НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

РОВШАН ЗУЛЬФИГАР оглы ГУМБАТАЛИЕВ

ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА И НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1211.01-Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук по математике

Баку – 2013

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

RÖVŞƏN ZÜLFÜQAR OĞLU HÜMBƏTƏLİYEV

YÜKSƏK TƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR VƏ BƏZİ SPEKTRAL MƏSƏLƏLƏR

1211.01-Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2013

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Funksional analiz"** şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi məsləhətçi:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Sabir S.Mirzəyev**

Rəsmi opponentlər:
AMEA-nın müxbir üzvü, prof. **Yusif Ə.Məmmədov**
(Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti);
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru **Fərman İ.Məmmədov**
(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu);
REA-nın müxbir üzvü, prof. **Vladimir A.İlyin**
(M.V.Lomonosov ad. Moskva Dövlət Universiteti, Rusiya).

Aparıcı təşkilat:
Bakı Dövlət Universiteti
«Diferensial və inteqral tənliklər» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 15 mart 2013-cü il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 08 fevral 2013-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена в отделе «Функциональный анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, проф. **Сабир С.Мирзоев**

Официальные оппоненты:
член.-корр. НАН Азербайджана, профессор **Юсиф А.Мамедов**
(Азербайджанский Государственный Педагогический Университет);
доктор физико-математических наук **Фарман И.Мамедов**
(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана);
член.-корр. РАН, профессор **Владимир А.Ильин**
(Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, Россия).

Ведущая организация:
Бакинский Государственный Университет
кафедра «Дифференциальные и интегральные уравнения».

Защита диссертации состоится 15 марта 2013 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 08 февраля 2013 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена вопросам теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений (ОДУ) высокого порядка в абстрактных пространствах и некоторым спектральным задачам, таким как кратная полнота и минимальность части или всех собственных и присоединенных векторов (СПВ), соответствующих операторных пучков, а также элементарным решениям однородного уравнения. Надо отметить, что теория ОДУ в абстрактных пространствах и ее связь с спектральными свойствами, соответствующего оператора, берет свое начало из классических работ К.Иосиды, Э.Хилле, Т.Като и других математиков, как применение методов функционального анализа и теории операторов в теории дифференциальных уравнений в частных производных, и, в основном, исследована задача Коши для этих уравнений. Теория операторно-дифференциальных уравнений является бурно развивающейся частью современного функционального анализа и охватывает более широкий круг вопросов. Некоторые аспекты этой теории отражены, например, в книгах С.Г.Крейна, В.И.Горбачука и М.Л.Горбачука, Ж.Л.Лионса и Э.Мадженеса, А.А.Дезина, С.Я.Якубова и других. Интерес к разрешимости ОДУ обусловлен тем, что они содержат в себе многие задачи математического анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, теории интегро - дифференциальных уравнений, теории псевдо-дифференциальных уравнений и др. Замечательно то, что теория разрешимости ОДУ дает единый подход к решению всех этих задач, и методы этой теории могут быть применены во всех конкретных случаях. Несмотря на большую область применения, эта теория представляет самостоятельный математический интерес. В этой области весьма важные и интересные результаты получены в работах М.Г.Гасымова, Ю.А.Дубинского, В.И.Горбачука и М.Л.Горбачука, В.К.Романко, Н.И.Юрчука, М.Б.Байрамоглы, А.Г.Костюченко, А.Б.Алиева, Г.И.Асланова, С.С.Мирзоева, С.Я.Якубова, А.А.Шкаликова, А.Р.Алиева и других.

Как отмечалось, теория разрешимости ОДУ тесно связана с некоторыми спектральными задачами теории операторных пучков. Отправным пунктом спектральной теории операторных пучков явились работы М.В. Келдыша, в которых введены понятия n-кратной полноты системы СПВ для полиномиальных операторных пучков вида

$$K(\lambda)=E+T_0+\lambda T_1C+\ldots\lambda^{n-1}T_{n-1}C^{n-1}+\lambda^nC^n, \quad (1)$$

где C - полный самосопряженный оператор конечного порядка, операторы $T_j\left(j=\overline{0,n-1}\right)$ - вполне непрерывны, E - единичный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H. М.В.Келдышом доказана теорема об n-кратной полноте всей системы СПВ и установлена связь разрешимости задачи Коши

$$K(d/dt)u(t)=0,\ t\in(-\infty,\infty)$$

$$u^{(\nu)}(0)=\varphi_\nu,\ \varphi_\nu\in H,\ \nu=\overline{0,n-1}$$

с n - кратной полнотой всей системы СПВ. После этой работы Келдыша спектральная теория операторных пучков бурно развивалась, и в этой области появились важные работы М.С. Аграновича, М.Г.Гасымова, В.А.Ильина, В.И. Мацаева и Е.З.Могульского, Дж.Э.Аллахвердиева, Дж.Э.Аллахвердиева и А.М.Ахмедова, В.П.Маслова, А.С. Маркуса, И.В.Горюка, А.А. Шкаликова, М.Г.Крейна и Г.К.Лангера, Г.И.Исаева, Г.В.Радзиевского, С.С.Мирзоева, С.Я.Якубова, В.Н.Визитея и А.С.Маркуса, А.Е.Вирозуба и др.

Отметим, что многие вопросы механики, математической физики и техники приводят к исследованию полноты части СПВ операторных пучков. Для получения теоремы о полноте части корневых векторов используются различные методы. Отметим ряд работ, посвященных изучению полноты или кратной полноты определенной части системы СПВ операторных пучков. Проблемы такого характера возникают, например, при решении ряда динамических задач теории упругости. Для получения теорем о полноте части СПВ прибегают к различным методам. М.Г.Крейном и Г.К.Лангером был использован метод факторизации. Г.В.Радзиевский же применял аналитические методы оценки резольвенты пучка. Особо следует подчеркнуть метод, предложенный академиком М.Г.Гасымовым, который установил связь с разрешимостью краевой задачи

$$P(d/dt)u(t)=0,\ t\in R_+=(0,\infty)$$

$$u^{(\nu)}(0)=\varphi_\nu,\ \varphi_\nu\in H,\ \nu=\overline{0,n-1},\ k\le n-1,\ \|u(t)\|\to 0,\ t\to\infty$$

и некоторыми аналитическими свойствами резольвенты $P^{-1}(\lambda)$ с k - кратной полнотой системы СПВ операторного пучка $P(\lambda)$. В дальнейшем этот метод обобщен и уточнен в работах С.С. Мирзоева, в которых предложен новый подход к вопросам разрешимости краевых задач для ОДУ, а именно, он предложил метод для нахождения точных значений или оценок сверху норм операторов промежуточных производных в абстрактных пространствах типа Соболева, указал их связь с разрешимостью краевой задачи и спектральными свойствами операторных пучков. Отметим, что этот метод позволял найти более широкий класс ОДУ, для которого корректны поставленные краевые задачи.

Краевые условия, которые содержат некоторые операторы, исследованы в работах В.А.Ильина и В.С.Филлипова, М.Г.Гасымова, С.С.Мирзоева, Б.А.Алиева и С.С.Якубова и др.

Здесь хотелось отметить, что краевые задачи для операторно-дифференциальных уравнений на полуоси и их связь со спектральной теорией операторных пучков детально изучены. Но задачи на конечном отрезке, можно сказать, очень мало исследованы. В этой области существуют работы, где только главные части играют важную роль, а возмущенные части, вообще, не существуют или имеют достаточно малые нормы. Здесь отметим работы С.Г.Крейна, Лаптева, С.С.Мирзоева, М.С. Салимова для ОДУ второго порядка. Отметим также работу М.Б.Оразова, в которой на конечном отрезке рассмотрено ОДУ $2n$ - го порядка, и главная часть имеет вид: $(-1)^n \dfrac{d^{2n}}{dt^{2n}} + A^{2n}$.

Отметим, что разрешимость ОДУ в абстрактных пространствах с весом исследована достаточно мало. Здесь отметим работы С.С.Мирзоева, Ю.А.Дубинского, С.Я.Якубова и М.К.Балаева, А.А.Шкаликова.

Мы в данной диссертации исследуем разрешимость уравнения или краевые задачи для ОДУ высокого порядка с кратной характеристикой. Эти задачи берут свое начало из теории разрешимости смешанных задач для бигармонических и полугармонических уравнений и являются их операторными обобщениями. Исследованы также вопросы разрешимости ОДУ на всей оси в пространствах типа Соболева и в весовых аналогах пространств типа Соболева, далее получены условия разрешимости краевых задач на полуоси в этих пространствах. Получены условия существования и единственности разрешимости краевых задач на конечном отрезке. Отметим, что все условия выражены только свойствами операторов, участвующих в ОДУ и легко проверяемых в конкретных задачах. Отметим, что эти условия дают возможность найти более широкий класс ОДУ, для которых поставленные краевые задачи разрешимы.

В диссертационной работе также исследована полнота системы части СПВ соответствующих операторных пучков, отвечающих краевым задачам на полуоси и на конечном отрезке, главная часть которых имеет сложную спектральную характеристику. Получены теоремы о кратной полноты СПВ в пространстве следов решений этими краевыми задачами. Отметим, что кратная полнота и минимальность системы СПВ в пространстве следов дает возможность обосновать решения однородное уравнения методом Фурье. Далее, из доказательства внутренней компактности пространств решений однородных уравнений мы получим теоремы о минимальности элементарных решений в пространстве типа Соболева или в пространстве аналитических вектор - функций.

Цель работы.

1. В пространствах типа Соболева, в аналогах пространств Соболева с весом исследовать вопросы регулярных, гладких и обобщенных разрешимостей ОДУ высокого порядка, главная часть которых имеет кратную характеристику.
2. Получить условия разрешимости корректно поставленных задач на полуоси.
3. Исследовать существование обобщенных решений на конечном отрезке в указанных пространствах Соболева.
4. Получить теоремы кратной полноты и минимальности системы части СПВ, отвечающих различным краевым задачам на полуоси, конечном отрезке, а также отвечающих краевым задачам в пространстве голоморфных вектор - функций и обобщенным решениям краевых задач.
5. Доказать теоремы о внутренней компактности регулярных решений и теоремы типа Фрагмена-Линделефа в различных пространствах решений однородных ОДУ.
6. Доказать теоремы о полноте и минимальности части систем убывающих элементарных решений и систем всех элементарных решений в соответствующих пространствах решений.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и опубликованы в работах автора. В диссертации получены следующие основные результаты о разрешимости ОДУ с кратной характеристикой и по спектральной теории соответствующих операторных пучков. Все условия выражены только свойствами ОДУ или операторных пучков:

- найдены точные условия разрешимости ОДУ на всей оси в пространствах гладких весовых вектор-функций и весовых пространствах типа Соболева;
- даны понятия обобщенного решения ОДУ и найдены их условия разрешимости;

- найдены нормы операторов промежуточных производных в соответствующих пространствах типа Соболева на всей оси;
- во всех подпространствах, порожденных краевыми условиями, найдены или оценены нормы операторов промежуточных производных и указана связь с разрешимостью соответствующих краевых задач;
- найдены условия регулярной разрешимости краевых задач на полуоси в пространствах типа Соболева, в пространствах типа Соболева с весом, в пространстве гладких вектор-функций, в пространстве голоморфных вектор-функций, кроме того, получены условия разрешимости обобщенных решений на полуоси;
- получены условия Ф(нормальной) разрешимости регулярных краевых задач в пространствах типа Соболева с весом и в пространстве голоморфных вектор - функций;
- получены условия разрешимости однородных уравнений в различных случаях;
- доказаны теоремы о внутренней компактности пространств регулярных решений, обобщенных решений; получены теоремы типа Фрагмена-Линделефа для регулярных и голоморфных решений;
- исследовано существование и единственность обобщенных решений на конечном отрезке;
- проведены оценки резольвенты в некоторых секторах и получены теоремы о кратной полноте системы СПВ, отвечающих собственным значениям из левой полуплоскости или из некоторого сектора в пространстве следов решений;
- доказаны теоремы о кратной полноте и минимальности системы СПВ, отвечающих краевым условиям на конечном отрезке в пространстве следов решений;
- доказаны теоремы о полноте и минимальности элементарных решений в соответствующих пространствах.

Общая методика исследований. В диссертации применяются методы неограниченных операторов в гильбертовом пространстве, теория несамосопряженных операторов, теории полугрупп операторов, методы интегральных преобразований в абстрактных пространствах, теории целых и мероморфных функций, методы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность.

Результаты, полученные в диссертационной работе носят, в основном, теоретический характер. Но полученные результаты могут быть применимы при исследованиях различных задач механики, математической физики, теории дифференциальных уравнений в частных производных, особенно, в теории упругости однородных тел.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно обсуждались на семинарах акад. М.Г.Гасымова "Функциональный анализ и его приложения", на семинарах кафедр "Прикладная математика", "Теория функций и функциональный анализ", "Дифференциальные и интегральные уравнения" БГУ, на семинарах отделов "Функциональный анализ", "Негармонический анализ","Дифференциальные уравнения","Уравнения математической физики", а также на общеинститутском семинаре Института Математики и Механики НАН Азербайджана.

Результаты диссертации докладывались на научных конференциях, посв.85-летию проф. А.Ш.Габибзаде (2000), "XV международном математическом симпозиуме" (Турция,Мерсин, 2002), на II Международной конференции, посв. 80-летию член-корр. РАН, проф. Л.Д.Кудрявцева (Москва, 2003), на I международной конференции “Функциональные - дифференциальные уравнения и их приложения” (Махачкала, 2003), на X Международной конференции по мат. и мех., посв. 45-летию ИММ НАН Азерб. (Баку, 2004), на международной конференции по математике и механиков, посв.50-летию со дня рожд. член-корр. НАНА, проф. И.Т.Мамедова (Баку, 2005), на Международной конференции “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ”, посв. 100-летию акад. РАН С.М.Никольского (Москва, 2005), на XII международной конференции по математике и механике, посв. 70-летию член-корр. НАНА, проф. Б.А.Искендерова (Баку, 2006), на международной конф. “Современные методы физико-математических наук” (Орел, 2006), на международной научной конференции “Математических анализ, дифференциальные уравнении и их приложения” (Ужгород, 2006), на международной конференции “Проблемы кибернетики и информатики” (Баку, 2006), на III Международной конференции “Функциональные-дифференциальные уравнения и их прилож.” (Махачкала, 2007), на международном симпозиуме “Современные проблемы математики, механики и информатики.” (Нахчиван, 2007), на XIII международной конференции по математике и механике, посв. 70-летию со дня рож. академика А.Д.Гаджиева (Баку, 2007), на научной конференции, пос. 85-летию Г.А.Алиева (Баку, 2008), на Международной научной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы”, пос. 80-летию акад. РАН В.А.Ильина и 60-летию акад. РАН И.И. Моисеева (Стерлитамак, 2008), на Международной конференции по физике, математике и техническим наукам (Нахчиван, 2008), на XIV международной конференции математике и механике, пос. 50-летию ИММ НАН Азерб. (Баку, 2009), на международной конференции, пос. международному Году Астрономии (Нахчиван,2009), на Международной конференции, посвященной 80-летию акад. Ф.Г.Максудова (Баку,2010).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 54 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Объем диссертации состоится 235 страницах. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 183 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена вопросам разрешимости ОДУ высокого порядка с кратной характеристикой на всей оси в разных пространствах типа Соболева.

В 1.1 вводятся некоторые пространства типа Соболева и другие функциональные пространства, некоторые их характеристики, обозначения и определения, которые используются в дальнейшем изложении.

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(x, y), x, y \in H$, $A = A^* > cE$ $(c > 0)$, а A^θ $(\theta \geq 0)$ шкала гильбертовых пространств, порожденная оператором A, т.е. $H_\theta = D(A^\theta), (x, y)_\theta = (A^\theta x, A^\theta y), x, y \in H_\theta$. При $\theta = 0$ считаем, что $H_0 = H, (x, y)_0 = (x, y)$.

Через $L(X, Y)$ обозначим пространство линейных ограниченных операторов, действующих из линейного пространства X в другое Y, а $\sigma_\infty(H)$ пространства вполне непрерывных операторов, действующих в H.

Пусть a и b вещественные числа, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Через $L_2((a, b), H_\theta)$ будем обозначать гильбертово пространство всех функций $f(t)$, определенных почти всюду в (a, b) со значениями

H_θ, измеримых и, для которых конечны интегралы Бохнера $\|f\|_{L_2((a,b);H_\theta)}=\left(\int_a^b\|f(t)\|_\theta^2\,dt\right)^{1/2}<\infty$,а $W_2^m((a,b);H)$ ($m-$натуральное число) - следующее гильбертово пространство

$$W_2^m((a,b);H)=\left\{u/u^{(m)}\in L_2((a,b);H),u\in L_2((a,b);H)\right\}$$

с нормой $\|u\|_{W_2^m((a,b);H)}=\left(\|u^{(m)}\|^2_{L_2((a,b);H)}+\|u\|^2_{L_2((a,b);H)}\right)^{1/2}$.

Здесь и в дальнейшем производные понимаются в смысле теории обобщенных функций. Далее, определим пространство $D((a,b),H_m)$- множество бесконечно дифференцируемых функций со значениями в H_m,имеющих компактные носители в $[a;b]$. Если обозначим через $\overset{0}{D}((a,b),H_m)$ подмножество множества $D((a,b),H_m)$

$$\tilde{D}^m((a,b),H_m)=\left\{u/u\in D((a,b),H_m),u^{(s_i)}(a)=0,u^{(k_j)}(b)=0,\right.$$

$$\left.0\le s_i\le m-1,0\le k_j\le m-1\right\},$$

то множество

$$W_2^m((a,b);H,(s_i),(k_j))=\left\{u/u\in W_2^m((a,b);H),u^{(s_i)}(a)=0,u^{(k_j)}(b)=0\right\}$$

всюду является подпространство пространства $W_2^m((a,b);H)$. В дальнейшем будем предполагать, что

при $R=(-\infty,\infty)$ $L_2((-\infty,\infty);H)=L_2(R,H)$, $W_2^m((-\infty,\infty);H)=W_2^m(R;H)$; $D((-\infty,\infty);H_m)=D(R;H_m)$, а при $R_+=(0,\infty)$ $R=(-\infty,\infty)$ $L_2((0,\infty);H)=L_2(R_+;H)$, $W_2^m((0,\infty);H)=W_2^m(R_+;H)$;

$W_2^m((0,\infty);H;(s_\nu))=W_2^m(R_+;H;(s_\nu))$; $D((0,\infty);H;(s_\nu))=D(R_+;H;(s_\nu))$.

Определим следующие весовые пространства типа Соболева. Пусть $\gamma\in(-\infty,+\infty)$. Обозначим через $L_{2,\gamma}(R;H)$ пространство вектор - функций $f(t)$ со значениями в H, которые

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}(R;H)}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|f(t)\|^2e^{-2\gamma t}dt\right)^{1/2}<\infty.$$

Далее, определяются пространства
$W_{2,\gamma}^{m}\left(R;H\right)=\left\{u/u\in L_{2,\gamma}\left(R;H_{\theta}\right),u^{(m)}\in L_{2,\gamma}\left(R;H_{\theta}\right)\right\}$ с нормой
$\|u\|_{W_{2,\gamma}^{m}(R;H)}=\left(\left\|u^{(m)}\right\|_{L_{2,\gamma}(R;H)}^{2}+\|u\|_{L_{2,\gamma}(R;H)}^{2}\right)^{1/2}$. Аналогично определяются пространства $L_{2,\gamma}\left(R_{+};H\right)$, $W_{2,\gamma}^{m}\left(R_{+};H\right)$ и $W_{2,\gamma}^{m}(R_{+};H;\left(s_{i}\right))$ при $R_{+}=\left(0,\infty\right)$.

При исследовании существований голоморфных решений ОДУ нам будет необходимо рассмотреть пространства $H_{2,\alpha}$ и $W_{2,\alpha}$, которые введены М.Г.Гасымовым. Пусть $S_{\alpha}=\left\{z/\left|\arg z\right|<\alpha,0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right\}$ некоторый сектор. Обозначим через $H_{2,\alpha}$ пространство вектор - функций $f\left(t\right)$ со значениями в H, которые голоморфны в секторе S_{α}, причем $\sup\limits_{|\varphi|<\alpha}\int\limits_{0}^{\infty}\left\|f\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^{2}<\infty$. Оказывается функция из класса $H_{2,\alpha}$, имеет граничные значения $f_{\alpha}\left(t\right)$ и $f_{-\alpha}\left(t\right)$. $H_{2,\alpha}$ превращается в гильбертово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{H_{2,\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left\|f_{\alpha}(\xi)\right\|_{L_{2}\left(R_{+};H\right)}^{2}+\left\|f_{\alpha}(\xi)\right\|_{L_{2}\left(R_{+};H\right)}^{2}\right)^{1/2}.$$

Далее, введем класс $W_{2,\alpha}^{m}$ вектор - функций $u\left(\tau\right)$ голоморфных в секторе S_{α}, причем $\sup\limits_{|\varphi|<\alpha}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\left\|u^{(m)}\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^{2}+\left\|A^{m}u\left(te^{i\varphi}\right)\right\|\right)dt<\infty$.
Отметим, что граничные значения вектор-функции $u\left(\tau\right)\in W_{2,\alpha}^{m}$ имеют граничные значения $u_{\alpha}\left(t\right)\in W_{2}^{m}\left(R_{+};H\right)$, $u_{-\alpha}\left(t\right)\in W_{2}^{m}\left(R_{+};H\right)$. Этот класс является гильбертовым пространством относительно нормы

$$\|u\|_{W_{2,\alpha}^{m}\left(R_{+};H\right)}=\left(\left\|u_{\alpha}(t)\right\|_{W_{2}^{m}\left(R_{+};H\right)}^{2}+\left\|u_{-\alpha}(t)\right\|_{W_{2}^{m}\left(R_{+};H\right)}^{2}\right)^{1/2}.$$

В 1.2 рассматривается следующее уравнение в весовых пространствах типа Соболева

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)=\left(-\frac{d^2}{dt^2}+A^2\right)^n u(t)+\sum_{j=0}^{2n-1}A_{2n-j}u^{(j)}(t)=f(t),\ t\in R, \quad (2)$$

где $A=A^*>\mu_0 E\ (\mu_0>0)$, $A_j\,(j=\overline{0,2n})$ линейные, вообще говоря, неограниченные операторы в H, $f(t)$ и $u(t)$ векторзначные функции со значениями из H.

Определение 1. Если при $f(t)\in L_{2,\gamma}(R;H)$ существует вектор - функция $u(t)\in W_{2,\gamma}^{2n}(R;H)$, которая удовлетворяет уравнению (2) почти всюду, то ее будем называть регулярным решением уравнения (2), если имеют место оценки $\|u\|_{W_{2,\gamma}^{2n}(R;H)}\le const\|f\|_{L_{2,\gamma}(R;H)}$, то уравнение (2) будем называть регулярно разрешимым.

Сперва находится условие регулярной разрешимости простого уравнения

$$P_0\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)=\left(-\frac{d^2}{dt^2}+A^2\right)^n u(t)=f(t), \quad (3)$$

которое связывает нижнюю грань спектра оператора A с показателем γ веса.

Лемма 1. *Пусть* $A=A^*\ge\mu_0 E\ (\mu_0>0)$ *и* $\gamma<|\mu_0|$. *Тогда уравнение (3) регулярно разрешимо.*

Далее, получаются точные нормы операторов промежуточных производных и с их помощью доказывается

Теорема 1. *Пусть выполняются условия леммы 1,а операторы* $B_j=A_jA^{-j}\left(j=\overline{0,n}\right)$ *ограничены в* H*, и имеет место неравенство*

$$\alpha(\gamma;\mu_0)=\sum_{j=0}^{2n}C_j\left(\gamma;\mu_0\right)\left\|B_{2n-j}u\right\|<1, \quad (4)$$

где числа $C_j\left(\gamma;\mu_0\right)$ *при* $j=\overline{0,2n}$ *определяются следующим образом*

$$C_0(\gamma,\mu_0)=\frac{\mu_0^{2n}}{(\mu_0^2-\gamma^2)^{2n}},$$

$$C_j(\gamma,\mu_0)=\begin{cases} d_{2n,j}^{n} \dfrac{\mu_0^{2n-j}}{(\mu_0^2-2\gamma^2)^{(2n-j)/2}}, & 0\le \dfrac{\gamma^2}{\mu_0^2}<\dfrac{j}{2n+j} \\ \dfrac{|\gamma|^j\ \mu_0^{2n-j}}{(\mu_0^2-\gamma^2)^n}, & \dfrac{j}{2n+j}\le\dfrac{\gamma^2}{\mu_0^2}<1 \end{cases}$$

а при $j=\overline{1,2n-1}$

$$C_{2n}(\gamma,\mu_0)=\begin{cases} 1, & 0\le\dfrac{\gamma^2}{\mu_0^2}<\dfrac{1}{2} \\ \left(\dfrac{\gamma^2}{\mu_0^2-\gamma^2}\right)^n, & \dfrac{1}{2}\le\dfrac{\gamma^2}{\mu_0^2}<1 \end{cases},$$

где $d_{2n,j}=\left(\dfrac{j}{2n}\right)^{\frac{j}{2n}}\cdot\left(\dfrac{2n-j}{2n}\right)^{\frac{2n-j}{2n}},\ \left(j=\overline{1,2n-1}\right).$

Отметим, что здесь числа $C_j\left(\gamma;\mu_0\right)$ являются нормами операторов промежуточных производных в пространствах Соболева с весом, т.е.

$$C_j\left(\gamma;\mu_0\right)=\sup_{0\ne u\in W_{2,\gamma}^{2n}(R;H)}\left\|A^{2n-j}u^{(j)}\right\|\left\|P_0u\right\|_{L_{2,\gamma}(R;H)}^{-1},\ j=\overline{0,2n}.$$

Эти неравенства являются аналогами неравенства Колмогорова и имеют самостоятельный математический интерес. Отметим, что при $n=1$ эта теорема доказана в работе С.С.Мирзоева. Условия теоремы 1 в некотором смысле точны, т.е. если $\gamma=\pm\mu_0$ или $\alpha\left(\gamma;\mu_0\right)\ge 1$, то задача (3) не является регулярно разрешимой, т.е. существуют операторы B_j такие, что уравнение (2) не является регулярно разрешимой.

Далее, в 1.3 рассматривается уравнение (2), когда правая часть $f(t)\in W_{2,\gamma}^{s}(R;H)$ при $s\in N$ и исследуются существование и единственность гладких решений в пространстве типа Соболева с весом.

Доказываются следующие утверждения

Лемма 2. *Пусть выполняется условие леммы 1. Тогда уравнение (3) при любом* $f(t)\in W_{2,\gamma}^{s}(R;H)$ *имеет единственное решение*

$u(t)\in W_{2,\gamma}^{2n+s}(R;H)$, *которое удовлетворяет уравнению (2) в* R *тождественно*.

Теорема 2. *Пусть* $A=A^*\geq\mu_0 E(\mu_0>0)$, *а операторы* $B_j=A_jA^{-j}$, *ограничены в* H, *т.е.* $A_j\in L\left(H_j;H\right)\bigcap\left(H_{j+s};H_s\right),\left(j=\overline{0,2n}\right)$ *и имеет*

$$\alpha\left(\gamma,\mu_0\right)=\sum_{j=0}^{2n}C_j\left(\gamma,\mu_0\right)\left(\max\left\|A_{2n-j}\right\|_{H_{2n-j}\to H},\left\|A_{2n-j}\right\|_{H_{2n-j+s}\to H_s}\right)<1,$$ *где*

числа $C_j\left(\gamma;\mu_0\right)$ *определены из теоремы 1. Тогда уравнение (2) при любом* $f(t)\in W_{2,\gamma}^{s}(R;H)$ *имеет единственное решение* $u(t)\in W_{2,\gamma}^{2n+s}(R;H)$, *которое удовлетворяет уравнению (2) тождественно в* R.

Здесь числа $C_j\left(\gamma;\mu_0\right)$ также являются нормами операторов промежуточных производных в пространствах гладких вектор - функций с весом типа Соболева.

В 1.4 получаются теоремы о регулярной разрешимости, существовании и единственности гладких решений. А именно, доказываются следующие теоремы

Теорема 3. *Пусть* $A=A^*\geq\mu_0E(\mu_0>0)$, *а* $B_j=A_jA^{-j}\left(j=0,2n\right)$ *ограничены в* H, *и имеет место неравенство* $\alpha=\sum_{j=0}^{2n}\left\|B_{2n-j}\right\|.d_{2n,j}^{n}<1$,

где $$d_{2n,j}=\begin{cases}\left(\dfrac{j}{2n}\right)^{\frac{j}{2n}}\cdot\left(\dfrac{2n-j}{2n}\right)^{\frac{2n-j}{2n}}, & при\ j=\overline{1,2n-1}\\ 1, & при\ j=0,2n\end{cases}.$$ *Тогда уравнение (2) регулярно разрешимо, т.е. при любом* $f\left(t\right)\in L_2(R;H)$ *существует* $u\left(t\right)\in W_2^{2n}(R;H)$, *для которого удовлетворяется уравнение (2) почти всюду в* R *и* $\left\|u\left(t\right)\right\|_{W_2^{2n}\left(R;H\right)}\leq const\left\|f\left(t\right)\right\|_{L_2\left(R;H\right)}$.

Отметим, что здесь условия разрешимости неулучшаемые.

Теорема 4. *Пусть* $A=A^*\geq cE(c>0)$, $A_j\in L(H_j;H)\cap L(H_{j+s};H_s)$, $\left(j=\overline{0,2n-1},s\in N\right)$ $\sum_{j=0}^{2n}\max\left\{\left\|A_{2n-j}\right\|_{H_{2n-j}\to H},\left\|A_{2n-j}\right\|_{H_{2n+s-j}\to H_s}\right\}\cdot d_{2n,j}^{n}<1$.

Тогда уравнение (2) при любом $f(t)\in W_2^s(R;H)$ *имеет единственное гладкое решение* $u(t)\in W_2^{2n+s}(R;H)$, *которое удовлетворяет уравнению (2) тождественно в* R, *и имеют место оценки* $\|u\|_{W_2^{2n+s}(R;H)}\le const\|f\|_{W_2^s(R;H)}$.

В 1.5 дается определение обобщенного решения для уравнения (2) и доказывается существование и единственность таких решений. Отметим, что здесь от коэффициентов требуются другие условия подчиненности.

В пространстве $D\left(R;H_{2n}\right)$ определим операторы

$$P_0\left(\frac{d}{dt}\right)u=\left(-\frac{d^2u}{dt^2}+A^2\right)^n,\ P_1\left(\frac{d}{dt}\right)u=\sum_{j=1}^{2n-1}A_{2n-j}\,u^{(j)},u\in D\left(R;H_{2n}\right).$$

Лемма 3. *Пусть* $A=A^*>cE(c>0)$, *а* $B_j=A_jA^j(j=\overline{0,n})$, *и* $D_j=A^{-n}A_jA^{n-j}(j=\overline{n+1,2n})$ *ограничены в* H. *Тогда билинейный функционал* $P_1\left(u,\psi\right)\equiv\left(P_1\left(d/dt\right)u,\psi\right)_{L_2(R;H)}$, *определенный для всех вектор - функций* $u\left(t\right)\in D\left(R;H_{2n}\right),\psi\in D\left(R;H_{2n}\right)$ *продолжается на пространствах* $W_2^n\left(R;H\right)\oplus W_2^n\left(R;H\right)$, *которые действуют следующим образом*

$$\tilde{P}_1\left(u,\psi\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(-1\right)^n\left(A_ju^{(n-j)},\psi^{(n)}\right)_{L_2(R;H)}+\sum_{j=n+1}^{2n}\left(A_ju^{(2n-j)},\psi\right)_{L_2(R;H)}.(5)$$

Определение 2. Вектор - функция $u(t)\in W_2^n(R;H)$ называется обобщенным решением уравнения (2), если для любой вектор - функции $\psi\,(t)\in W_2^n(R;H)$ имеет место тождество

$$\left(u,\psi\right)_{W_2^n(R;H)}+\sum_{k=1}^{2n-1}C_n^k\left(A^{n-k}u^{(k)},A^{n-k}\psi^{(k)}\right)_{L_2(R;H)}+\widetilde{P}_1\left(u,\psi\right)=$$
$$=\left(f,\psi\right)_{L_2(R;H)},$$

где $\quad C_n^k=\dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$.

Сперва, используя метод факторизации С.С.Мирзоева, доказывается следующая лемма, которая имеет самостоятельный интерес.

Лемма 5. *Пусть* $A=A^*>cE(c>0)$. *Тогда для любого* $u(t)\in W_2^n(R;H)$

имеются следующие точные оценки $\left\|A^{n-j}u^{(j)}\right\|_{L_2(R;H)} \le d_{n,j}^{\frac{n}{2}} \left\|\left\|u\right\|\right\|_{W_2^n(R;H)}$

$\left(j=\overline{0,n}\right)$, а $d_{2n,j}=\begin{cases}\left(\dfrac{j}{2n}\right)^{\frac{j}{2n}}\cdot\left(\dfrac{2n-j}{2n}\right)^{\frac{2n-j}{2n}}, & при\ j=\overline{1,2n-1}\\ 1, & при\ j=0,2n\end{cases}.$

Здесь $\left\|\left\|u\right\|\right\|_{W_2^n(R;H)}=\left(\left\|u\right\|_{W_2^n(R;H)}+\sum_{k=1}^{2n-1}C_n^k\left\|A^{n-k}u^{(k)}\right\|_{L_2(R;H)}\right)^{1/2}.$

Далее доказывается следующая

Теорема 5. *Пусть* $A=A^*>cE(c>0)$*, а операторы* $B_j=A_jA^j(j=\overline{0,n})$ *и* $D_j=A^{-n}A_jA^{n-j}(j=\overline{n+1,2n})$ *ограничены в* H*, и имеет место равенство* $\gamma=\sum_{j=0}^{n}d_{n,j}^{n/2}\left\|B_j\right\|+\sum_{n+1}^{2n}d_{n,2n-j}^{n/2}\left\|D_j\right\|<1$*, где* $d_{n,j}$ *определены из леммы 5. Тогда уравнение (2) имеет обобщенное решение* $u(t)\in W_2^n(R;H)$ *при любом* $f(t)\in L_2(R;H)$*, и имеют место оценки* $\left\|u\right\|_{W_2^n(R;H)}\le const\left\|f\right\|_{L_2(R;H)}$.

Во второй главе исследуются разрешимости краевых задач на полуоси для ОДУ высокого порядка, когда главная часть имеет кратную характеристику.

В 2.1 указана регулярная разрешимость краевой задачи

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2}+A^2\right)^n u(t)+\sum_{j=0}^{2n-1}A_{2n-j}u^{(j)}(t)=f(t),\ t\in R_+, \qquad (6)$$

$$u^{(s_\nu)}(0)=0,\left(\nu=\overline{0,n-1}\right), \qquad (7)$$

где $0\le s_0<s_1<...<s_\nu\le 2n-1$ целые числа.

Определение 3. Если при $f(t)\in L_2(R_+;H)$ существует вектор-функция $u(t)\in W_2^{2n}(R_+;H)$, удовлетворяющая уравнению (6) почти всюду в R_+, а краевые условия (7) выполняются в смысле $\lim_{t\to 0}\left\|A^{2n-s_\nu-1/2}u^{(s_\nu)}(t)\right\|=0,\nu=\left(\overline{0,n-1}\right)$, то $u(t)$ будем называть регулярным решением краевой задачи (6), (7), и, если имеется

$\|u\|_{W_2^{2n}(R_+;H)} \le const\|f\|_{L_2(R_+;H)}$, то ее будем называть регулярно разрешимой.

Отметим, что регулярная разрешимость краевой задачи для ОДУ высокого порядка исследована в работах С.С.Мирзоева, М.Г.Гасымова, А.А.Шкаликова, когда главная часть имеет простую характеристику. Определим следующие операторы

$$P_0(d/dt)u = \left(-\frac{d^2u}{dt^2} + A^2\right)^n u(t), P_1\left(\frac{d}{dt}\right)u = \sum_{j=0}^{2n-1} A_{2n-j}u^{(j)}(t),$$

$$u(t) \in W_2^{2n}\left(R_+; H; (s_\nu)_{\nu=0}^{n-1}\right).$$

Доказываются следующие утверждения.

Лемма 6. *Оператор* $P_0(d/dt)$ *осуществляет изоморфизм между пространствами* $W_2^{2n}\left(R_+; H; (s_\nu)_{\nu=0}^{n-1}\right)$ *и* $L_2(R_+; H)$.

Теорема 6. *Пусть,* $A = A^* \ge c\,E(c > 0)$, *а операторы* $B_j = A_j \cdot A^{-j}\left(j = \overline{1, 2n}\right)$ *ограничены в* H, *причем имеют место оценки* $\alpha = \sum_{j=0}^{2n-1} N_j(R_+; (s_\nu)_{\nu=0}^{n-1}) \|B_{2n-j}\| < 1$, *где* $N_j(R_+; (s_\nu)_{\nu=0}^{n-1})$ *есть нормы операторов* $A_{2n-j} \cdot \frac{d^j}{dt^j} : W_2^{2n}(R_+; H) \to L_2(R_+; H)$, т.е.

$$. \; N_j(R_+; (s_\nu)_{\nu=0}^{n-1}) = \sup_{0 \ne u \in W_2^{2n}(R_+;H)} \left\|A^{2n-j}u^{(j)}\right\|_{L_2(R_+;H)} \cdot \|P_0 u\|^{-1}_{L_2(R_+;H)}.$$

Тогда задачи (6), (7) имеют регулярное решение.

Покажем, как определяются нормы $N_j(R_+, (s_\nu)_{\nu=0}^{n-1})$. При $\beta \in \left(0, d_{2n,j}^{-2n}\right)$ определим операторные пучки при $j = \overline{0, 2n-1}$

$$P_j(\lambda; \beta; A) = \left(-\lambda^2 E + A^2\right)^n \left(\lambda^2 E + A^2\right)^n - \beta (i\lambda)^{2j} A^{4n-2j}.$$

Как показано в работах С.С.Мирзоева при $\beta \in \left(0, d_{2n,j}^{-2n}\right)$ операторные пучки $P_j(\lambda; \beta; A)$ допускают факторизацию

$$P_j(\lambda; \beta; A) = F_j(\lambda; \beta; A) \cdot F_j(-\lambda; \beta; A),$$

причем

$$F_j(\lambda;\beta;A)=\prod_{l=1}^{n}\left(\lambda E-\omega_l(\beta)A\right)\equiv\sum_{l=0}^{n}\alpha_{l,j}(\beta)\lambda^l A^{n-l}\left(\mathrm{Re}\,\omega_l<0,\right.$$
$$\left.\alpha_{l,j}(\beta)>0\right).$$

Далее, с помощью числа $\alpha_{l,j}(\beta)$ построим матрицу

$R_j(\beta)=\left(r_{p,q,j}(\beta)\right)_{p,q=1}^{n}$, $T=\left(t_{p,q}\right)_{p,q=1}^{2n}$, где при $p>q$

$$r_{p,q,j}(\beta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\alpha_{p+\nu,j}(\beta)\alpha_{q-\nu-1,j}(\beta),\left(\alpha_{l,j}(\beta)=0,\nu<0,\nu>n\right),$$

$$t_{p,q}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{n}C_{p+\nu}C_{q-\nu-1}\cdot\left(C_{\nu}=0,\nu<0,\nu>n,C_l=\begin{cases}C_n^l,\ l=2k,\ k=\overline{1,n-1}\\ 0,\ l=2k-1,k=\overline{1,n-1}\end{cases}\right).$$

При $p<q$, $r_{p,q,j}(\beta)=r_{q,p,j}(\beta)$ и $t_{p,q}=t_{q,p},\left(p,q=\overline{1,n}\right)$. Далее, определим матрицу $S_j(\beta)=R_j(\beta)-T$. Тогда имеет место равенство

$$N_j\left(R_+,(s_\nu)_{\nu=0}^{n-1}\right)=\begin{cases}d_{2n,j}^{-n} & \text{åñëè}\quad \det \mathrm{S_j}(\beta)\neq 0,\quad \beta\notin\left(0,d_{2n,j}^{-2n}\right)\\ \mu_j^{-1/2} & \text{åñëè}\quad \det \mathrm{S_j}(\beta)=0,\quad \beta\in\left(0,d_{2n,j}^{-2n}\right)\end{cases},\qquad (8)$$

где μ_j есть наименьший корень уравнения $\det S_j(\beta)=0$.

Далее, отметим, что условия разрешимости теоремы 6 также точны.

Здесь отметим, что в некоторых случаях эти числа оценены или найдены их точные значения. Например, при $s_\nu=\nu\left(\nu=\overline{0,n-1}\right)$ получено, что при $j=\overline{0,n-1}$ имеют место оценки $N_j(R_+,(s_\nu)_{\nu=0}^{n-1})\le d_{2n,j}^{\frac{n}{2}}$, а при $j=\overline{n,2n}$ имеет место (8). При $s_\nu=2\nu$ и $s_\nu=2\nu+1\left(\nu=\overline{0,n-1}\right)$ конечны $N_j(R_+,(s_\nu)_{\nu=0}^{n-1})=d_{2n,j}^{n}$. Отметим, что, используя эти уточнения, получаются новые результаты разрешимости соответствующих краевых задач, которые очень полезны при решениях конкретных задач.

В 2.2 исследована регулярная разрешимость краевых задач в весовых пространствах типа Соболева. А именно, исследуются начально-краевые задачи

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2}+A^2\right)^n u(t)+\sum_{j=0}^{2n-1} A_{2n-j}u^{(j)}(t)=f(t),\ t\in R_+=\left(0,\infty\right), \quad (9)$$

$$u^{(\nu)}(0)=0,\left(\nu=\overline{0,n-1}\right). \qquad (10)$$

Здесь $A=A^*\geq \mu_0 E(\mu_0>0)$, $A_j\left(j=\overline{1,2n}\right)$ линейные в H. Отметим, что здесь предполагается $f(t)\in L_{2,\gamma}(R_+;H)$, а решение задачи $u(t)$ ищется из пространства $W_{2,\gamma}^{2n}(R_+;H;\left(\nu\right)_{\nu=0}^{n-1})=\left\{u\,/\,u\in W_{2,\gamma}^{2n}(R_+;H),\right.$ $\left.u^{(\nu)}\left(0\right)=0,\nu=\overline{0,n-1}\right\}$.

Аналогично, дается регулярная разрешимость задачи (9),(10) в весовых пространствах.

Лемма 7. *Пусть* $A\geq \mu_0 E(\mu_0>0)$. *Тогда оператор* $P_0\left(d/dt\right)=\left(-\frac{d^2}{dt^2}+A^2\right)^n$ *изоморфно отображает пространства* $W_{2,\gamma}^{2n}(R_+;H;\left(\nu\right)_{\nu=0}^{n-1})$ *на* $L_{2,\gamma}(R_+;H)$ *при* $\left|\gamma\right|<\mu_0$.

Теорема 7. *Пусть* $A=A^*\geq \mu_0 E(\mu_0>0)$, *а операторы* $B_j=A_j\cdot A^{-j}(j=\overline{1,2n})$ *ограничены в* H. *Тогда при* $\left|\gamma\right|<\mu_0$ *и при выполнении условия* $\alpha(\gamma;\mu_0)=\sum_{j=0}^{2n-1}\tilde{C}_j(\gamma;\mu_0)\left\|B_{2n-j}\right\|<1$, *где* $\tilde{C}_j(\gamma;\mu_0)=C_j^{1/2}\left(\gamma,\mu_0\right)C_0^{1/2}\left(\gamma,\mu_0\right)$, *здесь*

$$C_0(\gamma;\mu_0)=\frac{\mu_0^{2n}}{\left(\mu_0^{2n}-\gamma^2\right)^n},$$

при $j=\overline{1,n}$,

$$C_j(\gamma;\mu_0)=\begin{cases} d_{2n,j}^n\left(1-2\dfrac{\gamma^2}{\mu_0^2}\right)^{\frac{j-2n}{2n}} & \text{при } 0\leq\dfrac{\gamma^2}{\mu_0^2}<\dfrac{j}{2n+j} \\ \dfrac{\left|\mu_0\right|^j\mu_0^{2n-j}}{\left(\mu_0^{2n}-\gamma^2\right)^n} & \text{при } \dfrac{j}{2n+j}\leq j<1,\ j=\overline{0,n-1}, \end{cases}$$

а при $j=\overline{n+1,2n}$ $\quad \tilde{C}_j\left(\gamma;\mu_0\right)=\sum_{p=0}^{j}C_p^j\frac{|\gamma|^{j-p}}{\mu_0^{j-p}}N_p\left(R_+;H;\{\nu\}_{\nu=0}^{n-1}\right)\left\|P_{0,0}P_{0,\gamma}^{-1}\right\|$,

где $N_p\left(R_+;H;\{\nu\}_{\nu=0}^{n-1}\right)$ *определены из теоремы 6,* $P_{0,\gamma}=\left(\left(-\frac{d}{dt}+\gamma\right)^2+A^2\right)^n$. *Тогда задача (9), (10) регулярно разрешима в весовых пространствах.*

Отметим, когда краевые задачи вида (9), (10) при $A_j=\alpha_j$ - комплексные числа, исследованы в работах Ю.А.Дубинского, а когда $n=1$ и коэффициенты A_1 и A_2 неограниченные операторы, в работах С.С.Мирзоева, С.С.Мирзоева и Э.М.Мамедова.

В 2.3 исследуется задача (7),(8) при условии $f(t)\in W_2^s(R_+;H)$, $u(t)\in W_2^{2n+s}(R_+;H)$. Отметим, что эти задачи интересны тем, что производные в краевых условиях (8) могут быть больше, чем степени $2n$. Отметим, что такие задачи для уравнения с простыми спектральными характеристиками впервые исследованы С.С.Мирзоевым. Здесь, обобщая методику С.С.Мирзоева, доказываем следующее

Теорема 8. *Пусть* $A=A^*\ge cE(c>0)$, *а операторы* $B_j=A_j\cdot A^{-j}$, $D_j=A^sA_jA^{-(j+s)}(j=\overline{1,2n-1})$ *ограничены в* H, *и имеется оценка*

$$\alpha=\sum_{j=1}^{2n}\max\left(\left\|B_{2n-j}\right\|,\left\|D_{2n-j}\right\|\right)\cdot N_j^{(s)}(R_+;H)<1,$$

где числа $N_j^{(s)}(R_+;H)$ *являются нормами операторов промежуточных производных* $A_j\frac{d^j}{dt^j}:W_2^{2n+s}\left(R_+;H;\{s_\nu\}_{\nu=0}^{n-1}\right)\to.$ $\to W_2^s\left(R_+;H\right)$ *Тогда задача (7),(8) при любом* $f(t)\in W_2^s(R_+;H)$ *имеет одно решение* $u(t)\in W_2^{n+s}(R_+;H;\{s_\nu\}_{\nu=0}^{n-1})$, *которое удовлетворяет уравнению (7) тождественно в* R_+, *причем имеет место оценка* $\|u\|_{W_2^{n+s}(R_+;H)}\le const\|f\|_{W_2^s(R_+;H)}$.

Отметим, что в диссертационной работе даны методы вычисления этих норм, используя методы факторизации.

В 2.4 нами дано определение обобщенных решений краевых задач

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2}+A^2\right)^n u(t)+\sum_{j=0}^{2n} A_j u^{(2n-j)}(t)=0,\ t\in R_+=(0,\infty), \tag{11}$$

$$u^{(\nu)}(0)=\varphi_\nu,\left(\nu=\overline{0,n-1}\right), \tag{12}$$

где $A=A^*\ge cE(c>0)$, $A_j(j=\overline{0,2n})$ линейные операторы в H,φ_ν $\left(\nu=\overline{0,n-1}\right)$ некоторые векторы из H.

Лемма 8. *Пусть* $A=A^*>\mathrm{c}E,(c>0)$, *а* $B_j=A^{-j/2}A_j\cdot A^{-j/2}$ $(j=2k,k=\overline{0,n})$, *и* $B_j=A^{-(j-1)/2}A_j\cdot A^{-(j+1)/2}$ $(j=2k-1,k=\overline{1,n-1})$ *ограничены в* H. *Тогда билинейный функционал* $P_1(u;\Psi)\equiv(P_1(d/dt)u,\Psi)_{L_2(R_+;H)}$ $\left(P_1(d/dt)u(t)=\sum_{j=0}^{2n}A_ju^{(2n-j)}(t)\right)$, *определенный для всех вектор - функций* $u(t)\in D(R_+;H_n;\{\nu\}_{\nu=0}^{n-1})$ *и* $\Psi\in D(R_+;H_n;\{\nu\}_{\nu=0}^{n-1})$ *продолжается по непрерывности на пространствах* $W_2^n(R_+;H)\oplus W_2^n(R_+;H;\{\nu\}_{\nu=0}^{n-1})$ *до билинейного функционала*

$$\widetilde{P}_1(u,\psi)=\sum_{(j=2k)}(-1)^{n-\frac{j}{2}}\left(A_ju^{\left(n-\frac{j}{2}\right)},\psi^{\left(n-\frac{j}{2}\right)}\right)_{L_2}+\sum_{(j=2k-1)}(-1)^{n-\frac{j-1}{2}}\left(A_ju^{\left(n-\frac{j+1}{2}\right)},\psi^{\left(n-\frac{j-1}{2}\right)}\right)_{L_2}.$$

Здесь в первом слагаемом суммирование ведется по четным j*, а во втором - по нечетным* j*.*

Определение 4. Вектор-функция $u(t)\in W_2^n(R_+;H)$ называется обобщенным решением (11), (12), если $\lim\limits_{t\to 0}\left\|u^{(\nu)}(t)-\varphi_\nu\right\|_{H_{n-\nu-1/2}}=0$ $\left(\nu=\overline{0,n-1}\right)$ и для любого $\psi(t)\in W_2^n(R_+;H;\{\nu\}_{\nu=0}^{n-1})$ выполняется тождество

$$<u,\psi>=(u,\psi)_{W_2^n(R_+;H)}+\sum_{p=1}^{n-1}C_n^p\left(A^pu^{(n-p)},A^p\psi^{(n-p)}\right)_{L_2(R_+;H)}+\tilde{P}_1(u,\psi)=0,$$

Сперва явно записывается обобщенное решение задачи $P_0(d/dt)=0$, $u^{(\nu)}(0)=\varphi_\nu\left(\nu=\overline{0,n-1}\right)$ и доказывается

Лемма 9. *Норма*

$$N_j(R_+;(\nu)_{\nu=0}^{n-1}) = \sup_{0\neq u\in W_2^{2n}\left(R_+;H;\{\nu\}_{\nu=0}^{n-1}\right)} \left\|A^{n-j}u^{(j)}\right\|_{L_2\left(R_+;H\right)} \cdot \left\|\left|u\right|\right\|^{-1}_{W_2^n\left(R_+;H\right)} = d_{n,j}^{n/2},$$

где

$$\left\|\left|u\right|\right\|_{W_2^n\left(R_+;H\right)} = \left(\left\|u\right\|^2_{W_2^n\left(R_+;H\right)} + \sum_{p=1}^{n-1} C_n^p \left\|A^{n-p}u^{(p)}\right\|^2_{L_2\left(R_+;H\right)}\right)^{1/2},$$

$$\text{а} \quad d_{n,j} = \begin{cases} \left(\dfrac{j}{n}\right)^{\frac{j}{n}} \left(\dfrac{n-j}{n}\right)^{\frac{n-j}{n}}, \text{ при } j=\overline{1,n-1} \\ 1, \qquad \text{при } j=0,n \end{cases}.$$

Теорема 9. *Пусть* $A = A^* > cE, (c>0)$, *а* $B_j = A^{-j/2}\cdot A_j \cdot A^{-j/2}$ $(j=2k, k=\overline{0,n})$ *и* $B_j = A^{-(j-1)/2}\cdot A_j\cdot A^{-(j+1)/2} (j=2k-1, k=\overline{1,n-1})$ *ограничены в* H *и имеет место неравенство* $\alpha = \sum_{j=0}^{n} c_j \left\|B_{n-j}\right\| < 1$, *где* $c_j = d^n_{n,j/2}$ *при* $j=2k, k=\overline{0,n}$ *и* $c_j = \left(d_{n,\frac{j+1}{2}}\cdot d_{n,\frac{j-1}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}$ *при* $j=2k-1,\ k=\overline{1,n-1}$. *Тогда при любом* $\varphi_\nu \in H_{n-\nu-\frac{1}{2}}, (\nu=\overline{0,n-1})$ *задача (11), (12) имеет единственное обобщенное решение.*

Отметим, что аналогичная задача при условиях близких к нашим, исследована в работе С.С.Мирзоева, когда главная часть имеет вид: $\left(-1\right)^n \dfrac{d^{2n}}{dt^{2n}} + A^{2n}$, а при других условиях исследована в работе М.Б.Оразова, при $n=2$ для бигармонического уравнения рассмотрена в работе Ю.А.Устинова и Ю.И.Юдовича.

В 2.5 исследуются существование и единственность голоморфного решения задачи

$$P\left(\frac{d}{d\tau}\right)u(\tau) \equiv \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + A^2\right)^n u(\tau) + \sum_{j=0}^{2n-1} A_{2n-j}u^{(j)}(\tau) = f(\tau), \tau\in S_\alpha, \quad (13)$$

$$u^{(\nu)}(0) = 0, \quad \nu = \overline{0,n-1}, \qquad (14)$$

где $u(\tau)$ и $f(\tau)$ голоморфные в угле $S_\alpha = \left\{\lambda : \left|\arg\lambda\right| < \alpha\right\}$

$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ вектор - функции, причем $f(\tau)\in H_{2,\alpha}$, а $u(\tau)\in W_2^{2n}(\alpha)$. Отметим, что здесь вводится пространство $\overset{0}{W}{}^{n}_{2,\alpha}(\alpha)=\left\{u/u^{(\nu)}(\alpha)=0,\nu=\overline{0,n-1}\right\}$ и доказывается, что оператор $P_0u(\tau)=\left(-\dfrac{d^2}{d\tau^2}+A^2\right):\overset{0}{W}{}^{n}_{2,\alpha}(\alpha)\to H_{2,\alpha}$ является изоморфизмом.

Теорема 10. *Пусть* $A=A^*\ge cE(c>0)$, *а операторы* $B_j=A_j\cdot A^{-j}$ $(j=\overline{1,2n-1})$ *ограничены в* H, *и выполняется неравенство*

$$\sigma=\sum_{j=1}^{2n-1}\alpha_{\text{j}}\left\|B_{2n-j}\right\|<1,\ \textit{где}\ \ \alpha_{\text{j}}\ge\begin{cases}b_j\ \textit{если}\ \det\ \mu_{j,n}(\beta)\ne 0,\\ \mu_\alpha^{-1/2}\quad \textit{в противном случае}\end{cases}.$$

Здесь $b_j=\sup\limits_{\xi\in R}\left|\xi^jQ_0^{-1}(i\xi;1)\right|$, $Q_0(\lambda;A)=\sum\limits_{l=0}^{n}C_l\lambda^lA^{2n-l}$,

$C_l=\begin{cases}(-1)^l\,C_n^le^{-2i\alpha l},l=0,2,...,2n\\ 0,\qquad\qquad l=1,3,...,2n-1\end{cases}$, *а* $\mu_\alpha^{-1/2}$ *есть наименьший корень уравнений* $\det M_{j,n}(\beta)=0$ *из интервала* $\left(0,b_j^{-2}\right)$,

$M_{j,n}(\beta)=\dfrac{1}{2}\left(U_\alpha^{-1}S_j(\beta)U_\alpha+\tilde{U}_\alpha S_j(\beta)\tilde{U}_\alpha^{-1}\right),\tilde{U}_\alpha\equiv diag\left(1,e^{i\alpha},...,e^{i(n-1)\alpha}\right)$,

а $S_j(\beta)$ *построена как в регулярном случае. Тогда при любом* $f(\tau)\in H_{2,\alpha}$ *задача (13), (14) имеет единственное голоморфное решение* $u(\tau)$ *из пространства* $W_2^{2n}(\alpha)$.

Отметим, что это теорема при $P_0=(-1)^n\dfrac{d^{2n}}{dt^{2n}}+A^{2n}$ при особом выборе α доказана С.С.Мирзоевым. В нашем случае главная часть имеет кратную характеристику, поэтому определить матрицу $M_j(\beta)$ довольно трудно, и здесь полиномиальный пучок, зависящий от параметра, существенно отличается от пучка, изученного С.С.Мирзоевым. При $n=1$ наши результаты совпадут.

В 2.6 получена ϕ - разрешимость краевых задач

$$P\left(\frac{d}{dz}\right)u(z)\equiv\left(-\frac{d^2}{dz^2}+A^2\right)^n u(z)+\sum_{j=1}^{2n-1}A_{2n-j}u^{(j)}(z)=f(z), z\in s_{(\alpha,\beta)}, \quad (15)$$

$$u^{(s_\nu)}(0)=0,\quad \nu=\overline{0,n-1}, \quad (16)$$

где $S_{(\alpha,\beta)}=\{z:-\beta<\arg<\alpha\}\left(0\le\alpha<\pi/2,\ 0\le\beta<\pi/2\right)$, а $0\le s_0<s_1<\ldots<s_{n-1}\le n-1$.

Отметим, что эта задача при $s_\nu=0,\left(\nu=\overline{0,n-1}\right)$ для операторных дифференциальных уравнений с простой характеристикой исследована М. Г. Гасымовом. В нашем случае возникает некоторая трудность при доказательстве из-за сложной характеристики функции Грина.

В 2.7 доказывается нормальная разрешимость краевой задачи (11), (12) в весовых пространствах типа Соболева. Отметим, что при $n=1$ эта задача в весовых пространствах рассмотрена С.С.Мирзоевым, а при больших n рассмотрена А.А.Шкаликовым, когда главная часть имеет простую характеристику.

Теорема 11. *Пусть* $A\ge\mu_0E\,(\mu_0>0),|\gamma|<\mu_0$ *и на оси* $\operatorname{Re}\lambda=\gamma$ *резольвента* $P^{-1}(\lambda)$ *существует, причем* $\left\|P_0(\lambda)P^{-1}(\lambda)\right\|\le const$ *на оси* $\operatorname{Re}\lambda=\gamma$. *Если операторы* A^{-1} *и* $B_j=A_j\cdot A^{-j}(j=\overline{1,2n})$ *вполне непрерывны в* H, *то задачи (11), (12) нормально разрешимы, т.е. область значения оператора, порожденного задачами (11),(12) замкнутое пространство, имеет конечномерную коразмерность в пространстве* $L_{2,\gamma}\left(R_+;H\right)$ *и конечномерное ядро в пространстве* $W_{2,\gamma}^n\left(R_+;H\right)$.

Для исследования спектральных свойств операторных пучков необходимо изучать разрешимость однородного уравнения с начально-краевыми условиями в нуле. По этой причине третья глава диссертации посвящена исследованию свойств однородных уравнений на полуоси и на конечном отрезке.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)\equiv\left(-\frac{d^2}{dt^2}+A^2\right)^n u(t)+\sum_{j=0}^{2n}A_{2n-j}u^{(j)}(t)=0, t\in R_+, \quad (17)$$

$$u^{(s_\nu)}(0)=\varphi_\nu,\quad \nu=\overline{0,n-1}. \quad (18)$$

Определение 5. Пусть при любом наборе

$\varphi_\nu \in H_{2n-\nu-\frac{1}{2}}, \left(\nu=\overline{0,n-1}\right)$ существует регулярное решение $u(t) \in W_2^n\left(R_+;H\right)$ уравнения (17), которое удовлетворяет краевому условию (18) в смысле сходимости $\lim\limits_{t\to 0}\left\| u^{(s_\nu)}(t)-\varphi_\nu\right\|_{2n-\nu-\frac{1}{2}}=0\left(\nu=\overline{0,n-1}\right)$, и имеет место оценка $\left\|u(t)\right\|_{W_2^{2n}(R_+;H)} \le const\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\left\|\varphi_\nu\right\|_{2n-\nu-\frac{1}{2}}$. Тогда задачу (17),(18) будем называть регулярно разрешимой.

Теорема 12. *Пусть выполняется условие теоремы 6.Тогда задачи (17), (18) регулярно разрешимы*.

Здесь также сформулированы теоремы для частных случаев $s_\nu=\nu$, $s_\nu=2\nu$ и $s_\nu=2\nu+1\left(\nu=\overline{0,n-1}\right)$.

В 3.2, следуя П.Д.Лакса, дано определение внутренней компактности пространства однородных регулярных решений и показана их связь с принципом Фрагмена - Линделефа. Отметим, что принцип Фрагмена-Линделефа исследован в работах С.Агмона и Л.Ниринберга, В.Г.Мазья и Б.А.Пламеневского, А.А.Шкаликова и других.

В дальнейшем мы предположим, что

1) $A=A^*\ge cE\,(c>0)$, имеющий вполне непрерывный оператор $A^{-1}=C$, т.е. $C\in\sigma_\infty\left(H\right)$; 2) $B_j=A_jA^{-j}\ (j=\overline{0,2n})$ ограничен в H.

Из этих условий вытекает, что $P\left(d/dt\right):W_2^{2n}\left(R_+:H\right)\to L_2\left(R_+:H\right)$ непрерывен, поэтому $Ker\,P=Ker(P,R_+)$ замкнутое пространство. Очевидно, что $Ker\left(P,R_+\right)\subset W_2^{2n}\left(R_+;H\right)\subset W_2^{2n-1}\left(R_+;H\right)$. Обозначим через $L(P,R_+)$ замыкание множества $Ker(P,R_+)$ по норме $\left\|u\right\|_{W_2^{2n-1}\left(R_+;H\right)}$.

Определение 6.Пусть $0<a<a'<b'<b<\infty$ и $M>0$ любое число. Если множество $Q_M=\left\{u/u\in L(P,R_+),\left\|u\right\|_{W_2^{2n-1}((a,b);H)}\le M\right\}$ компактно в пространстве $W_2^{2n-1}\left((a',b');H\right)$, то будем говорить, что пространство регулярного решения уравнения (17) внутренне компактно.

Имеет место

Теорема 13. *Пусть выполняется условие теоремы 6 и* $A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$. *Тогда пространство регулярных решений уравнения (17) внутренне компактно, и существует число* $\chi_0 > 0$, *такое, что для любого* $u(t) \in L(P, R_+)$ *имеет место оценка*

$$\int_0^\infty e^{\chi_0 t}\left(\left\|u^{(2n-1)}(t)\right\|_H^2 + \left\|A^{2n-1}u(t)\right\|_H^2\right)dt < \infty .$$

Последнее неравенство называется принципом Фрагмена-Линделефа.

Отметим, что это свойство внутренней компактности в дальнейшем используется при доказательстве минимальности элементарных решений однородного уравнения.

В 3.3, используя теорему существования обобщенных решений, доказывается внутренняя компактность пространства обобщенных решений однородного уравнения.

В 3.4 рассматривается следующая краевая задача на конечном отрезке

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) \equiv \left(-\frac{d^2}{dt^2} + A^2\right)^n u(t) + \sum_{j=0}^{2n} A_j u^{(n-j)}(t) = 0,\ t \in R_+ = (0,1), \quad (19)$$

$$u^{(\nu)}(0) = \varphi_\nu,\ u^{(\nu)}(1) = \psi_\nu,\ \nu = \overline{0, n-1}, \nu = \overline{0, n-1} . \quad (20)$$

Дается аналогично в R_+ обобщенное решение задачи (19),(20) и доказывается следующая.

Теорема 14. *Пусть* $A = A^* \ge cE\,(c > 0)$, *а* $B_j = A^{-j/2} \cdot A_j \cdot A^{-j/2}$ $(j = 2k, k = \overline{0, n})$ *и* $B_j = A^{-(j-1)/2} \cdot A_j \cdot A^{-(j-1)/2}$ $(j = 2k-1, k = \overline{1, n-1})$ *ограничены в* H *и* $\alpha = \sum_{j=0}^{2n} c_j \left\|B_{2n-j}\right\| < 1$, *где* $c_j = d^n_{n, j/2}$ *при* $j = 2k$, $k = \overline{0, n}$ *и* $c_j = \left(d_{n, \frac{j+1}{2}} \cdot d_{n, \frac{j-1}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}$ *при* $j = 2k-1$, $k = \overline{1, n-1}$. *Тогда при любом* $\varphi_\nu \in H_{n-\nu-1/2}, \psi_\nu \in H_{n-\nu-1/2}$ *задачи (19),(20) имеют единственное обобщенное решение, причем имеет место*

$$\|u\|_{W_2^n((0,1);H)} \le const \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\|\varphi_\nu\|_{n-\nu-1/2} + \|\psi_\nu\|_{n-\nu-1/2}\right).$$

Далее, указана теорема о внутренней компактности обобщенных решений однородного уравнения.

В 3.5 для голоморфных решений обобщен принцип Фрагмена-Линделефа. Рассматривается краевая задача как (13),(14). Аналогично даются определения голоморфных решений задачи (13),(14). В этом параграфе вводится пространство $V_{\beta}^{(\alpha)}$ при $\beta>0$: $V_{\beta}^{(\alpha)}=\left\{u\left(\tau\right)/\,e^{\beta\tau}\in H_{2,\alpha}\right\}$. Доказывается следующая

Теорема 15. *Пусть* $A\geq cE\,(c>0)$, *а* $A_j\cdot A^{-j}\,(j=\overline{0,2n})$ *ограничены в* H, *и имеет место одно из двух условий: 1)* $A^{-1}\in\sigma_p\,(0<p<\pi/(\pi-2\alpha))$ *и имеют место условия разрешимости задачи (13),(14); 2)* $A^{-1}\in\sigma_p(0<p<\infty)$. *Тогда, если голоморфное решение* $u(\tau)\in\bigcap\limits_{\beta}V_{\beta}^{(\alpha)}$, *то* $u(\tau)=0$.

IV глава диссертации посвящена некоторым спектральным свойствам операторных пучков с кратной характеристикой и некоторым спектральным свойствам элементарных решений соответствующих ОДУ. Отметим, что исследование полноты и минимальности в пространствах следов дает возможность получить теоремы о полноте и минимальности элементарных решений соответствующих ОДУ. Эти свойства дают возможность обосновать решение однородного уравнения методом Фурье, т.е. с помощью разложения по элементарным решениям.

В 4.1 даны некоторые сведения из спектральной теории операторных пучков. Пусть

$$P(\lambda)=\left(-\lambda^2E+A^2\right)^n+\sum_{j=0}^{2n-1}\lambda^{2n-j}A_j\,, \qquad (21)$$

где $\lambda\in C$ спектральный параметр. Мы предполагаем, что операторы:

1) $A=A^*\geq cE\,(c>0)$;

2) $A^{-1}=C\in\sigma_{\infty}\left(H\right)$;

3) $B_j=A_j\cdot A^{-j}\in L\left(H;H\right)(j=\overline{1,2n})$;

4) оператор $E+B_n$ обратимый в H.

Определение 7. Если ненулевой вектор φ_0 собственный вектор, отвечающий числу λ_0, то система $\left\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\right\}\subset H_{2n}$ называется цепочкой присоединенных векторов φ_0, если они удовлетворяют условию

$$\sum_{j=0}^{q}\frac{1}{j}\cdot\frac{d^j}{d\lambda^j}P(\lambda)\Bigg|_{\lambda=\lambda_0}\cdot\varphi_{q-j}=0,\quad q=\overline{1,m}.$$

Определение 8. Если $\{\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_m\}$ - цепочка собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственному значению λ_0, то вектор - функция $\varphi_h(t)=e^{\lambda_0 t}\left(\frac{t^h}{h!}\varphi_0+\frac{t^{h-1}}{(h-1)!}\varphi_1+\ldots+\varphi_h\right)$ $\left(h=\overline{0,m}\right)$, удовлетворяет уравнению $P(d/dt)u(t)=0$ и называется его элементарным решением, отвечающим собственному значению λ_0. Если $\operatorname{Re}\lambda_0<0$, то их будем называть убывающими элементарными решениями.

Далее, обозначим

$$\sigma_p=\left\{B/B\in\sigma_\infty(H),\sum_{j=1}^{\infty}S_j(\beta)<\infty,S_j(\beta)=\lambda_j^{1/2}(B*B)\right\},0<p<\infty.$$

Пусть $\{\varphi_{i,j,h}\}$ - каноническая система СПВ пучка $P(\lambda)$ по Келдышу. Составим систему элементарных решений

$$u_{i,j,h}(t)=e^{\lambda_i t}\left(\varphi_{i,j,h}+\frac{t}{1!}\varphi_{i,j,h-1}+\ldots+\frac{t^h}{h!}\varphi_{i,j,0}\right),\left(h=\overline{0,m_{ij}}\right).$$

Очевидно, что элементарные решения имеют следующие следы

$$\frac{d^{s_\nu}}{dt^{s_\nu}}\cdot u_{i,j,h}(t)\Bigg|_{t=0}\equiv\varphi_{i,j,h}^{(s_\nu)},\ \frac{d^{s_\nu}}{dt^{s_\nu}}\cdot u_{i,j,h}(t)\Bigg|_{t=1}\equiv\psi_{i,j,h}^{(s_\nu)},\left(\nu=\overline{0,k-1};h=\overline{0,m_{ij}}\right).$$

Обозначим через

$$K(\Pi_-)=\left\{\left\{\varphi_{i,j,h}^{(s_\nu)}\right\}_{\nu=0}^{k-1}\in\tilde{H}\equiv\bigoplus_{\nu=0}^{k-1}H_{2n-s_\nu-1/2},\operatorname{Re}\lambda_i<0\right\}$$

и

$$K(C)=\left\{\left\{\varphi_{i,j,h}^{(\nu)}\right\}_{\nu=0}^{k-1},\left\{\psi_{i,j,h}^{(\nu)}\right\}_{\nu=0}^{k-1}\in\tilde{H}\oplus\tilde{H},\lambda\in C\right\}.$$

Определение 9. Если система $K(\Pi_-)$ полна в $\tilde{H}$, то будем говорить, что система производных цепочек СПВ, отвечающих собственному значению из левой полуплоскости n - кратно полна в пространстве следов, отвечающих краевым задачам на полуоси.

Определение 10. Если система $K(C)$ полна в $\tilde{H} \oplus \tilde{H}$, то будем говорить, что система производных цепочек СПВ $2n$ - кратно полна в пространстве следов, отвечающих краевым задачам на отрезке.

В 4.2 мы исследуем поведение резольвенты пучка (21).

В 4.3 исследуются n - кратная полнота и минимальность системы $K\left(\Pi_-\right)$-производных цепочек СПВ, отвечающих собственным значениям из левой полуплоскости пучка $P\left(\lambda\right)$. Используя разложения около собственных значений резольвенты, его аналитические свойства методом, предложенным акад. М.Г. Гасымовым и проф. С.С. Мирзоевым, доказываются

Теорема 16. *Пусть выполняются условия*

1) $A = A^* \geq cE \ (c > 0)$, $B_j = A_j \cdot A^{-j} \in L\left(H;H\right) \ (j = \overline{0, 2n-1})$ *и имеет место оценка* $\sum\limits_{j=0}^{2n-1} c_j \left\| B_{2n-j} \right\| < 1$, *где числа* $c_j = N_j\left(R_+;\left\{\nu\right\}_{\nu=0}^{n-1}\right)$;

2) выполняется одно из следующих условий: а) $A^{-1} \in \sigma_p (0 < p \leq 1)$; *в)* $A^{-1} \in \sigma_p \quad (0 < p < \infty), B_j \in \sigma_\infty\left(H\right), j = \overline{1, 2n}$. *Тогда система* $K\left(\Pi_-\right)$ n*- кратно полна в пространстве следов, и система убывающих элементарных решений полнее в пространстве регулярных решений.*

Далее, аналогично доказывается теорема о полноте системы голоморфных убывающих решений. После этого, используя теорему о внутренней компактности, доказываем минимальность системы $K\left(\Pi_-\right)$ в пространстве следов и минимальность убывающих элементарных решений.

Теорема 17. *Пусть выполняется условие 1) теоремы 16. Тогда каноническая система СПВ минимальна в* $\hat{H} = \bigoplus\limits_{\nu=0}^{n-1} H_{2n - s_\nu - 1/2}$, *и система убывающих элементарных решений минимальна в пространстве* $W_2^n\left(R_+;H\right)$.

Теорема 18. *Пусть выполняются условия теоремы 9 и одно из следующих условий: а)* $A^{-1} \in \sigma_p (0 \leq p \leq 1), \left(B_j \in L\left(H\right)\right)$; *в)* $A^{-1} \in \sigma_p$ $(0 < p < \infty)$, $B_j \in \sigma_\infty\left(H\right)$. *Тогда система убывающих элементарных решений полна в пространстве обобщенных решений.*

Далее, используя внутреннюю компактность пространства обобщенных решений, доказывается следующая теорема о минимальности.

Теорема 19. *Пусть* $A = A^* \geq cE\,(c > 0)$, *и выполняется условие разрешимости теоремы 9. Тогда система убывающих элементарных решений минимальна в пространстве* $W_2^n\left(R_+;H\right)$, *а системы* $K\left(\Pi_-\right)$ *минимальны в* $H = \overset{n-1}{\underset{\nu=0}{\oplus}} H_{n-\nu-1/2}$.

В 4.5 найдены условия, которые обеспечивают $2n$- кратную полноту систем $K\left(C\right)$, которая отвечает всем собственным значениям из комплексной плоскости C и полнота и минимальность системы элементарных решений в пространстве обобщенных решений задачи (19), (20). Доказана следующая

Теорема 20. *Пусть выполняется условие теоремы 14 и одно из следующих условий: а)* $A^{-1} \in \sigma_p(0 \leq p \leq 1), \left(B_j \in L\left(H\right)\right)$; *в)* $A^{-1} \in \sigma_p(0 < p < \infty)$, $B_j \in \sigma_\infty\left(H\right)$. *Тогда система* $K\left(C\right)$ $2n$-*кратно полна и минимальна в пространстве следов однородного уравнения (19), а элементарные решения полны и минимальны в пространстве обобщенных решений задачи (19),(20).*

Отметим, что доказательство теоремы типа 20 очень сложно, и используются точные теоремы теории целых функций.

В 4.6, используя методы работы С. С. Мирзоева, даем суммируемости методом Абеля по системе СПВ для задачи полиномиального операторного пучка.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту и учителю профессору С.С. Мирзоеву за постоянное внимание к работе, ценные советы и полезные обсуждения.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1.**Гумбаталиев Р.З**. Об условиях разрешимости одного класса операторно-дифференциального уравнениях высокого порядка на всей оси. Материалы научн. конф., пос. 85-летию проф. А.Ш.Габибзаде, Баку, 2001.

2.**Gumbataliev.R.Z.** On the existence of a generalized solutions of a boundary value problem of one class operator-differential equations. **Transaction of NAS of Azerb., 2001, v.XXI, №1, p.68-75.**

3.**Gumbataliev R.Z.** On F-solvability of boundary value problems for one class of operator-differential equations of fourth order. **Proc. of IMM of NAS of Azerb., 2001, v.XV(XXIII), p.81-87.**

4.**Gumbataliev R.Z.** On F-solvability of boundary value problems for one class of operator-differential equations of high order. XV Ulusal Mathematical Simpozium, Mersin, 2002, p.48-49.

5.**Gumbataliev R.Z.** On the existence of generalized solutions of one class of operator-differential equations of the fourth order on the whole axis. **Transaction of NAS of Azerb., 2002, №1, p.97-101.**

6.**Гумбаталиев** Р.З. О полноте элементарных решений одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка. **Доклады НАН Азерб., 2002, т.LVIII, №5-6, с.25-28.**

7.**Гумбаталиев Р.З.** О гладком решении одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка. Тезисы II межд. конф., пос. 80-летию член.-корр. РАН, проф. Л.Д.Кудрявцева, Москва, 2003, с.153-155

8.**Gumbataliev R.Z.** On the conditions of smooth solutions for a class of operator-differential equations on the whole axis. **Transaction of NAS of Azerb., 2003, №1, p.59-66.**

9.**Гумбаталиев Р.З.** Существование решения одного класса операторно-дифференциального уравнения высокого порядка. Материалы I межд. научн. конф. «Функциональные-дифференциальные уравнения и их приложения», Махачкала, 2003, с.27-28.

10.**Алиев А.Р., Гумбаталиев Р.З.** О разрешимости одной краевой задачи в пространстве с весом. **Вестник Бакинского Государственного Университета, 2003, №2, с.47-57.**

11.**Гумбаталиев Р.З.** О существовании регулярного решения краевой задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений 4-го порядка в пространствах с весом. Тезисы X межд. конф. по математике и механике, посв. 45-летию ИММ НАНА, Баку, 2004, с.57.

12.**Gumbataliev R.Z.** On m-fold completeness of eigen and adjoint vectors of a class of polynomial operator bundless of a higher order. **Transaction of NAS of Azerb., 2004, v. XXIV, №4, p.91-98.**

13. **Гумбаталиев Р.З** О регулярной разрешимости краевой задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка. **Вестник Бакинского Государственного Университета**, **2004, №4, с.40-48.**
14.**Гумбаталиев Р.З**. О гладком решении краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений 4-го порядка. **Научные и педагогические известия Университета Одлар Юрду**, **2005, №13, с.64-72.**
15.**Гумбаталиев Р.З.** Об обобщенном решении одного класса операторно-дифференциальных уравнений на всей оси. Тезисы межд. конф. по математике и механике, пос. 50-летию со дня рож. член-корр. НАНА, проф. И.Т.Мамедова, Баку, 2005, с.77.
16. **Гумбаталиев Р.З** О гладком решении краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка на полуоси. **Научные труды - Фундаментальные науки**, **2005, с.4 (13), №1, с.50-60.**
17. **Гумбаталиев Р.З** О разрешимости краевых задач одного класса операторно-дифференциальных уравнений в пространстве с весом. Тезисы межд. конф. «Функциональные пространства, теория приближения, нелиный анализ», пос. 100-летию С.М.Никольского, Москва, 2005, с.91.
18. **Гумбаталиев Р.З** О гладком решении одного класса операторно-дифференциальных уравнений. **Естественные и технические науки**, **Москва, 2005, №4 (18), с.34-42.**
19.**Гумбаталиев Р.З.** О разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка в пространстве весом. **Естественные и технические науки**, **Москва,2005, №4 (18), с. 34-42.**
20.**Гумбаталиев Р.З.** О гладком решении одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка. **«Научные известия» Сумгаитского Государственного Университета**, **2005, т.5, №3, с.27-32.**
21.**Gumbataliev.R.Z.** On solvability of one class of operator-differential equations of the fourth order in the weight space. **Proc. of IMM of NAS of Azerb., 2005, v.XXII(XXX), p.39-46.**
22.**Gumbataliev.R.Z.** On regular solvability of boundary value problems for a class of operator-differential equations in weight space. **Mathematics Journal of Acad. Ecoenergy, 2005, №3, p.41-48.**
23.**Гумбаталиев Р.З.** Об условиях разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений в весовом пространстве. Тезисы XII межд. конф. по математике и механике, пос.

70 летию член-корр. НАНА, проф. Б.А.Искендерова, Баку, 2006, с.70.
24.**Gumbataliev R.Z.** On the existence of regular solutions of a boundary value problem for a class of higher order operator-differential equations in weight space. **Transaction of NAS of Azerb., 2006, v.XXIV, №7, p.79-84.**
25.**Гумбаталиев Р.З.** О суммируемости методом Абеля по системе собственных и присоединенных векторов для задачи полиномиального операторного пучка четвертого порядка. **Естественные и технические науки**, **Москва, 2006, №1 (21), с.28-34.**
26.**Гумбаталиев Р.З.** О некоторых свойствах регулярных голоморфных решений одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка. Труды межд. конф. «Современные методы физико-математических наук», Орел, 2006, с.31 - 35.
27.**Гумбаталиев Р.З.** О разрешимости краевой задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка в весовом пространстве. The International Conferece “Problems of Cybernetics and Informatics” PCI, Baku, 2006, p.171-173.
28.**Gumbataliev R.Z.** On generalized solution of a class of operator-differential equations of higher order. Abstract International Science conference “Mathematical Analiz, differential equations and their applied”, Ukraina, Uzhgorod, 2006, p.151-152.
29.**Гумбаталиев Р.З.** О некоторых свойствах обобщенных решений операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка. **Доклады НАН Азерб.,2006,т.XLII, №5-6, с.33-36.**
30.**Гумбаталиев Р.З.** О суммируемости методом Абеля по системе собственных и присоединенных векторов для задачи полиномиального операторного пучка высокого порядка. **Естественные и технические науки**, Москва, 2007, №2 (28), с.14-22.
31.**Гумбаталиев Р.З**. О гладком решении из пространства $W_2^{2n+s}(R_+;H)$ краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений, правая часть которых из $W_2^s(R_+;H)$. **Естественные и технические науки**, **Москва, 2007, №2(28), с.23-36.**
32.**Гумбаталиев Р.З.** О внутренней компактности пространства регулярных решений одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка. **Вестник Бакинского Государственного Университета, 2007, № 3, с.58-62.**
33.**Gumbataliev R.Z.** On the existence of F-solvability of boundary value problems. **International Journal of Contempopary Mathematical Sciences, 2007, v.II, №30, p.1471-1480.**
34.**Gumbataliev R.Z.** On regular solvability of boundary value problems in weight space. **International Journal of Mathematical**

Analysis, 2007, v.I, №25, p.1209-1216.

35.**Гумбаталиев Р.З.** О некоторых свойствах решения одного класса операторно-дифференциальных уравнений. Материалы межд. конф. «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения», Махачкала, 2007, с.72-76.

36.**Гумбаталиев Р.З.** О внутренней компактности регулярных решений уравнений. Тезисы межд. симп. «Современные проблемы математики и информатики», Нахчиван, 2007, с.33.

37.**Гумбаталиев Р.З.** О некоторых свойствах регулярных голоморфных решений. Тезисы XIII межд. конф. по математике и механике, пос. 70-летию акад. А.Д.Гаджиев, Баку,2007, с.59.

38.**Gumbataliev R.Z.** On the existence solutions of boundary value problems for a class of higher order operator-differential equations. **Applied Mathematical Sciences, 2008, v.II, №14, p.667-678.**

39.**Gumbataliev R.Z.** On some properties of regular holomorphic solutions of a class of higher order operator-differential equations **International Journal of Contempopary Mathematical Sciences, 2008, v.III, №12, p.575-582.**

40.**Гумбаталиев Р.З.** О полноте элементарных обобщенных решений одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка. Материалы респ. научн. конф., пос. 85-летию Г.А.Алиева, Баку, 2008г.- с.42-46.

41.**Gumbataliev R.Z**. On generalized solution of a class of higher order operator-differential equations. **Turkish Journal of Mathematics**, **2008, vol. 32, issue3, p.305-314.**

42. **Гумбаталиев Р.З**. О нормальной разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка в весовом пространстве. Труды межд. научн. конф. "Дифференциальные уравнения и смежнные проблемы", г. Стерлитамак, 2008, с.70-74.

43. **Gumbataliev R.Z.** On intrinsic compactness of regular solutions space of a class of higher order operator-differential equations. **Applied Mathematical Sciences**, **2008, vol. 2, №54, p.2665-2671.**

44. **С.С.Мирзоев, Гумбаталиев Р.З.** О полноте системы обобщенных решений одного класса операторно-дифференциального уравнения на конечном отрезке. Тезисы межд. конф. по физике, математике и техническим наукам, г.Нахчиван, 2008, с.122-123.

45. **Gumbataliev R.Z.** On the existence of solution of boundary value problems. **"HIKARI LTD"**, **Sofia, 2008. 98p.**

46.**С.С. Мирзоев, Гумбаталиев Р.З.** О минимальности элементарных решений. Тезисы XIV межд. конф. по математике и механике, посв. 50-летию ИММ НАН Азерб., Баку, 2009,с.220-221.

47. **С.С. Мирзоев, Гумбаталиев Р.З.** О регулярной разрешимости краевых задачах для операторно-дифференциальных уравнений. Тезисы межд. конф. по физике-математике и технический наукам, г. Нахчивань, 2009, с.127-128.
48. **Гумбаталиев Р.З** О разрешимости одного класса краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка. **Дифференциальные уравнения**, **2009, т. 45, вып.10, с.1420 - 1428.**
49.**Gumbataliev R.Z.** On completeness of elementary generalized solutions of a class of operator-differential equations of a higher order. **Turkish Journal of Mathematics**, **2009,v.33,issue 4,pp.383-396**.
50.**Мирзоев С.С., Гумбаталиев Р.З.** О полноте система элементарных решений одного класса операторно-дифференциального уравнения на конечном отрезке. **Доклады РАН**, **2010,т.431,№4,с.454-456.**
51.**Гумбаталиев Р.З**. О гладких решениях операторно-дифференциальных уравнений в постранствах с весом. Материалы межд. конф. "Спектральная теория и ее приложения", посв. 80-летному юбилею акад. Ф.Г.Максудова, Баку, 2010, с. 128-130.
52. **Гумбаталиев Р.З**. Нормальная разрешимость краевых задач для одного класса операторно - дифференциального уравнения четвертого порядка в весовом пространстве. **Дифференциальные уравнения, 2010, т. 46, вып.5, с.678-686.**
53.**Gumbataliev R.Z.** On generalized solutions of boundary value problems for some class of fourth order operator-differential equations on segment. **General Mathematics Notes, 2011, v. 5, № 1, pp.27-33.**
54. **S.S.Mirzoev, R.Z. Gumbataliev** On normal solvability of boundary value problems for operator-differential equations on semi-axis in weight space. **Taiwanese Journal of Mathematics, 2011, v.15,№ 4, pp. 1637-1650.**

RÖVŞƏN ZÜLFÜQAR OĞLU HÜMBƏTƏLİYEV

YÜKSƏK TƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR VƏ BƏZİ SPEKTRAL MƏSƏLƏLƏR

X Ü L A S Ə

Dissetasiya işi abstrakt Hilbert fəzalarında yüksəktərtibli operator-diferensial tənliklərin və onlar üçün qoyulmuş sərhəd məsələlərinnin həll olunmasına və uyğun operator-dəstələrin spektral xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiyada aşağadakı əsas nəticələr alınmışdır.

1. Çoxqat xarakteristikaya malik yüksək tərtibli operator-diferensial tənliklərin və onlar üçün sərhəd məsələlərinin dəqiq həll olunma şərtləri tapılmışdır; qoyulmuş sərhəd məsələləri üçün uyğun Sobolev fəzalarında requlyar, ümumiləşmiş, hamar, holomorf həllərin varlığı şərtləri və holmorf vektor-funksiyalar fəzasında Φ-həll olunma tədqiq edilmişdir.
2. Çəkili Sobolev fəzalarında çoxqat xarakteristikalı yüksək tərtibli operator-diferensial tənliklər üçün qoyulmuş sərhəd məsələləri üçün yarımoxda requlyar və normal həllərinin varlığı tədqiq edilmişdir.
3. Hilbert fəzalarında aralıq törəmə operatorlarının normalarının dəqiq qiyməti və ya yuxarıdan qiymətləndirilməsi göstərilmiş və onların həll olunma şərtləri ilə əlaqəsi müəyyən edilmişdir.
4. Müxtəlif hallarda yüksəktərtibli bircins tənliklərin həll olunma şərtləri alınmış, requlyar həllər fəzasında daxili kompaktlıq teoremi isbat edilmiş; requlyar, holomorf və ümumiləşmiş həllər üçün Fraqmen-Lindelof tip teoremlər isbat edilmişdir.
5. Sonlu ölçülü parçada ümumiləşmiş həllərin varlığı və yeganəliyi tədqiq edilmişdir.
6. İzlər fəzasında məxsusi və qoşma vektorların tamlığı və minimallığı, elementar həllərin tamlığı və minimallığı, məxsusi və qoşma elementlər üzrə ayrılışın Abel mənada cəmlənməsi şərtləri tapılmışdır.

ROVSHAN ZULFUGAR oğlu HUMBATALIEV

HIGH ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND SOME SPEKTRAL PROBLEMS

SUMMARY

The dissertation work is devoted to the solution of higher order operator-differential equations and the boundary value problems stated for them in the abstract Hilbert spaces and study of spectral properties of operator bundles.

The following results were obtained:

1. Exact solution conditions of higher order operator-differential equations and boundary value problems for them were found; existence conditions of regular, generalized, smooth, holomorphic solutions in Sobolev spaces for the stated boundary value problems and F-solvability in the space of holomorphic vector-functions were investigated.
2. Existence of regular and normal solutions of boundary value problems and semi-axis stated for multiple characteristic higher order operator-differential equations in weighted Sobolev spaces was researched.
3. Exact estimation of the norms of intermediate derivatives in the Hilbert spaces or their upper estimation were shown and their relation with solvability conditions were determined.
4. Solvability conditions of higher order homogeneous equations in various cases were obtained, an inner compactness theorem in regular solutions space was proved, Fragmen-Lindelof type theorems were proved for regular, holomorphic and generalized solutions.
5. Existence and uniqueness of generalized solutions in a finite-dimensional segment was proved.
6. Completeness and minimality of eigen and adjoint vectors in trace space, completeness and minimality of the solutions, Abel summation conditions of the expansion in eigen and adjoint elements were found.