan analitik ifadə aşağıdakı formadadır:



$$\chi_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\sqrt{c}} \frac{\Gamma(n_r + 2\sqrt{c} + 1)}{n_r! \Gamma(2\sqrt{c} + 1)} {}_2F_1(-n_r, 2\sqrt{c} + 2K + n_r, 1 + 2\sqrt{c}; s)$$

$D$  ölçülü fəzada Şredinger tənliyini Hülten potensialı üçün orbital kvant ədədinin sıfırdan fərqli  $l \neq 0$  ixtiyari qiymətlərində analitik həll edərək hər iki kvant mexanikasında uyğun metodlarla həll edərək enerji spektri üçün aşağıdakı analitik ifadə alınmışdır:

$$E_{n_r, l}^{(D)} = -\frac{\hbar^2 \delta^2}{2\mu} \left[ \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + \lambda + n_r} + \frac{1}{2}}{2} - \frac{\alpha^2}{2 \left( \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda + n_r} + \frac{1}{2} \right)} \right]^2 + \frac{\hbar^2 \delta^2}{2\mu} \lambda C_0$$

Eyni metodları tətbiq edərək məxsusi funksiya üçün aşağıdakı analitik ifadə alınmışdır:

$$\chi_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\sqrt{c}} (1-s)^K \frac{\Gamma(n_r + 2\sqrt{c} + 1)}{n_r! \Gamma(2\sqrt{c} + 1)} F(-n_r, 2\sqrt{c} + 2K + n_r, 1 + 2\sqrt{c}; s).$$

$C_{n_r}$  normallaşma sabitidir. Normallaşma şərti üçün inteqral düsturundan istifadə etməklə və sadə hesablamalardan sonra normallaşma sabiti üçün alırıq:

$$C_{n_r} = \sqrt{\frac{n_r! 2\sqrt{c} (n_r + K + \sqrt{c}) \Gamma((2K + \sqrt{c}) + n_r)}{b(n_r + K) \Gamma(n_r + 2\sqrt{c} + 1) \Gamma(n_r + 2K)}}$$

Manning-Rosen üstəgəl Hülten potensialı aşağıdakı formadadır.

$$V(r) = V_{MR}(r) + V_H(r) = -\frac{Ze^2 \delta e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} - \frac{A \delta^2 e^{-\delta r}}{k(1 - e^{-\delta r})} + \frac{\delta^2 \alpha(\alpha - 1) e^{-2\delta r}}{k(1 - e^{-\delta r})^2} \quad (2)$$

Şredinger tənliyini (2) potensialı üçün orbital kvant ədədinin sıfırdan fərqli  $l \neq 0$  ixtiyari qiymətləri üçün analitik həll edərək adi və supersimmetrik kvant mexanikasında enerji spektri üçün aşağıdakı tam uyğun olan analitik ifadə alınmışdır.

Manning-Rosen üstəgəl Hülten potensialı sahədə hərəkət edən zərrəciyin enerji spektri üçün aşağıdakı kvantlanan düstur alırıq:

$$E = -\frac{\hbar^2 \delta^2}{2\mu} \left[ \frac{l(l+1) + \frac{1}{2} - n(n+1) + \sqrt{\frac{1}{4} + l(l+1) + \alpha(\alpha-1)(2n+1) - \beta^2 - A}}{2n+1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} + l(l+1) + \alpha(\alpha-1)}} \right]^2 +$$

$$+ \frac{\hbar^2 \delta^2}{2\mu} l(l+1)C_0 \quad (3)$$

(3) ifadəsində  $\alpha = 0$  və  $A = 0$  qəbul etsək bilavasitə (1) ifadəsi alınır. Yəni (3) ifadəsində Manning-Rosen potensialını nəzərə almasaq Hülten potensialı üçün enerji spektrinin analitik ifadəsi alınır.

Uyğun metodları tətbiq edərək məxsusi funksiya üçün aşağıdakı analitik ifadə alınmışdır:

$$\chi_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\sqrt{c}} (1-s)^K \frac{\Gamma(n_r + 2\sqrt{c} + 1)}{n_r! \Gamma(2\sqrt{c} + 1)} {}_2F_1(-n_r, 2\sqrt{c} + 2K + n_r, 1 + 2\sqrt{c}; s).$$

Mərkəzi olmayan potensial zərrəciklərin dinamikası, quruluşu və qarşılıqlı təsirin xassələri barədə mərkəzi potensiallara nəzərən daha çox informasiyaya malikdir və bu potensialları daxil etməklə dalğa tənliliklərinin analitik və ədədi həlləri günümüzdə olduqca aktualdır. Birinci fəslin sonuncu paragrafında isə mərkəzi olmayan, yəni sferik-simmetrik olmayan Hülten üstəgəl Rinq-Şaped potensialı üçün Şredinger tənliyi adi və super-simmetrik kvant mexanikasında analitik həll edilmiş və enerji spektri üçün analitik ifadə tapılmışdır:

$$E_{n_r, l} = \frac{-\hbar^2}{2\mu b^2} \left[ \left[ n_r + 1/2 + \frac{(l - n_r)(l + n_r + 1) - A}{2\Lambda + 1 + 2n_r} \right]^2 - l(l+1)C_0 \right].$$

Burada  $l = N + \xi$ .

Uyğun metodları tətbiq edərək məxsusi funksiyanın radial və azimutal hissələri üçün aşağıdakı analitik ifadə alınmışdır:

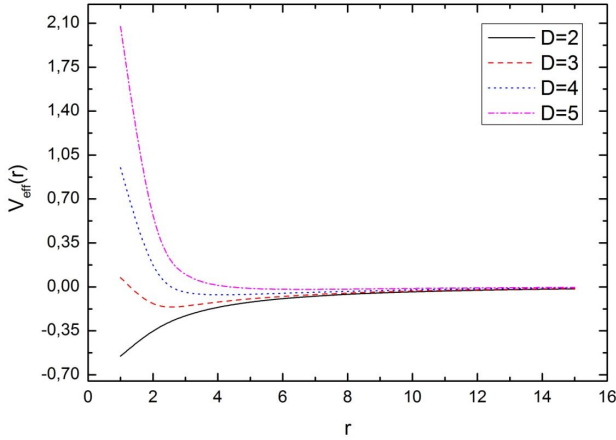
$$\chi_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\sqrt{c}} (1-s)^K \frac{\Gamma(n+a+1)}{n! \Gamma(a+1)} {}_2F_1(-n_r, 2\sqrt{c} + 2K + n_r, 1 + 2\sqrt{c}; s)$$

$$\Theta_N(x) = C_N (1-x)^{(B+C)=2} (1+x)^{(B-C)=2} P_N^{(B+C, B-C)}(x)$$

Şəkil 1-də  $\mathcal{V}_{eff}(r)$  effektiv Hülten potensialının,  $\delta$  ekranlaşma parametrisinin və  $l$  orbital kvant ədədinin müəyyən qiymətlərində müxtəlif  $D$  ölçülü fəza üçün  $r$ -dən asılılığı göstərilmişdir. Effektiv potensial aşağıdakı formadadır:

$$\mathcal{V}_{eff}(r) = -Ze^2 \delta \frac{e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} + \frac{(2l + D - 1)(2l + D - 3)\hbar^2 \delta^2}{8\mu} \left( C_0 + \frac{e^{-\delta r}}{(1 - e^{-\delta r})^2} \right)$$

Şəkildən görünür ki,  $\mathcal{V}_{eff}(r)$  effektiv potensial fəzanın ölçüsündən asılıdır.



**Şəkil 1.**  $V_{eff}$  potensialının  $\delta = 0,15$  və  $l = 1$  qiymətlərində müxtəlif  $D$  ölçülü fəza üçün  $r$  -dən asılılığıdır.

Ekranlaşma parametrisinin müxtəlif qiymətləri üçün enerjinin məxsusi qiymətləri adi və supersimmetrik kvant mexanikası metodları vasitəsilə hesablanan qiymətləri cədvəl 1-də verilmişdir.

**Cədvəl 1.**  $Z=1$  atomu üçün enerjinin məxsusi qiymətlərinin atom vahidləri sistemində ( $\hbar = m = e = 1$ ) 2p, 3p, 3d, 4p, 4d, 4f, 5p, 5d, 5f, 5g, 6p, 6d, 6f səviyyələri üçün ekranlaşma parametrisindən asılılıqları:

Hallar	$\delta$	bu iş, NU $C_0 = 0$	bu iş, NU $C_0 \neq 0$	bu iş, SUSİ $C_0 = 0$	bu iş, SUSİ $C_0 \neq 0$
1	2	3	4	5	6
2p	0.025	-0.1128125	-0.1127604	-0.1128125	-0.1127604
	0.050	-0.1012500	-0.10104166	-0.1012500	-0.10104166
	0.075	-0.0903125	-0.08984375	-0.0903125	-0.08984375
	0.100	-0.0800000	-0.07916666	-0.0800000	-0.07916666
	0.150	-0.0612500	-0.059375	-0.0612500	-0.059375
	0.200	-0.45000	-0.0416666	-0.45000	-0.0416666
3p	0.025	-0.04375868	-0.04370659	-0.04375868	-0.04370659
	0.050	-0.03336805	-0.03315972	-0.03336805	-0.03315972
	0.075	-0.02438737	-0.0239149305	-0.02438737	-0.0239149305
	0.100	-0.01680555	-0.015972222	-0.01680555	-0.015972222
	0.200	-0.0312500	-0.02604166	-0.0312500	-0.02604166
	0.300	-0.02000	-0.012500	-0.02000	-0.012500

1	2	3	4	5	6
	0.150	-0.00586805	-0.003993055	-0.00586805	-0.003993055
3d	0.025	-0.04375868	-0.04370659	-0.04375868	-0.04370659
	0.050	-0.03336805	-0.03315972	-0.03336805	-0.03315972
	0.075	-0.02438737	-0.0239149305	-0.02438737	-0.0239149305
	0.100	-0.01680555	-0.015972222	-0.01680555	-0.015972222
	0.150	-0.00586805	-0.003993055	-0.00586805	-0.003993055
4p	0.025	-0.02000	-0.0199478	-0.02000	-0.0199478
	0.050	-0.01125	-0.011041666	-0.01125	-0.011041666
	0.075	-0.00500	-0.00453125	-0.00500	-0.00453125
	0.100	-0.00125	-0.00041666	-0.00125	-0.00041666
4d	0.025	-0.02000	-0.0199478	-0.02000	-0.0199478
	0.050	-0.01125	-0.011041666	-0.01125	-0.011041666
	0.075	-0.00500	-0.00453125	-0.00500	-0.00453125
4f	0.025	-0.02000	-0.0199478	-0.02000	-0.0199478
	0.050	-0.01125	-0.011041666	-0.01125	-0.011041666
	0.075	-0.00500	-0.00453125	-0.00500	-0.00453125
5p	0.025	-0.009453125	-0.009401	-0.009453125	-0.009401
	0.050	-0.0028125	-0.00260416	-0.0028125	-0.00260416
5d	0.025	-0.009453125	-0.009401	-0.009453125	-0.009401
	0.050	-0.0028125	-0.00260416	-0.0028125	-0.00260416
5f	0.025	-0.009453125	-0.009401	-0.009453125	-0.009401
	0.050	-0.0028125	-0.00260416	-0.0028125	-0.00260416
5g	0.025	-0.009453125	-0.009401	-0.009453125	-0.009401
	0.050	-0.0028125	-0.00260416	-0.0028125	-0.00260416
6p	0.025	-0.00420138	-0.004149305	-0.00420138	-0.004149305
6d	0.025	-0.00420138	-0.004149305	-0.00420138	-0.004149305
6g	0.025	-0.00420138	-0.004149305	-0.00420138	-0.004149305

**İkinci fəsilə** Kleyn-Fok-Qordon tənliyi Hülten, Hülten üstəgəl Ring-Shaped potensialları üçün adi və supersimmetrik kvant mexanikasında analitik həll edilmişdir. İkinci fəslin birinci paragrafında Kleyn-Fok-Qordon tənliyi Hülten potensialı sahədə hərəkət edən zərrəcik üçün, Hülten potensialı iki hissədən  $V(r)$ – vektor və  $S(r)$ – skalyar Hülten potensialından təşkil olunduğu hallarda həm ümumi və həmdə xüsusi hallarda  $l \neq 0$  halları üçün analitik formada həll edilmiş, enerji spektri və məxsusi funksiya üçün bütün hallarda analitik ifadələr tapılmışdır. Vektor potensialının skalyar potensialından fərqli olduğu ümumi hal üçün enerji spektrini aşağıdakı formada yazmaq olar:

$$M^2 - E^2 = \left[ \frac{\alpha^2 - \lambda - \frac{1}{2} - n(n+1) - (2n+1)\sqrt{\frac{1}{4} + \beta^2 + \lambda}}{2n+1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} + \beta^2 + \lambda}} \cdot \delta \right]^2 - l(l+1)\delta C_0 \quad (4)$$

Əgər  $V_0$  – vektor potensial  $S_0$  – skalyar potensialla bərabər olarsa,  $V_0 = S_0$ , onda  $\beta = 0$  olur və enerji spektri aşağıdakı formada olur, yəni:

$$M^2 - E^2 = \left[ \frac{\alpha^2 - \lambda - \frac{1}{2} - n(n+1) - (2n+1)\left(l + \frac{1}{2}\right)}{2n+1 + 2\left(l + \frac{1}{2}\right)} \cdot \delta \right]^2 - l(l+1)\delta C_0$$

Əgər  $V(r) = -S(r)$  olarsa onda enerji spektri aşağıdakı formada təyin edilir:

$$M^2 - E^2 = \left[ \frac{\alpha^2}{2(n+1+l)} - \frac{(n+1+l)^2}{2} \right]^2 \cdot \delta^2 - l(l+1)\delta^2 C_0$$

Burada  $\beta = 0$ , amma  $\alpha'^2 \neq \alpha^2$  və aşağıdakı formada təyin olunur:

$$\alpha' = \frac{\sqrt{2V_0(E-M)}}{\delta}$$

Tam analiz üçün  $V(r)$  vektor potensialın  $S(r)$  skalyar potensialla bərabər olduğu  $V(r) = S(r)$  hal da öyrənilmişdir. Bu halda Kleyn-Fok-Qordon tənliyi  $2 \cdot V(r)$  potensialı üçün Şredinger tənliyinə çevrilir və bu da ikinci fəslin birinci paraqrafındakı nəticə ilə eynilik təşkil edir.

$\chi_{n_r}(s)$  məxsusi funksiyasını hiperhəndəsi funksiya ilə aşağıdakı formada ifadə edilmişdir:

$$\chi_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\sqrt{c}} \frac{\Gamma(n_r + 2\sqrt{c} + 1)}{n_r! \Gamma(2\sqrt{c} + 1)} F(-n_r, 2\sqrt{c} + 2K + n_r, 1 + 2\sqrt{c}; s).$$

İkinci fəslin ikinci paraqrafında uyğun olaraq birinci paraqrafda adi kvant mexanikasında həll edilən məsələ supersimmetrik kvant mexanikasında həll edilmişdir. Göstərilmişdir ki, hər iki kvant mexanikasında tapılan həllər bilavasitə üst-üstə düşür. Kleyn-Fok-Qordon tənliyini Hülten potensialı üçün həll etmək aşağıdakı Rikkati tənliyini həll etməyə ekvivalentdir:

$$W^2(r) \mp W'(r) = V_{eff}(r) - E_0 \quad (5)$$

$W(r)$  superpotensialı aşağıdakı formada seçərək

$$W(r) = - \left( C + \frac{De^{-\delta r}}{(1 - e^{-\delta r})^2} \right)$$

(5) Rikkati tənliyi həll edilmişdir və enerji spektri üçün (4) ifadəsi alın-

mışdır.

İkinci fəslin üçüncü paragrafında Kleyn-Fok-Qordon tənliyi Hülten üstəgəl Rinq-Shaped potensialı üçün orbital kvant ədədinin  $l \neq 0$  qiymətlərində analitik şəkildə həll edilmişdir. Enerji spektri və məxsusi funksiya üçün bütün mümkün olan hallarda analitik ifadələr tapılmışdır. Çünki belə hallar kvant sistemlərinin rəbitəli və davam edən rəbitəli hallarının qarşılıqlı təsirlərini təsvir etmək üçün geniş istifadə olunur.

Beləliklə, Nikiforov-Uvarov üsulunu tətbiq etməklə Manning-Rosen üstəgəl Rinq-Şaped potensialı üçün orbital kvant ədədinin  $l \neq 0$  halında Kleyn-Fok-Qordon tənliyini analitik və ədədi həll edərək, enerji spektrini, onun məxsusi qiymətlərini və həmçinin dalğa funksiyalarını tapılmışdır. Eyni zamanda Manning-Rosen və Rinq-Şaped potensialına daxil olan bəzi parametrləri dəyişməklə Hülten potensialı üçün həlləri alırıq.

Eyni metodları tətbiq edərək  $\Theta_n(z)$  azimutal dalğa funksiyası üçün alırıq:

$$\Theta_n(z) = C_N (1-z)^{(B+C)/2} \cdot (1+z)^{(B-C)/2} P_N^{(B+C, B-C)}(z).$$

**Üçüncü fəsilə**, birinci və ikinci paragraflarında Dirak tənliyi Hülten potensialı üçün iki halda, dəqiq spin və psevdospin simmetriyası halları üçün analitik formada həll edilmişdir. Burada Hülten potensialı skalyar cazibə və vektor itələmə potensiallarından təşkil olunduğu hallarda enerjinin məxsusi qiymətləri və məxsusi funksiyaları üçün analitik ifadələr alınmışdır.

$S(r)$  skalyar cazibə və  $V(r)$  vektor itələmə sahəsində hərəkət edən  $M$  kütləli nüvə üçün Dirak tənliyini  $\hbar = c = 1$  atom vahidlər sistemində aşağıdakı formada yazı bilərik:

$$[\vec{\alpha}\vec{p} + \beta(M + S(r))]\psi(r) = [E - V(r)]\psi(r) \quad (6)$$

Sferik simmetrik Dirak spinor dalğa funksiyasını aşağıdakı formada yazı bilərik:

$$\psi_{nk} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} F_{nk}(r) & Y_{jm}^l(\theta, \varphi) \\ iG_{nk}(r) & \tilde{Y}_{jm}^{\tilde{l}}(\theta, \varphi) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Burada  $F_{nk}(r)$  və  $G_{nk}(r)$  həqiqi kvadratik inteqrallanan funksiyalardır,  $Y_{jm}^l(\theta, \varphi)$  və  $\tilde{Y}_{jm}^{\tilde{l}}(\theta, \varphi)$  sferik harmonik funksiyalardır,  $m$  – maqnit kvant ədədidir, orbital momentin  $z$  oxu üzrə proyeksiyasını xarakterizə edir və  $l(l+1) = k(k+1)$ ,  $\tilde{l}(\tilde{l}+1) = k(k-1)$ .

(7) funksiyasını (6) tənliyində nəzərə alsaq, onda əlaqəli iki diferensial tənlik alırıq:

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right)F_{nk}(r) = [M + E_{nk} + S(r) - V(r)]G_{nk}(r), \quad (8)$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right)G_{nk}(r) = [M - E_{nk} + S(r) + V(r)]F_{nk}(r), \quad (9)$$

$G_{nk}(r)$  funksiyasını (8) tənliyindən və  $F_{nk}(r)$  funksiyasını (9) tənliyindən kənarlaşdırsaq, onda  $F_{nk}(r)$  və  $G_{nk}(r)$  funksiyaları üçün ikinci tərtib diferensial tənlik alırıq:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - [M + E_{nk} - \Delta(r)][M - E_{nk} + \Sigma(r)] + \frac{\frac{d\Delta(r)}{dr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right)}{M + E_{nk} - \Delta(r)} \right\} F_{nk}(r) = 0 \quad (10)$$

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k-1)}{r^2} - [M + E_{nk} - \Delta(r)][M - E_{nk} + \Sigma(r)] + \frac{\frac{d\Sigma(r)}{dr} \left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right)}{M - E_{nk} + \Sigma(r)} \right\} G_{nk}(r) = 0 \quad (11)$$

burada  $\Delta(r) = V(r) - S(r)$  və  $\Sigma(r) = V(r) + S(r)$ .

Psevdospin simmetriyası nüvənin örtük modeli ilə əlaqəli olaraq irəli sürülmüşdür və bu yaxınlaşma nüvə fizikasında bir çox hadisələrin izah olunmasında istifadə olunmuşdur və hazırda da geniş tətbiq olunur. Göstərilmişdir ki, nüvələrdə kvazicirilmiş psevdospin dubletlərinin yaranma səbəbləri ədədi qiymətləri bərabər olan skalyar cazibə və vektor itələmə potensialları ilə əlaqədardır. Psevdospin simmetriyasına birzərrəcikli halın kvazicirilmiş halı kimi baxmaq olar və bu hal  $(n, l, j = l + 1/2)$  və  $(n - 1, l + 2, j = l + 3/2)$  kvant ədədləri ilə xarakterizə olunur. Burada  $n$ ,  $l$  və  $j$  bir zərrəcikli halın radial, orbital və daxili kvant ədədləridir. Tam momenti  $j$  psevdorbital  $\tilde{l} = l + 1$  və psevdospin  $\tilde{s} = 1/2$  momentlərinin cəmi formasında, yəni  $j = \tilde{l} + \tilde{s}$  formasında yazıla bilər. Psevdospin simmetriyası Dirak tənliyində  $\Sigma(r) = C = const$  olması şərti ilə, dəqiq spin simmetriyası isə  $\Delta(r) = C = const$  şərti ilə daxil edilir. Qarşılıqlı təsirdə olan kvant mexaniki sistemlərdə rabitəli və kəsilməz halları öyrənmək, psevdospin və dəqiq spin simmetriyalarını nəzərə alaraq Hülten potensialı üçün Dirak tənliyini orbital və daxili kvant ədədlərinin ixtiyari qiymətləri üçün analitik həlləri tapmaq maraqlı tədqiqatlardan hesab olunur.

Əvvəlcə dəqiq spin simmetriyasına baxaq,  $d\Delta/dr = 0$  və buradan

$\Delta = const$ . Burada  $\Sigma(r)$ -in Hülten potensialına bərabər olduğu hala baxaq, yəni  $\Sigma(r) = V_H(r)$

$$\Sigma(r) = -\frac{Ze^2\delta e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}} \quad (12)$$

(12) Hülten potensialını (10)-da nəzərə alsaq, alarıq:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} - [M + E_{nk} - c]\Sigma(r) + [E_{nk}^2 - M^2 + c(M - E_{nk})] \right\} F_{nk}(r) = 0$$

Bu tənliyi Nikiforov-Uvarov metodu ilə həll edərək enerjinin məxsusi qiymətləri üçün alarıq:

$$M^2 - E_{nk}^2 - c(M - E_{nk}) = \delta^2 \left[ \frac{Ze^2(M + E_{nk} - c)}{2\delta(k+n+1)} - \frac{k+n+1}{2} \right]^2 - \lambda C_0 \delta^2.$$

Məxsusi funksiya üçün isə aşağıdakı analitik ifadəni alarıq:

$$\chi_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\sqrt{c}} (1-s)^K \frac{\Gamma(n_r + 2\sqrt{c} + 1)}{n_r! \Gamma(2\sqrt{c} + 1)} F\left(-n_r, 2\sqrt{c} + 2K + n_r, 1 + 2\sqrt{c}, s\right)$$

Pseudospin simmetriyası halında (11) tənliyində  $\frac{d\Sigma(r)}{dr} = 0$ ,  $\Sigma(r) = c = const$  nəzərə alsaq, onda (11) tənliyi aşağıdakı formada olar:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k-1)}{r^2} - [M + E_{nk} - \Delta(r)][M - E_{nk} + c] \right] G_{nk}(r) = 0.$$

Beləliklə, pseudospin simmetriyası halında ixtiyarı  $k$  halı üçün enerji spektrini aşağıdakı formada yazı bilərik:

$$(M + E_{nk})(M - E_{nk} + c) = \delta^2 \left[ -\frac{Ze^2(M - E_{nk} + c)}{2\delta(n+1-k)} - \frac{n+1-k}{2} \right]^2 - k(k-1)C_0\delta^2$$

Spin-orbital kvant ədədinin  $k$  ixtiyarı qiymətləri üçün pseudospin simmetriyası halında Hülten potensialı sahədə hərəkət edən zərrəcik üçün Dirak tənliyini həll edərək məxsusi funksiyanı tapmaq üçün analogi olaraq dəqiq spin simmetriyasında olduğu formada  $F_{nk}(s)$  funksiyasını tapdığımızı yaxınlaşmanı tətbiq edəcəyik. Pseudospin simmetriyası halında məxsusi funksiyanı aşağıdakı formada tapırıq:

$$G_{nk}(s) = C_{n_r} s^{\sqrt{\tilde{\beta}^2 + k(k+1)}} \cdot (1-s)^k \frac{\Gamma(n_r + 2\sqrt{\tilde{\beta}^2 + k(k-1)} + 1)}{n_r! \Gamma(2\sqrt{\tilde{\beta}^2 + k(k-1)} + 1)} \times$$



$$\times F_{21}\left(-n_r, 2\sqrt{\tilde{\beta}^2 + k(k-1)} + 2k + n_r, 1 + 2\sqrt{\tilde{\beta}^2 + k(k-1)}; s\right).$$

Üçüncü fəslin üçüncü və dördüncü paraqraflarında isə Hülten üstəgəl Manning-Rosen potensialları üçün adi kvant mexanikasında dəqiq spin və psevdospin halları üçün analitik formada həll edilərək enerji spektri və məxsusi funksiyalar üçün analitik ifadələr tapılmışdır.

Manning-Rosen üstəgəl Hülten potensiallı sahədə hərəkət edən  $M$  kütləli relyativistik zərrəciyin dəqiq spin simmetriyası halında enerji spektri aşağıdakı ifadə ilə təyin olunur:

$$M^2 - E_{nk}^2 - c(M - E_{nk}) = \left[ \frac{\alpha^2 + \eta - \lambda - \frac{1}{2} - n(n+1) - \sqrt{\frac{1}{4} + \gamma + \lambda} \cdot (2n+1)}{2n+1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} + \gamma + \lambda}} \right]^2 - \lambda C_0 \delta^2. \quad (13)$$

Manning-Rosen üstəgəl Hülten potensiallı sahədə hərəkət edən  $M$  kütləli relyativistik zərrəciyin məxsusi funksiyasını tapmaq üçün  $F_{nk}(s)$  radial funksiyasını aşağıdakı formada faktorizasiya edək:

$$F_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\sqrt{c}} (1-s)^K \frac{\Gamma(n_r + 2\sqrt{c} + 1)}{n_r! \Gamma(2\sqrt{c} + 1)} F\left(-n_r, 2\sqrt{c} + 2K + n_r, 1 + 2\sqrt{c}; s\right)$$

Psevdospin simmetriyası halında spin-orbital  $k$  kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün Manning-Rosen üstəgəl Hülten potensiali üçün Dirak tənliyinin analitik həlli aşağıdakı formadadır.

$$M^2 - E_{nk}^2 + c(M + E_{nk}) = \left[ \frac{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\eta} - \tilde{\lambda} - \frac{1}{2} - n(n+1) - \sqrt{\frac{1}{4} - \tilde{\gamma} + \tilde{\lambda}} \cdot (2n+1)}{1 + 2n + 2\sqrt{\frac{1}{4} - \tilde{\gamma} + \tilde{\lambda}}} \delta \right]^2 - \tilde{\lambda} C_0 \delta^2. \quad (14)$$

(13) düsturunda  $\gamma = 0, \eta = 0$  olarsa, bilavasitə dəqiq spin simmetriyası halında Hülten potensiallı sahə üçün enerji spektrinin ifadəsini alırıq. Həmçinin (14) düsturunda  $\tilde{\gamma} = 0, \tilde{\eta} = 0$  olarsa, psevdospin simmetriyası halında Hülten potensiallı sahə üçün enerji spektrinin ifadəsini alırıq. Psevdospin simmetriyası halında Manning-Rosen üstəgəl Hülten potensiallı sahədə hərəkət edən  $M$  kütləli relyativistik zərrəciyin məxsusi funksiyasını tapmaq üçün  $G_{nk}(s)$  radial funksiyasını aşağıdakı formada faktorizasiya edilir:

$$G_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\sqrt{c}} (1-s)^{\tilde{K}} \frac{\Gamma(n_r + 2\sqrt{c} + 1)}{n_r! \Gamma(2\sqrt{c} + 1)} F(-n_r, 2\sqrt{c} + 2\tilde{K} + n_r, 1 + 2\sqrt{c}; s).$$

## ƏSAS NƏTİCƏLƏR

1. İlk dəfə Hülten potensialı sahədə Şredinger tənliyi adi və supersimmetrik kvant mexanikası çərçivəsində orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün analitik həll edilmiş, bağlı halların enerjisinin məxsusi qiymətləri və məxsusi funksiyaları üçün analitik ifadələr tapılmışdır. Göstərilmişdir ki, enerji spektri diskretdir və hidrogenəbənzər atomlar üçün enerji səviyyələrinin  $2p, 3p, 3d, 4p, 4d, 4f, 5p, 5d, 5f, 5g, 6p, 6d, 6f, 6g$ , ədədi qiymətləri adi və supersimmetrik kvant mexanikası çərçivəsində üst-üstə düşür.

2. Hülten potensialı sahədə  $D$  ölçülü Şredinger tənliyi adi və supersimmetrik kvant mexanikasında orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətləri üçün analitik həll edilmiş və enerjinin məxsusi qiymətlərinin və məxsusi funksiyalarının analitik ifadələr alınmışdır. Həmçinin bu həllərdən üç ölçülü həllərinin alınması göstərilmişdir və alınan nəticələr bilavasitə üst-üstə düşür. Göstərilmişdir ki, enerji spektri diskretdir.

3. İlk dəfə Hülten üstəgəl Manning-Rosen və Hülten üstəgəl Rinq-Şaped potensialı sahədə hərəkət edən zərrəcik üçün Şredinger tənliyini adi və supersimmetrik kvant mexanikasında orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətlərində mərkəzəqaçma potensialına yeni yaxınlaşma tətbiq edərək analitik formada həll edərək enerjinin məxsusi qiymətinin və məxsusi funksiyasının analitik və kvantlanan ifadələri əldə olunmuş və enerji spektri üçün tapılan analitik ifadəni nüvəsinin yükü  $Z=1$  olan hidrogenəbənzər atomlara tətbiq edərək ( $2p, 3p, 3d, 4p, 4d, 4f, 5p, 5d, 5f, 5g, 6p, 6d, 6f, 6g$ ) enerji səviyyələrinin ədədi qiymətləri hesablanmış və əlaqəli hallar göstərilmişdir.

4. Hülten potensialı sahə üçün Kleyn-Fok-Qordon tənliyini adi və supersimmetrik kvant mexanikasında orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətlərində, Hülten potensialı skalyar və vektor potensialardan təşkil olunduğu halda və onların müxtəlif kombinasiyaları üçün analitik həll edərək enerjinin məxsusi qiymətinin və məxsusi funksiyasının analitik ifadələri tapılmış və relyativistik həllərdən qeyri- relyativistik həllərin alınması göstərilmişdir.

5. İlk dəfə Hülten üstəgəl Rinq Şaped potensialı sahə üçün Kleyn-Fok-Qordon tənliyini adi və supersimmetrik kvant mexanikasında orbital kvant ədədinin ixtiyari  $l \neq 0$  qiymətlərində Hülten potensialı skalyar və vektor potensialardan təşkil olunduğu və onların müxtəlif hallarında analitik həll edərək radial, azimutal dalğa funksiyaları və enerjinin məxsusi qiymətləri üçün kvantlanan analitik ifadələr əldə olunmuşdur.

6. İlk dəfə Dirak tənliyinin Hülten və Hülten üstəgəl Manning-Rosen potensialı sahədə dəqiq spin və psevdospin simmetriyası halları daxilində analitik formada həll edərək enerji spektri və məxsusi funksiya üçün tam

spin kvant ədədindən asılı olan analitik və kvantlanan ifadələr əldə olunmuşdur.

### **Dissertasiya mövzusu üzrə çap olunmuş elmi işlərin siyahısı**

1. Ahmadov H.I., Jafarzade Sh.I., Qocayeva M.V. Analytical solutions of the Shrödinger equation with the Hulthen potential within SUSY quantum mechanics // International Journal of Modern Physics A, 2015, Vol. 30, No. 32, 1550193

2. Ahmadov H.I., Qocayeva M.V., Huseynova N.Sh., The bound state solutions of the  $D$ -dimensional Shrödinger equation for the Hulthen potential within SUSY quantum mechanics // International Journal of Modern Physics E, 2017, Vol. 26, No. 5, 1750028.

3. Ahmadov H.I., Qocayeva M.V., Aliyeva T.H., Dadashov E.A. Analytical solutions of the Shrödinger equation for the Hulthen plus Ring-Shaped like potential // Journals of Baku Engineering University, 2017, Vol. 1, No. 2, pp.199-209.

4. Ahmadov A.I., Maria Naeem, Qocayeva M.V., Tarverdiyeva V.A. Analytical bound state solutions of the Shrödinger equation for the Manning-Rosen plus Hulthen potential within SUSY quantum mechanics // International Journal of Modern Physics A, 2018, Vol. 33, No. 3, 1850021.

5. Ahmadov A.I., Maria Naeem, Qocayeva M.V., Tarverdiyeva V.A., Analytical solutions of the Shrödinger equation for the Manning-Rosen plus Hulthen potential within SUSY quantum mechanics // Journal of Physics, 2018, 965, No.1, 012001.

6. Ahmadov A.I., Nagiyev Sh.M., Qocayeva M.V, Uzun K., Tarverdiyeva V.A. Exact analytical solution of Klein-Fock-Gordon equation with the Hulthen plus a Ring-Shaped like potentials for nonzero angular momentum / The 6<sup>th</sup> International Conference On Control And Optimization with Industrial Applications, Baku, 2018, 11-13 July, 3 p.

7. Ahmadov H.I., Qocayeva M.V., Aliyeva T.H., Dadashov E.A. and Mehrabov V.A., Bound state solutions of the Shrödinger equation for the Hulthen plus Ring-Shaped like potential / The 6<sup>th</sup> International Conference On Control And Optimization with Industrial Applications, Baku, 2018, 11-13 July, 3 p.

8. Qocayeva M.V., Aslanova S.M., Əhmədov A.İ. Hülten potensialı sahədə hərəkət edən zərrəcik üçün Dirak tənliyinin analitik həlli / Magistrantların və Gənc Tədqiqatçıların «Fizika və Astronomiya Problemləri» Beynəlxalq Elmi Konfransı, Bakı, 24-25 may, 2018, s.48-52.

## Мефкуре Вагиф кызы Годжаева

### Аналитические решения уравнения Шредингера, Клейна-Фока-Гордона и Дирака для некоторых потенциалов экспоненциального типа в обычной и суперсимметричной квантовой механике

#### Резюме

В диссертации изучены аналитические решения модифицированного радиального уравнения Шредингера для потенциалов Хюльтена, Маннинга-Розена плюс Хюльтена и Хюльтена плюс Ринг-Шепада, используя улучшенную схему для преодоления центробежной части. Впервые найдены собственные значения энергии и соответствующие радиальные волновые функции для произвольного значения  $l \neq 0$  орбитального момента в рамках методов Никифорова-Уварова и суперсимметричной квантовой механики. На основе этих методов получены те же аналитические выражения для собственных значений энергии и радиальных волновых функций, преобразованных друг в друга. Далее было получено решение связанного состояния модифицированного уравнения Клейна-Фока-Гордона для потенциала Хюльтена плюс ринг-шепад. Определены собственные значения энергии и соответствующие радиальные и азимутальные волновые функции для произвольного значения углового момента на условиях скалярного потенциала, равного и не равного векторному потенциалу. Найдены решения связанного состояния уравнения Клейна-Фока-Гордона для комбинированного потенциала Хюльтена плюс Ринг-Шепада. Получены эквивалентные выражения для собственных значений энергии и радиальных волновых функций. Уровни энергии и соответствующие нормированные собственные функции представлены в виде полиномов Якоби для произвольных состояний. Показано, что собственные значения энергии и собственные функции чувствительны к радиальным и орбитальным квантовым числам.

Найдены аналитические решения уравнения Дирака с потенциалом Хюльтена, Хюльтена плюс и Маннинга-Розена для произвольного квантового числа спин-орбитальной связи. В случае точной спиновой и псевдоспиновой симметрий. В результате собственные значения энергии и соответствующие спиноры получаются в явных формах.

**Mafkura Vagif kizi Gojayeva**

**Analytical solutions of Schrödinger, Klein-Fock-Gordon and Dirac equations with ordinary and supersymmetric quantum mechanics for exponential type potentials**

*Summary*

In this work, the analytical solutions of the modified radial Schrödinger equation are studied for the Hulthén, Manning-Rosen plus Hulthén and Hulthén plus ring-shaped potentials by using the improved scheme to overcome the centrifugal part.

First, the energy eigenvalues and corresponding radial wave functions are found for any  $l \neq 0$  orbital angular momentum case within the context of the Nikiforov-Uvarov and supersymmetric quantum mechanics methods. In this way, based on these methods, the same expressions are obtained for the energy eigenvalues, and the expression of radial wave functions transformed each other is revealed.

Next, the bound state solution of the modified Klein-Fock-Gordon equation is obtained for the Hulthén plus ring-shaped potential. The energy eigenvalues and corresponding radial and azimuthal wave functions are defined for any  $l \neq 0$  angular momentum case on the conditions that scalar potential is whether equal and no equal to vector potential, the bound state solutions of the Klein-Fock-Gordon equation of the Hulthén plus ring-shaped like potential. The equivalent expressions are obtained for the energy eigenvalues, and the expression of radial wave functions transformations to each other is revealed owing to both methods. The energy levels and the corresponding normalized eigenfunctions are represented in terms of the Jacobi polynomials for arbitrary  $l \neq 0$  states. It is shown that the energy eigenvalues and eigenfunctions are sensitive to  $n_r$ , radial and  $l$  orbital quantum numbers.

Finally, the approximately analytical bound state solutions of the Dirac equation with the Hulthén, Hulthén plus Manning-Rosen potential for an arbitrary spin-orbit coupling quantum number are studied by taking a properly approximate expansion for the spin-orbit coupling term. As a result, the energy eigenvalues and the corresponding spinors are obtained in the closed forms.

Çapa imzalanmışdır: 25.10.2018  
Kağızın formatı: 60×90 1/16  
Tiraj: 100 nüsxə

---

Bakı Universiteti nəşriyyatı  
Az 1148, Bakı, Z. Xəlilov, 23



**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА**  
**ИНСТИТУТ ФИЗИКИ им. Г. М. АБДУЛЛАЕВА**

---

*На правах рукописи*

**МЕФКУРЕ ВАГИФ кызы ГОДЖАЕВА**

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА,  
КЛЕЙНА-ФОКА-ГОРДОНА И ДИРАКА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ  
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА ПОТЕНЦИАЛОВ  
В ОБЫЧНОЙ И СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ  
КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ**

**2212.01 – Теоретическая физика**

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой  
степени доктора философии по физике

**БАКУ – 2018**