AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

KLEYN-FOK-QORDON, DİRAK VƏ DAFFİN-KEMMER-PETİAU TƏNLİKLƏRİNİN BƏZİ SFERİK SİMMETRİK POTENSİALLAR ÜÇÜN ADİ VƏ SUPERSİMMETRİK KVANT MEXANİKASINDA ANALİTİK HƏLLƏRİ

İxtisas: 2212.01 – N əzəri fizika

Elm sahəsi: Fizika

İddiaçı: **Səriyyə Məmmədəli qızı Aslanova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq
üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2022

Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin "Nəzəri fizika" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbərlər: – fizika elmləri doktoru, dosent
Azər İnşalla oğlu Əhmədov

– fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Rəsmiyyə Eldar qızı Qasımova.

Rəsmi opponentlər: – AMEA-nın müxbir üzvü, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Səlimə İbrahim qızı Mehdiyeva

– fizika elmləri doktoru, professor
Mirteymur Mirkazım oğlu Mirabutalıbov

– fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Vətən Həsənverdi oğlu Bədəlov.

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının AMEA Fizika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.14 Dissertasiya şurası

Dissertasiya Şurasının sədri:
AMEA-nın həqiqi üzvü,
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
________________ **Nazim Timur oğlu Məmmədov**

Dissertasiya Şurasının elmi katibi:
fizika elmləri doktoru, dosent
________________ **Rəfiqə Zabil qızı Mehdiyeva**

Elmi seminarın sədri:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
________________ **Şakir Məhəmməd oğlu Nağıyev**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Kvant mexanikası vasitəsilə mikrosistemlərin öyrənilməsindən alınan nəzəri nəticələr, demək olar ki, təcrübədə təsdiqlənir və real prosesləri düzgün təsvir edir. Son zamanlar kvant mexanikasının əsas problemlərindən biri və başlıcası real kvant mexaniki sistemlərdə təsir edən potensiallar üçün dalğa tənliklərinin analitik və riyazi aparatın imkan verdiyi qədər dəqiq həll edilməsidir. Çünki, dalğa tənliklərinin həllindən tapılan sistemin məxsusi funksiyaları kvant mexaniki sistemlər haqqında bütün vacib məlumatları özündə əks etdirir. Məhz buna görə də, Kleyn-Fok-Qordon (KFQ), Dirak və Daffin-Kemmer-Petiau (DKP) tənliklərinin analitik və ədədi həlləri kifayət qədər vacib əhəmiyyətə malikdir.

Müasir nəzəri fizikanın əsası hesab olunan kvant mexanikasının inkişafı və formalaşması bu gün də davam edir. Kvant mexanikasının problemlərinin böyük əksəriyyəti ümumiyyətlə dəqiq analitik həll yollarına malik deyil. Bu baxımdan, nəzəriyyənin tədqiq etdiyi bir sıra məsələlərlə yanaşı, müxtəlif potensiallar üçün əsas tənliklərin dəqiq analitik həllərinin qurulması, enerji spektrlərinin və dalğa funksiyalarının tapılması mühüm maraq kəsb edir.

Dalğa tənliklərinin müəyyən potensiallı xarici sahədə yerləşdirilən kvant mexaniki sistemlər üçün dəqiq analitik həllinin orbital kvant ədədinin sıfırdan fərqli qiymətlərində tapılması kifayət qədər çətinləşir. Xarici potensial sahənin təbiəti ilə yanaşı, bu çətinlik effektiv potensialın ifadəsində mərkəzdənqaçma həddinin yaranması ilə də şərtlənir. Bu nöqteyi-nəzərdən müəyyən potensiallı xarici sahə halında kvant-mexaniki sistemlərin hərəkətinin nəzəri və təcrübi öyrənilməsi; dalğa tənliyinin həlli, enerji spektrlərinin və məxsusi funksiyalarının tapılması, nəzəri fizikanın, xüsusilə kvant mexanikasının elmi maraq kəsb edən ciddi problemlərindən hesab edilir. Son zamanlar yüksək texnologiyaların, o cümlədən kvant kompüterlərinin qurulması və inkişafı, onların elementar zərrəciklər fizikası, nanotexnologiya və kosmik sənayedə uğurlu tətbiqi belə məsələlərin həllərinin yüksək dəqiqliklə tapılması zərurətini yaradır. Bu nöqteyi-nəzərdən, təqdim olunan dissertasiya işində qarşıya qoyulan məqsəd və vəzifələrin həlli üçün müxtəlif müasir və əlverişli nəzəri tədqiqat metod və yanaşmaları uğurla tətbiq olunmuş, hesablamaların aparılması və nəticələrin əyaniləşdirilməsi üçün «MATHEMATİCA 8» və «ORIGIN 8.5.1» proqram paketlərinin imkanlarından istifadə olunmuşdur. Bu riyazi metodların və yanaşmaların geniş şərhi dissertasiyanın uyğun bölmələrində verilmişdir.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Tədqiqat işinin obyekti olaraq kvant mexaniki sistem, elementar zərrəciklər, atomlar və nüvələr götürülmüşdür. Tədqiqatın predmeti dedikdə isə sferik simmetrik potensiallar və mərkəzdənqaçma potensialına yeni yaxınlaşma tətbiq etməklə enerji spektrlərinin, məxsusi funksiyalarının və normallanma sabitlərinin analitik və ədədi qiymətlərinin hesablanması nəzərdə tutulur.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin *əsas məqsədi* bəzi sferik-simmetrik potensiallı xarici sahələr halında relyativistik KFQ, Dirak və DKP tənliklərinin Nikiforov-Uvarov (NU) metodunun tətbiqi ilə adi kvant mexanikasında, forma invariantlığı metodu ilə isə Supersimmetrik (SUSİ) kvant mexanikasında analitik şəkildə həll edərək enerji spektri, məxsusi funksiya və normalanma sabitləri üçün analitik ifadələrin tapılmasından, həmçinin tədqiq olunan xüsusi hallarda enerji spektri üçün ədədi qiymətlərin hesablanmasından ibarətdir.

Bu məqsədə nail olmaq üçün dissertasiya işinin qarşısında aşağıdakı *məsələlər* qoyulmuş və həll edilmişdir:

- Hülten və Yukava potensiallarının xətti cəmindən ibarət mərkəzi sahədə KFQ tənliyinin orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətlərində hesablana biləcək həllinin tapılması, uyğun məxsusi qiymət və məxsusi funksiyalar üçün analitik ifadələrin adi və SUSİ kvant mexanikasında alınması;
- Manninq-Rosen və Yukava sinif potensiallarının xətti cəmindən ibarət mərkəzi sahədə KFQ tənliyinin bucaq momentinin sıfırdan fərqli qiymətlərində adi və SUSİ kvant mexanikasında analitik həllinin tapılması, enerjinin məxsusi qiyməti və dalğa funksiyaları üçün analitik ifadələrin alınması; həmçinin xüsusi halların araşdırılması;
- Hülten və Yukava sinif potensiallarının xətti kombinasiyasından ibarət mərkəzi sahədə Kulon tipli potensialla tenzor qarşılıqlı

təsir nəzərə alınmaqla, Dirak tənliyinin dəqiq spin simmetriyası halında adi və SUSİ kvant mexanikasında analitik həllərinin tapılması, Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti, dalğa funksiyaları üçün analitik ifadələrin alınması və ədədi qiymətlərinin hesablanması; həmçinin xüsusi halların araşdırılması;

- Hülten və Yukava sinif potensiallarının xətti kombinasiyasından ibarət mərkəzi sahədə Kulon tipli potensialla tenzor qarşılıqlı təsir nəzərə alınmaqla Dirak tənliyinin psevdospin simmetriyası halında adi və SUSİ kvant mexanikasında analitik həllərinin tapılması, Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti və dalğa funksiyaları üçün analitik ifadələrin alınması və ədədi qiymətlərinin hesablanması; həmçinin xüsusi halların araşdırılması;
- Manninq-Rosen və Yukava potensiallarının xətti cəmindən ibarət mərkəzi sahədə Dirak tənliyinin dəqiq spin simmetriyası halında adi və SUSİ kvant mexanikasında analitik həllərinin tapılması, Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti və məxsusi funksiyaları üçün analitik ifadələrin alınması; həmçinin xüsusi halların araşdırılması;
- Manninq-Rosen və Yukava potensiallarının xətti kombinasiyasından ibarət mərkəzi sahədə Dirak tənliyinin psevdospin simmetriyası halında adi və SUSİ kvant mexanikasında analitik həllərinin tapılması, Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti və dalğa funksiyaları üçün analitik ifadələrin alınması; həmçinin xüsusi halların araşdırılması;
- Hülten və Yukava potensiallarının xətti cəmindən ibarət mərkəzi sahədə DKP tənliyinin bucaq momentinin sıfırdan fərqli qiymətlərində adi kvant mexanikasında analitik həllinin tapılması, Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti və dalğa funksiyaları üçün analitik ifadələrin alınması; həmçinin xüsusi halların araşdırılması;
- Manninq-Rosen və Yukava sinif potensiallarının xətti cəmindən ibarət mərkəzi sahədə DKP tənliyinin bucaq momentinin sıfırdan fərqli qiymətləri üçün adi kvant mexanikasında analitik həllinin tapılması, Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti və dalğa funksiyaları üçün analitik ifadələrin alınması.

Tədqiqat metodları. Adi kvant mexanikasında tənliklər müxtəlif çevrilmələrdən sonra hiperhəndəsi tip tənlik və ya Qauss tənliyinə gətirilir. Daha sonra NU metodunu tətbiq edərək analitik şəkildə həll edilir. SUSİ KM-da isə uyğun məsələnin həlli qeyri-xətti Rikkati tənliyinin həllindən tapılır. Bu zaman sistemin Hamilton operatorunun məxsusi qiymətini tapmaq üçün Qendenşteyn-Krivenin forma invariantlığı metodundan istifadə edilir. Eyni zamanda diferensial tənliklərin metodlarından, Aldriç çevirmələrindən, hesablama riyaziyyatının metodlarından, müasir proqramlaşdırma və bəzi tətbiqi proqram paketlərindən istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çixarılan əsas müddəalar:

1. Hülten və Yukava potensiallarının xətti kombinasiyasından ibarət mərkəzi sahədə KFQ tənliyi adi kvant mexanikasında NU və SUSİ KM isə forma invariantlığı metodları ilə bucaq momentinin $l \neq 0$ sıfırdan fərqli qiymətlərində analitik həll edilərək Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti və dalğa funksiyası üçün analitik ifadələr tapılmışdır. Həmçinin bəzi xüsusi hallar araşdırılmışdır. Potensial parametrlərinin seçilmiş qiymətlərində sistemin 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, və 4s səviyyələrində enerjinin ekranlaşma parametrindən asılılıqlarının ədədi qiymətləri hesablanmış və cədvəl şəklində verilmişdir. Enerji səviyyələrinin ekranlaşma parametrindən asılılığı şəkillərdə verilmişdir.

2. Manning-Rosen üstəgəl Yukava sinif potensiallarının xətti cəmindən ibarət sferik simmetrik sahədə KFQ tənliyi bucaq momentinin sıfırdan fərqli $(l \neq 0)$ qiymətlərində adi və SUSİ kvant mexanikasında analitik həll edilərək Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti və məxsusi funksiyası üçün analitik ifadələr tapılmışdır. Sistemin məxsusi funksiyası Yakobi çoxhədlisi və həmçinin hiperhəndəsi funksiya ilə ifadə edilmişdir. Həmçinin bəzi xüsusi hallar araşdırılmışdır.

3. Hülten və Yukava sinif potensiallarının xətti kombinasiyasından ibarət sferik simmetrik sahədə Kulon tipli potensialla tenzor qarşılıqlı təsir nəzərə alınmaqla Dirak tənliyi dəqiq spin simmetriyası halında spin-orbital qarşılıqlı təsir operatorunun məxsusi qiymətinin sıfırdan fərqli $k \neq 0$ qiymətlərində adi və SUSİ kvant mexanikasında analitik həll edilmişdir. Enerjinin məxsusi qiyməti və dalğa funksiyası üçün analitik ifadələr alınmışdır. Sistemin məxsusi funksiyası Yakobi çoxhədlisi və həmçinin hiperhəndəsi funksiya ilə ifadə edilmişdir. Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti və məxsusi funksiyaları üçün bucaq momentin sıfırdan fərqli qiymətlərində analitik ifadələr tapılmışdır.

4. Hülten və Yukava sinif potensiallarının xətti kombinasiyasından ibarət mərkəzi sahədə Kulon tipli potensialla tenzor qarşılıqlı təsir nəzərə alınmaqla Dirak tənliyi psevdospin simmetriyası halında spin-orbital qarşılıqlı təsir operatorunun məxsusi qiymətinin sıfırdan fərqli $(k \neq 0)$ qiymətləri üçün adi və SUSİ kvant mexanikasında analitik həll edilmişdir. Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti, Yakobi və hiperhəndəsi funksiya ilə ifadə olunan məxsusi funksiyası üçün analitik ifadələr tapılmışdır. Həmçinin dəqiq spin və psevdospin simmetriyası halında potensial parametrlərinin seçilmiş qiymətlərində enerji spektri hesablanmış və enerji üçün alınan qiymətlər cədvəl şəklində verilmişdir. Dəqiq spin və psevdospin halında enerji spektrinin ekranlaşma parametrindən asılılıqları qrafiki təsvir edilmişdir. Hər iki halda sistemin məxsusi funksiyalarının nüvələrarası məsafədən asılılıqları dərindən təhlil edilmiş və alınan nəticələr şəkillərlə nümayiş etdirilmişdir.

5. Manning-Rosen və Yukava potensiallarının xətti kombinasiyasından ibarət mərkəzi sahədə Dirak tənliyi dəqiq spin simmetriyası halında spin-orbital qarşılıqlı təsir operatorunun məxsusi qiymətinin sıfırdan fərqli $(k \neq 0)$ qiymətləri üçün adi və SUSİ kvant mexanikasında analitik həll edilmişdir. Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti, Yakobi və hiperhəndəsi funksiya ilə ifadə olunan dalğa funksiyası üçün analitik ifadələr tapılmışdır.

6. Manning-Rosen və Yukava potensiallarının xətti kombinasiyasından ibarət mərkəzi sahədə Dirak tənliyi psevdospin simmetriyası halında spin-orbital qarşılıqlı təsir operatorunun məxsusi qiymətinin sıfırdan fərqli $(k \neq 0)$ qiymətlərində adi və SUSİ kvant mexanikasında analitik həll edilmişdir. Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti, Yakobi və hiperhəndəsi funksiya ilə ifadə olunan dalğa funksiyası üçün analitik ifadələr tapılmışdır. Alınan nəticələrdən bilavasitə görünür ki, hər iki kvant mexanikasında alınan ifadələr üst üstə düşür.

7. Hülten və Yukava potensiallarının xətti kombinasiyasından ibarət mərkəzi sahədə DKP tənliyi bucaq momentinin sıfırdan fərqli $(l \neq 0)$ qiymətlərində adi kvant mexanikasında analitik həll edilərək

Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti və dalğa funksiyası üçün analitik ifadələr tapılmışdır. Sistemin məxsusi funksiyası Yakobi çoxhədlisi və hiperhəndəsi funksiya ilə ifadə edilmişdir.

8. Manning-Rosen və Yukava sinif potensiallarının xətti kombinasiyasından ibarət mərkəzi sahədə DKP tənliyi bucaq momentinin sıfırdan fərqli $(l \neq 0)$ qiymətlərində adi kvant mexanikasında analitik həll edilərək Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti və dalğa funksiyası üçün analitik ifadələr tapılmışdır. Sistemin məxsusi funksiyası Yakobi çoxhədlisi və hiperhəndəsi funksiya ilə ifadə edilmişdir. Həmçinin bəzi xüsusi hallar araşdırılmışdır.

Tədqiqatın elmi yeniliyi.

1. Hülten və Yukava potensiallarının cəmindən ibarət olan sahədə KFQ tənliyinin bağlı hallarının enerjisinin skalyar sahənin vektor sahədən fərqli, bərabər və əks işarə ilə bərabər hallarında enerji spektrinin məxsusi qiymətləri və uyğun məxsusi funksiyaları üçün analitik ifadələr tapılmışdır.

2. Manninq-Rosen və Yukava sinif potensiallarının xətti kombinasiyasından təşkil olunan sahədə KFQ tənliyinin bağlı hallarının enerjisinin skalyar sahənin vektor sahədən fərqli, bərabər və əks işarə ilə bərabər hallarında analitik formada həll edilərək enerji spektri, dalğa funksiyası və normallanma sabiti üçün analitik ifadələr alınmışdır.

3. Hülten və Yukava sinif potensiallarının cəmindən ibarət olan sahədə Kulon tipli potensialla tenzor qarşılıqlı təsirində Dirak tənliyi dəqiq spin simmetriyası halında relyativistik zərrəcik üçün analitik formada həll edilərək Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti, dalğa funkiyası və normallanma sabiti üçün analitik ifadələr alınmışdır.

4. Hülten və Yukava sinif potensiallarının cəmindən ibarət sahədə hərəkət edən relyativistik zərrəcik üçün Kulon tipli potensialla tenzor qarşılıqlı təsirində Dirak tənliyi psevdospin simmetriyası halında analitik şəkildə həll edilərək Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti, məxsusi funksiya və normallanma sabiti üçün analitik ifadələr alınmışdır.

5. Manninq-Rosen və Yukava potensiallarının cəmindən ibarət olan sahədə Dirak tənliyi dəqiq spin simmetriyası halında relyativistik zərrəcik üçün analitik şəkildə həll edilərək Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti, məxsusi funksiyası və normallanma sabiti üçün analitik ifadələr alınmışdır.

6. Manninq-Rosen və Yukava potensiallarının cəmindən ibarət olan sahədə Dirak tənliyi psevdospin simmetriyası halında relyativistik zərrəcik üçün analitik şəkildə həll olunmuşdur. Enerji spektri, məxsusi funksiya və normallanma sabiti üçün analitik ifadələr alınmışdır.

7. Hülten və Yukava potensiallarının xətti cəmindən ibarət olan mərkəzi sahədə DKP tənliyi bucaq momentinin sıfırdan fərqli qiymətlərində adi kvant mexanikasında analitik həll edilərək, Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti, dalğa funksiyası və normallanma sabiti üçün analitik ifadələr alınmışdır.

8. Manninq-Rosen və Yukava sinif potensiallarının xətti cəmindən ibarət olan mərkəzi sahədə DKP tənliyi bucaq momentinin sıfırdan fərqli qiymətlərində adi kvant mexanikasında analitik həll edilərək Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti, dalğa funksiyası və normallanma sabiti üçün analitik ifadələr alınmışdır.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Bu tədqiqat işində alınmış nəticələr adi və SUSİ kvant mexanikası metodlarının legitimliyinin yoxlanılmasında, relyativistik zərrəciklər üçün müxtəlif potensiallı sahələrdə hərəkət edən dalğa tənliklərinin optimal həllərinin qurulmasında, uyğun məsələlərin analitik və ədədi həllərində; riyazi fizikanın, tətbiqi fizikanın, həmçinin kvant nöqtələrinin məxsusi qiymət və məxsusi funksiyalarının hesablanmasında, həmçinin onların yüksək texnologiyalarda tətbiqlərinin optimal idarə edilməsində, nano və nüvə texnologiyanın aktual məsələlərin həllərində istifadə edilə bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin əsas müddəaları və nəticələri aşağıdakı konfranslarda müzakirə olunmuş və onların materiallarında dərc edilmişdir: 1) Gənc tədqiqatçilarin "Fizika və Astronomiya problemləri" Beynəlxalq Elmi Konfrans (Bakı, BDU, 28 may, 2018); 2) The XXVI International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (Czech Republic, Prague, 8-12 July 2019); 3) Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasinin 97-ci ildönümünə həsr olunmuş gənc tədqiqatçilarin IV Beynəlxalq Elmi Konfrans (Bakı, BMU, 2020); 4) "Tətbiqi fizika və energetikanin aktual məsələləri" II Beynəlxalq Elmi Konfrans (Bakı, SDU, 12-13 noyabr, 2020).

Dissertasiya işinin materialları 10 məqalə (onlardan 6-ı "Web of Sciense" bazasında indekslənən jurnallarda) və 4 konfrans materialı şəklində yerli və xarici jurnallarda dərc edilmişdir.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin Nəzəri fizika kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Nəşrlər. Dissertasiya işinin mövzusuna aid 10 elmi iş, o cümlədən 6 elmi məqalə, 4 konfrans materialı dərc edilmişdir.

Dissertasiyanın strukturu və həcmi. Dissertasiya işi Giriş, 3 fəsil, Nəticə və İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısından ibarət olub, A4 formatında yazılmış 183 səhifəni əhatə edir. İşin əsas hissəsi (şəkillər, cədvəllər və ədəbiyyat siyahısı istisna edilməklə) 213 058 (o cümlədən, Giriş – 19 638, I fəsil – 79 460, II fəsil – 80 302, III fəsil – 30 429, Nəticələr – 3 229) işarədir. İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısına dissertasiyada istinad olunan 183 adda mənbə daxildir. Dissertasiyada nəticələri əks etdirən 22 şəkil verilmişdir.

İŞİN QISA MƏZMUNU

Girişdə dissertasiya işinin mövzusunun aktuallığı əsaslandırılmış, işin məqsədi və müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar verilmiş, tədqiqat obyektləri, tədqiqat metodları, dissertasiyanın materiallarının aprobasiyası və publikasiyası göstərilmiş, elmi yeniliyi və praktik əhəmiyyəti şərh olunmuşdur.

Birinci fəsildə NU metodu haqqında nəzəri məlumat verilmişdir. KFQ tənliyi Hülten və Yukava sinif potensiallarının xətti kombinasiyası, həmçinin Manning-Rosen üstəgəl Yukava sinif potensiallarının xətti kombinasiyası üçün adi kvant mexanikasında hiperhəndəsi tənliyə gətirilməklə NU metodu ilə, SUSİ KM-da isə uyğun məsələnin həlli qeyri-xətti Rikkati tənliyinin həllindən tapılır. Bu zaman sistemin Hamilton operatorunun məxsusi qiymətini tapmaq üçün Qendenşteyn-Krivenin forma invariantlığı metodundan istifadə etməklə həll edilmişdir. Belə ki, kombinə edilmiş mürəkkəb potensiallı sahələr üçün orbital momentin sıfırdan fərqli ixtiyari qiymətlərində radial KFQ tənliyi bağlı halların enerji spektrinin analitik ifadəsinin tapılması müəyyən yaxınlaşmalardan istifadə edilərək öyrənilmişdir.

Bu halda KFQ tənliyini analitik həll etmək üçün mərkəzdənqaçma potensialına $\delta r << 1$ şərti ödəndikdə unikal bir yaxınlaşma tətbiq edilir. Hər iki kvant mexanikasında tam üst-üstə düşür. Bu isə həm alınan nəticənin tam doğruluğunun, həm də hər iki nəzəriyyənin sonda ekvivalent olmasının bilavasitə təsdiqidir.

Hülten potensialı

$$V_H(r) = -\frac{Ze^2 \delta e^{-\delta r}}{(1-e^{-\delta r})}, \tag{1}$$

burada Z – kimyəvi elemenlərin dövri sistemində atomun nömrəsi, δ – ekranlaşma parametridir.

1935-ci ildə nuklon-nuklon güclü qarşılıqlı əlaqəsini təsvir etmək üçün qəbul edilən potensial

$$V_Y\left(r\right) = -\frac{V_0 e^{-\delta r}}{r}, \tag{2}$$

Yukava potensialıdır. Burada V_0 – qarşılıqlı təsir gücünü təyin edir.

KFQ tənliyi sferik simmetrik koordinat sistemində $S(r)$ skalyar və $V(r)$ vektor potensialları üçün aşağıdakı formadadır:

$$[-\nabla^2 + (M + S(r)^2]\psi(r,\theta,\varphi) = [E - V(r)]^2 \psi(r,\theta,\varphi). \tag{3}$$

burada θ – polyar bucaq, M – skalyar zərrəciyin kütləsi, E – relyativistik zərrəciyin enerjisi, φ – azimutal bucaq, Δ – Laplas operatorudur.

(3) tənliyinin həlli sferik koordinat sistemində stasionar halda

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{\chi(r)}{r}\Theta(\theta)e^{im\varphi};\; m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{4}$$

şəklində axtarıla bilər.

(4) ifadəsini (3) tənliyində nəzərə alsaq, radial KFQ tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$\chi''(r) + \left[(E^2 - M^2) - 2(MS(r) + EV(r)) + \right.$$

$$\left. + (V^2(r) - S^2(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi(r) = 0. \tag{5}$$

Qeyd etdik ki, $l \neq 0$ ixtiyari qiymətlərində KFQ tənliyini dəqiq həll etmək üçün mərkəzdənqaçma və Yukava potensiallarında $\frac{1}{r^2}$ və $\frac{1}{r}$ vuruqlarına aşağıdakı yaxınlaşmanı tətbiq edirik:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{4\delta^2 e^{-2\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2} \text{ və } \frac{1}{r} = \frac{2\delta e^{-\delta r}}{1-e^{-2\delta r}}. \qquad (6)$$

Bu yaxınlaşma Grinin və Aldriçin[1] təklif etdiyi yaxınlaşmadır. Bu yaxınlaşmanı yalnız $\delta r \ll 1$ şərti ödəndiyi zaman tətbiq etmək olar. Bu yaxınlaşmadan istifadə etməklə $l \neq 0$ halı üçün radial KFQ tənliyini analitik həll etmək olar.

Yeni $s = e^{-2\delta r}$ dəyişənini daxil edib və müəyyən çevrilmələrdən sonra alarıq:

$$\chi''(s) + \frac{1-s}{s(1-s)}\chi'(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2}[-\varepsilon^2 + (2\varepsilon^2 + (\alpha^2 + \beta^2 -$$
$$-l(l+1))s - (\varepsilon^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \rho^2 - \gamma^2)s^2]\chi(s) = 0 \qquad (7)$$

burada

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{M^2 - E^2}}{2\delta}, \; \alpha = \frac{\sqrt{2EV_0 + 2MS_0}}{2\delta}, \; \beta = \frac{\sqrt{2EV_0' + 2MS_0'}}{\delta},$$
$$\gamma = \frac{\sqrt{S_0^2 - V_0^2}}{2\delta}, \quad \rho = \frac{\sqrt{S_0'^2 - V_0'^2}}{2\delta}. \qquad (8)$$

Beləliklə, KFQ tənliyini (7) şəklində hiperhəndəsi tip tənliyə gətirməklə NU metodundan asanlıqla istifadə edərək $V(r) \neq S(r)$ olduğu halda enerji spektrinin ədədi qiymətini hesablamaq üçün aşağıdakı tənliyi alarıq[2]:

$$M^2 - E^2 =$$

---

[1] Greene, R.L., Aldrich, C. Variational wave functions for a screened Coulomb potential // Physical Review A, – 1976. Dec; 14(6), – p. 2363-2366.

[2] Ahmadov, A.I. Approximate bound state solutions of the Klein-Gordon equation with the linear combination of Hulthen and Yukawa potentials / A.I. Ahmadov, S.M.Aslanova, M.S. Orujova [et al.] // Physics Letters A, – 2019. July; vol. 383, no. 24, – p. 3010-3017.

$$\left[=\frac{\alpha^2+\beta^2-l(l+1)-n(n+1)-\frac{1}{2}-(2n+1)\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\gamma^2+\rho^2}}{n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\gamma^2+\rho^2}}\cdot\delta\right]^2 \quad (9)$$

Alınan tənlikdən görünür ki, enerji spektri orbital və radial kvant ədədlərindən ciddi asılıdır.

Sistemin dalğa funksiyasını tapmaq üçün isə Nikifarov-Uvarov metodunu tətbiq edərək $\chi(s)$ radial funksiyasını aşağıdakı şəkildə faktorizasiya edirik:

$$\chi(s)=\phi(s)y(s), \quad (10)$$

Bu metoda əsasən $\phi(s)$ funksiyası aşağıdakı şərti ödəyir:

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}=\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}.$$

Məlum $\pi(s)$ və $\sigma(s)$ funksiyalarına görə $\phi(s)$ üçün aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$\phi(s)=s^{\varepsilon}(1-s)^{K}, \quad (11)$$

burada,

$$K=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\gamma^2+\rho^2}\,. \quad (12)$$

Pearson $(\sigma\rho)'=\tau\rho.$ diferensial tənliyini həll edərək $\rho(s)$ funksiyasını tapırıq:

$$\rho(s)=s^{2\varepsilon}(1-s)^{2K}. \quad (13)$$

$y_{n_r}(s)$ funksiyası hiperhəndəsi funksiya olub, radial dalğa funksiyasının tərkib hissəsidir və Rodriques düsturu ilə təyin olunur:

$$y_{n_r}(s)=\frac{C_{n_r}}{\rho(s)}\frac{d^{n_r}}{ds^{n_r}}[\sigma^{n_r}(s)\rho(s)]. \quad (14)$$

Burada C_n – normallaşma sabiti, $\rho(s)$ – çəki funksiyasıdır.

Yakobi çoxhədlisinin məlum ifadələrindən istifadə edərək $y_n(s)$ funksiyasını aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$y_{n_r}(s) = C_{n_r} P_{n_r}^{(2\varepsilon, 2K-1)}(s). \qquad (15)$$

Beləliklə, $\chi(s)$ radial funksiyası üçün aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$\chi(s) = C_{n_r} s^{\varepsilon}(1-s)^K P_{n_r}^{(2\varepsilon, 2K-1)}(s), \qquad (16)$$

$\chi(s)$ funksiyasını hiperhəndəsi funksiya ilə ifadəsi isə aşağıdakı kimidir:

$$\chi_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\varepsilon}(1-s)^K \frac{\Gamma(n_r + 2\varepsilon + 1)}{n_r!\Gamma(2\varepsilon+1)}\, {}_2F_1(-n_r, 2\varepsilon + 2K + n_r, 1 + 2\varepsilon, s), \qquad (17)$$

C_n normallaşma sabiti isə normallanma şərtindən tapılır və aşağıdakı şəkildədir:

$$C_{n_r} = \sqrt{\frac{2\delta \cdot n_r!(n_r + K + \varepsilon)\Gamma(2\varepsilon+1)\Gamma(n_r + 2\varepsilon + K - 1}{(n_r + K)\Gamma(n_r + 2K)\Gamma(2\varepsilon)}}. \qquad (18)$$

Aşağıdakı bəzi xüsusi hallara baxılmışdır:

1. Enerji spektrinin ədədi qiymətini hesablamaq üçün aldığımız (9) tənliyində $V_0 -$ vektor potensialın $S_0 -$ skalyar potensiala bərabər $V_0 = S_0$ olduğunu nəzərə alsaq, onda $\gamma = 0$ və $\rho = 0$ olur. Bu halda enerji spektrinin ədədi qiyməti aşağıdakı tənliklə təyin olunur:

$$M^2 - E^2 = \left[\frac{\alpha^2 + \beta^2 - (l + n_r + 1)^2}{n_r + l + 1} \cdot \delta\right]^2, \qquad (19)$$

burada

$$\alpha \Rightarrow \alpha' = \frac{\sqrt{2V_0(E+M)}}{2\delta} \text{ və } \beta \Rightarrow \beta' = \frac{\sqrt{2V_0'(E+M)}}{2\delta}.$$

Bu halda sistemin məxsusi funksiyası isə aşağıdakı ifadə ilə təyin olunur:

$$\chi_n(s) = C_n s^{\varepsilon}(1-s)^{l+1} P_n^{(2\varepsilon, 2l+1)}(1-2s). \qquad (20)$$

2. Əgər $V_0' = 0, S_0' = 0$ olarsa, onda Hülten potensialı üçün enerji spektrini alırıq. Bu halda $\beta = 0$ və $\gamma = V_0 / 2\delta$, $\rho = S_0 / 2\delta$ olur. Onda alarıq:

$$M^2 - E^2 =$$

$$\left[\frac{\alpha^2 - l(l+1) - n_r(n_r+1) - \frac{1}{2} - (2n_r+1)\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2 + \rho^2}}{n_r + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2 + \rho^2}} \cdot \delta\right]^2 \quad (21)$$

Sistemin məxsusi funksiyası (16) şəklindədir.

3. $V_0 = 0,\ S_0 = 0$ və $V_0' \neq S_0'$ olarsa, onda Yukava potensialı üçün enerji spektrini alırıq. Bu halda $\alpha = 0$ və $\gamma = V_0'/2\delta$, $\rho = V_0'/2\delta$ olur. Onda alarıq:

$$M^2 - E^2 =$$

$$= \left[\frac{\beta^2 - l(l+1) - n_r(n_r+1) - \frac{1}{2} - (2n_r+1)\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2 + \rho^2}}{n_r + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2 + \rho^2}} \cdot \delta\right]^2 \quad (22)$$

Bu hal üçün sistemin məxsusi funksiyası (16) şəklindədir.

4. $V_0 = -S_0$ və $V_0' = -S_0'$ olarsa, $\gamma^2 = \rho^2$, həmçinin

$$\alpha' = \frac{\sqrt{2V_0(E-M)}}{\delta} \text{ və } \beta = \frac{\sqrt{2V_0'(E-M)}}{\delta}, \quad (23)$$

onda enerji spektrinin ədədi qiyməti üçün aşağıdakı tənliyi alarıq:

$$M^2 - E^2 = \left[\frac{\alpha^2 + \beta^2 - (n_r + l + 1)^2}{n_r + l + 1} \cdot \delta\right]^2 \quad (24)$$

Bu hal üçün isə sistemin məxsusi funksiyası aşağıdakı ifadə ilə təyin olunur:

$$\chi(s) = C_{n_r} s^{\varepsilon} (1-s)^{l+1} P_{n_r}^{(2\varepsilon, 2l-1)}(1-2s). \quad (25)$$

burada $K = l + 1$ və $\varepsilon = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + n^2}{2n}$, $n = n_r + l + 1$.

Aşağıdakı cədvəldə müxtəlif hallar üçün α parametrinin müxtəlif qiymətlərində enerji spektrinin riyazi olaraq hesablanmış qiymətləri ilə ("Bu iş" sütunu) proqram təminatı vasitəsilə hesablanmış qiymətləri ("NINT" sütunu) müqayisəli şəkildə verilmişdir.

Cədvəl 1. Potensial parametrlərinin $V_0 = 2, V_0' = 3, \quad S_0 = 1.5, \quad (\hbar = M = c = 1)$ qiymətlərində atomun 2*p*, 3*p*, 3*d*, 4*p*, 4*d*, 4*f* səviyyələri üçün enerjinin ekranlaşma parametrindən asılılıqlarının ədədi qiymətləri.

Hallar	α	**Bu iş**	**NINT**
2p	0,05	-0.979096	-0.962482
	0,10	-0.994834	-0.983577
	0,15	-0.999884	-0.995580
	0,20	-0.997970	-1.000000
3p	0,05	-0.998327	-0.987826
	0,10	-0.995080	-0.999982
	0,15	-0.974451	-1.000000
3d	0,05	-0.982347	-0.978846
	0,10	-0.998260	-0.993520
	0,15	-0.998373	-1.000000
4p	0,10	-0.970486	-0.983624
4d	0,10	-0.992014	-0.992665
4f	0,10	-0.999991	-1.000000

Şəkil 1-də enerjinin l orbital kvant ədədinin və δ ekranlaşma parametrinin fiksə olunmuş qiymətlərində n_r radial kvant ədədindən asılılığı göstərilmişdir. Buradan aydın görünür ki, həm radial həm də orbital kvant ədədi artdıqca sistemin bağlı halları zəifləyir. Burada potensial parametrləri belə seçilmişdir: $M = 1$, $V_0 = 2$, $V_0^{'} = 3$, $S_0 = 1.5$, $S_0^{'} = 4$.

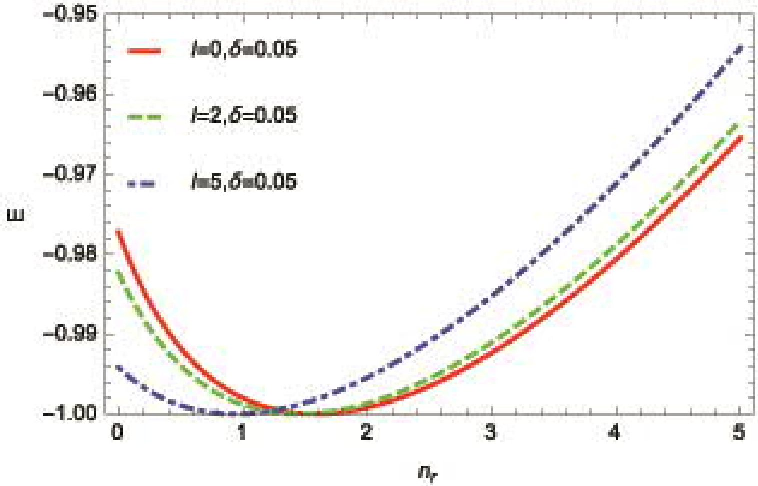
SUSİ KM-da Hülten üstəgəl Yukava potensialı üçün KFQ tənliyini həll etmək aşağıdakı Rikkati tənliyini həll etməyə ekvivalentdir:

$$W^2(r) \mp W'(r) = V_{eff}(r) - E_0 . \qquad (26)$$

Radial KFQ tənliyindən effektiv Hülten üstəgəl Yukava potensialını aşağıdakı şəkildə tapırıq:

$$V_{eff} = -\frac{4(\alpha^2 + \beta^2)e^{-2\delta r}}{1 - e^{-2\delta r}} - \frac{4(\gamma^2 - \rho^2)e^{-4\delta r}}{(1 - e^{-2\delta r})^2} + \frac{4\delta^2 l(l+1)e^{-2\delta r}}{(1 - e^{-2\delta r})^2} . (27)$$

$W(r)$ superpotensialını aşağıda göstərilən ifadə şəklində seçmək olur:



Şəkil 1. Enerjinin l orbital kvant ədədinin və δ ekranlaşma parametrinin fiksə olunmuş qiymətlərində n_r radial kvant ədədindən asılılığı.

$$W(r) = -\left(F + \frac{Ge^{-2\delta r}}{(1 - e^{-2\delta r})}\right). \tag{28}$$

Bu ifadədəki F və G parametrləri məlum olmayan sabitlərdir.

$$W^2(r) \mp W'(r) = V_{eff}(r) - (E_0^2 - M^2). \tag{29}$$

(27) və (28) ifadələrini (29)-da nəzərə alaq, G parametri aşağıdakı kimi

$$G_{1,2} = \delta \pm 2\delta\sqrt{-\gamma^2 + \rho^2 + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}. \tag{30}$$

olar.

Beləliklə, enerji spektrinin ədədi qiymətini hesablamaq üçün aşağıdakı enerji səviyyələri tənliyini almış olarıq:

$$M^2 - E^2 =$$

$$= \left[\frac{\delta + 2\delta\sqrt{(l + 1/2)^2 - \gamma^2 + \rho^2}}{2} - \frac{2\delta(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \rho^2)}{1 + 2\sqrt{(l + 1/2)^2 - \gamma^2 + \rho^2}}\right]^2. \tag{31}$$

Tapılmış $W(r)$ superpotensialı $r \to \infty$ olduqda $W(r) \to -F$ olur. Superpotensialın ifadəsindən supercüt potensialları üçün aşağıdakı ifadələri alırıq:

$$V_{\mp}(r) = W^2(r) \mp W'(r) =$$

$$= F^2 + \frac{(2FG \mp 2\delta G)e^{-2\delta r}}{1-e^{-2\delta r}} + \frac{(G^2 \mp 2\delta G)e^{-4\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2}, \qquad (32)$$

Superpotensialın ifadəsindən istifadə edərək əsas halın $\chi_0(r)$ məxsusi funksiyasını aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\chi_0(r) = Ne^{Fr}(1-e^{-2\delta r})^{\frac{G}{2\delta}}. \qquad (33)$$

Burada $r \to 0$; $\chi_0(r) \to 0$, $G > 0$ və $r \to \infty$; $\chi_0(r) \to 0$, $F < 0$.

Eyni formalı $V_-(r)$ və $V_+(r)$ potensialları forma invariant potensiallar adlanır. Bu potensiallar bir-birindən toplanan kəmiyyətlərlə fərqlənir. Bu ortaq $V_-(r)$ və $V_+(r)$ potensialların forma invariantlığı aşağıdakı şəkildədir:

$$R(G_i) = V_+[G+(i-1)\delta, r] - V_-[G+i\delta, r] =$$

$$= \left(\frac{G+(i-1)2\delta}{2} - \frac{2\delta^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+\rho^2)}{G+i2\delta)} \right)^2 -$$

$$- \left(\frac{G+i2\delta}{2} - \frac{2\delta^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+\rho^2)}{G+i2\delta)} \right)^2.$$

Burada forma invariantlığını göstərən $R(G_1)$ faktoru r-potensial məsafəsindən asılı deyil. Beləliklə, enerji spektrinin ədədi qiymətini hesablamaq üçün aşağıdakı adi kvant mexanikasında alınan ifadə ilə eyni olan enerji səviyyələri tənliyini[3] alırıq:

$$M^2 - E_{n,l}^2 =$$

---

[3]Ahmadov, A.I. Analytical Bound State Solutions of the Klein-Fock-Gordon Equation for the Sum of Hulthén and Yukawa Potential within SUSY Quantum Mechanics / A.I. Ahmadov, S.M. Aslanova, M.Sh. Orujova [et al.] // Hindawi, Advances in High Energy Physics, – 2021. Feb; 16. Article ID 8830063, – 11 pages

$$
=\left[\frac{\alpha^2+\beta^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\left(n_r+\frac{1}{2}\right)^2-2\left(n_r+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\gamma^2+\rho^2}}{n_r+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2-\gamma^2+\rho^2}}\cdot\delta\right]^2 . \quad (34)
$$

(34) ifadəsi bilavasitə (9) ifadəsi ilə tam üst-üstə düşür.

SUSİ kvant mexaniki metodlardan istifadə edərək sistemin enerji səviyyələrini $E_{n_r l}$ və dalğa funksiyasını $\chi_{n_r l}$ əsas halın enerjisinin E_0 və $\chi_0(r)$ dalğa funksiyasının məlum ifadələrindən istifadə edərək aşağıdakı şəkildə almaq olar.

$$
\chi_{n_r}(r,a_0)=A^+(r,a_0)\chi_{n_r-1}(r,a_1), \quad (35)
$$

$\chi_{n_r l}$ funksiyasını əsas halın dalğa funksiyasından bilavasitə almaq olar. Belə ki, $W(r)$ superpotensialı iki parametrdən asılıdır, $a_0=(F,G)$ və $a_1=(F_1,G_1)$. Yeni dəyişən daxil edərək $s=e^{-2\delta r}$ (35) ifadəsini belə yaza bilərik:

$$
\chi_{n_r}(s,a_0)=\chi_0(s,a_0)R_{n_r-1}(s,a_0). \quad (36)
$$

Burada $R_{n_r}(s,a_0)$ Yakobi çoxhədlisi ilə mütənasibdir:

$$
\chi_{n,l}(s)=C_{n_r}^{-1}s^{\varepsilon}(1-s)^K P_{n_r}^{(2\varepsilon,2K-1)}(1-2s). \quad (37)
$$

Onda sistemin məxsusi funksiyasını aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$
\chi_{n_r,l}(s)=
$$

$$
=C_{n_r,l}s^{\varepsilon}(1-s)^K\frac{\Gamma(n_r+2\varepsilon+1)}{n_r!\Gamma(2\varepsilon+1)}{}_2F_1(-n_r,2\varepsilon+2K+n_r,1+2\varepsilon,s), \quad (38)
$$

Manninq-Rosen potensialı əsasən iki atomlu molekulun rəqslərinin və vibrasiyalarının riyazi təsviri üçün modellərin qurulmasında geniş istifadə edilir. Manning-Rosen potensialı aşağıdakı şəkildədir:

$$
V_{MR}(r)=\frac{\hbar^2}{2Mb^2}\left[\frac{\eta(\eta-1)e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2}-\frac{Ae^{-r/b}}{1-e^{-r/b}}\right], \quad (39)
$$

burada A və η parametrləri ölçüsü olmayan sabitlər, b isə ekranlaşma parametridir. Yukava sinif potensialı qeyri-relyativistik fizikada nuklonlar arasındakı güclü qarşılıqlı təsiri təsvir etmək üçün qəbul edilən potensialdır və aşağıdakı şəkildədir:

$$V(r) = -\frac{V_0 e^{-\delta r}}{r} - \frac{V_0^{'} e^{-2\delta r}}{r^2}. \qquad (40)$$

Burada V_0 və $V_0^{'}$ spektroskopik parametrlərdir.

Adi kvant mexanikasında NU metodunu tətbiq edərək enerji spektrinin ədədi qiymətini hesablamaq üçün aşağıdakı tənliyi alarıq[4]:

$$M^2 - E^2 =$$

$$= \left[\frac{\beta^2 - l(l+1) - n(n+1) - \frac{1}{2} - (2n+1)\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2}}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2}} \cdot \delta\right]^2 \qquad (41)$$

burada

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{M^2 - E^2}}{2\delta},\ \alpha = \frac{\sqrt{2(M+E)V_{014}}}{2\delta},\ \beta = \frac{\sqrt{2(M+E)V_{023}}}{2\delta} > 0. \quad (42)$$

$\chi(s)$ radial funksiyası üçün:

$$\chi(s) = C_{n_r} s^{\varepsilon} (1-s)^K P^{(2\varepsilon, 2K-1)}(1-2s). \qquad (43)$$

burada

$$K = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2}. \qquad (44)$$

$\chi(s)$ funksiyasını hiperhəndəsi funksiya ilə aşağıdakı şəkildə ifadə etmək olar:

$$\chi_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\varepsilon} (1-s)^K \frac{\Gamma(n+2\varepsilon+1)}{n!\Gamma(2\varepsilon+1)} {}_2F_1(-n, 2\varepsilon+2K+n, 1+2\varepsilon; s). \quad (45)$$

C_n normallaşma sabiti normallanma şərtindən tapılır və aşağıdakı kimidir:

---

[4]Ahmadov, A.I., Demirci, M., Aslanova, S.M. Bound state solutions of the Klein-Fock-Gordon equation with the sum of Manning-Rosen potential and Yukawa potential within SUSYQM // Journal of Physics: Conference Series, – 2019. Dec; vol.1416, – p.012001-1-13.

$$C_{n_r} = \sqrt{\frac{2\delta \cdot n!(n+K+\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon+1)\Gamma(n+2\varepsilon+2K)}{(n_r+K)\Gamma(n_r+2K)\Gamma(2\varepsilon)\Gamma(n+2\varepsilon+1)}}. \qquad (46)$$

Bəzi xüsusi hallar araşdırılmışdır.

1. Əgər $V_0 = V_0^{'} = 0$ olarsa, onda bilavasitə Manning-Rosen potensialı üçün enerji spektrini alarıq:

$$M^2 - E^2 =$$

$$= \left[\frac{\beta^2 - l(l+1) - n(n+1) - \frac{1}{2} - (2n+1)\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2}}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2}} \cdot \delta \right]^2 \qquad (47)$$

Burada

$$\beta = \frac{\sqrt{2(M+E)V_{02}}}{2\delta} = \sqrt{\frac{A(M+E)}{M}}.$$

Sistemin məxsusi funksiyası (45) şəklindədir.

2. Əgər $V_{01} = 0$ və $V_{02} = 0$ olarsa, bu halda $\eta = 1$ və $A = 0$ olur və bilavasitə Yukava sinif potensialı üçün enerji spektrini alırıq:

$$M^2 - E^2 = \delta^2 =$$

$$\left[\frac{\beta^2 - l(l+1) - n(n+1) - \frac{1}{2} - (2n+1)\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}} \cdot \delta \right]^2. \qquad (48)$$

Burada

$$\beta = \frac{\sqrt{4\delta V_0 (M+E)}}{2\delta}, \; \alpha = \sqrt{-2V_0^{'}(E+M)}\,. \qquad (49)$$

Bu halda sistemin məxsusi funksiyası (45) şəklindədir.

3. Əgər $\eta = 1$ və $V_0 = V_0^{'} = 0$ olarsa, onda bilavasitə Hülten potensialı üçün enerji spektrini alarıq:

$$M^2 - E^2 = \left[\frac{\beta^2 - (n+l+1)}{n+l+1} \cdot \delta \right]^2 . \qquad (50)$$

Bu halda sistemin məxsusi funksiyası (45) şəklindədir.

4. Əgər $V_{01} = 0$, $V_{02} = 0$ və $V_{04} = 0$ olarsa, bu halda $\eta = 1$ və $A = V_0^{'} = 0$ olur və bilavasitə mərkəzi Yukava potensialı üçün enerji spektrini alırıq:

$$M^2 - E^2 = \left[\frac{\beta^2 - (n+l+1)^2}{n+l+1} \cdot \delta \right]^2 . \qquad (51)$$

Burada β – (42) ifadəsilə təyin olunur. Bu halda sistemin məxsusi funksiyası (45) şəklindədir.

5. Əgər $V_{01} = 0$, $V_{02} = 0$ və $V_{04} = 0$ olarsa, bu halda $\eta = 1$ və $A = V_0 = 0$ olur və bilavasitə tərs kvadratik Yukava potensialı üçün enerji spektrini alırıq:

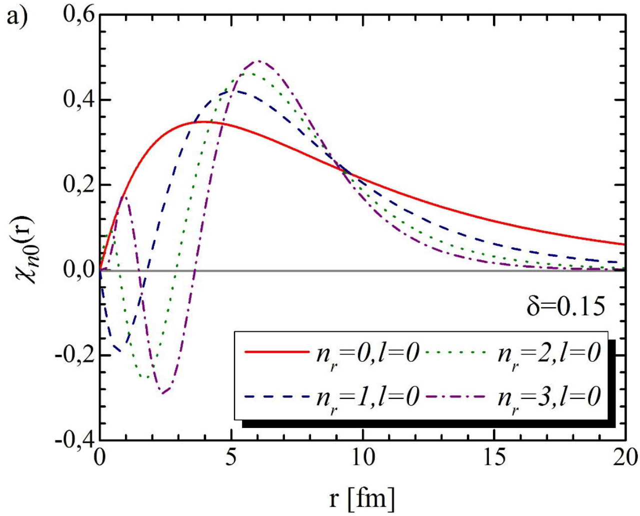
$$M^2 - E^2 = \left[\frac{\beta^2 - (n+l+1)^2}{n+l+1} \cdot \delta \right]^2 . \qquad (52)$$

Burada β – (42) ifadəsilə təyin olunur. Bu halda sistemin məxsusi funksiyası (45) şəklindədir.

6. Əgər $\delta \to 0$ olarsa onda potensial Kulon potensialına çevrilir, yəni $V = -V_0 / r$, bu halda enerji spektri üçün alırıq:

$$M^2 - E^2 = \left[\frac{V_0(E+M)}{n+l+1} \right]^2 \Rightarrow E = M \frac{(n+l+1) - V_0^2}{(n+l+1) + V_0^2} \qquad (53)$$

Şəkil 2-də normallanmış dalğa funksiyasının ekranlaşma parametrinin $\delta = 0.15$ qiymətində orbital və radial kvant ədədlərinin müxtəlif qiymətlərində məsafədən asılılığı göstərilmişdir. Şəkildən görünür ki, dalğa funksiyasının özünün minimum və maksimumları var və asılılıq mürəkkəb xarakter daşıyır.



Şəkil 2. Normallanmış dalğa funksiyasının ekranlaşma parametrinin $\delta = 0.15$ qiymətində orbital və radial kvant ədədlərinin müxtəlif qiymətlərində r-dən asılılığı

SUSİ kvant mexanikasında Manning-Rosen üstəgəl Yukava potensialı üçün aşağıdakı Rikkati tənliyini həll etməklə

$$W^2(r) \mp W'(r) = V_{eff}(r) - (E^2 - M^2). \tag{54}$$

Sistemin əsas halının $\chi_0(r)$ dalğa funksiyası üçün KFQ tənliyini həll etmiş oluruq:

$$\chi_0(r) = Ne^{-Fr}(1 - e^{-2\delta r})^{\frac{G}{2\delta}}. \tag{55}$$

Sonda SUSİ kvant mexanikasında enerji spektrinin təyini üçün aşağıdakı enerji səviyyələri tənliyini[5] alarıq:

$$E_{n_r l}^2 = M^2 -$$

[5] Ahmadov, A.I., Demirci, M., Aslanova, S.M. Bound state solutions of the Klein-Fock-Gordon equation with the sum of Manning-Rosen potential and Yukawa potential within SUSY-QM // Journal of Physics: Conference Series, – 2019. Dec; vol.1416, – p.012001-1-13.

$$-\left(\frac{\beta^2 - l(l+1) - n_r(n_r+1) - \frac{1}{2} - (2n_r+1)\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2}}{\frac{1}{2} + n_r + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha^2}} \cdot \delta\right)^2 . \quad (56)$$

Bu ifadənin (41)-lə müqayisəsindən bilavasitə görünür ki, adi və SUSİ kvant mexanikasında alınan analitik ifadələr tamamilə üst-üstə düşürlər.

İkinci fəsildə spini tək yarım olan fermionları təsvir edən xətti diferensial relyativistik-invariant Dirak tənliyi Hülten və Yukava, Manning-Rosen və Yukava sinif potensiallarının xətti kombinasiyasında adi və SUSİ kvant mexanikasında analitik həll edilmişdir. Relyativistik kvant mexanikasında spini 1/2 olan zərrəcikləri təsvir edən bu tənlik, nüvə və hadron fizikasının müxtəlif proseslərində tətbiq edilir. Fiziki proseslərin araşdırılması zamanı ilk dəfə 1969-cu ildə Dirak Hamiltonianın dəqiq spin və psevdospin simmetriyasına malik olduğu hal Arima, Hecht, Adler və digərləri tərəfindən irəli sürülmüşdür. Bu simmetriyalar Dirak Hamiltonianının $SU(2)$ simmetriyasından $V(r)$ vektor və $S(r)$ skalyar potensialları arasındakı konkret münasibətlərdən alınır.

Atom vahidlər sistemində $(\hbar = c = 1)$, $V(r)$ vektor itələmə və $S(r)$ skalyar cazibə sahəsində hərəkət edən M kütləli zərrəcik üçün Dirak tənliyi $U(r)$ tenzor qarşılıqlı təsirini də nəzərə alaraq, aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta\big(M + S(r)\big) - i\beta\alpha\cdot\hat{r}U(r)]\psi(r,\theta,\varphi) =$$
$$= [E - V(r)]\psi(r,\theta,\varphi), \quad (57)$$

burada α, β 4×4 ölçülü Dirak matrisləri, E isə sistemin relyativistik enerjisidir.

Tenzor qarşılıqlı təsir üçün daxil etdiyimiz Kulon potensialı aşağıdakı şəkildədir:

$$U(r) = -\frac{Z_a Z_b}{4\pi\varepsilon_0 r}, \; r \geq R_k . \quad (58)$$

Burada Z_a və Z_b qarşılıqlı təsirdə olan zərrəciyin və nüvənin yüklərini göstərir, $R_k = 7.78Fm$ isə Kulon radiusudur.

Hülten və Yukava sinif potensiallarının xətti kobinasiyasından ibarət mürəkkəb sahədə relyativistik zərrəciyin Dirak tənliyi hamiltonianın hər iki simmetriya halında Kulon tipli potensialla tenzor qarşılıqlı təsiri də nəzərə almaqla, həm ümumi, həm də xüsusi hallarda, spin-orbital qarşılıqlı təsir operatorunun məxsusi qiymətinin ixtiyari qiymətləri üçün həll edilmiş, Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti və dalğa funksiyası üçün analitik düsturlar tapılmış və xüsusi hallar araşdırılmışdır.

$V(r) \neq S(r)$ olduğu ümumi halda enerji spektrinin təyini üçün aşağıdakı tənliyi alarıq[6]:

$$M^2 - E_{nk}^2 - C_S(M - E_{nk}) =$$

$$= \left[\frac{\alpha^2 - \eta_k(\eta_k + 1) - n(n+1) - (2n+1)\sqrt{\left(\eta_k + \frac{1}{2}\right)^2 + \gamma^2} - \frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\eta_k + \frac{1}{2}\right)^2 + \gamma^2}} \cdot \delta \right]^2 . \quad (59)$$

burada

$$\alpha^2 = \frac{(V_0 + V_0')(M + E_{nk} - C_S)}{4\delta^2}, \;\; \beta^2 = \frac{M^2 - E_{nk}^2 - C_S(M - F_{nk})}{4\delta^2},$$

$$\gamma^2 = -\frac{B'(M + E_{nk} - C_S)}{4\delta^2},$$

$$\eta = k + H. \qquad (60)$$

Burada $n = 0,1,2,\ldots$, $M > E_{nk}$ və $M + E_{nk} > C_S$.

Relyativistik zərrəciyin $F_{nk}(s)$ radial dalğa funksiyası üçün isə aşağıdakı ifadəni alarıq:

---

[6] Aslanova, S.M., Şərifova, N.A. Hülten və Yukava potensiallarının xətti cəmi üçün Dirak tənliyinin dəqiq spin simmetriyası halında analitik həlli // Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasinin 97-ci ildönümünə həsr olunmuş Gənc tədqiqatçıların IV Beynəlxalq elmi konfransı, – Bakı: Bakı Mühəndislik Universiteti, – 29 – 30 aprel, – 2020, – s.72-75.

$$F_{nk}(s) = C_{nk} s^{\beta} (1-s)^{K} P^{(2\beta, 2K-1)}(1-2s). \qquad (61)$$

$F_{nk}(s)$ radial dalğa funksiyasını hiperhəndəsi funksiya ilə ifadə etsək, alarıq:

$$F_{nk}(s) = C_{nk} s^{\beta} (1-s)^{K} \frac{\Gamma(n+2\beta+1)}{n!\Gamma(2\beta+1)} {}_2F_1(-n, 2\beta+2K+n, 1+2\beta, s). \qquad (62)$$

C_n normallaşma sabiti normallanma şərtindən tapılır və aşağıdakı şəkildədir:

$$C_n = \sqrt{\frac{2\delta \cdot n!(n+K+\beta)\Gamma(2\beta+1)\Gamma(n+2\beta+2K)}{(n+K)\Gamma(2\beta)\Gamma(n+2\beta+1)\Gamma(n+2K)}}. \qquad (63)$$

Psevdospin simmetriyası halında isə enerji spektrinin təyini üçün aşağıdakı tənliyi alarıq[7]:

$$M^2 - E_{nk}^2 + C_{PS}(M + E_{nk}) =$$

$$= \left[\frac{\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\eta}_k(\tilde{\eta}_k - 1) - n(n+1) - \frac{1}{2} - (2n+1)\sqrt{\frac{1}{4} + \tilde{\gamma}^2 + \tilde{\eta}_k(\tilde{\eta}_k - 1)}}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \tilde{\gamma}^2 + \tilde{\eta}_k(\tilde{\eta}_k - 1)}} \cdot \delta \right]^2, \qquad (64)$$

burada

$$\tilde{\alpha}^2 = -\frac{(V_0 + V_0')(M - E_{nk} + C_{PS})}{4\delta^2},$$

$$\tilde{\beta}^2 = \frac{M^2 - E_{nk}^2 + C_{PS}(M + F_{nk})}{4\delta^2},$$

$$\tilde{\gamma}^2 = \frac{B'(M - E_{nk} + C_{PS})}{4\delta^2},$$

$$\tilde{\eta}_k = k + H. \qquad (65)$$

---

[7]Aslanova, S.M., Şərifova, N.A. Dirak tənliyinin Hülten və Yukava potensiallarinin xətti cəmi üçün psevdospin simmetriyasi halinda analitik həlli // Tətbiqi fizika və energetikanin aktual məsələləri, II beynəlxalq elmi konfrans, – Sumqayıt: Sumqayıt Dövlət Universiteti, – 12 – 13 noyabr, – 2020, – №07, – s.167-172.

burada $n = 0, 1, 2, ...,\ M > -E_{nk}$ və $M + E_{nk} < M + C_{PS}$.

Sistemin məxsusi funksiyası olan $G_{nk}(s)$ spinor funksiyasını aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$G_{nk}(s) = \tilde{C}_{nk} s^{\tilde{\beta}} (1-s)^{\tilde{K}} P^{(2\tilde{\beta}, 2\tilde{K}-1)}(1-2s). \tag{66}$$

Yakobi çoxhədlisi ilə hiperhəndəsi funksiya arasındakı əlaqədən istifadə edərək $G_{nk}(s)$ funksiyasını aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$G_{nk}(s) = \tilde{C}_{nk} s^{\tilde{\beta}} (1-s)^{\tilde{K}} \frac{\Gamma(n+2\tilde{\beta}+1)}{n!\Gamma(2\tilde{\beta}+1)} {}_2F_1(-n, 2\tilde{\beta}+2\tilde{K}+n, 1+2\tilde{\beta}; s). \tag{67}$$

$\tilde{C}_{nk}$ normallaşma sabiti normallanma şərtindən tapılır:

$$\tilde{C}_{nk} = \sqrt{\frac{2\delta \cdot n!(n+\tilde{K}+\tilde{\beta})\Gamma(2\tilde{\beta}+1)\Gamma(n+2\tilde{\beta}+2\tilde{K})}{(n+\tilde{K})\Gamma(2\tilde{\beta})\Gamma(n+2\tilde{\beta}+1)\Gamma(n+2\tilde{K})}}. \tag{68}$$

SUSİ kvant mexanikasında Dirak tənliyini həll etmək Rikkati tənliyini həll etməyə ekvivalentdir[8].

Bəzi xüsusi hallara baxaq.

1. *Əvvəlcə s-dalğa halına baxaq.* Bu hal birbaşa $l = 0$ və $\tilde{l} = 0$ kvant ədədinə uyğun olan haldır, dəqiq spin simmetriyasında $k = 1$, psevdospin simmetriyası halında isə $k = -1$ kvant ədədlərinə ekvivalent olan hala deyilir. Yəni bu halda spin-orbital qarşılıqlı təsir sabiti sıfıra bərabər olur. Dəqiq spin simmetriyasında enerji spektri aşağıdakı tənliyin həllindən tapılır:

$$M^2 - E_{n,-1}^2 - C_S(M - E_{n,-1}) =$$

$$= \delta^2 \left[\frac{\alpha^2 - \frac{1}{2} - H(H-1) - n(n+1) - (2n+1)\sqrt{\sqrt{\left(H-\frac{1}{2}\right)^2 + \gamma^2}}}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(H-\frac{1}{2}\right)^2 + \gamma^2}} \right]^2, \tag{69}$$

---

[8]Ahmadov, A.I. Analytical bound state solutions of the Dirac equation with the Hulthen plus a class of Yukawa potential including a Coulomb-like tensor interaction / A.I. Ahmadov, M.Demirci, S.M. Aslanova, [et al.] // The European Physical Journal Plus. Springer Berlin Heidelberg, – 2021. Feb; 13. 136(2):208, – 29 pages.

burada α^2, γ^2 (60) şəklindədir.

Psevdospin simmetriyasında enerji spektri aşağıdakı tənliyin həllindən tapılır:

$$M^2 - E_{n,1}^2 - C_{PS}(M + E_{n,1}) =$$

$$= \delta^2 \left[\frac{\tilde{\alpha}^2 - \frac{1}{2} - H(H-1) - n(n+1) - (2n+1)\sqrt{\left(H - \frac{1}{2}\right)^2 + \tilde{\gamma}^2}}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(H - \frac{1}{2}\right)^2 + \tilde{\gamma}^2}} \right]^2, \quad (70)$$

burada $\tilde{\alpha}^2$, $\tilde{\gamma}^2$ (65) şəklindədir.

Bu hallara uyğun məxsusi funksiyalar aşağıdakı şəkildədir:

$$F_{n,-1}(r) = N_n e^{-\delta r}(1 - e^{-2\delta r})^{(1+\zeta)/2} P_n^{(\vartheta/\delta,\zeta)}(1 - 2e^{-2\delta r}),$$

$$G_{n,1}(r) = \tilde{N}_n e^{-\tilde{\vartheta} r}(1 - e^{-2\delta r})^{(1+\tilde{\zeta})/2} P_n^{(\tilde{\vartheta}/\delta,\tilde{\zeta})}(1 - 2e^{-2\delta r}). \quad (71)$$

Burada

$$\vartheta = \sqrt{1 + 4\gamma^2 + 4H(H-1)},$$

$$\tilde{\vartheta} = \sqrt{1 + 4\tilde{\gamma}^2 + 4H(H+1)}. \quad (72)$$

2. *Dirak-Hülten problemi*: əgər potensialın ifadəsində $V_0^{'} = B = 0$ olarsa, onda baxılan potensial Hülten potensialına çevrilir. Dəqiq spin simmetriyası halında enerji spektri aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$M^2 - E_{n,k}^2 - C_S(M - E_{nk}) = 4\delta^2 \left[\frac{Ze^2(M + E_{nk} - C_S)}{4\delta(n + k + H + 1)} - \frac{(n + k + H + 1)}{2} \right]^2, \quad (73)$$

Psevdospin simmetriyası halında enerji spektri aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$M^2 - E_{n,k}^2 + C_{PS}(M + E_{nk}) =$$

$$= \delta^2 \left[\frac{-Ze^2(M - E_{nk} + C_{PS})}{2\delta(n + k + H)} - (n + k + H) \right]^2 \quad (74)$$

Bu hallara uyğun məxsusi funksiyalar aşağıdakı şəkildədir:

$$F_{n,k}(r) = N_n e^{-\xi r}(1-e^{-2\delta r})^{(1+\eta_k)} P_n^{(\xi/\delta, 2\eta_k+1)}(1-2e^{-2\delta r}),$$
$$G_{n,k}(r) = \tilde{N}_{nk} e^{-\tilde{\xi} r}(1-e^{-2\delta r})^{\eta_k} P_n^{(\tilde{\xi}/\delta, 2\eta_k-1)}(1-2e^{-2\delta r}). \quad (75)$$
Burada
$$\xi = \sqrt{M^2 - E_{nk}^2 - C_S(M - E_{nk})},$$
$$\tilde{\xi} = \sqrt{M^2 - E_{nk}^2 + C_{PS}(M + E_{nk})}. \quad (76)$$
3. *Dirak-Yukava problemi*: əgər potensialda $V_0 = B = 0$ olarsa, onda baxılan potensial Yukava protensialına çevrilir. Dəqiq spin simmetriyası halında enerji spektri aşağıdakı şəkildə təyin olunur:
$$M^2 - E_{n,k}^2 - C_S(M - E_{nk}) =$$
$$= 4\delta^2\left[\frac{A(M + E_{nk} - C_S)}{4\delta(n+k+H+1)} - \frac{(n+k+H+1)}{2}\right]^2. \quad (77)$$
Psevdospin simmetriyası halında enerji spektri aşağıdakı şəkildə təyin olunur:
$$M^2 - E_{n,k}^2 + C_{PS}(M + E_{nk}) =$$
$$= \delta^2\left[\frac{-A(M - E_{nk} + C_{PS})}{2\delta(n+k+H)} - (n+k+H)\right]^2. \quad (78)$$
Bu hallara uyğun məxsusi funksiyalar aşağıdakı şəkildədir:
$$F_{n,k}(r) = N_n e^{-\xi r}(1-e^{-2\delta r})^{(1+\eta_k)} P_n^{(\xi/\delta, 2\eta_k+1)}(1-2e^{-2\delta r}),$$
$$G_{n,k}(r) = \tilde{N}_{nk} e^{-\tilde{\xi} r}(1-e^{-2\delta r})^{\eta_k} P_n^{(\tilde{\xi}/\delta, 2\eta_k-1)}(1-2e^{-2\delta r}). \quad (79)$$
Burada
$$\xi = \sqrt{M^2 - E_{nk}^2 - C_S(M - E_{nk})},$$
$$\tilde{\xi} = \sqrt{M^2 - E_{nk}^2 + C_{PS}(M + E_{nk})}. \quad (80)$$
4. *Dirak-Kulon problemi*. Əgər Yukava potensialında $\delta \to 0$ limitini hesablasaq, onda Kulon potensialını alarıq, yəni $V(r) = -A/r$. Onda dəqiq spin simmetriyası halı üçün enerjinin məxsusi qiyməti üçün aşağıdakı tənlik alınır:

$$(E_{nk}-M)(E_{nk}+M-C_S)=-\frac{A^2(M+E_{nk}-C_S)^2}{4(n+k+H+1)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{nk}^S=\frac{A^2(C_S-M)+4M(n+k+H+1)^2}{A^2+4(n+k+H+1)^2}. \qquad (81)$$

Uyğun olaraq psevdospin simmetriyası halında enerji səviyyələri tənliyi aşağıdakı ifadə ilə təyin olunur:

$$(E_{nk}+M)(M-E_{nk}+C_{PS})=\frac{A^2(M-E_{nk}+C_{PS})^2}{4(n+k+H)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{nk}^{PS}=\frac{A^2(C_S-M)+4M(n+k+H+1)^2}{A^2+4(n+k+H+1)^2}. \qquad (82)$$

5. *Dirak-tərs kvadratik Yukava problemi*: əgər potensialın ifadəsində $V_0=V_0^{'}=0$ olarsa, onda tərs kvadratik Yukava potensialı üçün dəqiq spin simmetriyası halında Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti üçün aşağıdakı analitik ifadəni alarıq:

$$M^2-E_{nk}^2-C_S(M-E_{nk})=$$

$$=\left[\frac{\eta_k(\eta_k+1)+\frac{1}{2}+n(n+1)+(2n+1)\sqrt{\left(\eta_k+\frac{1}{2}\right)^2+\gamma^2}}{n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\eta_k+\frac{1}{2}\right)^2+\gamma^2}}\delta\right]^2. \qquad (83)$$

Uyğun olaraq psevdospin simmetriyası halında Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti üçün alarıq:

$$M^2-E_{nk}^2+C_{PS}(M+E_{nk})=$$

$$=\left[\frac{\eta_k(\eta_k-1)+\frac{1}{2}+n(n+1)+(2n+1)\sqrt{\left(\tilde{\eta}_k+\frac{1}{2}\right)^2+\tilde{\gamma}^2}}{n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\tilde{\eta}_k+\frac{1}{2}\right)^2+\tilde{\gamma}^2}}\delta\right]^2. \qquad (84)$$

6. *Dirak-Kratser-Fues problemi*. Tərs kvadratik Yukava potensialı $\delta \to 0$ limitində aşağıdakı şəkildə potensiala çevrilir:

$$V_{CY}(r) = \lim_{\delta \to 0}\left(-\frac{Ae^{-\delta r}}{r} - \frac{Be^{-2\delta r}}{r^2} \right) \approx \frac{e^{-\delta r}}{r} - \frac{B}{r^2}. \qquad (85)$$

Burada $A = 2r_e D_e$ və $B = -r_e^2 D_e$. Buradan bilavasitə görünür ki, (97) potensialı Kratser-Fues potensialıdır. (90) potensialı üçün dəqiq spin simmetriyası halında enerji spektri tənliyi aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$M^2 - E_{nk}^2 - C_S(M - E_{nk}) =$$

$$= \frac{A^2(M + E_{nk} - C_S)^2}{\left(2n + 1 + 2\sqrt{B(C_S - E_{nk} - M) + (\eta_k + \frac{1}{2})^2} \right)^2}, \qquad (86)$$

Psevdospin simmetriyası halında enerji spektri aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$M^2 - E_{nk}^2 + C_{PS}(M + E_{nk}) =$$

$$= \frac{A^2(M - E_{nk} + C_{PS})^2}{\left(2n + 1 + 2\sqrt{B(C_{PS} - E_{nk} - M) + (\eta_k - \frac{1}{2})^2} \right)^2}. \qquad (87)$$

7. Qeyri-relyativistik limit halının hesablanması: Əgər $C_S = H = 0$, $E_{nk} + M \to 2m$ və $E_{nk} - M \to E_{nl}$ çevrilmələri etsək, onda Hülten və Yukava sinif potensiallarının cəmi üçün qeyri-relyativistik enerji spektrini alarıq.

$$E_{nl} = -\frac{1}{2m} \times$$

$$\times \left[\frac{\delta\left(-\frac{m(A + Ze^2)}{\delta} + \frac{1}{2} + n(n+1) + l(l+1) + (2n+1)\sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - 2mB} \right)}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - 2mB}} \right]^2. \qquad (88)$$

Əgər burada $B = 0$ qəbul etsək onda alarıq:

$$E_{nl} = -\frac{1}{2m}\left[\frac{\delta(l+n+1)^2 - m(A+Ze^2)}{(n+l+1)}\right]^2 . \qquad (89)$$

Əgər bu ifadədə $A=0$ və $\delta \to 0$ şərtlərini nəzərə alsaq onda Kulon potensialı üçün qeyri-relyativistik enerji spektri aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$E_{nl} = -\frac{m(Ze^2)^2}{2(n+l+1)^2} . \qquad (90)$$

Cədvəl 2 dəqiq spin simmetriyası üçün enerji səviyyələrinin E_{nk} potensial parametrlərinin fiksə olunmuş qiymətlərində və həmçinin tenzor potensialının nəzərə alındığı və alınmadığı hallarda hesablanmışdır. Hesablamalarda dəqiq spin simmetriya faktoru üçün $C_S = 5$ fm^{-1} və uyğun olaraq $A = B = 1$ fm^{-1}, $V_0 = 2$ fm^{-1}, $\delta = 0.05$ fm^{-1} götürülmüşdür. Təqdim olunan cədvəldən görünür ki, tenzor potensialı nəzərə alınmadıqda enerji səviyyələrində cırlaşma yaranır. Amma tenzor potensialı daxil edildikdə enerji səviyyələrində cırlaşma aradan qalxmış olur.

Cədvəl 2. Enerji səviyyələrinin E_{nk} dəqiq spin simmetriyası üçün potensial parametrlərinin fiksə olunmuş qiymətlərində və həmçinin tenzor potensialının nəzərə alındığı və alınmadığı hallarda ədədi qiymətləri hesablanması

(birinci hissə)

l	$n, k<0$	$(l, j = l + 1/2)$	$E_{n,k<0}\ (H=0)$	$E_{n,k<0}\ (H=5)$
1	2	3	4	5
1	0,-2	$0p_{3/2}$	0.24181258	0.24725816
2	0,-3	$0d_{5/2}$	0.24408024	0.24408024
3	0,-4	$0f_{7/2}$	0.24725817	0.24181258
4	0,-5	$0g_{9/2}$	0.25134955	0.24045289
1	1,-2	$1p_{3/2}$	0.24407876	0.25134791
2	1,-3	$1d_{5/2}$	0.24725666	0.24725666
3	1,-4	$1\ f_{7/2}$	0.25134791	0.24407876
4	1,-5	$1g_{9/2}$	0.25635671	0.24181038
1	2,-2	$2p_{3/2}$	0.24725314	0.25635387

1	2	3	4	5
2	2,-3	$2d_{5/2}$	0.25134496	0.25134496
3	2,-4	$2\ f_{7/2}$	0.25635387	0.24725314
4	2,-5	$2g_{9/2}$	0.26228527	0.24407133
1	3,-2	$3p_{3/2}$	0.25133807	0.26228075
2	3,-3	$3d_{5/2}$	0.25634875	0.25634875
3	3,-4	$3\ f_{7/2}$	0.26228075	0.25133807
4	3,-5	$3g_{9/2}$	0.26914103	0.24723546

(ikinci hissə)

l	$n,k>0$	$\left(l,\ j=l-\frac{1}{2}\right)$	$E_{n,k>0}\ (H=0)$	$E_{n,k>0}\ (H=5)$
1	0,1	$0p_{1/2}$	0.24181258	0.26229015
2	0,2	$0d_{3/2}$	0.24408024	0.26915052
3	0,3	$0f_{5/2}$	0.24725817	0.27694672
4	0,4	$0g_{7/2}$	0.25134955	0.28568689
1	1,1	$1p_{1/2}$	0.24407876	0.26914833
2	1,2	$1d_{3/2}$	0.24725666	0.27694432
3	1,3	$1\ f_{5/2}$	0.25134791	0.28568428
4	1,4	$1g_{7/2}$	0.25635671	0.29537745
1	2,1	$2p_{1/2}$	0.24725314	0.27694119
2	2,2	$2d_{3/2}$	0.25134496	0.28568098
3	2,3	$2\ f_{5/2}$	0.25635387	0.29537396
4	2,4	$2g_{7/2}$	0.26228527	0.30603052
1	3,1	$3p_{1/2}$	0.25133807	0.28567666
2	3,2	$3d_{3/2}$	0.25634875	0.29536954
3	3,3	$3\ f_{5/2}$	0.26228075	0.30602597
4	3,4	$3g_{7/2}$	0.26914103	0,31765756

Həmçinin də cədvəldən də görünür ki, ekranlaşma parametri δ artdıqca, spin simmetriyası üçün bağlı halın enerjisinin ədədi qiyməti artır, psevdospin simmetriyası üçün isə azalır. Artan tendensiya göstərir ki, məhdud sayda məhdudlaşmış hallar var, azalan davranış isə əksini bildirir.

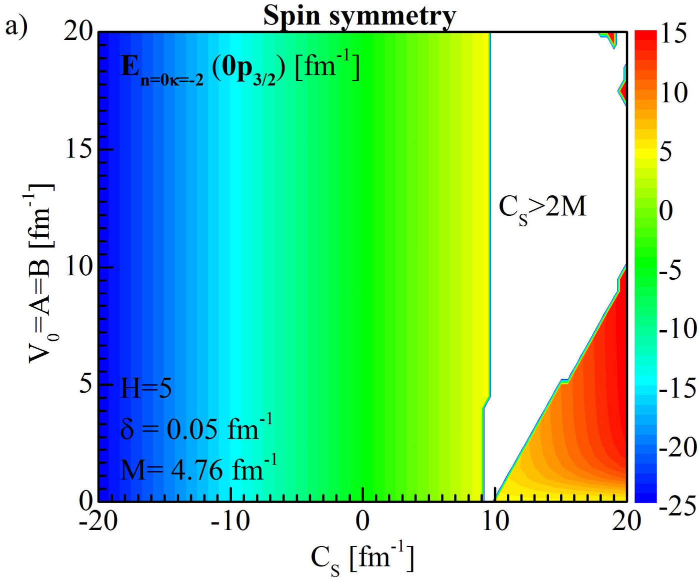
Dəqiq spin simmetriyası halında tenzor potensialı nəzərə alınmadıqda $H=0$ bəzi cütlərdə spin dubletlində cırlaşma yaranır: $np_{3/2}$, $np_{1/2}$, $nd_{5/2}$, $nd_{3/2}$, $nf_{7/2}$, $nf_{5/2}$ və $ng_{9/2}$, $np_{7/2}$ və digər hallar. Bu spin dubletlərinin hər biri eyni radial n və orbital l kvant ədədlərinə malikdirlər.

Həmçinin bu cırlaşma psevdospin simmetriyası halında da mövcuddur: $ns_{1/2}$, $(n-1)d_{3/2}$, $np_{3/2}$, $(n-1)f_{5/2}$, $nd_{5/2}$, $(n-1)g_{7/2}$ və $nf_{7/2}$, $(n-1)h_{9/2}$ və başqaları. Uyğun olaraq butun spin dubletleri eyni psevdoradial $\tilde{n}$ və psevdoorbital $\tilde{l}$ kvant ədədlərinə malikdirlər. Amma tenzor potensialını nəzərə aldıqda hər iki simmetriya halında cırlaşma aradan qalxmış olur.

Şəkil 3-də E_{nk} enerji spektrinin dəqiq spin simmetriyası halında $(0p_{3/2})$ səviyyələrinin, parametrlərinin fəzası göstərilmişdir. Enerjinin məxsusi qiymətləri bütün hallar üçün (V_0, C_S) müstəvisində göstərilmişdir. Parametrlər isə bu cür seçilmişdir: $V_0 = A = B$, $H=5$, $\delta = 0.05\,fm^{-1}$ və $M = 4.76\,fm^{-1}$. C_S parametri isə $(0 \div 20)\,fm^{-1}$ intervalında dəyişir. V_0 isə $(-20 \div 20)\,fm^{-1}$ aralığında dəyişir. Şəkildə ağ oblast enerjinin həqiqi qiymət almayan qiymətlərinə uyğun olan oblastdır. Bu oblastda əlaqəli hallar mövcud deyildir. Aydın görünür ki, enerjinin məxsusi qiymətləri C_S parametrinin seçilməsindən ciddi asılıdır. Dəqiq spin simmetriyası halında enerjinin müsbət qiymətinə uyğun əlaqəli hallar $5 < C_S < 10$ oblastında $M \geq E_{nk}$ və $M + E_{nk} \geq C_S$ olduqda və həmçinin də $10 \leq C_S \leq 20$ oblastında Manninq-Rosen və Yukava potensiallarının xətti cəmi üçün M kütləli relyativistik zərrəciyin Dirak tənliyi hamiltonianın dəqiq spin simmetriyası halında $k \neq 0$ qiymətləri üçün analitik həll edilərək, sistemin Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti üçün aşağıdakı tənliyi alarıq[9]:

---

[9]Aslanova, S.M. Manning-Rosen və Yukava potensiallarının xətti kombinasiyası üçün Dirak tənliyinin analitik həlli // – Bakı: Azərbaycan Fizika Jurnalı, – 2021. 27(2), – s.55-67.



Şəkil 3. Enerjinin məxsusi qiymətlərinin $(0p_{3/2})$ dəqiq spin simmetriyası hallında (V_0, C_S, C_{PS}) müstəvisində paylanması.

$$M^2 - E_{nk}^2 - C(M - E_{nk}) =$$

$$= \left[\frac{\beta^2 + k(k+1) + \frac{1}{2} + n(n+1) + (2n+1)\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}} \cdot \delta \right]^2 . \quad (91)$$

Onda $F_{nk}(s)$ məxsusi funksiyası üçün alarıq:

$$F_{nk}(s) = C_n s^{\gamma} (1-s)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}} \cdot P_n^{\left(2\gamma, 2\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}\right)}(1-2s). \quad (92)$$

Normallanma şərtindən tapılan C_n normallaşma sabiti aşağıdakı şəkildədir:

$$C_n = \sqrt{\frac{2\delta \cdot n!(n+k+1+\gamma)\Gamma(2\gamma+1)\Gamma(n+2\gamma+k}{(n+k+1)\Gamma(2\gamma)\Gamma(n+2\gamma+1)\Gamma(n+2k+2)}}. \quad (93)$$

Psevdospin simmetriyası halında isə Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti üçün aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$M^2 - E_{nk}^2 + C(M + E_{nk}) =$$

$$= \left[\frac{\tilde{\beta}^2 + k(k-1) + \frac{1}{2} + (2n+1)\sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \tilde{\alpha}^2} + n(n+1)}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \tilde{\alpha}^2}} \cdot \delta \right]^2. \quad (94)$$

$$G_{nk}(s) = C_n s^{\tilde{\gamma}} \cdot (1-s)^{\frac{1}{2} - \sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 - \tilde{\alpha}^2}} \cdot P_n^{\left(2\tilde{\gamma}, 2\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 - \tilde{\alpha}^2}\right)}(1-2s). \quad (95)$$

Normallanma şərtindən tapılan C_{n_r} normallaşma sabiti aşağıdakı şəkildədir:

$$C_n = \sqrt{\frac{2\delta \cdot n!(n+k-1+\tilde{\gamma})\Gamma(2\tilde{\gamma}+1)\Gamma(n+2\tilde{\gamma}+k)}{(n+k-1)\Gamma(2\tilde{\gamma})\Gamma(n+2\tilde{\gamma}+1)\Gamma(n+2k-2)}}. \quad (96)$$

SUSİ kvant mexanikasında isə Dirak tənliyi Manninq-Rosen və Yukava potensiallarının xətti cəmi üçün həll edilmişdir. Hər iki kvant mexanikasında üst-üstə düşən ifadələr alınmışdır.

Üçüncü fəsildə DKP tənliyi Hülten üstəgəl Yukava potensialı, Manninq-Rosen və Yukava potensiallarının xətti cəmindən ibarət mürəkkəb potensiallı sahədə adi kvant mexanikasında analitik olaraq həll edilmişdir.

Spini sıfır və bir olan sərbəst zərrəciklər üçün birinci tərtib DKP tənliyi aşağıdakı şəkildədir:

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - m)\psi_{DKP} = 0, \quad (97)$$

burada m – zərrəciyin kütləsi, $\beta^\mu (\mu = 0,1,\ 2,3)$ – matrislərdir.

Hülten və Yukava potensiallarının xətti cəmindən ibarət sahədə DKP tənliyini həll edərək Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti və məxsusi funksiyası üçün bucaq momentin sıfırdan fərqli qiymətlərində aşağıdakı analitik ifadələr tapılmışdır:

$$m^2 - E^2 =$$

$$= \left[\frac{\gamma^2 - J(J+1) - \frac{1}{2} - n(n+1) - (2n+1)\sqrt{\left(J+\frac{1}{2}\right)^2 - \eta^2}}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(J+\frac{1}{2}\right)^2 - \eta^2}} \cdot \delta \right]^2 . \quad (98)$$

$$\chi_n(s) = C_n s^{\varepsilon}(1-s)^K P_n^{(2\varepsilon, 2K-1)}(1-2s) \quad (99)$$

$$\chi_n(s) = C_n s^{\varepsilon}(1-s)^K \frac{\Gamma(n+2\varepsilon+1)}{n!\Gamma(2\varepsilon+1)^2} F_1(-n, 2\varepsilon+2K+n, 1+2\varepsilon, s), \quad (100)$$

Burada

$$K = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(J+\frac{1}{2}\right)^2 - \eta^2} . \quad (101)$$

və C_n normallaşma sabiti aşağıdakı kimidir:

$$C_n = \sqrt{\frac{2\delta \cdot n!(n+K+\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon+1)\Gamma(n+2\varepsilon+2K)}{\Gamma(n+2\varepsilon+1)(n+K)\Gamma(n+2K)\Gamma(2\varepsilon)}}. \quad (102)$$

Manning-Rosen və Yukava sinif potensiallarının xətti cəmi üçün DKP tənliyi analitik həll edilərək, sistemin enerji spektri üçün aşağıdakı tənliyi alarıq[10]:

$$m^2 - E^2 = \left[\frac{\alpha^2 - l(l+1) - \frac{1}{2} - n(n+1) - (2n+1)\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \gamma^2}}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \gamma^2}} \cdot \delta \right]^2 . \quad (103)$$

$\chi(s)$ radial funksiyasını hiperhəndəsi funksiya ilə əlaqələndirən aşağıdakı kompakt ifadəni alarıq:

---

[10] Aslanova S.M. “Analytical Solution of the Duffin–Kemmer–Petiau Equation for the Sum of Manning–Rosen and Yukawa Class Potentials” // Russian Physics Journal. 2021/07, 1337-1350

$$\chi_n(s) = C_n s^{\varepsilon}(1-s)^{K}\frac{\Gamma(n+2\varepsilon+1)}{n!\Gamma(2\varepsilon+1)}\,{}_2F_1(-n, 2\varepsilon+2K+n, 1+2\varepsilon, s). \quad (104)$$

Burada

$$K = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \gamma^2}\ .$$

Normallanma şərtindən tapılan C_n normallaşma sabiti isə aşağıdakı şəkildədir:

$$C_n = \sqrt{\frac{2\delta\cdot n!(n+K+\varepsilon)\Gamma(2\varepsilon+1)\Gamma(n+2\varepsilon+2K)}{\Gamma(n+2\varepsilon+1)\Gamma(n+2K)\Gamma(2\varepsilon)(n+K)}}. \quad (105)$$

Bəzi xüsusi hallar:

1) Əgər potensialın ifadəsində $V_0 = V_0' = 0$ olarsa, onda Manning-Rosen potensialı üçün enerji spektri tənliyi və dalğa funksiyası

$$m^2 - E^2 = \left[\frac{\sigma^2 - l(l+1) - \frac{1}{2} - n(n+1) - (2n+1)\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda^2}}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda^2}}\cdot\delta\right]^2, \quad (106)$$

$$\chi_n(s) = C_n s^{\varepsilon}(1-s)^{K}\frac{\Gamma(n+2\varepsilon+1)}{n!\Gamma(2\varepsilon+1)}\,{}_2F_1(-n, 2\varepsilon+2\Sigma+n, 1+2\varepsilon, s). \quad (107)$$

olar, burada

$$\sigma = \frac{\sqrt{EV_{02}}}{2\delta},\quad \lambda = \frac{\sqrt{EV_{01}}}{2\delta},\quad \Sigma = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda^2 + l(l+1)}.$$

2) Əgər $\eta = A = 0$ olarsa, onda birbaşa Yukava potensialı üçün enerji spektrini və dalğa funksiyasını alarıq:

$$m^2 - E^2 = \left[\frac{\omega^2 - l(l+1) - \frac{1}{2} - n(n+1) - (2n+1)\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \rho^2}}{n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda^2}}\cdot\delta\right]^2, \quad (108)$$

$$\chi_n(s) = C_n s^{\varepsilon}(1-s)^{K}\frac{\Gamma(n+2\varepsilon+1)}{n!\Gamma(2\varepsilon+1)}\,{}_2F_1(-n, 2\varepsilon+2H+n, 1+2\varepsilon, s). \tag{109}$$

Burada

$$\omega = \frac{\sqrt{EV_{04}}}{2\delta}, \quad \rho = \frac{\sqrt{EV_{03}}}{2\delta}, \quad H = \frac{1}{2}+\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2+\rho^2}.$$

NƏTİCƏ

1. Hülten və Yukava potensiallarının xətti kombinasiyasından ibarət mərkəzi sahədə KFQ tənliyi orbital kvant ədədinin $l \neq 0$ qiymətlərində adi və SUSİ kvant mexanikasında analitik həll edilərək enerjinin məxsusi qiyməti və məxsusi funksiyası üçün analitik ifadələr tapılmışdır. Enerjinin məxsusi qiymətləri hesablanmışdır. Həmçinin bəzi xüsusi hallar araşdırılmış və analitik ifadələr alınmışdır. Alınan nəticələrdən bilavasitə görünür ki, hər iki kvant mexanikasında alınan analitik ifadələr bir birinin üzərinə düşür.

2. Manning-Rosen üstəgəl Yukava sinif potensiallı sahədə KFQ tənliyi, orbital kvant ədədinin sıfırdan fərqli qiymətlərində adi və SUSİ kvant mexanikasında analitik həll edilərək enerjinin məxsusi qiyməti və məxsusi funksiyası üçün analitik ifadələr tapılmışdır. Enerjinin məxsusi qiymətləri hesablanmışdır. Sistemin məxsusi funksiyası Yakobi çoxhədlisi və hiperhəndəsi funksiya ilə ifadə edilmişdir.

3. Hülten və Yukava potensiallarının xətti kombinasiyasından ibarət mərkəzi sahədə Kulon tipli potensialla tenzor qarşılıqlı təsir də nəzərə alınmaqla Dirak tənliyi adi və SUSİ kvant mexanikasında dəqiq spin simmetriyası halında spin-orbital qarşılıqlı təsir operatorunun məxsusi qiymətinin ixtiyari $k \neq 0$ qiymətlərində analitik həll edilmişdir. Enerjinin məxsusi qiyməti, Yakobi çoxhədlisi və hiperhəndəsi funksiya ilə ifadə olunan məxsusi funksiyası üçün analitik ifadələr alınmışdır. Enerjinin məxsusi qiymətləri və məxsusi funksiyalarının ədədi qiymətləri hesablanmışdır.

4. Hülten üstəgəl Yukava potensiallı sahədə Kulon tipli potensialla

tenzor qarşılıqlı təsir də nəzərə alınmaqla Dirak tənliyi adi və SUSİ kvant mexanikasında psevdospin simmetriyası halında spin-orbital qarşılıqlı təsir operatorunun məxsusi qiymətinin ixtiyari $k \neq 0$ qiymətlərində analitik həll edilmişdir. Enerjinin məxsusi qiyməti, Yakobi çoxhədlisi və hiperhəndəsi funksiya ilə ifadə olunan məxsusi funksiyası üçün analitik ifadələr tapılmışdır. Enerjinin məxsusi qiymətləri və məxsusi funksiyalarının ədədi qiymətləri hesablanmışdır.

5. Manning-Rosen və Yukava potensiallarının xətti kombinasiyası üçün Dirak tənliyi adi və SUSİ kvant mexanikasında dəqiq spin simmetriyası halında spin-orbital qarşılıqlı təsir operatorunun məxsusi qiymətinin ixtiyari $k \neq 0$ qiymətləri üçün analitik həll edilmişdir. Enerjinin məxsusi qiyməti, Yakobi çoxhədlisi və hiperhəndəsi funksiya ilə ifadə olunan məxsusi funksiyası üçün analitik ifadələr tapılmışdır.

6. Manning-Rosen və Yukava potensiallarının xətti kombinasiyasından ibarət mərkəzi sahədə Dirak tənliyi adi və SUSİ kvant mexanikasında psevdospin simmetriyası halında spin-orbital qarşılıqlı təsir operatorunun məxsusi qiymətinin ixtiyari $k \neq 0$ qiymətlərində analitik həll edilmişdir. Enerjinin məxsusi qiyməti, Yakobi çoxhədlisi və hiperhəndəsi funksiya ilə ifadə olunan məxsusi funksiyası üçün analitik ifadələr tapılmışdır.

7. Hülten və Yukava potensiallarının xətti cəmindən ibarət sahədə DKP tənliyini orbital kvant ədədinin sıfırdan fərqli qiymətləri üçün adi kvant mexanikasında analitik həll edərək Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti və məxsusi funksiyası üçün analitik düsturlar tapılmışdır.

8. Manning-Rosen və Yukava sinif potensiallarının xətti cəmindən ibarət sahədə DKP tənliyini orbital kvant ədədinin sıfırdan fərqli qiymətləri üçün adi kvant mexanikasında analitik həll edərək Hamilton operatorunun məxsusi qiyməti və məxsusi funksiyası üçün analitik ifadələr tapılmışdır. Həmçinin bəzi xüsusi hallar üçün analitik ifadələr alınmışdır.

Dissertasiya işinin mövzusu üzrə çap olunmuş elmi işlər:

1. Qocayeva, M.V., Aslanova, S.M., Ahmadov, A.İ., Analytıcal bound state solutıons of the Dırac equatıon for Hulthén potentıal wıth ın the spın-orbıt couplıng term and spın symmetry // Conference of Young Scientics Problems of Physics and Astronomy, – Baku: – 25 may, – 2018, – p. 52-57.

2. Ahmadov, A.I. Approximate bound state solutions of the Klein-Gordon equation with the linear combination of Hulthen and Yukawa potentials / A.I. Ahmadov, S.M. Aslanova, M.S. Orujova [et al.] // Physics Letters A, – 2019. July; vol. 383, no. 24, – p. 3010-3017.

3. Ahmadov, A.I. Arbitrary ℓ-state solutions of the Klein-Gordon equation with the Manning-Rosen plus a class of Yukawa potentials / A.I. Ahmadov, M. Demirci, S.M. Aslanova [et al.] // Physics Letters A, – 2020. Apr; vol. 384, no. 12, – p. 126372-1-13.

4. Ahmadov, A.I., Demirci, M., Aslanova, S.M. Bound state solutions of the Klein-Fock-Gordon equation with the sum of Manning-Rosen potential and Yukawa potential within SUSYQM // Journal of Physics: Conference Series, – 2019. Dec; vol. 1416, – p.012001-1-13.

5. Aslanova, S.M., Şərifova, N.A. Dirak tənliyinin Hülten və Yukava potensiallarinin xətti cəmi üçün psevdospin simmetriyasi halinda analitik həlli // Tətbiqi fizika və energetikanin aktual məsələləri, II beynəlxalq elmi konfrans, – Sumqayıt: Sumqayıt Dövlət Universiteti, – 12 – 13 noyabr, – 2020, №2, – s.167-172.

6. Aslanova, S.M., Şərifova, N.A. Hülten və Yukava potensiallarının xətti cəmi üçün Dirak tənliyinin dəqiq spin simmetriyası halında analitik həlli // Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 97-ci ildönümünə həsr olunmuş Gənc tədqiqatçıların IV Beynəlxalq elmi konfransı, – Bakı: Bakı Mühəndislik Universiteti, – 29 – 30 aprel, – 2020, – s.72-75.

7. Ahmadov, A.I. Analytical Bound State Solutions of the Klein-Fock-Gordon Equation for the Sum of Hulthén and Yukawa Potential within SUSY Quantum Mechanics / A.I. Ahmadov, S.M. Aslanova, M.Sh. Orujova [et al.] // Hindawi, Advances in High Energy Physics, – 2021. Feb; 16. Article ID 8830063, – 11 p.

8. Ahmadov, A.I. Analytical bound state solutions of the Dirac equation with the Hulthen plus a class of Yukawa potential including a Coulomb-like tensor interaction / A.I. Ahmadov, M. Demirci, S.M. Aslanova, [et al.] // The European Physical Journal Plus. Springer Berlin Heidelberg, – 2021. Feb; 13. 136(2): 208, – 29 p.

9. Aslanova, S.M. Manning-Rosen və Yukava potensiallarının xətti kombinasiyası üçün Dirak tənliyinin analitik həlli // – Bakı: Azərbaycan Fizika Jurnalı, – 2021. C. 27, №2, – s.55-67.

10. Асланова, С.М. Аналитическое решение уравнения Даффина-Кеммера-Петьо для суммы потенциала Маннинга-Розена и класс Юкавы // – Томск: Известия ВУЗов. Физика, – 2021. Июль; Т. 64, №7, – с. 140-150.

Aslanova, S.M. Analytical Solution of the Duffin–Kemmer–Petiau Equation for the Sum of Manning–Rosen and Yukawa Class Potentials // Russian Physics Journal, – 2021. Vol. 64, No 07, – p. 1337-1350.

Dissertasiyanın müdafiəsi "22" iyun 2022-ci il tarixində saat 11-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Fizika İnstitutu nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.14 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ 1143, Bakı şəh., H. Cavid pr., 131.

Dissertasiya ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Fizika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Fizika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat 13 may 2022-ci il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb:	**04.05.2022**
Kağızın formatı:	**A5 (60×90 1/16)**
Həcm:	**39 238 işarə**
Tiraj:	**100 nüsxə**