НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

БАХРАМ АЛИ оглы АЛИЕВ

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА И ИХ НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

1211.01-Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора наук по математике

Баку – 2013

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

BƏHRAM ƏLİ OĞLU ƏLİYEV

ELLİPTİK TİP DİFERENSİAL-OPERATOR TƏNLİKLƏR ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLL OLUNMASI VƏ ONLARIN BƏZİ SPEKTRAL XASSƏLƏRİ

1211.01-Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2013

Dissertasiya işi AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Diferensial tənliklər" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi məsləhətçi:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Sasun Y.Yakubov**

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Əkbər B.Əliyev**
(Azərbaycan Texniki Universiteti);
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Rauf X.Əmirov**
(Türkiyə, Sivas, Cumhuriyyət Universiteti);
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru **Rəxşəndə M.Cabbarzadə**
(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu).

Aparıcı təşkilat:
Bakı Dövlət Universiteti
«Diferensial və inteqral tənliklər» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 17 may 2013-cü il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 18 mart 2013-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена в отделе «Дифференциальные уравнения» Института Математики и Механики НАН Азербайджана.

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, проф. **Сасун Я.Якубов**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, проф. **Акпер Б.Алиев**
(Азербайджанский Технический Университет);
доктор физико-математических наук, проф. **Рауф Х.Амиров**
(Турция, Сивас, Республиканский Университет);
доктор физико-математических наук **Рахшанда М.Джаббарзаде**
(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана).

Ведущая организация:
Бакинский Государственный Университет
кафедра «Дифференциальные и интегральные уравнения».

Защита диссертации состоится 17 мая 2013 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 18 марта 2013 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория дифференциально-операторных уравнений, и примыкающие к ней математические области, являются современными и важными методами для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Зачастую, этими методами можно исследовать задачи, которые не решаются известными классическими методами.

У истоков этих теорий стоят многие известные математики, такие как Ш.Агмон, Л.Ниренберг, С.Г.Крейн, Х.Танабе, Т.Като, А.Пази, Г.О.Фатторини, Дж.А.Голдстейн, Р.С.Филлипс, З.И.Халилов и другие. Актуальность методов теории дифференциально-операторных уравнений не утрачена и по сегодняшней день. Среди современных монографий в этой области можно указать книги С.Г.Крейна, В.И.Горбачука и М.Л.Горбачука, А.Я.Шкляра, А.А.Дезина, А.Фавини и А.Яги, С.Якубова и Я.Якубова, В.Козлова и В.Мазьи, П.Кунстманна и Л.Вайса и др.

Краевые задачи для эллиптических дифференциально-операторных уравнений, кроме выше указанных монографий были рассмотрены также во многих работах, например, П.Е.Соболевского, В.А.Треногина, Г.И.Лаптева, Ю.И.Дубинского, М.Л.Горбачука и В.И.Горбачука, М.Г.Гасымова, А.А.Шкаликова, В.А.Ильина и В.С.Филиппова, С.Я.Якубова, А.Г.Костюченко, В.А.Михайлеца, В.К.Романко, С.С.Мирзоева, Н.И.Юрчука, М.Байрамоглы, В.Б.Шахмурова, М.С.Джабраилова, Г.И.Асланова, К.С.Мамедова, G.Dore and S.Yakubov, H.Amann, A.Aibeche, R.de Laubenfels, A.Favini and Ya.Yakubov, А.Р.Алиева, И.В.Алиева, Н.М.Аслановой и других.

Во всех этих работах, в основном, изучены вопросы разрешимости (корректная, нормальная, однозначная, коэрцитивная) фредгольмовости, построения функции Грина, распределения собственности значений, полноты систем корневых векторов, полноты элементарных решений и так далее, краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений в случае, когда в главной части коэффициенты краевых условиях комплексные числа или линейные ограниченные операторы.

После появления монографии Ж.-Л.Лионса и Э.Мадженса (Ж.-Л.Лионс и Э.Мадженес «Неоднородные граничные задачи и их приложения» Москва, Мир, 1971), Х.Трибеля (Х.Трибель «Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы», Москва, Мир, 1980), С.Якубова и Я.Якубова (S.Yakubov and Ya.Yakubov “Differential-Operator Equations. Ordinary and Partial Differential Equations” Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2000), теория краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений более интенсивно развивалось, появилось много замечательных результатов. Причиной такого бурного роста, по видимому, является тот факт, что когда поставленная краевая задача рассматривается в пространстве $L_2((a,b);H)$, где H гильбертово пространство, все необходимые понятия для исследования, такие как промежуточные пространства двух гильбертовых пространств, теорема о промежуточных производных, теореме о следах, теорема об интерполяции, преобразование Фурье для абстрактных функций и так далее, с точки зрения применимости к дифференциально-операторным уравнениям, четко изложены в выше указанной монографии Ж.-Л.Лионса и Э.Мадженса.

А в случае, когда краевая задача для эллиптических дифференциально-операторных уравнений рассматривается в пространстве $L_p((a,b);H)$, $p \in (1,\infty)$, и главный оператор в уравнении позитивен в H, то все нужные понятия и математические аппараты для исследования, такие как интерполяционные пространства двух банаховых пространств, теорема о промежуточных производных, теорема об интерполяции, теорема о следах, мультипликаторы Фурье, и так далее, даны в выше указанных монографиях Х.Трибеля, С.Якубова и Я.Якубова.

Пятая глава монографии С.Якубова и Я.Якубова, в основном, посвящена изучению в гильбертовом пространстве H, следующих краевых задач для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром:

$$\begin{aligned} L(\lambda,D)u &:= \lambda u(x) - u''(x) + Au(x) + \\ &+ A_1(x)u'(x) + A_2(x)u(x) = f(x),\ x \in (0,1), \end{aligned} \tag{1}$$

$$L_k u := \alpha_k u^{(m_k)}(0) + \beta_k u^{(m_k)}(1) + \sum_{s=1}^{N_k} T_{ks} u(x_{ks}) = f_k,\ k = 1,2, \tag{2}$$

где λ-спектральный параметр; $m_k \in \{0.1\}; \alpha_k$ и β_k-комплексные числа, которые удовлетворяют некоторым условиям алгебраического характера; $x_{ks} \in [0,1]$; $A-$линейный, замкнутый оператор со всюду плотной в H областью определения $D(A)$ и резольвентой, убывающей как $|\lambda|^{-1}$ при достаточно больших $|\lambda|$ в некоторых углах, содержащих отрицательную полуось; операторы $A_k(x)$ для $x \in [0,1]$ и T_{ks}, вообще говоря, неограниченные операторы в H; N_k – некоторые натуральные числа; $D := \frac{d}{dx}$.

При соответствующих условиях, на все данные установлена коэрцитивная оценка для решения задачи (1), (2) в $L_p((0,1);H)$, $p \in (1,+\infty)$, изучено базисное свойство по Абелю системы корневых вектор-функций, соответствующих однородной краевой задаче (1), (2) в пространстве $L_2((0,1);H)$, а также найдены достаточные условия для свойства фредгольмовости задачи (1), (2) при $\lambda = 0$.

В дальнейшем в работе С.Якубова[1] в возмущенных частях задачи (1), (2) взяты операторы другого характера, т.е. в H изучена следующая краевая задача для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром:

$$L(\lambda, D)u := \lambda u(x) - u''(x) + Au(x) + (A_1 u)(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} L_k u &:= \alpha_k u^{(m_k)}(0) + \beta_k u^{(m_k)}(1) + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_k} \gamma_{k_j} u^{(m_k)}(x_{k_j}) + T_k u = f_k, \quad k = 1,2, \end{aligned} \qquad (4)$$

где $x_{k_j} \in (0,1)$, A_1 – оператор в $L_p((0,1);H)$, $p \in (1,+\infty)$, T_k – операторы действующие из $L_p((0,1);H)$ в H.

В данной диссертации в гильбертовом пространстве H, изучаются те краевые задачи для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка со спектральным параметром в которых краевые условия содержат спектральный параметр того же порядка, как в уравнении.

[1] S.Yakubov. Problems for elliptic equations with operator-boundary conditions. Integ. equation and oper. theory, 2002, 43, p.215-236.

Далее в данной диссертации, в гильбертовом пространстве H рассматривается краевая задача для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром, а также краевая задача для эллиптического дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка, в случае, когда главные части рассматриваемых задач в краевых условиях содержат неограниченные операторы, действующие в H.

В данной диссертации рассматривается также краевые задачи для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка со спектральным параметром и с разрывным (кусочно-постоянным) коэффциентом при производной второго порядка и с условиями сопряжения в точке разрыва. Полученные абстрактные результаты в данной диссертации применено к краевым задачам для эллиптических дифференциальных уравнений в частных произхводных со спектральным параметром.

Работ, посвященных изучению краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка со спектральным параметром в краевых условиях сравнительно мало. В работах В.И.Горбачука и М.А.Рыбака, М.А.Рыбака изучено асимптотическое поведение собственных значений некоторых краевых задач для операторного уравнения Штурма-Лиувилля в случае, когда одно из краевых условий содержит спектральный параметр.

Цель работы.

1. Исследование вопросов разрешимости, полноты системы корневых вектор-функций, асимптотическое распределение собственных значений, свойства фредгольмовости краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка со спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях в гильбертовом пространстве, на конечном отрезке.
2. Исследование вопросов разрешимости, полноты системы корневых вектор-функций, свойства фредгольмовости краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка со спектральным параметром и с неограниченным операторным граничным условием в гильбертовом пространстве, на конечном отрезке.
3. Исследование свойства фредгольмовости краевых задач для эллиптического дифференциально-операторного уравнения

четвертого порядка с неограниченными операторными граничными условиями в гильбертовом пространстве, на конечном отрезке.

4. Исследование вопросов разрешимости, асимптотическое распределение собственных значений краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с разрывным коэффициентом при производной второго порядка и со спектральным параметром в гильбертовом пространстве, на конечном отрезке.

5. Применение полученных абстрактных результатов к эллиптическим уравнениям в частных производных.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты:

- Найдены достаточные условия обеспечивающие коэрцитивной разрешимости краевых задач для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях в случаях, когда спектральный параметр в граничных условиях находится перед самой искомой функцией и перед ее производной;
- установлена дискретность спектра и полнота системы корневых вектор-функций краевых задач для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях в случае, когда спектральный параметр в граничных условиях перед самой искомой функцией, дается применение абстрактных результатов для изучения дискретности спектра и полноты корневых функций соответствующих краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в прямоугольнике;
- изучены асимптотическое поведение собственных значений краевых задач для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях в случаях, когда спектральный параметр в граничных условиях находится перед самой искомой функцией и перед ее производной, получены асимптотические формулы для собственных значений;
- установлена некоэрцитивность разрешимости краевых задач для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях в случае, когда граничные условия

неразделенные, изучено также асимптотическое поведение собственных значений соответствующих однородной краевой задаче;

- найдены достаточные условия обеспечивающие коэрцитивной разрешимости краевых задач для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром в случае, когда в главной части одно из краевых условий содержит линейный неограниченный оператор. Установлена фредгольмовость задачи. Изучена также дискретность спектра и полнота системы корневых функций соответствующих однородных краевых задач. Полученные абстрактные результаты были применены к соответствующими краевыми задачами для эллиптических уравнений в частных производных на квадрате;
- найдены достаточные условия обеспечивающие фредгольмовость одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка, когда в главной части краевых условий участвуют линейные неограниченные операторы. Полученный абстрактный результат применено к соответствующий краевой задаче для эллиптических уравнениях в частных производных четвертого порядка в прямоугольнике;
- найдены достаточные условия обеспечивающие коэрцитивную разрешимость одной краевой задачи для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка со спектральным параметром и с разрывным коэффициентом при второй производной на конечном отрезке в случае, когда коэффициенты в условиях сопряжения комплексные числа. Получены асимптотические формулы для собственных значений соответствующих однородных краевых задач.
- найдены достаточные условия обеспечивающие коэрцитивной разрешимости одной краевой задачи для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка со спектральным параметром и с разрывным коэффициентом при производной второго порядка в случае, когда в одном из условий сопряжения присутствует линейный неограниченный оператор.

Общая методика исследований. В работе применяются методы теории самосопряженных и позитивных операторов, теории линейных операторов в гильбертовом пространстве, теории полугрупп линейных операторов, метод преобразования Фурье в абстрактных пространствах, теории интерполяции линейных опертаоров в банаховых пространствах, теории эллиптических дифференциальных операторов.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты полученные в диссертации носят, в основном, теоретический характер. Однако, утверждения, доказанные на языке абстрактных операторов, могут быть использованы при изучении вопросов разрешимости, полноты системы корневых функций, асимптотическое поведение собственных значений, фредгольмовости краевых задач для эллиптических уравнений в частных производных в прямоугольнике, в случае, когда один и тот же спектральный параметр присутствует в уравнении и в краевых условиях, а также при изучении краевых задач для эллиптических уравнений в частных производных в случае, когда краевые условия содержит неограниченные операторы.

С другой стороны при исследовании процессов распространения волн в электродинамике, акустике, теории упругости возникают краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными коэффициентами, и с условиями сопряжения на линиях (поверхностях) разрыва коэффициентов. При изучении таких задач, которые имеют практическое значение, в диссертации использованы методы дифференциально-операторных уравнений.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно обсуждались на общеинститутских семинарах Института Математики и Механики НАН Азербайджана, на семинарах отделов «Дифференциальные уравнения» (рук.: член-корр НАНА, проф. Б.А.Искендеров), «Функциональный анализ» (рук.: д.ф.-м.н., проф. Н.Ш.Искендеров), «Негармонический анализ» (рук.: д.ф.-м.н., проф. Б.Т.Билалов), «Уравнения математической физики» (рук.: член-корр НАНА, проф. Р.В.Гусейнов), на семинаре кафедры «Математический анализ» Азербайджанского Государственного Педагогического Университета. Результаты диссертации докладывались на научной конференции, посвященной 80-летию Бакинского Государственного Университета (Баку, 1999), на X международной конференции по математике и механике, посвященной 45-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана (Баку, 2004), на международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию со дня рождения член-корр. НАНА, проф. И.Т.Мамедова (Баку, 2005), на XII международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летию член-корр. НАНА, проф. Б.А.Искендерова (Баку, 2006), на XIII международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летию со дня рождения акад. А.Д.Гаджиева (Баку, 2007), на III международной научной конференции «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения» в Дагестанском Государственном Университете (Махачкала, 2007), на международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию Института Математики и Механики НАНА (Баку, 2009), на международной конференции, посвященной 80-летию акад. Ф.Г.Максудова «Спектральная теория и ее приложения» (Баку, 2010), на международной конференции, посвященной 100-летию акад. З.И.Халилова «Функциональный анализ и его приложения» (Баку, 2011), на V международной научной конференции, посвященной 80-летию Дагестанского Государственного Университета (Махачкала, 2011).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 28 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 253 страницах, состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 131 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации. Кроме этого, во введении вводятся необходимые функциональные пространства, некоторые вспомогательные факты и понятия связанные с тематикой диссертации.

Пусть A линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E с областью определения $D(A)$. Множество $D(A)$ превращается в банахово пространство $E(A)$ относительно нормы

$$\|u\|_{E(A)} := \|u\|_E + \|Au\|_E .$$

Пусть E_1 и E два банаховых пространства. Через $B(E_1, E)$ обозначим банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из E_1 в E с обычной операторной нормой. В частном случае $B(E,E) := B(E)$.

Линейный замкнутый оператор A назовем сильно позитивным в банаховым пространстве E, если он удовлетворяет неравенству

$$\left\|(\lambda I + A)^{-1}\right\|_{B(E)} \le c(1+|\lambda|)^{-1}, \quad \exists c > 0, \operatorname{Re}\lambda \ge 0.$$

Пусть A сильно позитивный оператор в банаховом пространстве E. Тогда известно, что $-A$ является производящим оператором аналитической при $t>0$ полугруппы e^{-tA} и это полугруппа экспоненциально убывает, т.е. существуют два числа $c>0, \sigma_0>0$ такие, что $\left\|e^{-tA}\right\|_{B(E)} \le ce^{-\sigma_0 t}$, $0 \le t < +\infty$.

С помощью теории аналитической полугруппы можно дать новые эквивалентные нормы для интерполяционных пространств, которые очень полезны с точки зрения теории дифференциально-операторных уравнений.

Пусть оператор $-A$ порождает аналитическую при $t>0$ и сильно непрерывную при $t \ge 0$ полугруппу e^{-tA}. Тогда интерполяционные пространства $\left(E(A^n), E\right)_{\theta,p}$ банаховых пространств $E(A^n)$ и E определяется как

$$\left(E\left(A^n\right), E\right)_{\theta,p} := \Bigg\{u : u \in E, \|u\|_{\left(E(A^n),E\right)_{\theta,p}} :=$$

$$= \left(\int_0^{+\infty} t^{-1+n\theta p}\left\|A^n e^{-tA}u\right\|_E^p dt\right)^{1/p} + \|u\|_E < \infty\Bigg\}, \ \theta \in (0,1), \ p \ge 1, \ n \in N.$$

Дадим теперь определения интерполяционных (промежуточных) пространств двух гильбертовых пространств.

Пусть H_1 и H два сепарабельных гильбертовых пространства, причем H_1 плотно в H и непрерывно в него вложено: $H_1 \subset H$. Тогда известно, что существует некоторый оператор $S = S^* \ge \gamma^2 I$ ($0 \ne \gamma \in R, I$ единичный оператор в H), $D(S) = H_1$ действующий в H. Промежуточное пространство

$[H_1, H]_\theta$ $(0 \le \theta \le 1)$ определяется следующим образом: $[H_1, H]_\theta = D\left(S^{1-\theta}\right)$.

Норма в $[H_1, H]_\theta$ определяется как норма графика оператора $S^{1-\theta} : \|u\|_{[H_1,H]_\theta} := \left(\|u\|_H^2 + \left\|S^{1-\theta}u\right\|_H^2 \right)^{1/2}$. Таким образом, если $A = A^* \ge \gamma^2 I$ в H, то $[H_1, H]_\theta = H\left(A^{1-\theta}\right)$.

Пусть $A = A^* \ge \gamma^2 I$ в H. Тогда для $\alpha \ge 0, \beta \ge 0,\ 0 < \theta < 1$ имеют место равенства

$$\left[H\left(A^\alpha\right), H\left(A^\beta\right)\right]_\theta = \left(H(A^\alpha), H\left(A^\beta\right)\right)_{\theta,2} = H\left(A^{(1-\theta)\alpha + \theta\beta}\right).$$

Пусть A сильно позитивный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда известно, что пространство

$$W_p^2((0,1); H(A), H) := \{u : u \in L_p((0,1); H(A)), u'' \in L_p((0,1); H)\},\ p \ge 1,$$

с нормой

$$\|u\|_{W_p^2((0,1);H(A),H)} := \|u\|_{L_p((0,1);H(A))} + \|u''\|_{L_p((0,1);H)},$$

а также пространство

$$W_p^4((0,1); H(A), H) := \left\{u : u \in L_p((0,1); H(A)), u^{(IV)} \in L_p((0,1); H)\right\},$$

с нормой

$$\|u\|_{W_p^4((0,1);H(A),H)} := \|u\|_{L_p((0,1);H(A))} + \left\|u^{(IV)}\right\|_{L_p((0,1);H)},$$

являются банаховыми пространствами.

Пусть $s \ge 0$ и H, H_1 гильбертовы пространства. Обозначим для $0 \le s \le 1,\ p \in (1, \infty)$ банахово пространство

$$B_p^s\left((0,1); (H_1, H)_{1-\frac{s}{2},2}, H \right) := \left(W_p^2((0,1); H_1, H), L_p((0,1); H)\right)_{1-\frac{s}{2},2}$$

и для $1 < s < 2$ банахово пространство

$$B_p^s\left((0,1); (H_1, H)_{1-\frac{s}{2},2}, H \right) :=$$

$$= \left(W_p^2((0,1); H_1, H), B_p^1\left((0,1); (H_1, H)_{-\frac{1}{2},2}, H \right) \right)_{2-s,2}.$$

Обозначим интерполяционные пространства Соболевских пространств

$$B_{q,p}^{s}(0,1) := \left(W_q^{s_0}(0,1), W_q^{s_1}(0,1)\right)_{\theta,p},$$

где $0 \le s_0, s_1$ целые числа, $0 < \theta < 1,\ 1 < q < \infty,\ 1 \le p \le \infty$ и $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. Установим

$$W_p^s(0,1) := B_{p,p}^s(0,1) := \left(W_p^{s_0}(0,1), W_p^{s_1}(0,1)\right)_{\theta,p},$$

если $0 < s \ne$ целому числу.

Через $\sigma_q(H, H_1), q > 0$ обозначим множество опертаоров A, действующих компактно из гильбертова пространства H в гильбертово пространство H_1, для которых $\sum_{j=1}^{\infty} S_j^q\left(A; H, H_1\right) < \infty$, где $S_j\left(A; H, H_1\right)$ собственные числа неотрицательного, самосопряженного, компактного оператора $T = \left(A^* A\right)^{1/2}$ действующие в H.
Если A в H самосопряженный, то

$$S_j\left(A; H, H\right) := \left|\lambda_j(A)\right|.$$

В первом параграфе первой главы, в гильбертовом пространстве H, рассматривается следующая краевая задача

$$L(\lambda, D)u := \lambda u(x) - u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{5}$$

$$L_1(\lambda)u := \lambda u(0) - \alpha u'(0) + T_1 u = f_1,$$

$$L_2(\lambda)u := \lambda u(1) + \beta u'(1) + T_2 u = f_2. \tag{6}$$

где $\lambda -$ комплексный параметр; α и β-некоторые комплексные числа из правой части комплексной плоскости; A-оператор в гильбертовом пространстве H; T_k $(k = 1,2)$ операторы из $L_2\left((0,1), H\right)$ в H; $D := \dfrac{d}{dx}$.

Доказана следующая

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) A является самосопряженным, положительно-определенным оператором в гильбертовом пространстве H;

2) вложение $H(A) \subset A$ компактно;

3) $|\arg\alpha| \le \dfrac{\pi-\varphi}{2}$ и $|\arg\beta| \le \dfrac{\pi-\varphi}{2}$ для каждого фиксированного $0 \le \varphi < \pi$;

4) $m_1 = \begin{cases} 1, & \alpha \ne 0 \\ 0, & \alpha = 0 \end{cases}$, $m_2 = \begin{cases} 1, & \beta \ne 0 \\ 0, & \beta = 0 \end{cases}$; если $m_k = 0$, то $T_k = 0$; если $m_k = 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ и $u \in W_p^2\big((0,1); H(A), H\big)$, $p \in (1,\infty)$,

$$\|T_k u\|_{(H(A),H)_{\theta_k,p}} \le \varepsilon \|u\|_{W_p^2((0,1);H(A),H)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_p((0,1);H)},$$

$$\|T_k u\|_H \le \varepsilon \|u\|_{B_p^{1+\frac{1}{p}}\left((0,1);H(A^{\theta_k}),H\right)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_p((0,1);H)},$$

где, $\theta_k = \dfrac{m_k}{2} + \dfrac{1}{2p} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2p}$.

Тогда, оператор $\mathbb{L}(\lambda): u \to \mathbb{L}(\lambda)u := \big(L(\lambda, D)u, L_1(\lambda)u, L_2(\lambda)u\big)$, для достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \le \varphi < \pi$ является изоморфизмом из $W_p^2\big((0,1); H(A), H\big)$ на $L_p\big((0,1); H\big) \dot{+} \big(H(A), H\big)_{\theta_1,p} \dot{+} \big(H(A), H\big)_{\theta_2,p}$ и справедлива следующая оценка для решения задачи (5), (6).

$$|\lambda|\|u\|_{L_p((0,1);H)} + \|u''\|_{L_p((0,1);H)} + \|Au\|_{L_p((0,1),H)} \le$$

$$\le C_\varphi \left[|\lambda|^{\max\{m_k\}} \|f\|_{L_p((0,1),H)} + \sum_{k=1}^{2} |\lambda|^{-1+m_k} \left(\|f_k\|_{(H(A),H)_{\theta_k,p}} + |\lambda|^{1-\theta_k} \|f_k\|_H \right) \right].$$

Рассмотрим теперь однородную краевую задачу соответствующую краевой задаче (5),(6) в H

$$L(\lambda, D)u := \lambda u(x) - u''(x) + Au(x) = 0, \quad x \in (0,1) \qquad (7)$$

$$L_1(\lambda)u := \lambda u(0) - \alpha u'(0) + T_1 u = 0,$$

$$L_2(\lambda)u := \lambda u(1) + \beta u'(1) + T_2 u = 0\,. \qquad (8)$$

Определение 1. Число λ_0 называется собственным значением задачи (7),(8), если задача

$$L(\lambda_0, D)u = 0, \quad L_k(\lambda_0)u = 0, \qquad k = 1,2,$$

имеет нетривиальное решение $u_0(x)$, которое принадлежит $W_2^2\left((0,1); H(A), H\right)$, а функция $u_0(x)$ называется собственной функцией задачи (7), (8), соответствующая собственному значению λ_0.

А решение $u_m(x)$, $m \geq 1$ задачи

$$L(\lambda_0, D)u_m + u_{m-1} = 0,$$
$$L_1(\lambda_0)u_m + u_{m-1}(0) = 0,$$
$$L_2(\lambda_0)u_m + u_{m-1}(1) = 0,$$

которое принадлежат $W_2^2\left((0,1); H(A), H\right)$ называется присоединенной функцией к собственной функции $u_0(x)$ $m-$го порядка, задачи (7), (8).

Собственные и присоединенные функций задачи (7), (8) объединены под общим названием корневых функций задачи (7), (8).

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

1) A является самосопряженным, положительно-определенным оператором в гильбертовом пространстве H;

2) вложение $H(A) \subset H$ компактно, и для собственных значений оператора A при некоторых $s > 0$ справедливо: $\lambda_j(A) \geq cj^s$, $j = 1,2,\ldots$;

3) $|\arg\alpha| \leq \dfrac{\pi - \varphi}{2}$ и $|\arg\beta| \leq \dfrac{\pi - \varphi}{2}$ для некоторого φ, удовлетворяющего неравенству

$$\max\left\{\frac{\pi(4-s)}{4}, \frac{2\pi}{2+s}\right\} < \varphi < \pi; \;\; \alpha \neq 0, \;\; \beta \neq 0;$$

4) для любого $\varepsilon > 0$ и $u \in W_2^2\left((0,1); H(A), H\right)$

$$\|T_k u\|_{H(A^{1/2})} \leq \varepsilon \|u\|_{W_2^2((0,1);H(A),H)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_2((0,1);H)},$$

$$\|T_k u\|_H \leq \varepsilon \|u\|_{B_2^{3/2}\left((0,1);H(A^{3/4}),H\right)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_2((0,1);H)}, \; k = 1,2.$$

Тогда, спектр задачи (7), (8) является дискретным и система векторов $\left(u_k(x), u_k(0), u_k(1)\right)$, где $u_k(x)-$корневые функции задачи (7), (8) является полной в пространстве

$$L_2\left((0,1);H\right)\oplus H\left(A^{\frac{1}{4}}\right)\oplus H\left(A^{\frac{1}{4}}\right).$$

Полученные абстрактные результаты применено для краевых задач с параметром того же порядка как в уравнении, так и в граничных условиях, к эллиптическим дифференциальным уравнениям в квадрате.

Далее, в первом параграфе первой главы изучено распределение собственных значений следующей краевой задачи

$$-u''(x)+Au(x)+q(x)u(x)=\lambda u(x),\ x\in(0,b),\ b>0, \tag{9}$$

$$\lambda u(0)-\alpha u'(0)=0,$$

$$\lambda u(b)+\beta u'(b)=0\,. \tag{10}$$

Изучено асимптотическое поведение собственных значений задачи (9), (10) в некоторых частных случаях, относительно α и β, зная асимптотическое распределение собственных чисел оператора A.

Теорема 3. Пусть $A=A^*\geq\gamma^2 I$ в H и $A^{-1}-$ вполне непрерывен в H. Предположим также, что при каждом $x\in(0,b),\ q(x)-$ самосопряженный ограниченный оператор в H; α и β вещественные числа.

Тогда, при $\alpha=\beta=-1$ для собственных значений задачи (9), (10) справедливы следующие асимптотические формулы: $\lambda_k\sim\sqrt{\mu_k}$, $\lambda_{n,k}\sim\mu_k+\dfrac{\pi^2n^2}{b^2}$; а при $\alpha=\beta=1$, краевая задача (9), (10) имеет лишь одну серию собственных значений, которая ведет себя как

$$\lambda_{n,k}\sim\mu_k+\frac{\pi^2n^2}{b^2}\qquad(k=1,2,\ldots;\ n=N,\ N+1,\ldots),$$

где $\mu_k=\mu_k(A)$ собственные значения оператора A.

В работе Л.А.Котко и С.Г.Крейна в ограниченной области $G\subset\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей S рассматривается краевая задача:

$$Lu=\lambda u \quad \text{в} \quad G \tag{11}$$

$$C_j u=\lambda B_j u,\ 1\leq j\leq l,\ Q_j u=0,\ l+1\leq j\leq m \quad \text{на} \quad S,$$

где $L-$ равномерно эллиптическое дифференциальное выражение в $\overline{G}$ порядка $2m$; C_j, B_j, Q_j – граничные дифференциальные выражения порядков, не превышающих $2m-1$; коэффициенты всех дифференци-альных выражений предполагаются достаточно гладкими. Отмечается, что наиболее интересным случаем является тот, когда порядки m_{B_j} операторов B_j больше порядков m_{c_j} операторов C_j. Доказывается полнота системы корневых функций задачи (11) в некотором пространстве.

Далее, в работе А.Н.Кожевникова в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей Γ, для уравнения Лапласа изучается следующая спектральная задача

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$-u = \lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{12}$$

где, ν внутренняя нормаль к границе Γ. Доказано, что спектр краевой задачи (12) дискретен и состоит из двух серий собственных значений, сходящихся соответственно к нулю и к $+\infty$.

Результаты этих работ диктуют рассмотреть краевые задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром в том случае, когда спектральный параметр в граничных условиях находится перед старшей производной.

Итак, во втором параграфе первой главы, в сепарабельном гильбертовом пространстве H, рассматривается следующая краевая задача

$$L(\lambda, D)u := \lambda u(x) - u''(x) + Au(x) + (A_1 u)(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{13}$$

$$L_1(\lambda)u := \lambda u'(0) + \alpha u(0) + \sum_{j=1}^{N_1} \gamma_{1j} u'(x_{1j}) + T_1 u = f_1,$$

$$L_2(\lambda)u := \lambda u'(1) + \beta u(1) + \sum_{j=1}^{N_2} \gamma_{2j} u'(x_{2j}) + T_2 u = f_2. \tag{14}$$

Доказана следующая

Теорема 4. Пусть выполнены следующие условия:

1) A линейный замкнутый, плотно определенный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H,

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C(1+|\lambda|)^{-1}, \qquad |\arg\lambda| \geq \pi-\varphi,\ |\lambda| \to \infty,$$

для некоторого фиксированного $0 \leq \varphi < \pi$ и A обратимый;

2) вложение $H(A) \subset H$ компактно;

3) $\alpha, \beta, \gamma_{kj}$ комплексные числа, $x_{kj} \in (0,1)$;

4) для любого $\varepsilon > 0$ и $u \in W_p^2((0,1); H(A), H)$, $p \in (1,\infty)$,

$$\|A_1 u\|_{L_p((0,1);H)} \leq \varepsilon \|u\|_{W_p^2((0,1);H(A),H)} + C(\varepsilon)\|u\|_{L_p((0,1);H)};$$

5) для любого $\varepsilon > 0$ и $u \in W_p^2((0,1); H(A), H)$, $k = 1,2$,

$$\|T_k u\|_{(H(A),H)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}} \leq \varepsilon \|u\|_{W_p^2((0,1);H(A),H)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_p((0,1);H)},$$

$$\|T_k u\|_H \leq \varepsilon \|u\|_{B_p^{1+\frac{1}{p}}\left((0,1);(H(A),H)_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},2,}\ H\right)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_p((0,1);H)}.$$

Тогда, оператор $\mathbb{L}(\lambda): u \to \mathbb{L}(\lambda)u := (L(\lambda,D)u,\ L_1(\lambda)u,\ L_2(\lambda)u)$, и для достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \leq \varphi$ является изоморфизмом из $W_p^2((0,1); H(A), H)$ в $L_p((0,1);H) + (H(A),H)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} + (H(A),H)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}$ и для решения задачи (13), (14) верна следующая оценка

$$|\lambda|\,\|u\|_{L_p((0,1);H)} + \|u''\|_{L_p((0,1);H)} + \|Au\|_{L_p((0,1);H)} \leq$$

$$\leq C\left[\|f\|_{L_p((0,1);H)} + \frac{1}{|\lambda|}\left(\sum_{k=1}^{2}\|f_k\|_{(H(A),H)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_k\|_H\right)\right].$$

Доказанная абстрактная теорема применена к краевой задаче для эллиптического уравнения в квадрате $\Omega = [0,1]\times[0,1]$, в случае, когда главный оператор уравнения самосопряженный, положительно определенный и в граничных условиях на двух сторонах квадрата задано условие Дирихле, а на двух других сторонах условие вытекающие из (14).

В данном параграфе доказана также фредгольмовость задачи (13), (14). Далее, в этом параграфе получена асимптотическая формула для собственных значений следующей краевой задачи

$$-u''(x)+Au(x)=\lambda u(x), \quad x\in(0,1), \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\lambda u'(0)-\alpha u(0)=0,\\ \lambda u'(1)+\beta u(1)=0,\end{gathered} \tag{16}$$

Доказана следующая

Теорема 5. Пусть $A=A^*\geq\gamma^2 I$ в H и $A^{-1}-$ вполне непрерывен в H. Тогда

1) при $\alpha=\beta>0$ задача (15), (16) имеет одну серию собственных значений: $\lambda_{n,k}\sim\mu_k+n^2\pi^2$, где $\mu_k=\mu_k(A)$-собственные значения оператора A.

2) при $\alpha=\beta<0$ задача (15)-(16) имеет три серии собственных значений. Две из этих серий сходятся к нулю, одна из которых ведет себя как, $\lambda_k^{(1)}=\dfrac{-\beta}{\sqrt{\mu_k}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mu_k}}\right)$. Для третьей же серии справедлива следующая асимптотическая формула $\lambda_{n,k}^{(3)}\sim\mu_k+n^2\pi^2$.

В третьем параграфе первой главы, в сепарабельном гильбертовом пространстве H рассматривается следующая краевая задача:

$$L(\lambda,D)u:=\lambda u(x)-u''(x)+Au(x)+(A_1u)(x)=f(x), \quad x\in(0,1), \tag{17}$$

$$\begin{gathered}L_1(\lambda)u:=\lambda u'(0)+\alpha u(0)+\sum_{j=1}^{N_1}\gamma_{1j}u'(x_{1j})+T_1u=f_1\\ L_2u:=u(1)+\sum_{j=1}^{N_2}\gamma_{2j}u(x_{2j})+T_2u=f_2.\end{gathered} \tag{18}$$

Найдены достаточные условия для разрешимости задачи (17), (18), установлены некоторые оценки (относительно u и λ) для решения в $L_p((0,1);H)$.

Далее, в данном параграфе изучено асимптотическое поведение собственных значений следующей краевой задачи

$$-u''(x)+Au(x)=\lambda u(x), \quad x\in(0,b), \ (b>0), \tag{19}$$

$$\lambda u'(0)+\alpha u(0)=0, \tag{20}$$

$$u(b)=0.$$

Доказано, следующая

Теорема 6. Пусть $A=A^{*}\geq\gamma^{2}I$ в H и A^{-1} вполне непрерывен в H. Тогда

1) при $\alpha>0$ задача (19), (20) имеет две серии собственных значений, стремящихся соответственно к нулю и к плюс бесконечности, а именно,

$$\lambda_k=\frac{\alpha}{\sqrt{\mu_k}}+0\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\right) \text{ и } \lambda_{n,k}\sim\mu_k+\frac{\pi^2}{b^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2,$$

где $\mu_k=\mu_k(A)-$собственные значения оператора A;

2) при $\alpha<0$ задача (19), (20) имеет лишь одну серию собственных значений: $\lambda_{n,k}\sim\mu_k+\frac{\pi^2}{b^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2$,

3) при $\alpha=0$ задача (19), (20) имеет лишь одну серию собственных значений: $\lambda_{n,k}=\mu_k+\frac{\pi^2}{b^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$.

В четвертом параграфе первой главы, в отличие от предыдущих параграфов изучена та краевая задача, в которой, краевые условия неразделенные. Сначала в гильбертовом пространстве H, изучены вопросы разрешимости следующей краевой задачи:

$$L(\lambda,D)u:=\lambda u(x)-u''(x)+Au(x)=f(x),\quad x\in(0,1), \tag{21}$$

$$L_1(\lambda)u:=\alpha u'(0)+\lambda u(1)=f_1$$

$$L_2u:=u(0)=f_2. \tag{22}$$

Для краевой задачи (21), (22) доказана следующая

Теорема 7. Пусть выполнены следующие условия:

1) A линейный, замкнутый, плотно определенный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H и

$$\|R(\lambda,A)\|\leq C(1+|\lambda|)^{-1},\quad |\arg\lambda|\geq\pi-\varphi,\quad |\lambda|\to\infty$$

для некоторого фиксированного $0\leq\varphi<\pi$ и A обратимый;

2) $\alpha\neq0$ любое фиксированное комплексное число.

Тогда, для $f \in L_p\left((0,1); H\left(A^{1/2}\right)\right)$, $f_k \in \left(H\left(A^2\right), H\right)_{\frac{3}{4}-\frac{k}{4}+\frac{1}{4p},p}$ и для достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \le \varphi$ задача (21), (22) имеет единственное решение из $W_p^2\left((0,1); H(A), H\right)$, и для решения имеет следующая некоэрцитивная оценка

$$|\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L_p((0,1);H)} + \|u'\|_{L_p((0,1);H)} + \left\|A^{1/2}u\right\|_{L_p((0,1);H)} \le$$

$$\le C\left[\|f\|_{L_p((0,1);H)} + \sum_{k=1}^{2}|\lambda|^{-\frac{1}{k}}\left(\|f_k\|_{(H(A),H)_{1-\frac{k}{2}+\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_k\|_H\right)\right].$$

Далее, в четвертом параграфе в гильбертовом пространстве H изучено асимптотическое поведение собственных значений следующей краевой задачи:

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda u(x), \qquad x \in (0,1), \tag{23}$$

$$\alpha u'(0) + \lambda u(1) = 0, \tag{24}$$

$$u(0) = 0.$$

Нас интересуют вещественные значения λ. Доказана следующая

Теорема 8. Пусть $A = A^* \ge \gamma^2 I$ в H и A^{-1} вполне непрерывен в H.

Тогда

1) если $\alpha < 0$, то задача (23), (24) имеет две серии собственных значений, стремящихся соответственно, к нулю и к плюс бесконечности. Для серии собственных значений, которые стремятся к плюс бесконечности, имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\lambda_{n,k} \sim \mu_k + 4\pi^2(n+1)^2,$$

где $\mu_k = \mu_k(A) -$ собственные значения оператора A.

2) если $\alpha > 0$ то задача (23), (24) имеет лишь одну серию собственных значений, которая имеет следующую асимптотическую формулу: $\lambda_{n,k} \sim \mu_k + \pi^2(2n+1)^2$.

Во второй главе рассматриваются те краевые задачи для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго и четвертого порядков, в которых главные части рассматриваемых задач в краевых условиях содержат неограниченные операторы. Вторая глава состоит из двух параграфов.

В первом параграфе второй главы, в гильбертовом пространстве, H рассмотрена следующая краевая задача

$$L(\lambda, D)u := \lambda u(x) - u''(x) + Au(x) + (A_1 u)(x) = f(x),\ x \in (0,1)\,, \quad (25)$$

$$L_1 u := \alpha u'(1) + Bu(0) + \sum_{j=1}^{N_1} \gamma_{1j} u'(x_{1j}) + T_1 u = f_1\,,$$

$$L_2 u := \beta u'(0) + \sum_{j=1}^{N_2} \gamma_{2j} u'(x_{2j}) + T_2 u = f_2, \quad (26)$$

где λ спектральный параметр; операторы $A, A_1, T_k\ (k = 1,2)$ как во втором параграфе первой главы; $B-$линейный (неограниченный) замкнутый оператор в H, подчинен оператору $A^{1/2}$ в H в определенном смысле; $\alpha, \beta, \gamma_{kj} -$ комплексные числа, причем $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.

В данном параграфе при достаточно больших $|\lambda|$ из некоторого угла содержащего положительную полуось, доказана теорема об изоморфизме для задачи (25), (26), установлены некоторые оценки (относительно u и λ) для решения задачи (25), (26) в $L_p((0,1);H)$.

Отметим, что присутствие неограниченного оператора B в граничным условии сказывается на оценках по λ для решения задачи (25), (26). Другими словами, доказывается, что несмотря на то, что краевая задача (25), (26) по пространственной переменной (по u) коэрцитивно разрешимо по спектральному параметру не коэрцитивно. Доказана следующая

Теорема 9. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\alpha, \beta, \gamma_{kj} -$ комплексные числа $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, $x_{kj} \in (0,1)$;

2) A линейный, замкнутый, плотно определенный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H и

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C(1 + |\lambda|)^{-1}, \quad |\arg \lambda| \geq \pi - \varphi, \quad |\lambda| \to \infty,$$

для некоторого фиксированного $0 \leq \varphi < \pi$, $и$ A обратимый;

3) вложение $H(A) \subset H$ компактно;

4) линейный замкнутый оператор B ограниченно действует из $H\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ в H и из $H(A)$ в $H\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$;

5) оператор A_1 ограничен в $L_p((0,1);H)$, $p \in (1,\infty)$;

6) для любого $\varepsilon > 0$ и $u \in W_p^2((0,1);H(A),H)$, $k = 1,2$,

$$\|T_k u\|_{(H(A),H)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}} \le \varepsilon \|u\|_{W_p^2((0,1);H(A),H)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_p((0,1);H)},$$

$$\|T_k u\|_H \le \varepsilon \|u\|_{B_p^{1+\frac{1}{p}}\left((0,1);(H(A),H)_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},2},H\right)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_p((0,1);H)}.$$

Тогда, оператор $\mathbb{L}(\lambda): u \to \mathbb{L}(\lambda)u := (L(\lambda,D)u,\ L_1 u,\ L_2 u)$ для достаточ-но больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \le \varphi$ является изоморфизмом из $W_p^2((0,1);H(A),H)$ на $L_p((0,1);H) \dot{+} (H(A),H)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \dot{+} \dot{+} (H(A),H)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}$ и для решения задачи (25), (26) верна следующая оценка

$$|\lambda|\,\|u\|_{L_p((0,1);H)} + \|u''\|_{L_p((0,1);H)} + \|Au\|_{L_p((0,1);H)} \le$$
$$\le C\left[|\lambda|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|f\|_{L_p((0,1);H)} + \sum_{k=1}^{2}\left(\|f_k\|_{(H(A),H)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_k\|_H\right)\right]$$

и $u(0) \in D(B)$.

Доказана также фредгольмовость задачи (25), (26) при $\lambda = 0$.

Далее, доказана дискретность спектра и полнота системы корневых функций, однородной задачи соответствующей задаче (25), (26) в $L_2((0,1);H)$. Итак, рассмотрим задачу (25), (26) в однородном случае

$$L(\lambda,D)u := \lambda u(x) - u''(x) + Au(x) + (A_1 u)(x) = 0, \quad x \in (0,1), \qquad (27)$$

$$L_1 u := \alpha u'(1) + Bu(0) + \sum_{j=1}^{N_1}\gamma_{1j}u'(x_{1j}) + T_1 u = 0, \qquad (28)$$

$$L_2 u := \beta u'(0) + \sum_{j=1}^{N_2} \gamma_{2j} u'(x_{2j}) + T_2 u = 0.$$

Определение 2.Число λ_0 называется собственным значением задачи (27), (28), если задача

$$L(\lambda_0, D)u = 0, \quad L_k u = 0, \quad k = 1,2,$$

имеет нетривиальное решение $u_0(x)$ которое принадлежит $W_2^2((0,1); H(A), H)$, а функция $u_0(x)$ называется собственной функцией задачи (27), (28) соответствующей собственному значению λ_0.

Решение $u_m(x)$ для натурального $m \geq 1$ задачи

$$L(\lambda_0, D)u_m + u_{m-1} = 0, \quad L_k u_m = 0, \quad k = 1,2,$$

принадлежащее $W_2^2((0,1); H(A), H)$ называется m-ой присоединенной функцией к собственной функции $u_0(x)$ задачи (27), (28).

Собственные и присоединенные функции задачи (27), (28) объединим под общим названием корневых функций задачи (27), (28).

Теорема 10. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\alpha, \beta, \gamma_{kj}$ – любые фиксированные комплексные числа $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, $x_{kj} \in (0,1)$;

2) вложение $H(A) \subset H$ компактно и при некоторых $t > 0$ для оператора вложения J справедливо неравенство

$$s_j(J; H(A), H) \leq Cj^{-t}, \; j = 1,2,\ldots;$$

3) A линейный замкнутый, плотно определенный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H и для некоторых $\frac{2\pi}{2+t} < \varphi < \pi$

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C(1 + |\lambda|)^{-1}, \quad |\arg \lambda| \geq \pi - \varphi, \quad |\lambda| \to \infty;$$

4) линейный закнутый оператор B ограниченно действует из $H\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ в H и из $H(A)$ в $H\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$;

5) оператор A_1 ограничен в $L_2((0,1);H)$;

6) для любого $\varepsilon > 0$ и $u \in W_2^2((0,1);H(A),H)$, $k = 1,2$,

$$\|T_k u\|_{(H(A),H)_{\frac{3}{4},2}} \le \varepsilon \|u\|_{W_2^2((0,1);H(A),H)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_2((0,1);H)},$$

$$\|T_k u\|_H \le \varepsilon \|u\|_{B_2^{3/2}\left((0,1);(H(A),H)_{\frac{1}{4},2},H\right)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_2((0,1);H)}.$$

Тогда спектр задачи (27), (28) дискретен и система корневых функций задачи (27), (28) полна в пространстве $L_2((0,1);H)$.

Дано применение полученных абстрактных результатов к эллиптическим дифференциальным уравнениям в частных производных с параметром в квадрате $\Omega = [0,1]\times[0,1]$. Приведем одно из этих приложений.

Рассмотрим следующую краевую задачу для эллиптического дифференциального уравнения с параметром в квадрате $\Omega = [0,1]\times[0,1]$

$$\begin{aligned} L(\lambda, D_x, D_y)u &:= \lambda u(x,y) - D_2^x u(x,y) + D_y(a(y)D_y u(x,y)) + \\ &\quad + a_1(x,y)u(x,y) = f(x,y), \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} L_1 u &:= \alpha D_x u(1,y) + b(y)D_y u(0,y) + c(y)u(0,g(y)) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N_1} \gamma_{1j} D_x u(x_{1j},y) + (T_1 u)(y) = f_1(y), \quad y \in [0,1], \end{aligned} \tag{30}$$

$$L_2 u := \beta D_x u(0,y) + \sum_{j=1}^{N_2} \gamma_{2j} D_x u(x_{2j},y) + (T_2 u)(y) = f_2(y), \quad y \in [0,1],$$

$$\begin{aligned} L_3 u &:= u(x,0) = 0, \qquad x \in [0,1], \\ L_4 u &:= u(x,1) = 0, \qquad x \in [0,1], \end{aligned} \tag{31}$$

где, λ комплексный параметр; $\alpha, \beta, \gamma_{kj}$ комплексные числа, $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ x_{kj} \in (0,1);\ a(y),\ a_1(x,y),\ b(y),\ c(y),\ g(y)$ некоторые функции; $D_x := \dfrac{\partial}{\partial x},\ D_y = \dfrac{\partial}{\partial y}$; T_k-операторы из $L_p\left((0,1); L_2(0,1)\right)$ в $L_2(0,1)$.

Теорема 11. Пусть выполнены следующее условия:

1) $\alpha, \beta, \gamma_{kj}$ комплексные числа $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0;\ x_{kj} \in (0,1)$; $a(y) \in C^1[0,1]$, для $y \in [0,1],\ a(y) > 0$; $a_1(x,y) \in C\left([0,1]^2\right)$; $b(y) \in C^1[0,1],\ b(0) = b(1) = 0$; $c(y), g(y) \in C^1[0,1],\ c(0) = c(1) = 0$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ и $u \in W_p^2\left((0,1); W_2^2(0,1), L_2(0,1)\right),\ p \in (1,\infty)$,

$$\left\|T_k u\right\|_{B_{2,p}^{1-\frac{1}{p}}(0,1)} \leq \varepsilon \|u\|_{W_p^2\left((0,1);W_2^2(0,1),L_2(0,1)\right)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_p((0,1);L_2(0,1))},$$

$$\left\|T_k u\right\|_{L_2(0,1)} \leq \varepsilon \|u\|_{B_p^{1+\frac{1}{p}}\left((0,1);W_2^{1+\frac{1}{p}}(0,1),L_2(0,1)\right)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_p((0,1);L_2(0,1))}.$$

Тогда, оператор $\mathbb{L}(\lambda): u \to \mathbb{L}(\lambda)u := \left(L\left(\lambda, D_x, D_y\right)u, L_1 u, L_2 u\right)$ достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \leq \varphi < \pi$ является изоморфизмом из $W_p^2\left((0,1); W_2^2(0,1), L_2(0,1)\right)$ в

$$L_p\left((0,1); L_2(0,1)\right) \dot{+} B_{2,p,*}^{1-\frac{1}{p}}(0,1) + B_{2,p,*}^{1-\frac{1}{p}}(0,1), \text{ где}$$

$$B_{2,p,*}^{1-\frac{1}{p}}(0,1) := \begin{cases} B_{2,p}^{1-\frac{1}{p}}(0,1), & 1 < p < 2, \\ W_2^{\frac{1}{2}}\left((0,1); \int_0^1 \left(\min\{x, 1-x\}\right)^{-1} |u(x)|^2 dx < \infty\right), & p = 2, \\ B_{2,p}^{1-\frac{1}{p}}\left((0,1); u(0) = u(1) = 0\right), & p > 2, \end{cases}$$

и для решение $u(x,y)$ задачи (29)-(31) $u(0,y) \in W_2^1(0,1)$ и справедлива следующая оценка

$$|\lambda| \|u\|_{Lp((0,1);L_2(0,1))} + \left\|D_x^2 u(x,y)\right\|_{Lp((0,1);L_2(0,1))} +$$

$$+\left\|D_y(a(y)D_yu(x,y))\right\|_{L_p((0,1);L_2(0,1))} \le c\left[|\lambda|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\left\|f(x,y)\right\|_{L_p((0,1);L_2(0,1))}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{2}\left(\left\|f_k(y)\right\|_{B_{2,p}^{1-\frac{1}{p}}(0,1)}+|\lambda|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\left\|f_k(y)\right\|_{L_2(0,1)}\right)\right].$$

В конце первого параграфа второй главы изучено асимптотическое поведение собственных значений следующей краевой задачи для уравнения Лапласа в квадрате $\Omega=[0,2\pi]\times[0,2\pi]$:

$$-\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=\lambda u(x,y), \tag{32}$$

$$\frac{\partial u(2\pi,y)}{\partial x}+i\frac{\partial u(0,y)}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0, \quad y\in[0,2\pi], \tag{33}$$

$$u(x,0)=u(x,2\pi),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,2\pi)}{\partial y},\ x\in[0,2\pi]. \tag{34}$$

Доказано, что для собственных чисел задачи (32)-(34) имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\lambda_{n.k}\sim k^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Во втором параграфе второй главы, в гильбертовом пространстве H, рассматривается следующая краевая задача

$$Lu:=u^{(4)}(x)+Au(x)+\sum_{k=0}^{3}C_k(x)u^{(k)}(x)=f(x), \qquad x\in(0,1), \tag{35}$$

$$L_1u:=u'(1)+B_1u(0)+\sum_{S=1}^{N_1}T_{1s}u(x_{1s})=\varphi_1,$$

$$L_2u:=u'(0)+\sum_{S=1}^{N_2}T_{2s}u(x_{2s})=\varphi_2,$$

$$L_3u:=u'''(1)+B_2u''(0)+\sum_{j=0}^{2}\sum_{S=1}^{N_{3j}}T_{3js}u^{(j)}(x_{3js})=\varphi_3, \tag{36}$$

$$L_4u:=u'''(0)+\sum_{j=0}^{2}\sum_{S=1}^{N_{4j}}T_{4js}u^{(j)}(x_{4js})=\varphi_3,$$

где A самосопряженный, положительно-определенный оператор в H; $B_1, B_2 -$ линейные неограниченные операторы в H, которые ведут себя как $A^{1/4}; C_k(x)$ для $x \in [0,1]$ и T_{kjs}, вообще говоря, неограниченные операторы в H; $x_{kjs} \in (0,1); N_{kj} -$некоторые натуральные числа.

Отметим, что фредгольмовость краевых задач для эллиптического дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка в более общем виде, чем уравнение (35) в случае, когда коэффициенты в краевых условиях в главной части комплексные числа, исследованы в выше указанной монографии С.Якубова и Я.Якубова и в работе А.Фавини и Я.Якубова.

Найдены достаточные условия для операторов в уравнении и в краевых условиях, обеспечивающие фредголмовость рассматриваемой задачи (35), (36).

Доказана следующая

Теорема 12. Пусть выполнены следующие условия:

1) оператор A является самосопряженным, положительно-определенным оператором в H, вложение $H(A) \subset H$ компактно;

2) линейный замкнутый оператор B_1 ограниченно действует из $H(A)$ в $H\left(A^{3/4}\right)$ и из $H\left(A^{3/4}\right)$ в $H\left(A^{1/2}\right)$;

3) линейный замкнутый оператор B_2 ограниченно действует из $H\left(A^{1/2}\right)$ в $H\left(A^{1/4}\right)$ и из $H\left(A^{1/4}\right)$ в H;

4) для любого $\varepsilon > 0$ и для почти всех $x \in [0,1]$, $k = \overline{0,3}$,

$$\|C_k(x)u\|_H \le \varepsilon \|u\|_{H(A^{1-\frac{k}{4}})} + C(\varepsilon)\|u\|_H, \quad u \in H\left(A^{1-\frac{k}{4}}\right),$$

функция $C_k(x)u$ измерима на $[0,1]$ для $u \in H\left(A^{1-\frac{k}{4}}\right)$;

5) операторы T_{1S}, T_{2S} из $\left(H(A), H\right)_{\frac{1}{4p},p}$ в $\left(H(A), H\right)_{\frac{1}{4}+\frac{1}{4p},p}$ компактны, операторы T_{3jS}, T_{4jS} из $\left(H(A), H\right)_{\frac{1}{4}+\frac{1}{4p},p}$ в $\left(H(A), H\right)_{\frac{3}{4}+\frac{1}{4p},p}$ компактны, где $p \in (1, \infty)$.

Тогда, оператор $\mathbb{L}: u \to \mathbb{L}u := (Lu, L_1u, L_2u, L_3u, L_4u)$ из $W_p^4((0,1); H(A), H)$ в

$$L_p((0,1); H) \dot{+} (H(A), H)_{\frac{1}{4}+\frac{1}{4p}, p} \dot{+}$$

$$\dot{+} (H(A), H)_{\frac{1}{4}+\frac{1}{4p}, p} \dot{+} (H(A), H)_{\frac{3}{4}+\frac{1}{4p}, p} \dot{+} (H(A), H)_{\frac{3}{4}+\frac{1}{4p}, p}$$

ограничен и фредгольмов.

Полученный абстрактный результат применен к краевой задаче для эллиптического дифференциального уравнения четвертого порядка в квадрате $[0,1] \times [0,1]$.

В третьей главе в гильбертовом пространстве H рассмотрена краевая задача на отрезке $[0,1]$ для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром и с разрывным (кусочно-постоянным) коэффициентом при производной второго порядка. Естественно, в точке разрыва даются дополнительные условия (условия сопряжения). Для простоты изложения мы взяли одну точку разрыва. Рассматриваемая задача сводится к исследованию краевых задач с условиями сопряжения для систем эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка со спектральным параметром и с постоянным коэффициентом.

Вопросы разрешимости, а также некоторые спектральные вопросы краевых задач для дифференциально-операторных уравнений с разрывным коэффициентом и с условиями сопряжения в точках разрыва исследованы в работах В.К.Романко, В.И.Корзюка и Н.И.Юрчука, С.Г.Пяткова, Н.В.Цывиса и Н.И.Юрчука, Ю.Г.Смирнова, С.С.Мирзоева и А.Р.Алиева, А.Р.Алиева, Б.А.Алиева и других. Отметим, что в теории упругости возникают краевые задачи для уравнений (или систем уравнений) эллиптического типа с разрывными коэффициентами.

Третья глава состоит из двух параграфов.

В первом параграфе третьей главы, в сепарабельном гильбертовом пространстве H изучена коэрцитивная разрешимость краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка и со спектральным параметром с разрывным коэффициентом при производной второго порядка, в случае, когда коэффициенты краевых условий комплексные числа.

Итак, в H на множестве $\Omega = (0,b)\bigcup(b,1)$, $b \in (0,1)$ рассматривается краевая задача для уравнения

$$L(\lambda, D)u := \lambda u(x) - a(x)u''(x) + Au(x) = f(x), \qquad (37)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} L_1 u &:= \alpha_1 u(0) + \alpha_2 u'(0) = f_1, \\ L_2 u &:= \beta_1 u(1) + \beta_2 u'(1) = f_2, \end{aligned} \qquad (38)$$

и с условиями сопряжения в точке $x = b$,

$$\begin{aligned} L_3 u &:= \delta_1 u(b-0) + \delta_2 u(b+0) = f_3, \\ L_4 u &:= \gamma_1 u'(b-0) + \gamma_2 u'(b+0) = f_4, \end{aligned} \qquad (39)$$

где λ-спектральный параметр; A линейный, замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A)$ в H и резольвентой, убывающей как $|\lambda|^{-1}$ при достаточно больших $|\lambda|$ в некоторых углах, содержащих отрицательную полуось;

$$a(x) = \begin{cases} a_1 > 0, & x \in [0,b), \\ a_2 > 0, & x \in [b,1), \quad a_1 \neq a_2 \end{cases};$$

$\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \gamma_i$ $(i = 1,2)$ комплексные числа, причем $\alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0$; $u^{(j)}(b-0)$ и $u^{(j)}(b+0)$, $j \in \{0,1\}$, соответственно левые и правые предельные значения $u^{(j)}(x)$ в точке $x = b$; $D := \dfrac{d}{dx}$.

Найдены достаточные условия для коэрцитивной разрешимости краевых задач (37)-(39), установлена коэрцитивная оценка для решения в пространстве $\mathrm{H} := L_p((0,b);H) \dot{+} L_p((b,1);H)$, $p \in (1,\infty)$. Доказана следующая

Теорема 13. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \gamma_i$ $(i = 1,2)$ некоторые комплексные числа, причем $\alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0$, и $\Delta = \delta_1\gamma_2\sqrt{b_2} + \delta_2\gamma_1\sqrt{b_1} \neq 0$, где $b_i = \dfrac{1}{a_i}$;

2) A является линейным замкнутым плотно определенным оператором в гильбертовом пространстве H и

$$\|R(\lambda, A)\| \le C(1+|\lambda|)^{-1},\ |\arg\lambda| \ge \pi-\varphi,\ |\lambda|\to\infty,$$
для некоторого фикисированного $0 \le \varphi < \pi$, A обратимый.

Тогда оператор $\mathbb{L}(\lambda): u \to \mathbb{L}(\lambda)u := (L(\lambda, D)u, L_1u, L_2u, L_3u, L_4u)$ для достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \le \varphi$ является изоморфизмом из $W_p^2((0,b); H(A), H) \dot{+} W_p^2((b,1); H(A), H)$ на

$$\mathrm{H} \dot{+} (H(A), H)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p} \dot{+} (H(A), H)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}$$
$$\dot{+} (H(A), H)_{\frac{1}{2p},p} \dot{+} (H(A), H)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}$$

и для решения задачи (37)-(39) справедлива следующая оценка

$$|\lambda|\|u\|_{\mathrm{H}} + \|u''\|_{\mathrm{H}} + \|Au\|_{\mathrm{H}} \le C\left[\|f\|_{\mathrm{H}} + \sum_{k=1}^{4}\|f_k\|_{(H(A),H)_{\frac{m_k}{2}+\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{1-\theta_k}\|f_k\|_H\right],$$

где $\theta_k = \dfrac{m_k}{2} + \dfrac{1}{2p}$, $m_k = \begin{cases} 1, & k = 1,2,4, \\ 0, & k = 3. \end{cases}$

Полученный абстрактный результат в объединении $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ где $\Omega_1 = [0,b) \times [0,1]$, $\Omega_2 = [b,1) \times [0,1]$, $b \in (0,1)$ применен к краевой задаче для эллиптического дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом и со спектральным параметром.

Далее в гильбертовом пространстве $L_2((0,b); H) \dot{+} L_2((b,1); H)$ рассмотрена следующая краевая задача со условиями сопряжение

$$\begin{aligned} &-a(x)u''(x) + Au(x) = \lambda u(x), \\ &x \in \Omega = [0,b) \cup (b,1],\ b \in (0,1), \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} &L_1u := \alpha_1 u(0) + \alpha_2 u'(0) = 0, \\ &L_2u := \beta_1 u(1) + \beta_2 u'(1) = 0, \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} &L_3u := \delta_1 u(b-0) + \delta_2 u(b+0) = 0, \\ &L_4u := \gamma_1 u'(b-0) + \gamma_2 u'(b+0) = 0, \end{aligned} \tag{42}$$

где A самосопряженный положительно-определенный оператор в H; λ - вещественный параметр; $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \gamma_i$ $(i = 1,2)$ - вещественные числа. Задаче (40)-(42) в пространстве $L_2((0,b);H)\dot{+}L_2((b,1);H)$ поставим в соответствие оператор $\mathbb{L}$ определенный следующими равенствами:

$$D(\mathbb{L}) := W_2^2\left(\Omega; H(A), H,\ L_\nu u = 0,\ \nu = \overline{1,4}\right) := \{u(x):$$

при почти всех $x \in \Omega,\ u(x) \in D(A),\ Au(x),\ u''(x) \in L_2(\Omega; H)$ и удовлетворяет условиям (41) и (42) $\}$, $\quad \mathbb{L}u := -a(x)u''(x) + Au(x)$.

Теорема 14. Пусть выполнены следующие условия:

1) $A = A^* \geq \gamma^2 I$ в H.

2) $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \gamma_i\ (i = 1,2)$ вещественные числа, причем $\alpha_2, \beta_2, \delta_1, \gamma_2 \neq 0$; $\alpha_1\alpha_2 < 0,\ \beta_1\beta_2 > 0,\ a_1\gamma_2\delta_2 = a_2\gamma_1\delta_1$,

Тогда оператор $\mathbb{L}$ является самосопряженным положительно-определенным в $L_2((0,b);H) \oplus L_2((b,1);H)$.

Теорема 15. Пусть выполнены следующие условия:

1) $A = A^* \geq \gamma^2 I$ в H и A^{-1} вполне непрерывен в H.

2) $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \gamma_i\ (i = 1,2)$ вещественные числа, причем $\alpha_2, \beta_2, \delta_1, \gamma_2 \neq 0$

$$a_1\gamma_2\delta_2 = a_2\gamma_1\delta_1;\ \ \alpha_1\alpha_2 < 0, \beta_1\beta_2 > 0,\ \left|\frac{\delta_1\gamma_2}{\sqrt{a_2}} + \frac{\delta_2\gamma_1}{\sqrt{a_1}}\right| \neq 0 .$$

Тогда, собственные значения оператора $\mathbb{L}$ распадаются на две серии: $\lambda_{n,k}^{(1)} = \mu_k + \dfrac{a_1}{b^2}\pi^2 n^2,\ \lambda_{n,k}^{(2)} \sim \mu_k + \dfrac{a_2}{(1-b)^2}\pi^2 n^2\ \ (n,k = 1,2,\ldots)$,

где $\mu_k = \mu_k(A)$ -собственные значения оператора A.

Во втором параграфе третьей главы, исследуется разрешимость краевых задач для уравнения (37) с краевыми условиями (38) и со следующими условиями сопряжения в точке $x = b$

$$\begin{gathered} L_3 u := u'(b-0) = f_3, \\ L_4 u := u'(b+0) + Bu(b-0) = f_4, \end{gathered} \qquad (43)$$

где, B линейный неограниченный оператор, который подчинен оператору $A^{1/2}$ в определенном смысле.

Найдены достаточные условия для коэрцитивной разрешимости задачи (37), (38), (43) в пространстве H. Доказана следующая

Теорема 16. Пусть выполнены следующие условия:

1) α_i, β_i $(i=1,2)$ некоторые комплексные числа, причем $\alpha_2 \neq 0,\ \beta_2 \neq 0$;

2) A является линейным замкнутым, плотно определенным оператором в сепарабельном гильбертовом пространстве H и

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C(1+|\lambda|)^{-1}, \quad |\arg\lambda| \geq \pi - \varphi, \quad |\lambda| \to \infty,$$

для некоторого фиксированного $0 \leq \varphi < \pi$, A обратимый;

3) линейный замкнутый оператор B ограниченно действует из $H\left(A^{1/2}\right)$ в H и из $H(A)$ в $H\left(A^{1/2}\right)$.

Тогда, оператор $\mathbb{L}(\lambda): u \to \mathbb{L}(\lambda)u := (L(\lambda, D)u, L_1 u, L_2 u, L_3 u, L_4 u)$ для достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \leq \varphi$ является изоморфизмом из $W_p^2((0,b); H(A), H) \dotplus W_p^2((b,1); H(A), H)$ на $\mathrm{H} \dotplus_{k=1}^{4} (H(A), H)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}$ и верна следующая оценка для решения задачи (37), (38), (43)

$$|\lambda|\|u\|_{\mathrm{H}} + \|u''\|_{\mathrm{H}} + \|Au\|_{\mathrm{H}} \leq C\left[|\lambda|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|f\|_{\mathrm{H}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{4}\left(\|f_k\|_{(H(A),H)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_k\|_H\right)\right].$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему учителю доктору физико-математических наук, профессору С.Я.Якубову за постоянное внимание к работе и ценные советы. Автор также благодарен член-корр. НАН Азербайджана, профессору Б.А.Искендерову за полезные советы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. С.Я.Якубов, Б.А.Алиев. Полнота системы корневых функций краевых задач для эллиптических дифференциально-операторных

уравнений с операторами в краевых условиях. Дифференц. уравнения, 1985, №12, т.XXI, с.2187-2188.
2. С.Я.Якубов, Б.А.Алиев. Краевая задача с оператором в краевых условиях для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка. Сибирский матем. журнал, 1985, №4, т. XXVI, с.176-188.
3. И.В.Алиев, Б.А.Алиев. Коэрцитивная разрешимость краевых задач для эллиптических дифференциально-операторного уравнений с оператором в краевых условиях. Сибир. матем. журн, 1990, т.XXXI, №4, с.3-8.
4. Б.А.Алиев. Коэрцитивная разрешимость одной краевой задачи с оператором в краевых условиях для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка. Труды ИММ АН Азерб., 1996, т.V (XIII), с.162-163.
5. Б.А.Алиев. Coercive solvability of boundary problems for differential and operator equations of the third order with operator in the boundary conditions. Transactions of NASA, ser. of phys.-tech. and math. sc., 1999, v. XIX, №1-2, p.14-22.
6. Б.А.Алиев, И.В.Алиев. Полнота системы корневых функций краевых задач эллиптических уравнений с краевым условиям типа Бицадзе-Самарского. Сибирский матем. журнал, 2000, т.XXXXI, №3, с.489-497.
7. B.A.Aliev. Coercive solvability of boundary value problems with the conditions of conjugations for the second order differential-operator equations. Proceedings of IMM of NASA, 2001, v.XIV (XXII) p.14-17.
8. Б.А.Алиев. Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с разрывным коэффициентом. Дифференц. уравнения, 2002, т.XXXVIII, №1, с.58-62.
9. B.A.Aliev, E.M.Jabrailova. The asymptotic behavior of eiqen-values of one boundary value problem for a differential-operator equation of the second order with discontinuous coefficient. Transactions of NASA, ser. of phys.-tech. and math. sc., 2002, v.XXII, №1, p.16-20.
10. Б.А.Алиев. Асимптотические поведение собственных значений одной краевой задачи со спектральном параметром в граничных условиях для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка. Тезисы X межд. конф. по матем. и мех. посв. 45-летию ИММ НАН Азерб., 2004, с.12.

11. Б.А.Алиев. Разрешимость одной краевой задачи с параметром в граничных условиях для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка. Тезисы межд. конф. по матем. и мех. посв. 50-летию со дня рожд. член-корр. НАНА, проф. И.Т.Мамедова, 2005, с.30.
12. B.A.Aliev. Asymptotic behavior of eiqen-values of a boundary value problem with spectral parameter in the boundary conditions for the second order elliptic differential-operator equations. Transactions of NASA, ser. of phys.-tech. and math. sc., 2005, v.XXV, №7, p.3-8.
13. Б.А.Алиев. Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка. Украинский матем. журнал, 2006, т.58, №8, с.1146-1152.
14. B.A.Aliev, Ya.Yakubov, Elliptic differential-operator problems with a spectral parameter in both the equation and boundary-operator conditions. Advances in differential equations. 2006, v.XI, №10, p.1081-1110 (Erratum in 12, 9(2007), 1079).
15. Б.А.Алиев. Асимптотике собственных значений одной краевой задачи для дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром в граничном условии. Матер. III межд. научн. конф. Махачкала, 2007, с.12-17.
16. Б.А.Алиев. Асимптотика собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром в граничном условии. Тезисы XIII межд. конф. по матем. и мех. посв. 70-летию со дня рожд. акад. А.Дж.Гаджиева, 2007, с.15.
17. B.A.Aliev. Solvability of boundary value problems for a second order elliptic differential-operator equation with a spectral parameter in both the equation and boundary conditions. Proceedings of IMM of NASA, 2008, v. XXIX, p.3-20.
18. Б.А.Алиев. Разрешимость краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром в уравнении и в граничном условии. Тезисы межд. конф. по матем. и мех. посв. 50-летию ИММ НАН Азерб., 2009, с.23-24.
19. B.A.Aliev. A boundary value problem for a second order elliptic differential-operator equation with a spectral parameter and operator boundary conditions. Proceedings of IMM of NASA, 2010, v.XXXII (XL), p.21-46.

20. Б.А.Алиев. Разрешимость краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром в уравнении и в граничном условии. Украинский матем. журнал, 2010, т.62, №1, с.3-14.
21. B.A.Aliev. Solvability of boundary value problems for a second order elliptic differential-operator equation with a spectral parameter in both the equation and boundary conditions. Transactions of NASA, ser. of phys.-tech. and math. sc., 2010, v.XXX, №4, p.3-16.
22. Б.А.Алиев. Краевая задача для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях. Тезисы межд. конф. посв. 80 летн. юбилею акад. Ф.Г.Максудова, 2010, с.39-40.
23. B.A.Aliev. Solvability of boundary value problem for second order elliptic differential-operator equation with spectral parameter in the equation and boundary conditions. Proceedings of IMM of NASA, 2010, v.XXXIII (XLI), p.3-26.
24. Б.А.Алиев. Фредгольмовость краевых задач для эллиптического дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка с операторными граничными условиями. Матер. межд. конф. посв. 100-летн. юбилею ака. З.И.Халилова, 2011, с.25-27.
25. B.A.Aliev, Ya.Yakubov. Second order elliptic differential-operator equations with unbounded operator boundary conditions in UMD Banach spaces. Inteqral equations and operator theory. 2011, v.69, p.269-300.
26. B.A.Aliev. A boundary value problem for second order elliptic differential-operator with a spectral parameter in both the equation and boundary conditions. Proceedings of IMM of NASA, 2010, v. XXXIV (XLII), p.3-26.
27. B.A.Aliev. Asymptotic behavior of eigen values of a boundary value problem for Laplace equation. Transactions of NASA, 2011, v.XXXI, №1, p.3-6.
28. Б.А.Алиев. Фредгольмовость краевых задач для эллиптического дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка с операторными граничными условиями. «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения» Матер. V межд. науч. конф. посв. 80-летию Дагестанского Гос. Унив. Махачкала 2011, с.18-28.

BƏHRAM ƏLİ oğlu ƏLİYEV

ELLİPTİK TİP DİFERENSİAL-OPERATOR TƏNLİKLƏR ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLL OLUNMASI VƏ ONLARIN BƏZİ SPEKTRAL XASSƏLƏRİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi elliptik diferensial-operator tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. İşdə aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

Tənliyin özünə və sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olduqda, ikinci tərtib elliptik diferensial-operator tənlik üçün sərhəd məsələlərinin koersetiv həll olunması şərtləri tapılmışdır; tənliyin özünə və sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olduqda, ikinci tərtib elliptik diferensial-operator tənlik üçün, sərhəd məsələlərinin məxsusi və qoşulmuş funksiyalarının tamlığı göstərilmişdir; tənliyin özünə və sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olduqda, ikinci tərtib elliptik diferensial-operator tənlik üçün, sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədlərinin asimptotik olaraq özünü aparması öyrənilmiş, asimptotik düsturlar alınmışdır; sərhəd şərtlərindən biri özündə xətti, qeyri-məhdud operator saxladıqda, spektral parametrli ikinci tərtib elliptik diferensial-operator tənlik üçün sərhəd məsələsinin həll olunma şərtləri tapılmış, uyğun bircins sərhəd məsələsinin spektrinin diskretliyi, həmçinin məxsusi və qoşulmuş vektorlar sisteminin tamlığı isbat olunmuşdur. Alınan abstrakt nəticələr xüsusi törəməli elliptik tənliklər üçün sərhəd məsələlərinə tətbiq olunmuşdur; sərhəd şərtləri özündə xətti, qeyri-məhdud operator saxladıqda, dördüncü tərtib elliptik diferensial-operator tənlik üçün, sərhəd məsələsinin fredholmluğu göstərilmişdir. Alınan abstrakt düzbucaqlıda nəticə dördüncü tərtib xüsusi törəməli elliptik tənlik üçün sərhəd məsələsinə tətbiq olunmuşdur; qoşmalıq sərhəd şərtlərinin əmsalları kompleks ədədlər olduqda, spektral parametrli və kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik diferensial-operator tənlik üçün sərhəd məsələsinin koersetiv həllolunma şərtləri tapılmışdır. Uyğun bircins sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri üçün asimptotik düsturlar alınmışdır; qoşmalıq şərtində xətti, qeyri-məhdud operator olduqda, spektral parametrli və kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik diferensial-operator tənlik üçün sərhəd məsələsinin koersetiv həllolunma şərtləri tapılmışdır.

BAHRAM ALI oglu ALIEV

SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATIONS OF ELLIPTIC TYPE AND THEIR SOME PROPERTIES

SUMMARY

The dissertation work is devoted to the investigation of boundary value problems for elliptic type differential-operator equations. In the dissertation work the following main results are obtained:

Coercive solvability conditions of boundary value problems are found for a second order elliptic differential-operator equation with a spectral parameter in the equation and boundary conditions; the completeness of the system of root functions of boundary value problems are established for a second order elliptic differential-operator equation with a spectral parameter in the equation and boundary conditions; behavior of eigen values of boundary value problems is studied for a second order elliptic differential-operator equation with a spectral parameter in the equation and boundary conditions; the solvability conditions of boundary value problems are found for a second order elliptic operator-differential equation with a spectral parameter in the case when one of the boundary conditions contain a linear unbounded operator. Discreteness of the spectrum and completeness of the system of eigen and adjoint functions corresponding to boundary value problem is proved. The obtained abstract result was applied to the boundary value problem for partial elliptic equations; Fredholm property of boundary value problems is established for a fourth order elliptic differential-operator equation in the case when the boundary conditions contain linear unbounded operators. The obtained abstract result was applied to boundary value problems for fourth order partial elliptic equations on a rectangle; solvability conditions of boundary value problems are found for second order elliptic operator-differential equations with a spectral parameter and with discontinuous coefficient on the finite segment in the case when the coefficients in conjugation conditions are complex numbers. Asymptotic formulas for eigen values of appropriate homogeneous boundary value problems are found; solvability conditions of boundary value problems are established for second order elliptic differential-operator equations with a spectral parameter and discontinuous coefficients in the case when there is an unbounded operator in the conjugation conditions.