AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

KOORDİNATDAN ASILI KÜTLƏYƏ MALİK KVANT SİSTEMLƏRİNİN DƏQİQ HƏLL OLUNAN OSSİLYATOR TİP KONFAYNMENT MODELLƏRİNİN MÜQAYİSƏLİ TƏDQİQİ

İxtisas: 2212.01 - Nəzəri fizika

Elm sahəsi: Fizika

İddiaçı: **Aygün Məmməd qızı Məmmədova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı– 2024

Dissertasiya işi Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyinin Fizika institutunun “Kvant informatikası” laboratoriyasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika elmləri doktoru
Elçin İman oğlu Cəfərov

Rəsmi opponentlər: fizika elmləri doktoru, professor
Mirteymur Mirkazım oğlu Mirabutalıbov

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi
Şahin Sabir oğlu Ağayev

fizika üzrə fəlsəfə doktoru
Nərminə Əli qızı Əliyeva

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Bakı Dövlət Universiteti nəzdində fəaliyyət göstərən ED 2.19 Dissertasiya şurası.

Dissertasiya şurasının sədri:
fizika elmləri doktoru, dosent
_______________**Hüseyn Mikayıl oğlu Məmmədov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi:
fizika üzrə fəlsəfə doktoru
_______________**Şəhla Nəbi qızı Hacıyeva**

Elmi seminarın sədri:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
_______________**Sərhəddin Qubaddin oğlu Abdullayev**

Azərbaycan Respublikasının Elm və Təhsil Nazirliyi
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ p.h.ş.
Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan
Baku State University
ELMİ KATİB
SCIENTIFIC SECRETARY
İmzanı təsdiq edirəm:
“28” 10 20 24

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Son illər bərk cisim fizikası və onunla əlaqəli digər elmi istiqamətlərin birgə inkişafı mikron ölçülərdən daha kiçik ölçülər olan submikron və nano ölçülərdə inqilab sayıla biləcək kəşflərə gətirib çıxarmışdır. Bu kəşflər isə öz növbəsində sənayedə və texnoloji proseslərdə uğurla tətbiq edilməklə, müasir nanotexnologiyaların inkişafına təkan vermişdir. Məlum olduğu kimi nano ölçülərdə artıq klassik fizika qanunları öz fundamentallığını itirir və müşahidə olunan fiziki hadisələr bu qanunların köməyi ilə izah edilə bilmir. Bu halda fiziki sistemlər özlərini kvant sistemləri kimi aparır və onların izahı kvant fizikasının fundamental qanunları çərçivəsində mümkün olur. Başqa sözlə desək, makroskopik ölçülərdə deterministik olan klassik sistemlər öz yerlərini nano və anqstrem ölçülü miqyaslarda dinamikaları və təkamülləri ehtimal nəzəriyyəsinə əsaslanan kvant sistemlərinə buraxırlar.

Bundan əlavə müxtəlif kvant sistemlərinə qravitasiya sahəsinin təsirinin öyrənilməsi istiqamətində də çoxlu elmi-tədqiqat işləri aparılır. Bu tip elmi-tədqiqat işlərinə marağın artması ilk növbədə, qravitasiya sahəsinin kvant ölçülərində ortaya çıxara biləcəyi bir çox "gizli" xassələrin oynaya biləcəyi əhəmiyyətli rol ilə bağlıdır. Məsələn, qravitasiya sahəsinin kvant sisteminə təsirinin öyrənilməsi nəticəsində hidrogen atomunun enerji səviyyələrində əmələ gələn sürüşmələrin aşkara şıxarılması böyük marağa səbəb olmuşdur. Həmçinin, qravitasiya sahəsinin materiya ilə qarşılıqlı təsiri və bu sahənin mümkün kvantlanması mühüm tədqiqat obyektlərindəndir. Qravitasiya sahəsinin kvantlanması, onun kvant nəzəriyyəsinin qurulması üçün müxtəlif yanaşmalardan, nəzəriyyələrdən istifadə edilir. Məsələn, klassik fonda kiçik həyəcanlanmalara əsaslanan perturbativ yanaşma, dinamik dəyişənlərin yenidən qruplaşdırılmasına əsaslanan halqa kvantlanması yanaşması, təbii komponentlərin qravitasiya sahəsində yeni usullarla həyəcanlanmasına əsaslanan sim nəzəriyyəsi və başqa bu qəbildən olan nəzəriyyələr kvant nəzəriyyəsinin köməyi ilə qravitasiya effektlərinin izahına istiqamətlənib.

Müasir elmi tədqiqatlarda çox geniş tətbiq edilən formalizmlərdən biri koordinatdan asılı olaraq dəyişən zona quruluşu və onun effektiv kütlə üçün ümumiləşməsidir. Bununla belə, bu formalizmdən istifadə edərkən bəzi çətinliklər yarana bilir. Yaranan çətinliklərin əsas səbəbi ondan ibarətdir ki, iki cisim məsələlərində gətirilmiş kütlə yanaşmasından istifadə edərək bir çox kvant fizikası məsələsi riyazi olaraq dəqiq də həll edilə bilsə də, sabit kütlə və ya zona quruluşunun dəyişən analoqlarla əvəz edilməsi məsələni riyazi baxımdan mürəkkəbləşdirir və bircins zona quruluşu və ya kütlə üçün alınan dəqiq həllin koordinatdan asılı olaraq dəyişən kütlə halında təqribi həllə çevrilməsi ehtimalı olduqca yüksəkdir. Lakin, bu formalizmin daxil edilməsi fizikada dahi kəşflərdən biri sayılan və İ. Giaever tərəfindən 1960-cı ildə eksperimental olaraq kəşf edilərək 1973-cü ildə fizika üzrə Nobel mükafatına layiq görülmüş ifratkeçiricilərdə tunel effekti hadisəsinin izahına səbəb olub və həmçinin, kvant fizikasının bir çox məsələlərinin dəqiq həll edilməsinə imkan yaradıb.

Dissertasiya işində koordinatdan asılı kütləyə malik kvant sistemlərinin dəqiq həll oluna bilən ossilyator tip konfaynment modelləri müqayisəli olaraq tədqiq edilir. Kristalın həndəsi ölçülərindən heç olmasa biri elektronun de-Broyl dalğa uzunluğu tərtibində olduqda, onun termodinamik, kinetik, optik xassələrində özünə məxsus dəyişikliklər baş verir. Başqa sözlə desək, yükdaşıyıcıların hərəkəti bir, iki və ya üç istiqamətdən mədudlaşdırılarsa onların enerjiləri kvantlanır. Enerji kvantlanmasını, yəni diskret enerji spektrinin yaranmasını təmin etmək üçün sonsuz kristal maneələrlə məhdudlaşdırılır, yəni sərhədlər yaradılır, həmçinin, kvant çüxürü şəklində konfaynment effektinə tabe olan və özünü qeyri-düzbucaqlı harmonik ossilyator profilinə malik məhdud kvant sistemi kimi aparan dəqiq həll olunan modelləri qurulur.

Qısaca demək olar ki, bərk cisim fizikasının aktual problemləri üçün maraqlı bir situasiya yaranır – strukturlar çox kiçik ölçülərdə kvant sistemi olub, eyni zamanda konfaynment effektinə tabe olurlar. Aydındır ki, bu zaman biz bu sistemlər üçün nəzəri hesablamalar edərkən, hökmən nəzərə almalıyıq ki, problem artıq sistemi xarakterizə edəcək olan dalğa funksiyası və ya impuls və koordinatın birgə paylanma funksiyası koordinatın sonsuz deyil, sonlu qiymətlər oblastında həll edilməlidir.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. *Tədqiqatın obyekti* - koordinatdan asılı kütləyə malik kvant sistemlərinin dəqiq həll olunan ossilyator tip konfaynment modelləri. *Tədqiqatın predmeti* - koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində müxtəlif kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari sonsuz və sonlu dərin kvant çuxurları modelləri üçün dəqiq həll edilərək qeyri-xətti enerji spektrinin, stasionar halların dalğa funksiyalarının aşkar şəkillərinin tapılması, müqayisəsi və tədqiqidir.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin əsas məqsədi koordinatdan asılı kütləyə malik kvant sistemlərinin dəqiq həll oluna bilən ossilyator tip konfaynment modellərini hərtərəfli tədqiq etməkdir.

Bu məqsədə çatmaq üçün aşağıdakı vəzifələr yerinə yetirilmişdir.

-Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Ju-Kroemer kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari sonsuz və sonlu dərin kvant çuxurları modelləri üçün dəqiq həllərinin tapılması;

- Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Qora-Uilyams kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari sonsuz dərin kvant çuxuru üçün həm xarici qravitasiya sahəsinin təsiri altında, həm də bu cür təsir olmadıqda dəqiq həllərinin müəyyənləşdirilməsi;

- Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Qaliley invariantlığına tabe olan kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari sonsuz dərin kvant çuxuru üçün həm xarici qravitasiya sahəsinin təsiri altında, həm də bu cür təsir olmadıqda dəqiq həllərinin tapılması;

- Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Ju-Kroemer, Qora-Uilyams və Qaliley invariantlığına tabe olan kinetik enerji operatorları ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari kvant çuxuru modellərinin dəqiq həlləri ilə məlum qeyri-relyativistik kanonik kvant harmonik ossilyatorunun dəqiq həlləri arasında konfaynmentin yoxa çıxması ilə bərpa olunan dəqiq limit münasibətlərinin müəyyən edilməsi;

- Psevdo-Yakobi və Ermit çoxhədliləri arasında birbaşa əlaqənin mövcudluğunu göstərən yeni limit münasibətinin tapılması və doğruluğunun isbat edilməsi.

Tədqiqat metodları. Dissertasiya işində qarşıya qoyulan məqsəd və vəzifələr çərçivəsində tədqiqatlar nəzəri fizikanın, xüsusi funksiyalar nəzəriyyəsinin, differensial tənliklər, ortoqonal çoxhədlilər və riyazi analiz kursunun müxtəlif metodlarının və yanaşmalarının köməyi ilə həyata keçirilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar:

1. Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Ju-Kroemer kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari sonsuz və sonlu dərin kvant çuxurları modelləri üçün dəqiq həlləri;

2. Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Qora-Uilyams kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari sonsuz dərin kvant çuxuru üçün həm xarici qravitasiya sahəsinin təsiri altında, həm də bu cür təsirin yoxluğunda dəqiq həlləri;

3. Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Qaliley invariantlığına tabe olan kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari sonsuz dərin kvant çuxuru üçün həm xarici qravitasiya sahəsinin təsiri altında, həm də bu cür təsirin yoxluğunda dəqiq həlləri;

4. Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Ju-Kroemer, Qora-Uilyams və Qaliley invariantlığına tabe olan kinetik enerji operatorları ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari kvant çuxurumodellərinin dəqiq həlləri ilə məlum qeyri-relyativistik kanonik kvant harmonik ossilyatorunun dəqiq həlləri arasında konfaynmentin yoxa çıxması ilə bərpa olunan dəqiq limit münasibətləri;

5. Yakobi və Ermit çoxhədliləri arasında birbaşa əlaqənin mövcudluğunu göstərən yeni limit münasibəti.

Tədqiqatın elmi yeniliyi.

-Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Ju-Kroemer kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyi harmonik ossilyatorvari sonsuz və sonlu dərin kvant çuxurları modelləri üçün dəqiq həll edilərək qeyri-xətti enerji spektrinin və Gegenbauer, Yakobi və psevdo-Yakobi çoxhədliləri ilə ifadə olunan stasionar halların dalğa funksiyasının aşkar şəkilləri tapılmışdır [3];

-Ju-Kroemer kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari sonsuz dərin kvant çuxurları modeli üçün dəqiq həll edilərək tapılan qeyri-xətti enerji spektrinin gətirilən tezliyinin də konfaynment parametrindən asılı olduğu və bu parametr sıfıra yaxınlaşarkən kəskin olaraq yüksəldiyi müşahidə edilmişdir [8],[9];

-Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Qora-Uilyams və Qaliley invariantlığına tabe olan kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyi harmonik ossilyatorvari sonsuz dərin kvant çuxuru üçün həm xarici qravitasiya sahəsinin təsiri altında, həm də bu cür təsirin yoxluğunda dəqiq həll edilərək, həm qeyri-xətti enerji spektrinin, həm də Gegenbauer və Yakobi çoxhədliləri ilə ifadə olunan stasionar halların dalğa funksiyalarının aşkar şəkilləri tapılmışdır [1],[7];

-Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Qora-Uilyams və Qaliley invariantlığına tabe olan kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari kvant çuxurları üçün məxsusi qiymətləri olan qeyri-xətti enerji spektrlərinin müqayisəsindən Qaliley invariantlığına tabe olan kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan modelin enerji spektrinin həmişə daha böyük qiymətlər aldığı müşahidə edilmişdir [2],[5];

-Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Ju-Kroemer, Qora-Uilyams və Qaliley invariantlığına tabe olan kinetik enerji operatorları ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari kvant çuxuru modellərinin dəqiq həlləri ilə məlum qeyri-relyativistik kanonik kvant harmonik ossilyatorunun dəqiq həlləri arasında konfaynmentin yoxa çıxması ilə bərpa olunan limit münasibətləri tam dəqiqliklə hesablanmışdır [4];

-Psevdo-Yakobi və Ermit çoxhədliləri arasında birbaşa əlaqənin mövcudluğunu göstərən yeni limit münasibəti tapılmış və bu münasibətin doğruluğu riyazi olaraq isbat edilmişdir [6],[10].

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dalğa funksiyaları koordinatın sonlu qiymətində sıfra bərabər olan, yəni konfaynment effektinə tabe olan bir-ölçülü kvant harmonik ossilyator modelləri dəqiq həll olunduqları təqdirdə müasir nano-ölçülü fizika və texnologiyaların müxtəlif istiqamətlərdə inkişafı baxımından olduqca əhəmiyyətlidir. Hazırkı dissertasiya işində profili harmonik ossilyator şəklində olan sonsuz və sonlu dərin kvant çuxurları üçün dəqiq həll edilərək tapılan qeyri-xətti enerji spektrləri və stasionar halların dalğa funksiyaları eksperimental olaraq əldə edilən qeyri-düzbucaqlı profilə malik müasir nano-ölçülü strukturların müxtəlif xarakteristikalarının izah edilməsində böyük praktiki əhəmiyyətə malikdirlər. Digər tərəfdən, qeyd edilən konfaynment effektli məsələlərin xarici qravitasiya sahəsində də tapılan dəqiq həlləri gələcəkdə bir çox konfaynment effektli heteroquruluşların qeyri-xətti optik parametrlərinin qiymətləndirilməsi zamanı çox əhəmiyyətli rol ala bilər. Tərəfimizdən kvant mexanikası məsələləri həll edilərkən psevdo-Yakobi və Ermit çoxhədliləri arasında tapılan və doğruluğu da tərəfimizdən isbat edilən birbaşa limit münasibəti riyaziyyat nöqteyi-nəzərindən xüsusi funksiyalar və ortoqonal çoxhədlilər üçün məlum xarakteristikaların yenilənməsi və genişləndirilməsi üçün çox böyük maraq kəsb edir.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin əsas müddəaları və alınmış elmi nəticələr aşağıdakı elmi iclas, seminar və konfranslarda geniş məruzə və müzakirə olunmuşdur:

-7th International Scientific and Practical Conference “Science and Practice: Implementation to Modern Sosiety” (Manchester, Great Britain, 6-8.10.2020);

-13th International Scientific and Practical Conference “Science and Practice: Implementation to Modern Society” (October 16-18, 2022, Manchester, Great Britain);

-“Riyaziyyatın fundamental problemləri və intellektual texnologiyaların təhsildə tətbiqi” mövzusunda II Respublika elmi konfransı. (Sumqayıt Dövlət Universiteti, 15-16 dekabr, 2022, Sumqayıt, Azərbaycan).

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı:

Dissertasiya işi Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyinin Fizika İnstitutunun "Kvant informatikası" laboratoriyasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işi Giriş, 4 fəsil, Nəticə və İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısından ibarət olub, A4 formatında yazılmış 151 səhifəni əhatə edir. İşin əsas hissəsi (şəkillər, cədvəllər, qrafiklər və ədəbiyyat siyahısı istisna edilməklə) 234 493 (o cümlədən, Giriş – 1467, I fəsil – 42 000, II fəsil – 90 000, III fəsil – 64 000, IV fəsil – 32 000, Nəticələr – 5026) işarədir. İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısına dissertasiyada istinad olunan 106 adda mənbə daxildir. Dissertasiyada nəticələri əks etdirən 6 şəkil verilmişdir.

İŞİN QISA MƏZMUNU

Girişdə mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi, tədqiqatın məqsəd və vəzifələri, tədqiqat metodları, müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar, tədqiqatın elmi yeniliyi, nəzəri və praktiki əhəmiyyəti göstərilmiş, işin abrobasiyası, tədqiqat metodları haqqında geniş məlumat verilmişdir.

Dissertasiya işinin birinci fəsli əsasən icmal xarakterlidir (birinci və üçüncü paraqraflar tam, ikinci paraqraf isə qismən) və kvant mexanikasında impuls və koordinat arasında kvantlanma zamanı hansı yanaşmaların mövcud olduğundan, daha sonra bu yanaşmalar əsasında qeyri-relyativistik harmonik ossilyator məsələsinin dəqiq həllərə malik modellərinin necə qurulduğundan, müxtəlif tip bərk cisimlərdə koordinatdan asılı olaraq dəyişən zona quruluşu formalizmi və onun effektiv kütlə halına ümumiləşməsindən, bir də qeyri-relyativistik kvant mexanikasında konfaynment effektindən bəhs edir.

İlk paraqraf qısaca olaraq qeyri-relyativistik kvant mexanikasında kanonik və qeyri-kanonik yanaşmaların fərqlərini izah edir. Növbəti paraqraf isə qeyri-relyativistik kvant mexanikasında kanonik və qeyri-kanonik yanaşmalarda xətti harmonik ossilyator məsələsinin dəqiq həll olunan modellərinin necə qurulduğunu izah edir. Bu fəslin üçüncü paraqrafı müxtəlif tip bərk cisimlərdə koordinatdan asılı olaraq dəyişən zona quruluşu formalizmi əsasında izah edilə bilən bəzi məşhur təcrübələrin icmalını verir və dəyişən zona quruluşu formalizminin hansı şərtlər daxilində effektiv kütlə halına ümumiləşməsini izah edir. Sonuncu paraqraf isə qeyri-relyativistik kvant mexanikasında konfaynment effektinin necə əmələ gəlməsini və bu effektin bərk cisimlər fizikası və nanotexnologiyalarda hansı baxımdan əhəmiyyətli olduğunu izah edir, daha sonra isə kəmiyyət baxımından ölçülərin özünü necə büruzə verdiyinin bəzi hesablamalarını təqdim edir.

Dissertasiya işinin ikinci fəsli kanonik yanaşmada qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyatorun dəqiq həll oluna bilən Ju-Kroemer konfaynment modelinin necə qurulduğuna həsr olunmuşdur. Nəzərə alsaq ki, təqdim edilən model konfaynment effektinə malikdir, yəni məhduddur, bu zaman əvvəlcə konfaynment effektinə necə nail olunduğunun yolları göstərilir. Bununla bağlı olaraq, ilk paraqrafda koordinatdan asılı effektiv kütlə üçün kinetik enerji ümumiləşməsinin bəzi riyazi detalları izah edilir və daha sonra isə kinetik enerji ümumiləşməsi nəzərə alınmaqla koordinatdan asılı effektiv kütlə həm də kvant harmonik ossilyatoru potensialında nəzərə alınır və ikinci paraqrafda həm sonsuz hündür, həm də sonlu hündür potensial çuxur üçün yuxarıda qeyd edilən məsələ Gegenbauer və psevdo Yakobi çoxhədliləri vahidlərində dəqiq həll edilir [3].

$M(x)$ effektiv kütləsi koordinatdan asılı olaraq dəyişən və Ju-Kroemer tərəfindən təklif edilən

$$\widehat{H}_0^{JK} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{\sqrt{M(x)}}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sqrt{M(x)}} \tag{1}$$

kinetik enerji operatorundan istifadə edərək, qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyator üçün Hamilton operatorunu aşağıdakı şəkildə yazılır[1]:

---

[1] Lima, R. F., Vieira, M., Furtado, C. Yet another position dependent mass quantum model // Journal of Mathematical Physics, -2012. 53, - p. 072101.

$$\widehat{H}^{JK} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{\sqrt{M(x)}}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sqrt{M(x)}} + V(x). \qquad (2)$$

Burada $V(x)$ araşdırılan qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyatorun potensialı olub, aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{M(x)\omega^2 x^2}{2}, & -a < x < a \\ \infty, & x = \pm a. \end{cases} \qquad (3)$$

Bu ifadədən görünür ki, özünü xətti harmonik ossilyator kimi aparan kvant sistemi koordinatın $x = \pm a$ qiymətlərində iki sonsuz hündür çəpərlə tam olaraq məhdudlaşır və bu məhdudiyyət koordinatdan asılı olan $M(x)$ effektif kütləsinin analitik ifadəsində oz əksini tapmalıdır. Bu səbəbdən, $M \equiv M(x)$ funksiyasının aşkar şəklini təyin etmək məqsədi ilə onun üzərinə əvvəlcə aşağıdakı şərtləri qoyaq:

-Koordinatdan asılı olan $M(x)$ effektiv kütləsi $x = 0$ halında sabit m_0 kütləsi ilə üst-üstə düşməlidir;

-Koordinatdan asılı olan $M(x)$ effektiv kütləsi $a \to \infty$ limit halında sabit m_0 kütləsini bərpa etməlidir;

-$M(x)$ koordanatdan aslı olan effektiv kütlənin təyininə görə koordinatın $x = \pm a$ qiymətlərində konfaynment effekti müşahidə edilməlidir.

-Ju-Kroemer kinetik enerji operatorlu Şredinger tənliyi dəqiq həll edilməlidir və onun həlli $a \to \infty$ limit halında qeyri-relyativistik sonsuz harmonik ossilyator modelinin həlli ilə üst-üstə düşməlidir.

Yuxarıda sadaladığımız şərtləri nəzərə alsaq, bu şərtləri ödəyən koordinatdan asılı olan $M(x)$ effektiv kütləsi üçün aşağıdakı ifadəni yaza bilərik:

$$M \equiv M(x) = \frac{a^2 m_0}{a^2 - x^2}. \qquad (4)$$

(3) və (4) ifadələrini (2) ifadəsində nəzərə alıb lazımi sadələşdirmələr

apardıqdan sonra Hamilton operatoru aşağıdakı şəklə düşür:

$$\widehat{H}^{JK} = -\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2x}{a^2 - x^2}\frac{d}{dx} - \frac{1}{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^2}\right] + \frac{m_0\omega^2 a^2 x^2}{2(a^2 - x^2)}. \quad (5)$$

Bu ifadəni nəzərə alaraq, ikinci tərtib differensial tənlik olan Şredinger tənliyini uyğun olaraq, aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2x}{a^2 - x^2}\frac{d}{dx} - \frac{1}{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^2}\right]\psi + \left(\frac{2ma^2E}{\hbar^2(a^2 - x^2)} - \frac{m\omega^2 a^2 x^2}{\hbar^2(a^2 - x^2)^2}\right)\psi = 0. \quad (6)$$

Aldığımız tənliyi dəqiq həll etmək üçün ikinci tərtib differensial tənliklərin həllində istifadə edilən Nikiforov-Uvarov metodundan istifadə edək. Son nəticədə olaraq qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyatorun Ju-Kroemer konfaynment modeli üçün aşağıdakı qeyri-ekvidistant enerji spektrini:

$$E \equiv E_n^{JK} = \hbar\sqrt{\omega^2 + \frac{\hbar^2}{m^2a^4}}\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2ma^2}(n^2 + n + 1) \quad (7)$$

və stasionar halların dalğa funksiyaları üçün aşağıdakı ifadəni alırıq [3]:

$$\psi \equiv \psi_n^{JK}(x) = C_n^{JK}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2\omega^2a^4}{\hbar^2}+1}} C_n^{\left(\sqrt{\frac{m^2\omega^2a^4}{\hbar^2}+1}+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{a}\right), \quad (8)$$

burada, $C_n^{(\bar{\lambda})}(x)$ hiperhəndəsi ${}_2F_1$ funksiyaları ilə aşağıdakı kimi ifadə edilən Gegenbauer çoxhədliləridir[2]:

$$C_n^{(\bar{\lambda})}(x) = \frac{(2\bar{\lambda})_n}{n!}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n+2\bar{\lambda} \\ \bar{\lambda}+\frac{1}{2} \end{matrix} ;\ \frac{1-x}{2}\right), \bar{\lambda} \neq 0 \tag{9}$$

c_n^{JK} normallaşma faktoru aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$c_n^{JK} = 2^{\sqrt{\frac{m^2\omega^2a^4}{\hbar^2}+1}}\Gamma\left(\sqrt{\frac{m^2\omega^2a^4}{\hbar^2}+1}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\left(n+\sqrt{\frac{m^2\omega^2a^4}{\hbar^2}+1}+\frac{1}{2}\right)n!}{\pi a\Gamma\left(n+2\sqrt{\frac{m^2\omega^2a^4}{\hbar^2}+1}+1\right)}}, \tag{10}$$

və o, $\bar{\lambda} > -\frac{1}{2}$ və $\bar{\lambda} \neq 0$ üçün ödənilən $C_n^{(\bar{\lambda})}(x)$ Gegenbauer çoxhədlilərinin ortoqonallıq şərtindən tapılır:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\bar{\lambda}-\frac{1}{2}}C_m^{(\bar{\lambda})}(x)C_n^{(\bar{\lambda})}(x)dx = \frac{\pi\Gamma(n+2\bar{\lambda})2^{1-2\bar{\lambda}}}{\{\Gamma(\bar{\lambda})\}^2(n+\bar{\lambda})n!}\delta_{mn}. \tag{11}$$

Bu səbəbdən, koordinat təqdimatında stasionar halların dalğa funksiyaları $\psi_n^{JK}(x)$ da həmçinin, $-a < x < a$ aralığında ortoqonaldır:

$$\int_{-a}^{a}[\psi_m(x)]^*\,\psi_n^{JK}(x)dx = \delta_{mn.} \tag{12}$$

[2] Koekoek, R. Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues/ R. Koekoek, P.A Lesky, R.F Swarttouw // - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, - 2010, 578 p.

İndi isə, tədqiq edilən kvant sisteminin $V(x)$ potensialı üzərinə qoyulan tələbi aşağıdakı şəkildə qismən dəyişək. Hesab edək ki, potensialımız kütləsi koordinatdan asılı olaraq dəyişən harmonik ossilyator potensialıdır:

$$V(x) = \frac{M(x)\omega^2 x^2}{2}, \tag{13}$$

lakin, $x \to \pm\infty$ hallarında potensial özünü $\frac{m_0\omega^2 a^2}{2}$ kimi aparır. Yəni, faktiki olaraq, kütlənin koordinatdan asılılığı elə daxil edilməlidir ki, bu dəfə sonsuz hündür divarlar yerinə iki sonlu baryer yaransın və potensialımız qeyri-düzbucaqlı profilə malik sonlu kvant çuxuruna çevrilsin.

Potensialın özünü əvvəlkindən daha fərqli aparması tələb edir ki, $M(x)$ kütləsi üçün də əvvəlki şərtlərdən fərqli yeni şərtlər müəyyən edilsin:

-Koordinatdan asılı effektiv kütlə $M(x)$ koordinat başlanğıcı olan $x = 0$ nöqtəsində sabit effektiv kütlə olan m_0-a bərabər olmalıdır;

-Koordinatdan asılı effektiv kütlə $M(x)$ koordinatın $x = \pm\infty$ qiymətlərində sıfra çevrilməlidir.

- sərbəst Hamiton operatoruna və (13) potensialına uyğun gələn Şredinger tənliyi koordinatdan asılı effektiv kütlə $M(x)$-ın analitik ifadəsi üçün dəqiq həll oluna bilməlidir.

Yuxarıdakı şərtləri ödəyən koordinatdan asılı effektiv kütlə $M(x)$-in analitik ifadəsini aşağıdakı kimi yazaq:

$$M \equiv M(x) = \frac{a^2 m_0}{a^2 + x^2}. \tag{14}$$

(1) sərbəst Hamilton operatoruna, (3) potensialına və koordinatdan asılı effektiv kütlə $M(x)$-in (14) analitik ifadəsinə uyğun gələn Şredinger tənliyini dəqiq həll edərək, stasionar halların dalğa funksiyaları və enerji spektrinin aşkar ifadələrini tapaq. Bunun üçün uyğun Şredinger təliyini yazsaq:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2x}{a^2+x^2}\frac{d}{dx}+\frac{1}{a^2+x^2}-\frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\right]\psi^{JK}(x)$$

$$+\frac{a^2 m\omega_0^2 x^2}{2(a^2+x^2)}\psi^{JK}(x) = E^{JK}\psi^{JK}(x) \quad (15)$$

Bu tənliyi Nikiforov-Uvarov metodu[3] ilə həll edərək, aldığımız ikinci tərtib differensial tənliyi $P_n(\xi, v, N)$ psevdo-Yakobi çoxhədliləri üçün aşağıdakı məlum ikinci tərtib differensial tənlik ilə birbaşa müqayisə edilməklə onu dəqiq həll edə bilərik:

$$(1+\xi^2)\bar{y}'' - 2(\nu - N\xi)\bar{y}' + n(2N-n+1)\bar{y} = 0, \quad (16)$$

$$\bar{y} = P_n(\xi, v, N). \quad (16.a)$$

Bu müqayisədən tapa bilərik ki, E^{JK} enerji spektri qeyrekvidistantdır və sonludur:

$$E^{JK} = \hbar\omega_0\frac{(N+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{n+1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\sqrt{(N+1)^2-1}},$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots, N. \, (17)$$

Stasionar halların dalğa funksiyaları olan $\psi^{JK}(x)$ isə psevdo-Yakobi çoxhədliləri vasitəsi ilə aşağıdakı qaydada ifadə olunurlar:

$$\tilde{\psi}^{JK}(x) =$$

$$c_n^{JK}\left(1+\frac{{\lambda_0}^2 x^2}{\sqrt{(N+1)^2-1}}\right)^{-\frac{N+1}{2}} P_n\left(\frac{\lambda_0 x}{[(N+1)^2-1]^{\frac{1}{4}}}, 0, N\right).$$

Burada, $P_n(\xi, v, N)$ psevdo-Yakobi çoxhədliləri olub, ${}_2F_1$

---

[3] Nikiforov, A.F. Special Functions of Mathematical Physics: A Unified Introduction with Applications / A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov, - Springer Basel AG, - 1988. 427 p.

hiperhəndəsi funksiya vasitəsi ilə aşağıdakı kimi təyin olunurlar:

$$P_n(\xi, v, N) = \frac{(-2i)^n(-N+iv)_n}{(n-2N-1)_n}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, n-2N \\ -N+iv\end{matrix}; \frac{1-ix}{2}\right), \quad (18)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

$$\tilde{\psi}^{JK}(x) = \frac{\Gamma(2N+1-2n)\Gamma(2N+2-2n)2^{2n-2N-1}n!}{\Gamma(2N+2-n)|\Gamma(N+1-n+iv)|^2}\delta_{mn}. \quad (19)$$

ortonormaldır və normallaşma parametri c_n^{JK} psevdo Yakobi çoxhədliləri üçün aşağıdakı ortoqonallıq şərtindən tapılır:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)^{-N-1}\, e^{2v\cdot arctanx} P_m(x, v, N)P_n(x, v, N)dx$$

Onun aşkar şəkli aşağıdakı kimidir:

$$c_n^{JK} = \frac{\Gamma(N-n+1)}{2^{n-N}\Gamma(2N-2n+1)}\sqrt{\frac{\Gamma(2N-n+1)}{\pi a_N(2N-2n+1)n!}}. \quad (20)$$

Bu fəslin üçüncü paraqrafı isə daha çox ortoqonal çoxhədlilərin tamamilə yeni kəşf edilən xassəsi ilə bağlıdır ki, bu kəşf də ikinci paraqrafda dəqiq həll alındıqdan sonra riyazi olaraq meydana çıxır. Qeyd edilən yeni nəticə psevdo-Yakobi və Ermit ortoqonal çoxhədliləri arasında indiyə kimi məlum olmayan birbaşa limit münasibətinin mövcudluğunun göstərilməsi və onun doğruluğunun isbatından ibarətdir.

Ermit çoxhədliləri ortoqonal çoxhədlilərin Aski sxeminə daxil olan çoxhədlilər arasında ən sadə çoxhədli sayılır və ${}_2F_0$ tip hiperhəndəsi funksiyalarla aşağıdakı şəkildə ifadə olunurlar:

$$H_n(x) = (2x)^n{}_2F_0\left(-\frac{n}{2}; -\frac{n-1}{2}; -\frac{1}{x^2}\right), n = 0,1,2, \dots . \quad (21)$$

Burada ${}_rF_s$ tip hiperhəndəsi funksiya özü aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$ {}_rF_s\left(\begin{matrix} a_1,\cdots,a_r \\ b_1,\cdots,b_s \end{matrix};x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1,\cdots,a_r)_k}{(b_1,\cdots,b_s)_k}\frac{x^k}{k!}, \qquad (22) $$

və təyinata görə

$$ (a_1,\cdots,a_r)_k=(a_1)_k\cdots(a_r)_k, $$

$(a)_k$ isə Pohammer simvolu olub aşağıdakı analitik ifadəyə malikdir:

$$ (a)_0=1 \text{ və } (a)_k=a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1), $$
$$ k=1,2,3,\ldots. \qquad (23) $$

Xüsusi funksiyalar nəzəriyyəsindən yaxşı məlumdur ki, əgər (22) ifadəsinin surətindəki Pohammer simvollarının hasillərini təyin edən a_i ədədlərindən hər hansı biri $-n$-ə bərabər olarsa, harda ki, n müsbət tam ədəddir, o zaman ${}_rF_s$ hiperhəndəsi funksiyasını təyin edən sonsuz sıra qeyd edilən n müsbət tam ədədində kəsilərək sonlu cəmə çevriləcək və ${}_rF_s$ hiperhəndəsi funksiyası isə x dəyişəninin çoxhədlisi olacaq. (21) düsturu ilə təyin olunan Ermit çoxhədliləri aşağıdakı ikinci tərtib diferensial tənliyin dəqiq həllidirlər:

$$ y''(x)-2x\cdot y'(x)+2n\cdot y(x)=0,\, y(x)=H_n(x). \qquad (24) $$

Ermit çoxhədliləri x dəyişəninin bütün həqiqi oblasdakı qiymətləri üçün aşağıdakı ortoqonallıq şərtini ödəyirlər:

$$ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx=2^n n!\,\delta_{mn}. \qquad (25) $$

Psevdo-Yakobi çoxhədliləri isə qeyd etdiyimiz kimi, ${}_2F_1$ tip hiperhəndəsi funksiyalarla ifadə olunan ortoqonal çoxhədliləridir və aşağıdakı qaydada təyin olunurlar:

$$ P_n(x;\nu,N)=\frac{(-2i)^n(-N+i\nu)_n}{(n-2N-1)_n}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} -n;\, n-2N-1 \\ -N+i\nu \end{matrix};\frac{1-ix}{2}\right), $$
$$ n=0,1,2,\ldots,N. \qquad (26) $$

Burada, ν ixtiyari həqiqi, N isə ixtiyari natural ədəddir. Qeyd edilən çoxhədlilər aşağıdakı ikinci tərtib diferensial tənliyin dəqiq həlləridir:

$$(1+x^2)y''(x)+2(\nu-Nx)y'(x)-n(n-2N-1)y(x)=0,$$

$$y(x)=P_n(x;\nu,N). \quad (27)$$

(26) ifadəsindən də görünür ki, psevdo-Yakobi çoxhədlilərinin Ermit çoxhədlilərindən əsas fərqi çoxhədlinin ümumi tərtibini təyin edən n ədədinin sonlu olmasıdır. Lakin, psevdo-Yakobi çoxhədliləri də Ermit çoxhədliləri kimi x dəyişəninin bütün həqiqi oblasdakı qiymətləri üçün aşağıdakı ortoqonallıq şərtini ödəyirlər:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-N-1}e^{2\nu\arctan x}P_m(x;\nu,N)P_n(x;\nu,N)dx=$$

$$\frac{\Gamma(2N+1-2n)\Gamma(2N+2-2n)2^{2n-2N-1}n!}{\Gamma(2N+2-n)|\Gamma(N+1-n+i\nu)|^2}\delta_{mn}. \quad (28)$$

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi psevdo-Yakobi çoxhədliləri ilə Ermit çoxhədliləri arasında yeni limit münasibəti daxil edilmişdir. Bu münasibətin riyazi ifadəsi aşağıdakı kimidir:

$$\lim_{N\to\infty}N^{\frac{n}{2}}P_n\left(\frac{x}{\sqrt{N}};\frac{\nu}{N},N\right)=\frac{1}{2^n}H_n(x). \quad (29)$$

Daha sonra isə, psevdo-Yakobi çoxhədliləri ilə Ermit çoxhədliləri arasında daha iki fərqli limit münasibətlərinin mövcudluğunu göstərilmişdir ki, bu limit münasibətləri də aşağıdakı ifadələrə malikdirlər:

$$\lim_{N\to\infty}N^{\frac{n}{2}}P_n\left(\frac{x}{\sqrt{N}};\nu,N\right)=\frac{1}{2^n}H_n(x), \quad (30)$$

$$\lim_{N\to\infty}N^{\frac{n}{2}}P_n\left(\frac{x}{\sqrt{N}};\nu\sqrt{N},N\right)=\frac{1}{2^n}H_n(x-\nu). \quad (31)$$

(30) və (31) limit münasibətlərini qarşılıqlı olaraq analiz edək. Əvvəlcə nəzərə alaq ki,

$$P_0(x;\nu,N) = 1, P_1(x;\nu,N) = x - \frac{\nu}{N}, \dots, \tag{32}$$

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, \dots. \tag{33}$$

Yuxarıdakı ifadələrdə, hər iki çoxhədlinin $n = 0$ halında ifadələri üst-üstə düşsə də, $n = 1$ halında bu qiymətlər fərqlənir və artıq psevdo-Yakobi çoxhədlisi həm ν, həm də N-dən asılı olur. $n = 1$ qiymətində (30) və (31) limitlərinin müqayisəli analizinə baxaq. (30) ifadəsindən alırıq ki:

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{N}\left(\frac{x}{\sqrt{N}} - \frac{\nu}{N^2}\right) = x. \tag{34}$$

Nəzərə alsaq ki, burada ν yuxarıda qeyd edildiyi kimi, ixtiyari həqiqi ədəddir, onda (34) ifadəsinin hətta $\nu \to \pm\infty$ şərti daxilində də doğruluğu pozulmayacaq. Bu o deməkdir ki, (30) limit ifadəsi ν həqiqi parametrinin istənilən qiymətləri üçün doğrudur [6].

Eyni yanaşmanı indi isə (31) ifadəsinə tətbiq edək. Bu zaman alırıq ki,

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{N}\left(\frac{x}{\sqrt{N}} - \frac{\nu}{N}\right) = x \tag{35}$$

Bu ifadənin digər yazılışı

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\nu}{\sqrt{N}} = 0 \tag{36}$$

deməkdir ki, buradan aydın olaraq görürük ki, $\nu \to \pm\infty$ qiymətlərində (36) ifadəsinin doğruluğu pozulur. Yəni, müqayisəli analizdən belə nəticəyə gəlirik ki, (36) ifadəsi ilə verilən limit ν həqiqi parametrinin yalnız xüsusi halda sonlu qiymətləri üçün doğrudur [10].

Qeyd etmək lazımdır ki, $n = 1$ halı üçün artıq müqayisəli analizin nəticəsində doğru cavabı aldığımızdan, yüksək tərtibli $n > 1$ halları üçün daha mürəkkəb limitləri araşdırmırıq. Lakin, bu tip analizin də eyni nəticəyə gətirib çıxaracağı aydındır.

Dissertasiyaişinin üçüncü fəsli kanonik yanaşmada qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyatorun dəqiq həll oluna bilən Qora-Uilyams konfaynment modelinə həsr olunmuşdur [1].

Qora-Uilyams kinetik enerji operatoru Ermit operator olub aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$\hat{H}_0^{QU} = -\frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{1}{M(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{M(x)}\right]. \qquad (37)$$

Baxılan qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyatorun potensialını aşağıdakı şəkildə yazsaq:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{M(x)\omega^2 x^2}{2} & |x| \leq a, \\ \infty, & |x| > a, \end{cases} \qquad (38)$$

bu zaman, faktiki olaraq $x = \pm a$ qiymətlərində konfaynment effektinə tabe olan və effektiv kütləsi koordinatdan asılı olaraq dəyişən ossilyator modelini alacağıq. Konfaynment effektinə nail olmaq məqsədi ilə əvvəlcə ossilyatorun koordinatdan asılı effektiv kütləsi olan $M(x)$ funksiyası üçün aşağıdakı analitik ifadəni seçək:

$$M \equiv M(x) = \frac{a^2 m_0}{a^2 - x^2}. \qquad (39)$$

Yoxlamaq olar ki, (39) ifadəsi aşagıdakı şərtləri ödəyir:

$$M(\pm a) = \infty, \qquad M(0) = m_0 \qquad \lim_{a\to\infty} M(x) = m_0.$$

Onda, (37) ifadəsini, həmçinin, kanonik yanaşmada impuls operatorunun $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$ kimi təyin edildiyini nəzərə alaraq, baxılan kvant ossilyator modelinin hamilton operatoru üçün

$$\hat{H}^{QU} = -\frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{1}{M(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{M(x)} + \frac{M(x)\omega^2 x^2}{2}\right] \qquad (40)$$

ifadəsini alarıq. Sadə hesablamalardan sonra, uyğun Şredinger tənliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{M'}{M}\frac{d}{dx} + \left(\frac{M'}{M}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{M''}{M}\right) + \frac{M\omega^2 x^2}{2}\right]\psi = E\psi. \quad (41)$$

Nikiforov-Uvarov metodu ilə bir sərа riyazı hesablamalar apararaq alınmış ikinci tərtib differensial tənliyi Gegenbauer çoxhədlisinin ikinci dərəcəli differensial tənlıyı

$$(1-x^2)\bar{y}''-(2\bar{\lambda}-1)x\bar{y}'+n(n+2\bar{\lambda})\bar{y}=0. \qquad (42)$$

ilə müqayisə edək, burada, $\bar{y}=C_n^{\bar{\lambda}}(x)$ Gegenbauer çoxhədliləridir. Sadə hesablamalardan sonra baxılan qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyatorun Qora-Uilyams konfaynment modelinin enerji spektri üçün aşağıdakı ifadəni alarııq:

$$E\equiv E_n^{QU}=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{\hbar^2}{2m_0a^2}(n^2+n+1), \qquad (43)$$

Ossilyatorun stasionar hallarının dalğa funksiyaları üçün ifadə isə aşağıdakı şəkildə olacaq:

$$\psi\equiv\psi_n^{QU}(x)=c_n^{QU}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{m_0\omega a^2}{2\hbar}}C_n^{\left(\frac{m_0\omega a^2}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (44)$$

Burada, c_n^{QU} normallaşma faktoru olub, aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$c_n^{QU}=2^{\frac{m_0\omega a^2}{\hbar}}\Gamma\left(\frac{m_0\omega a^2}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\left(n+\frac{m_0\omega a^2}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)n!}{\pi a\Gamma\left(n+\frac{2m_0\omega a^2}{\hbar}+1\right)}}, \qquad (45)$$

$C_n^{(\lambda)}(x)$ isə ${}_2F_1$ hiperhəndəsi funksiyaları ilə təyin olunan Gegenbauer çoxhədliləridir:

$$C_n^{(\bar{\lambda})}(x)=\frac{(2\bar{\lambda})_n}{n!}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,n+2\bar{\lambda}\\ \bar{\lambda}+1/2\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right), \quad \bar{\lambda}\neq 0. \qquad (46)$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, $a\to\infty$ limitində, yəni konfaynment effekti yoxa çıxdıqda, (43) və (44) ifadələri uyğun olaraq sonsuz harmonik ossilyatorun enerji spektrinin və stasionar hallarının dalğa funksiyalarının ifadələrini tam olaraq bərpa edir.

İndi isə, tədqiq edilən kvant sisteminin $V(x)$ potensialı üzərinə daha fərqli tələblər qoyaq. Deyək ki, kütləsi koordinatdan asılı olaraq dəyişən harmonik ossilyator potensialı aşağıdakı şəkildə verilir:

$$V(x) = \frac{M(x)\omega^2 x^2}{2}, \qquad (47)$$

lakin, $x \to \pm\infty$ hallarında potensial özünü $\frac{m_0\omega^2 a^2}{2}$ kimi aparır.

Potensialın özünü əvvəlkindən daha fərqli aparması tələb edir ki, koordinatdan asılı effektiv kütlə $M(x)$-in analitik ifadəsini aşağıdakı kimi yazaq:

$$M \equiv M(x) = \frac{a^2 m_0}{a^2 + x^2}, \qquad (48)$$

Sadəlik üçün hesab edəcəyik ki, $a > 0$. Onda, asanlıqla göstərə bilərik ki,

$$M(0) = m_0 \qquad \lim_{x=\pm\infty} \frac{a^2 m_0}{a^2+x^2} = 0.$$

Bu şərtləri nəzərə alaraq, uyğun Şredinger tənliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$-\frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{1}{M(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{M(x)}\right]\psi^{QU}(x) + \frac{M(x)\omega_0^2 x^2}{2}\psi^{QU}(x) = E^{QU}\psi^{QU}(x). \quad (49)$$

Bir sıra riyazi hesablamalardan sonra baxdığımız Şredinger tənliyinin həllindən aldığımız tənliyi $\mathrm{P}_n(\xi, v, N)$ psevdo-Yakobi çoxhədliləri üçün aşağıdakı məlum ikinci differensial tənlik ilə birbaşa müqayisə edilməklə dəqiq həll edilə bilər.

$$(1+\xi^2)\bar{y}'' - 2(\nu - N\xi)\bar{y}' + n(2N - n + 1)\bar{y} = 0,$$

$$\bar{y} = P_n(\xi, v, N). \qquad (50)$$

Bu müqayisədən asanlıqla tapa bilərik ki, E^{QU} enerji spektri qeyri-ekvidistantdır və sonludur:

$$E^{QU} = \hbar\omega_0 \frac{(N+1)\left(n + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{n+1}{2}\right) - \frac{1}{2}}{N+1},$$

$$n = 0, 2, 3, \dots, N. \quad (51)$$

Stasionar halların dalğa funksiyaları olan $\psi^{QU}(x)$ isə psevdo-Yakobi çoxhədliləri vasitəsi ilə aşağıdakı qaydada ifadə olunurlar:

$$\tilde{\psi}^{QU}(x) = c_n^{QU}\left(1 + \frac{\lambda_0{}^2 x^2}{N+1}\right)^{-\frac{N+1}{2}} P_n\left(\frac{\lambda_0 x}{(N+1)^{\frac{1}{2}}}, 0, N\right). \quad (52)$$

Burada, $P_n(\xi, v, N)$ psevdo-Yakobi çoxhədliləri olub, ${}_2F_1$ hiperhəndəsi funksiya vasitəsi ilə aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$P_n(\xi, v, N) = \frac{(-2i)^n(-N+iv)_n}{(n-2N-1)_n}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, n-2N \\ -N+iv\end{matrix}; \frac{1-ix}{2}\right),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (53)$$

$\tilde{\psi}^{QU}(x)$ ortonormaldır və normallaşma parametri c_n^{QU} psevdo-Yakobi çoxhədliləri üçün aşağıdakı ortoqonallıq şərtindən tapılır:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)^{-N-1}\, e^{2v\cdot arctanx} P_m(x, v, N) P_n(x, v, N)\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(2N+1-2n)\Gamma(2N+2-2n)2^{2n-2N-1}n!}{\Gamma(2N+2-n)|\Gamma(N+1-n+iv)|^2}\delta_{mn}. \quad (54)$$

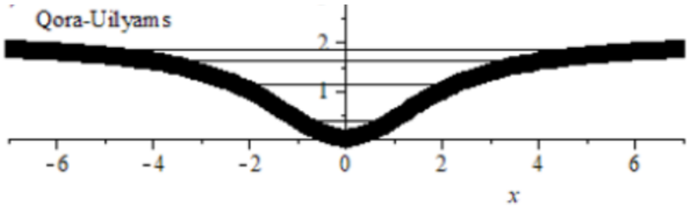
c_n^{QU} normallaşma parametrinin aşkar şəkli aşağıdakı kimidir:

$$c_n^{QU} = \frac{\Gamma(N-n+1)}{2^{n-N}\Gamma(2N-2n+1)}\sqrt{\frac{\Gamma(2N-n+1)}{\pi a_N(2N-2n+1)n!}} \quad (55)$$

Həmçinin, koordinatdan asılı effektiv kütlə $M(x)$-in N kvant ədədi vasitəsi ilə aşağıdakı şəkildə kvantlanır:

$$M_N(x) = \frac{N+1}{N+1+\lambda_0^2 x^2} m_0. \quad (56)$$

Qora-Uilyams kinetik enerji operatorlu ossilyator modelinin koordinatdan asılı kütləyə malik potensialının və bu potensiala uyğun dəqiq həllərdən tapılan enerji spektrlərinin N=3 qiyməti üçün qrafik təsvir edilmişdir ($m_0 = \omega_0 = \hbar = 1$).



Şək.1. Qora-Uilyams ossilyator modelinin koordinatdan asılı kütləyə malik (47) potensialının və bu potensiala uyğun dəqiq həllərdən tapılan enerji spektrlərinin N=3 qiyməti üçün qrafik təsviri ($m_0 = \omega_0 = \hbar = 1$).

Dəqiq həllərə malik bu tip ossilyator məsələlərini genişləndirək və effektiv kütləsi koordinatdan asılı olaraq dəyişən qeyri-relyativistik harmonik ossilyatora qəfildən xarici qravitasiya sahəsi təsir etdikdə, məsələnin dəqiq həllərini taparaq, xarici qravitasiya sahəsinin tədqiq etdiyimiz kvant harmonik ossilyatorunu necə dəyişdiyini müşahidə edək.

Qora-Uilyams kinetik enerji operatorunun təsiri altında olan qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyatorunun qravitasiya sahəsində dəqiq həllini araşdırmazdan əvvəl sabit effektiv kütləli harmonik ossilyatorun xarici qravitasiya sahəsində həllinə baxaq. Xarici bircins qravitasiya sahəsinin sabit kütləli qeyri-relyativistik xətti-harmonik kvant ossilyatoruna təsirini nəzərə alsaq, ossilyatorun potensialını aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$V(x) = \frac{m_0\omega^2x^2}{2} + m_0gx. \qquad (57)$$

Burada m_0 və ω uyğun olaraq qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyatorunun sabit effektiv kütləsi və dövri tezliyidir. Bu halda uyğun Şredinger tənliyini aşağıdakı şəkildə olar:

$$\left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m_0} + \frac{m_0\omega^2x^2}{2} + m_0gx\right]\psi(x) = E\psi(x). \qquad (58)$$

Kanonik yanaşmada birölçülü impuls operatoru

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

kimi təyin edildiyindən, (58) tənliyi aşağıdakı şəklə düşür:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left[\frac{m_0\omega^2 x^2}{2} + m_0 g x\right]\psi(x) = E\psi(x). \quad (59)$$

Bəzi riyazi hesablamalardan sonra harmonik ossilyatorun enerji spektri üçün aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$E = E_n^g = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{m_0 g^2}{2\omega^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (60)$$

Uyğun olaraq, stasionar halların dalğa funksiyası aşağıdakı ifadə ilə təyin edilir:

$$\psi \equiv \psi_n^g(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m_0\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m_0\omega\left(x+\frac{g}{\omega^2}\right)^2}{2\hbar}} H_n\left[\sqrt{\frac{m_0\omega}{\hbar}}\left(x + \frac{g}{\omega^2}\right)\right]$$
(61)

İndi isə effektiv kütləsi koordinatdan asılı olan qeyri-relyativistik kvant harmonik ossilyatora qravitasiya sahəsinin təsirini araşdıraq. Bu halda harmonik ossilyatorunun potensialı aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{M(x)\omega^2 x^2}{2} + M(x) g x, & |x| \le a, \\ \infty, & |x| > a. \end{cases} \quad (62)$$

Qora-Uilyams kinetik enerji operatorunun və potensialın ifadəsini nəzərə alaraq tam Hamilton operatorunu aşağıdakı şəkildə yaza bilərik [7]:

$$\hat{H}^{QU} = -\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{M'}{M}\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}\frac{M''}{M} + \left(\frac{M'}{M}\right)^2\right] + \frac{M\omega^2 x^2}{2} + M(x) g x.$$
(63)

Sadə hesablamalardan sonra harmonik ossilyatorun enerji spektri üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$E \equiv E_n^{gQU} = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{g^2}{a^2\omega^4}}}\,\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2m_0a^2}(n^2 + n + 1) - \frac{m_0\omega^2a^2}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4g^2}{\omega^4a^2}}\right). \quad (64)$$

Baxılan harmonik ossilyatorun stasionar hallarının dalğa funksiyası isə

$$\psi \equiv \psi_n^{gQU}(x) = c_n^{gQU}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\kappa_1}\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-\kappa_2} P_n^{(-2\kappa_1, -2\kappa_2)}\left(\frac{x}{a}\right). \quad (65)$$

Burada, c_n^{QU}

$$c_n^{gQU} = \frac{1}{2^{\sqrt{\kappa}+\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{\left(2n + 2\sqrt{\kappa} + 1\right)\Gamma\left(n + 2\sqrt{\kappa} + 1\right)n!}{a\Gamma(n - 2\kappa_1 + 1)\Gamma(n - 2\kappa_2 + 1)}} \quad (66)$$

normallaşma faktoru olub, Yakobi çoxhədlilərinin ortoqonallıq şərtindən aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\int_{-1}^{1}(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta} P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1}\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)n!}\delta_{mn}. \quad (67)$$

Dissertasiya işinin dördüncü fəsli kanonik yanaşmada qeyri-relyativistik xətti harmonik ossilyatorun kinetik enerji operatoru Qaliley invariantlığına tabe olan konfaynment modelinin necə qurulduğuna həsr olunmuşdur. Hazırki fəslin ilk paraqrafında bu səbəbdən əvvəlcə koordinatdan asılı effektiv kütlə üçün Qaliley invariantlığı halının bəzi xüsusiyyətləri izah edilir [8].

Növbəti paraqrafda Qaliley invariantlığı ilə uyğunlaşan koordinatdan asılı kütlə yanaşmasından istifadə edilərək müxtəlif kinetik enerji operatorlarının necə qurulması araşdırılır və Qaliley invariantlığına tabe olan yeni qeyri-relyatıvıstik xətti harmonik ossilyator modelinin dəqiq həlli tapılır [2].

Qaliley invariantlığına tabe olan kvant harmonik ossilyatorun konfaynment modeli üçün kinetik enerji operatorunun analitik ifadəsi bu fəslin əvvəlki paraqrafında da edilmiş geniş müzakirələr əsasında aşağıdakı kimi seçilmişdir[4]:

$$\widehat{H}_0^{Qİ} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{M(x)}\hat{p}^2 + \hat{p}\frac{1}{M(x)}\hat{p} + \hat{p}^2\frac{1}{M(x)}\right]. \qquad (68)$$

Burada, $M(x)$ ossilyatorun koordinatdan asılı olan effektiv kütləsidir. Bu zaman, faktiki olaraq konfaynment effektinə tabe olan və effektiv kütləsi koordinatdan asılı olan ossilyator modelini alacağıq və bu halda konfaynment effektinə nail olmaq üçün koordinatdan asılı effektiv kütlə

$$M \equiv M(x) = \frac{a^2 m_0}{a^2 - x^2} \qquad (69)$$

ifadəsi ilə təyin edilir və bu halda ossilyatorun Hamilton operatoru aşağıdakı kimi təsvir oluna bilər [5]:

$$\widehat{H}^{Qİ} = -\frac{\hbar^2}{6}\left[\frac{1}{M(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}\frac{1}{M(x)}\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{M(x)}\right] + \frac{M(x)\omega^2 x^2}{2}.$$

Lazımi hesablamalardan sonra harmonik ossilyatorun enerji spektri üçün

---

[4] Levy-Leblond, J.M. Position-dependent effective mass and Galilean invariance // Physical Review A, -1995. 52, - p. 1845-1849.

$$E_n^{Qİ} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2m_0a^2}n(n+1) + \frac{\hbar^2}{3m_0a^2}, \qquad (71)$$

stasionar halların dalğa funksiyaları üçün isə

$$\psi_n^{Qİ}(x) = c_n\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{m_0\omega a^2}{2\hbar}} C_n^{\left(\frac{m_0\omega a^2}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (72)$$

İfadələrini almış oluruq.

Fəslin sonuncu paraqrafında isə koordinatdan asılı olaraq dəyişən kütlə formalizmi çərçivəsində xarici qravitasiya sahəsinin baxılan harmonik ossilyator modelinə təsiri araşdırılır və

$$\widehat{H}^{gQİ} = -\frac{\hbar^2}{6}\left[\frac{1}{M(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}\frac{1}{M(x)}\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{M(x)}\right] + \frac{M(x)\omega^2x^2}{2}$$

$$+M(x)gx. \qquad (73)$$

hamilton operatorluna uyğun Şredinger tənliyini həll edilərək, baxılan modelin enerji spektri və stasionar hallarının dalğa funksiyaları üçün dəqiq ifadələr təqdim edilir [4]:

$$E \equiv E_n^{gQI} = \hbar\omega\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{g^2}{a^2\omega^4}}}\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2m_0a^2}n(n+1) +$$

$$\frac{\hbar^2}{3m_0a^2} - m_0\omega^2a^2\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{g^2}{a^2\omega^4}}\right). \qquad (74)$$

$$\psi \equiv \psi_n^{gQI}(x) = c_n^{gL}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\kappa_1}\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-\kappa_2} P_n^{(-2\kappa_1, -2\kappa_2)}\left(\frac{x}{a}\right). \qquad (75)$$

Normallaşma faktoru c_n^{gGI}:

$$c_n^{gQI} = \frac{1}{2^{\sqrt{\kappa}+\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{(2n + 2\sqrt{\kappa} + 1)\Gamma(n + 2\sqrt{\kappa} + 1)n!}{a\Gamma(n - 2\kappa_1 + 1)\Gamma(n - 2\kappa_2 + 1)}}, \qquad (76)$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Yakobi çoxhədlilərinin ortoqonallıq münasibətindən təyin edilir [9].

Nəticədə deyə bilərik ki, harmonik ossilyatorun baxılan modeli çox maraqli və əhəmiyyətli olub sadə harmonik ossilyatordan öz xüsusiyyətlərinə görə fərqlənir. Konfaynment effekti və enerji spektrinin qeyri-xəttiliyi modelin gələcəkdə də geniş istifadə edilə biləcəyini deməyə imkan verir.

NƏTİCƏ

Hazırki dissertasiya işində, ilk dəfə olaraq koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində üç müxtəlif kinetik enerji operatoru üçün qeyri-düzbucaqlı profilə malik kvant çuxurlarıni təsvir edən Şredinger tənliyi müqayisəli şəkildə dəqiq həll edilərək, həm enerji spektri həm də stasionar halların dalğa funksiyasının aşkar şəkilləri tapılmışdır. Kvant çuxurlarının qeyri-düzbucaqlı profilləri məlum harmonik ossilyator potensialının analitik ifadəsi sayəsində əldə edilmişdir. Kvant çuxurlarının divarlarının özünü sonlu və sonsuz hüdrürlüklü aparması, yəni modelə tətbiq konfaynment effektinin meydana çıxması isə koordinatdan asılı kütlənin özünəməxsus şəkildə analitik ifadələrinin seçilməsi vasitəsilə əldə edilmişdir. Ümumilikdə, dissertasiya işində aşağıdakı mühüm nəticələr tapılmışdır:

-Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Ju-Kroemer kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyi harmonik ossilyatorvari sonsuz və sonlu dərin kvant çuxurları modelləri üçün dəqiq həll edilərək qeyri-xətti enerji spektrinin və Gegenbauer, Yakobi və psevdo-Yakobi çoxhədliləri ilə ifadə olunan stasionar halların dalğa funksiyasının aşkar şəkilləri tapılmışdır;

-Ju-Kroemer kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari sonsuz dərin kvant çuxurları modeli üçün dəqiq həll edilərək tapılan qeyri-xətti enerji spektrinin gətirilən tezliyinin də konfaynment parametrindən asılı olduğu və bu parametr sıfıra yaxınlaşarkən kəskin olaraq yüksəldiyi müşahidə edilmişdir;

-Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Qora-Uilyams və Qaliley invariantlığına tabe olan kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyi harmonik ossilyatorvari sonsuz dərin kvant çuxuru üçün həm xarici qravitasiya sahəsinin təsiri altında, həm də bu cür təsirin yoxluğunda dəqiq həll edilərək, həm qeyri-xətti enerji spektrinin, həm də Gegenbauer və Yakobi çoxhədliləri ifadə olunan stasionar halların dalğa funksiyalarının aşkar şəkilləri tapılmışdır;

-Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Qora-Uilyams və Qaliley invariantlığına tabe olan kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari kvant çuxurları üçün məxsusi qiymətləri olan qeyri-xətti enerji spektrlərinin müqayisəsindən Qaliley invariantlığına tabe olan kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan modelin enerji spektrinin həmişə daha böyük qiymətlər aldığı müşahidə edilmişdir;

-Koordinatdan asılı kütlə formalizmi çərçivəsində Ju-Kroemer, Qora-Uilyams və Qaliley invariantlığına tabe olan kinetik enerji operatorları ilə ifadə olunan Şredinger tənliyinin harmonik ossilyatorvari kvant çuxurumodellərinin dəqiq həlləri ilə məlum qeyri-relyativistik kanonik kvant harmonik ossilyatorunun dəqiq həlləri arasında konfaynmentin yoxa çıxması ilə bərpa olunan limit münasibətləri tam dəqiqliklə hesablanmışdır;

-Psevdo-Yakobi və Ermit çoxhədliləri arasında birbaşa əlaqənin mövcudluğunu göstərən yeni limit münasibəti tapılmış və bu münasibətin doğruluğu riyazi olaraq isbat edilmişdir.

Yuxarıda sadalanan nəticələr yaxın gələcəkdə həm təcrübi yolla alınmış qeyri-düzbucaqlı mürəkkəb profilə müasir nanostrukturların müxtəlif xarakteristikalarının kvant fizikası çərçivəsində izahında, həm də bir çox ortoqonal çoxhədlilər arasında indiyə kimi məlum olmayan birbaşa limitlərin tapılmasında böyük rol oynaya bilər.

Dissertasiya işi üzrə dərc olunmuş elmi işlərin siyahısı.

1. Jafarov, E.I., Nagiyev, S.M., Seyidova, A.M. Explicit solution of the position-dependent mass Schrodinger equation with Gora-Williams kinetic energy operator: confined harmonic oscillator model // U.P.B. Sci. Bull., - 2020. A (82),1, - p. 327-336.
2. Jafarov, E.I., Mammadova, A.M. On the exact solution of the confined position-dependent mass harmonic oscillator model under the kinetic energy operator compatible with Galilean invariance // AJP Fizika, - 2020. 26(3), - p. 31-35.
3. Jafarov, E.I., Nagiyev, S.M., Seyidova, A.M. Zhu-Kroemer kinetic energy operator with position-dependent effective mass and exact solution of the non-relativistic confined harmonic oscillator model // Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Xəbərləri, - 2020. 23, - p. 1-12.
4. Mammadova A.M. On the exact solution of the confined position-dependent mass harmonic oscillator model with the kinetic energy operator compatible with Galilean invariance under the homogeneous gravitational field // AJP Fizika, - 2021. 23(3), - p. 33-39.
5. Cəfərov, E.I., Məmmədova, A.M., Məmmədova, N.F. Von Roos kinetik enerji operatorunun təsiri altında olan potensial qutuvari kvant harmonik ossilyatorunun dəqiq həlli // AJP Fizika, - 2021. 27(1), – p. 50-58.
6. Jafarov, E.I, Mammadova, A.M., Van der Jeugt. On the Direct Limit from Pseudo Jacobi Polynomials to Hermite Polynomials // Mathematics - 2021, 9 (88), - p. 131-139.
7. Məmmədova A.M. Qora-Uilyams kinetik enerji operatoru ilə ifadə olunan kvant harmonik ossilyatorunun xarici qravitasiya sahəsində dəqiq həlli // AJP Fizika -2021, 27(4), - p. 50-58.
8. Mammadova A.M. Exactly solution of the position dependent effective mass Schrödinger equation with new kinetic energy operator for the confined quantum harmonic oscillator model // - Manchester, - Great Britain, Proceedings of the 7th international Scientific and Practical Conference “Science and Practice: Implementation to Modern Society” -2020. 1(31), - p. 162-164.

9. Mammadova A.M. Confined position-dependent mass harmonic oscillator models with different kinetic energy operators under the homogeneous gravitational field // - Manchester, - Great Britain, Proceedings od the 13th international Scientific and Practical Conference “Science and Practice: Implementation to Modern Society” - 2022. 128, - p. 218-220.
10. Mammadova A.M. Ortoqonal çoxhədlilərin Aski sxeminə daxil olan psevdo-Yakobi və Ermit çoxhədliləri arasındakı müxtəlif limit ifadələrinin müqayisəli analizi // SDU, - Sumqayıt, II Respublika elmi konfransının materialları, Riyaziyyatın fundamental problemləri və intellektual texnologiyaların təhsildə tətbiqi, - 2022. 10, s. 97-101.

Dissertasiyanın müdafiəsi 04 dekabr 2024-cü il tarixində saat 15^{00}-da Bakı Dövlət Universiteti nəzdində fəaliyyət göstərən ED 2.19 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: Bakı şəh., AZ 1148, Z.Xəlilov küç., 23, Bakı Dövlət Universiteti, əsas bina.

Dissertasiya ilə Baki Dövlət Universitetinin Elmi kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiyanın və avtoreferatın elektron versiyaları Bakı Dövlət Universitetinin rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat 04.noyabr 2024-cü il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 16.10.2024

Kağızın formatı: A5

Həcm: 35196

Tiraj: 100 nüsxə