МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

МУРАД ГАСАН ОГЛЫ ИМАНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ

1214.01 –динамические системы и
оптимальное управление

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени доктора наук
по математике

БАКУ - 2013

Диссертационная работа выполнена в Институте Прикладной Математики Бакинского Государственного Университета

Научный консультант:
Доктор физико-математических наук, академик **Ф.А. Алиев**

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук, проф. **В.В. Дикусар**

- доктор физико-математических наук, проф. **Т.К. Меликов**

- доктор физико-математических наук, проф. **Г.Ф. Кулиев**

Ведущая организация: Сумгаитский Государственный Университет, кафедра «Дифференциальные уравнения и математическая кибернетика»

Защита состоится 24 сентября 2013 г. в 14^{00} часов на заседании Диссертационного Совета FD.02.017 при Бакинском Государственном Университете.
Адрес: AZ 1148, ул. З.Халилова, 23.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Бакинского Государственного Университета.

Автореферат разослан «________»__________________2013 г.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета FD.02.017
кандидат физико-математических наук М.М.Муталлимов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория задач оптимального управления с фазовыми ограничениями представляет собой раздел математической теории оптимального управления, созданной в 50-х годах Л.С. Понтрягиным, В.Г. Болтянским, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. Впервые принцип максимума Понтрягина для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями был доказан Р.В. Гамкрелидзе, после чего данному вопросу посвящены многочисленные работы.

Так как наличие фазовых ограничений более полно отражают процесс, то исследование этих задач к настоящему времени не теряет свою актуальность и поэтому интерес к задачам с фазовыми ограничениями резко увеличился.

После работы Р.В. Гамкрелидзе существенный вклад в данном вопросе внесли С.Е. Дрейфус, А.Д. Беркович, А.Д. Дубовицкий, А.А. Милютин, И.В. Гирсанов, В.А. Дубовицкий, В.А. Якубович, В.И. Благодатских, А.Б. Куржанский, Ю.С. Осипов, В.В. Дикусар, А.П. Афанасьев, М.Дж. Марданов, Ф.Кларк, Р.Б. Винтер, Г.С. Паппаз, С.М. Асеев, Е.С. Половинкин, Г.В. Смирнов, А.В. Арутьюнов и др.

Среди работ по данному вопросу отметим работы А.Я. Дубовицкого и А.А. Милютина, в которых в наиболее общей постановке доказан принцип максимума Понтрягина. В дальнейшем их результаты обобщались в различных направлениях многими авторами. Однако, применение этих результатов к исследованию конкретных задач вызвало большие трудности, именно, из-за того, что необходимые условия во многих этих результатах могли вырождаться, выполняясь на любой допустимой траектории и сопряженная функция могла иметь сингулярную составляющую, которая усложняет применение к конкретным случаям. Этим обосновывается актуальность темы.

Целью работы является разработка новых математических средств к исследованию задач с фазовыми ограничениями для вывода невырожденных и регулярных необходимых условий применительно к управляемым системам как без запаздываний, так и при наличии запаздываний, а также к системам, описываемым дифференциальными включениями. При этом рассматриваются гладкие и негладкие задачи.

Научная новизна результатов. В данной диссертации разработан новый подход-Метод подобных решений к исследованию задач оптимального управления с фазовыми ограничениями для вывода регулярного принципа максимума Понтрягина. С помощью этого метода исследование таких задач сводится к тесно связанным с ними задачам без фазового ограничения.

Исходя из того, что вывод необходимых условий производится путем сравнения оптимальной траектории с другими допустимыми траекториями, а каждой точке оптимальной траектории соответствует множество скоростей, часть которого может быть не принадлежит касательному конусу к фазовому ограничению, мы естественным образом не должны учитывать ту часть скоростей в соотношениях необходимого условия. С другой стороны одним из основных факторов сложной структуры сопряженной функции в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями является наличие в соотношениях соответствующего принципа максимума Понтрягина и недопустимых управлений. Идея метода подобного решения основывается именно на этих рассуждениях.

Таким образом, метод подобного решения позволяет получить новые необходимые условия оптимальности для класса задач с фазовыми ограничениями, где

а) сопряженная функция является абсолютно непрерывной;

б) сопряженная функция является нетривиальной на всем отрезке времени, этим и исключается случай вырождения задачи;

в) сопряженная система уравнений однородная, хотя в постановке задачи присутствует активное фазовое ограничение;

г) приведены многочисленные примеры задач с фазовыми ограничениями, где полученные необходимые условия удачно применяются.

Этим и показывается широта круга применяемости полученных необходимых условий.

Научная и практическая значимость. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы для исследования конкретных задач из техники, экономики, медицины и т.д.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и применениям, г. Варшава, Польша, 1989, Банах Центр Полской АН; VII Республиканской конференции молодых ученых по математике и механике, Баку, ИММ, 1987; Всесоюзной школе «Оптимальное управление, геометрия и анализ», 29 сентября-9 октября, 1988, Кемерово; IX конференции молодых ученых по математике и механике, 1989, ИММ АН; X Республиканской конференции молодых ученых по математике и механике, 1991, Баку, ИММ; Всесоюзной конференции «Негладкий анализ и его приложения к математической экономике», 1991, Баку; The 2nd Turkish-Azerbaijan Mathematics Symposium, September 8-14, 1992, Baku; Regional Conference on Mathematics and Theoretical Physics, Faculty of Science, Tabriz University, 22-24 November, 1992; IV Congress of the Turkic World Mathematical Society, 1-3 July, 2011, Baku; 3th International Conference on Control and Optimization with Industrial Application, (COIA-2011), Bilkent University, Turkey, 22-24 August, 2011; на семинаре Института Прикладной Математики при БГУ, на семинаре кафедры оптимального управления БГУ, на семинаре центра распределенных вычислений ИППИ РАН.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, семи глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 212 страниц, список литературы содержит 129 наименований.

Содержание работы

Во введении речь идет об истории задач оптимального управления с фазовыми ограничениями, и о том, какие проблемы возникают для таких задач и дается обзор содержания диссертации.

В диссертации рассматривается общая задача оптимального управления с фазовыми ограничениями вида $x \in X(t)$. Прежде чем перечислять результаты диссертации введем следующие обозначения и понятия: $E^n - n-$мерное евклидово пространство, $\Omega(E^n)-$ множество всех непустых компактных и $conv\,\Omega(E^n)$ - множество всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства E^n;

$H(A,\psi)=\sup\{(a,\psi) : \ a\in A\}$ -опорная функция множества $A\subset E^n$ в направлении вектора ψ , где (a,ψ) означает скалярное произведение векторов a и ψ; $T(A,a)$ и $N(A,a)$ являются касательным и нормальным конусами к замкнутому, выпуклому множеству A в точке $a\in A$, соответственно. Все конечномерные векторы считаются вектор –столбцами.

Пусть A - непустое замкнутое подмножество из E^n. Контингентным конусом к множеству A в точке $x\in A$ называется множество

$$K(A,x)=\{v\in E^n : \exists v_i \to v, \exists \alpha_i \to +0 : x+\alpha_i v_i \in A,\ i=1,2,..\}.$$

Касательным конусом к множеству A в точке $x\in A$ называется множество

$$T(A,x)=\{v\in E^n : \forall x_i \xrightarrow{A} x,\ \forall \alpha_i \to +0 : \exists v_i \to v : x_i+\alpha_i v_i \in A,\ i=1,2,...\}.$$

Нормальный конус Кларка к множеству A в точке $x\in A$ определяется равенством

$$N(A,x)=\{u\in E^n : (u,v)\le 0 \quad \forall\, v\in T(A,x)\}.$$

Пусть f - локально липшицева функция на E^n. Обозначим через

$$\partial f(x)=\{y\in E^n : (y,-1)\in N(epif,(x,f(x)))\}$$

субдифференциал Кларка функции f в точке x. Здесь $epif=\{(x,y): y\ge f(x)\}$ - надграфик функции f.

В Главе 1 дается суть нового метода – метода подобных решений и в задачах быстродействия и в задачах оптимального управления с терминальным критерием качества и фазовыми ограничениями. Суть метода подобных решений в случае задач быстродействия заключается в следующем: наряду с исходной задачей оптимального управления с фазовым ограничением рассматривается вспомогательная задача без фазового ограничения и некоторыми измененными граничными условиями, с той целью, чтобы оптимальное значение критерия качества в этой задаче совпало с оптимальным значением критерии качества в исходной задаче с фазовым ограничением. Именно, вспомогательная задача получается от исходной путем исключения фазового ограничения и введением новых граничных условий.

Например, для задач быстродействия сказанное означает, что время быстродействия одно и то же для обеих задач. По этой причине мы вынуждены дать возможность изменения в начальных и конечных условий. Так же отметим, что в этом процессе одна из этих точек (начальная или конечная) может оставаться без изменения.

Между первоначальной и вспомогательной рассматривается промежуточная задача оптимального управления, которая получается от исходной задачи путем «урезания» правой части касательным конусом к множеству X вдоль оптимальной траектории $\bar{x}(t) \in X$, т.е. в промежуточной задаче вместо U рассматривается подмножество

$$U(\bar{x}(t)) = \{u \in U : f(\bar{x}(t), u) \in T(X, \bar{x}(t)), \quad п.в. \ t \in [0,T]\},$$

где $T(X, \bar{x}(t))$ есть касательный конус (в определенном в работе смысле) к X в точке $\bar{x}(t)$.

Другими словами, в промежуточной и исходной задачах только множества скоростей разные. Остальные данные, в том числе и фазовые ограничения остаются без изменения.

Нетрудно убедиться в том, что решение $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $t \in [0,T]$ исходной задачи есть и решение промежуточной задачи, следовательно, необходимое условие оптимальности этого решения в этой задаче будет и необходимым условием для исходной задачи.

Отметим еще одну очень важную особенность. Именно, в промежуточной задаче множество скоростей вдоль оптимальной траектории

??, ??[0,?]

полностью содержится в касательном конусе

??)

для каждого фиксированного

?]

, т.е. выполняется включение

??,???)???,??, п.в. ??[0,?

].

Здесь возникает естественный вопрос: Насколько важно фазовое ограничение в промежуточной задаче? Иными словами если убрать фазовое ограничение в промежуточной задаче, останется ли пара
??,??) ??[0,?]
оптимальной, или в этом случае, выполнится ли хотя бы обычный принцип максимума Понтрягина?

Сначала разбирая многочисленные примеры, мы заметили, что ответ на поставленные вопросы положителен, если оптимальная траектория
??, ??[0,?]
исходной задачи «схожа» с некоторой оптимальной траекторией вспомогательной задачи, конечно, если существует такая траектория. Какой смысл имеет понятие «схожести» или «подобия», определяется соответствующим образом.

Ставятся некоторые условия в виде включения между касательными конусами, связанными с решениями в промежуточной и вспомогательной задачах, при выполнения которых имеем возможность относить пункты принципа максимума Понтрягина для вспомогательной задачи (существование абсолютно непрерывной нетривиальной функции, сопряженная система уравнений, условие максимума и т.д.) к решению промежуточной, в то же время и к решению исходной задачи с фазовыми ограничениями.

Более точное изложение метода дано в диссертации.

Дополнительно к сказанным, отметим что применение этого метода приводит к выделению оптимальных траекторий исходной задачи, для которых сопряженная функция является и абсолютно непрерывной, и нетривиальной, что играет тоже немаловажную роль в подобных задачах оптимального управления. При этом сопряженная система является однородной, хотя в задаче присутствует активное фазовое ограничение.

Проверка поставленных условий и доказательство утверждений отличаются доступностью и простотой изложения.

В Главе 2 в параграфе 2.1. рассматривается задача быстродействия с фазовым ограничением

? =??,?,

$0=??, ??=??,$

$???,$ п.в. $??0,?,$ (1)

$???, ??0,?,$

,

где функции $?,?$ и $????$ являются непрерывными по и $??$.

Функцию $???$ назовем допустимым управлением на отрезке $0,?,$ если она измерима и соответствующее решение $?, ??[0,?]$ заданной системы уравнений удовлетворяет начальному условию $0=??$ и включению $???, ??[0,?]$.

Под решением понимается абсолютно непрерывная функция $?, ??[0,?]$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению $?=??,??,$ п.в. $??0,?.$

Задача заключается в нахождении допустимого управления $?, ??[0,?]$, осуществляющего переход из $0=??$

в
? =? ?
за наименьшее время

.

Оптимальное решение назовем регулярным, если соответствующая сопряженная функция $\psi(t)$, $t \in [0,T]$ является нетривиальной абсолютно непрерывной функцией.

Пусть
??,??, ??[0,?]
является решением задачи (1), где
?
есть время быстродействия и
????
является подмножеством, для которого выполняется равенство

Рассмотрим соответствующую задачу без фазового ограничения

?????, ?, ??0,?, ?0=??, ?? =? ?

? → min.

(2)

Определение. Если существуют точки
??, ??
и соответствующее решение
(? 0?, ?0?), ??[0,?]
задачи (2), для которого выполняется включение

то
?0?,? 0?, ??[0,?]
называется подобным к решению
??,??), ??[0,?]
задачи (1).

Замечание. Основным требованием этого определения является равенство времен быстродействия в исходной (задача с

фазовым ограничением (1)) и вспомогательной (задача без фазового ограничения (2)) задачах.
Доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть существует подобное к ??,??), ??[0,?]
решение
?0?,?0?), ??[0,?]
задачи (2). Тогда существует ненулевое абсолютно непрерывное решение сопряженной системы уравнений

что выполняется условие максимума

Если выполняется дополнительное условие

то сопряженная система уравнений будет иметь вид

В конце этого параграфа рассматривается аналогичная линейная задача и соответствующим методом получено необходимое условие. Тут же, отметим, что в линейных, относительно

, системах дополнительное условие выполняется всегда, в результате чего сопряженная система уравнений имеет вид ? =????
, хотя в исходной задаче присутствует активное фазовое ограничение.
Для иллюстрации теоремы приводятся примеры.

В параграфе 2.2 рассматривается задача с терминальным критерием качества и фазовым ограничением

???, п.в. ??0,?,

???, ??[0,?] (3)

Здесь дополнительно предполагается, что
??(?)??
непрерывна.

фиксирован.

Функцию
???, ??[0,?]
назовем допустимым управлением на отрезке
0,?,
если она измерима и соответствующее решение
?, ??[0,?]
заданной системы уравнений удовлетворяет начальному условию
0=??
и включению
???, ??[0,?]
.

Задача заключается в нахождении допустимого управления
?, ??[0,?]
, для которого

минимальна.

Оптимальное решение назовем регулярным, если соответствующая сопряженная функция $\psi(t)$, $t \in [0,T]$ является нетривиальной абсолютно непрерывной функцией.

Пусть
??,??, ??[0,?]
является решением задачи (3) и
??(?(?))??=0.
????
является подмножеством, для которого выполняется равенство

Рассмотрим соответствующую вспомогательную задачу без фазового ограничения

??????, ?, ??0,?, ?0=??,
?(??)→min. (4)

Определение. Если существует точка
??
и соответствующее решение
(?0?, ?0?), ??[0,?]
задачи (4), для которого выполняются включение

и равенство
?0?=?(?)
,
то
?0?,?0?, ??[0,?]
называется подобным к решению
??,??), ??[0,?]
задачи (3).

Как видно, из этого определения, в случае терминального функционала требуется равенство
?0?=??
. Это делается с целью обеспечения равенства оптимальных значений критерий качеств в исходной и вспомогательной задачах, соответственно.

Теорема 2. Пусть существует подобное к
??,??), ??[0,?]
решение
?0?,?0?), ??[0,?]
задачи (4). Тогда существует ненулевое абсолютно непрерывное решение сопряженной системы уравнений

при котором выполняется условие максимума

Если выполняется дополнительное условие

то сопряженная система уравнений будет иметь вид

? =−? ?(? (?))? ?

.

В конце этого параграфа рассматривается аналогичная линейная задача и соответствующим методом получено необходимое условие. Для иллюстрации теоремы приводятся примеры.

В конце этой главы дается сравнения относительно условий максимума по подмножествам ??, , ?(??) , [1]. Отметим, что выполняются включения ??? ?(??)? ? .

В параграфе 3.1 Главы 3 рассматривается задача

???(?), п.в. ??0,?,

(5)

???, ??0,?,

где функции ?,?,?, ???? являются непрерывными по ?,? и измеримы по

---

1 Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ, 5, №3, 1965, с.395-453.

. Многозначное отображение
$?1\to\Omega??,$

которое предполагается измеримым и удовлетворяющим оценке
$?(?)\leq??,$

где
$?$

скалярная функция, интегрируемая по Лебегу на любом конечном отрезке времени

;
$?,??,?????? \Omega??,??0,?;$

-некоторое замкнутое выпуклое подмножество
$??$

.

Функцию
$????, ??[0,?]$

назовем допустимым управлением на отрезке
$0,?,$

если она измерима и является однозначной ветвью многозначного отображения
$?$

, так что соответствующее решение
$?, ??[0,?]$

заданной системы уравнений удовлетворяет начальному условию
$0=??$

и включению
$???, ??[0,?]$

.

Задача заключается в нахождении допустимого управления
$?, ??[0,?]$

, осуществляющего переход из
$0=??$

в
$?=??$

за наименьшее время

.

Пусть
??,??, ??[0,?]
является решением задачи (5), где
?
есть время быстродействия и
??, ???(?)
является подмножеством, для которого выполняется равенство

Рассмотрим соответствующую задачу без фазового ограничения
??????, ??,?, ??0,?, ?0=??, ??=??,
$? \to \min.$ (6)

Определение. Если существуют точки
??, ??
и соответствующее решение
(?0?, ?0?), ??[0,?]
задачи (6), для которого выполняется включение

то
?0?,?0?, ??[0,?]
называется подобным к решению
??,??), ??[0,?]
задачи (5).

Доказывается

Теорема 3. Пусть существует подобное к
??,??), ??[0,?]
решение
?0?,?0?), ??[0,?]
задачи (6), тогда существует такое ненулевое абсолютно непрерывное решение сопряженной системы уравнений

что выполняется условие максимума

Если выполняется дополнительное условие

то сопряженная система уравнений , имеет вид

По ходу приводятся и доказываются следующие факты

Лемма 1. Пусть

?, ??[0,?]

абсолютно непрерывная функция, для которой

???, ???0,?,

где

??

выпуклое замкнутое подмножество. Тогда выполняется включение

?????,?(?),

п. в.

.

Следствие 1. Если

?, ??[0,?]

некоторое допустимое ращение задачи (1), то

??,??,?∩??,??=?, *п.в.* ??0,?

.

В конце этого параграфа рассматривается аналогичная линейная задача и соответствующим методом получено необходимое условие. Для иллюстрации теоремы приводятся примеры, где выделяются три группы оптимальной траектории в зависимости от начального положения, в которых траектории могут быть регулярными, нерегулярными, для некоторых фазовое ограничение не является активным.

В параграфе 3.2 Главы 3 рассматривается задача с терминальным критерием качества и с фазовым ограничением

? =??,?,?,

??? (?), п.в. ?? 0,?,

(7)

???, ?? 0,?,

?? → ???,

и вспомогательная задача

??????, ??,?, ?? 0,?, ?0=??,

?(??) → min.

(8)

Определение. Если существует точка

??

и соответствующее решение

(? 0?, ?0?), ??[0,?]

задачи (8), для которого выполняются включение

и равенство

?0?=?(?)

,

то

?0?,?0?, ??[0,?]

называется подобным к решению

??,??), ??[0,?]

задачи (7).

Доказывается теорема

Теорема 4. Пусть существует подобное к

??,??), ??[0,?]

решение

?0?,?0?), ??[0,?]

задачи (8). Тогда существует такое ненулевое абсолютно непрерывное решение сопряженной системы уравнений

? =−??(? 0(?))??

,

что выполняется условие максимума

Если выполняется дополнительное условие

то сопряженная система уравнений будет иметь вид

? =−? ?(? (?))? ?

.

В конце этого параграфа рассматривается аналогичная линейная задача и соответствующим методом получено необходимое условие. Для иллюстрации теоремы приводятся примеры.

В параграфе 3.3 рассматривается фазовое ограничение вида ? ={????: ?(?,?)≤0}, ??[0,?]

, где функция

??? ?→? 1,

и

является дифференцируемой по

и

,

????≠0,

где

?,? =0.

Доказывается

Лемма 2. Пусть

?, ??0,?

некоторая абсолютно непрерывная функция и выполняется неравенство

??,?≤0, ??0,?.

Тогда для п.в.

0, ? :? ? ? , ? =0}

выполняется неравенство

? ? ? ? , ? ? ? ? ? + ? ? (? ? , ?) ? ? ≤ 0.

Проводится аналогичные рассуждения как в линейном, так и в нелинейном случаях. Приводится пример, где оптимальная траектория бесконечное число раз выходит на границу фазового ограничения, сопряженная функция абсолютно непрерывна, сопряженная дифференциальное уравнение однородное, при этом фазовое ограничение является активным.

В параграфе 4.1 Главы 4 рассматривается задача быстродействия с фазовыми и концевыми ограничениями

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x,u,t), \\ &x(0) \in C_\alpha,\ x(T) \in C_\beta, \\ &u(t) \in U(t),\ п.в. \quad t \in [0,T], \\ &x(t) \in X,\ t \in [0,T], \\ &T \to \min . \end{aligned} \tag{9}$$

Дополнительно предполагается, что $C_\alpha, C_\beta \in conv\Omega(E^n)$

Функцию $u(t) \in U(t), t \in [0,T]$ назовем допустимым управлением на отрезке $[0,T]$, если она измерима и является однозначной ветвью многозначного отображения $U(t)$, так что соответствующее решение $x(t), t \in [0,T]$ заданной системы уравнений удовлетворяет начальному условию $x(0) \in C_\alpha$ и включению $x(t) \in X, t \in [0,T]$.

Задача заключается в нахождении допустимого управления $u(t), t \in [0,T]$, для которого соответствующая траектория удовлетворяет условию $x(T) \in C_\beta$ и время T наименьшее.

Рассматривается соответствующая задача быстродействия без фазового ограничения

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in f(x(t),\ U(t), t) \quad п.в. \quad t \in [0,T], \\ x(0) \in \tilde{C}_\alpha,\ x(T) \in \tilde{C}_\beta, \\ T \to \min. \end{cases} \tag{10}$$

Пусть $(\overline{x}(t),\overline{u}(t)),\ t\in[0,\overline{T}]$ является решением задачи (9), где $\overline{T}$ – есть время быстродействия.

Определение. Если существуют подмножества $\tilde{C}_\alpha, \tilde{C}_\beta \in conv\,\Omega\left(E^n\right)$ и соответствующее решение $\left(x_0(t), u_0(t)\right), t\in\left[0,\overline{T}\right]$ задачи (10), для которых выполняются включения

$$T\left(f\left(\overline{x}(t), U\left(\overline{x}(t),t\right),t\right),\dot{\overline{x}}(t)\right)\subseteq T\left(f\left(x_0(t), U(t),t\right),\dot{x}_0(t)\right),\quad п.в.\quad t\in\left[0,\overline{T}\right],$$

$$T\left(C_\alpha \cap X, \overline{x}(0)\right)\subseteq T\left(\tilde{C}_\alpha, x_0(0)\right),$$
$$T\left(C_\beta \cap X, \overline{x}\left(\overline{T}\right)\right)\subseteq T\left(\tilde{C}_\beta, x_0\left(\overline{T}\right)\right),$$

то $\left(x_0(t), u_0(t)\right), t\in\left[0,\overline{T}\right]$ называется подобным к решению $\left(\overline{x}(t), \overline{u}(t)\right), t\in\left[0,\overline{T}\right]$ задачи (9).

Доказывается

Теорема 5. Пусть существует подобное к $\left(\overline{x}(t), \overline{u}(t)\right), t\in\left[0,\overline{T}\right]$ решение $\left(x_0(t), u_0(t)\right), t\in\left[0,\overline{T}\right]$ задачи (10). Тогда существует ненулевое абсолютно непрерывное решение сопряженной системы уравнений

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial f^*\left(x_0(t),u_0(t),t\right)}{\partial x}\psi(t),\quad п.в.\quad t\in\left[0,\overline{T}\right],$$

с условиями трансверсальности

$$H\left(C_\alpha \cap X, \psi(0)\right) = \left(\overline{x}(0),\psi(0)\right),\quad H\left(C_\beta \cap X,\ -\psi\left(\overline{T}\right)\right) = \left(\overline{x}\left(\overline{T}\right), -\psi\left(\overline{T}\right)\right),$$

для которого выполняется условие максимума

$$\max\left\{\left(f\left(\overline{x}(t),u,t\right),\psi(t)\right)\ :\ u\in U\left(\overline{x}(t),t\right)\right\} = \left(\dot{\overline{x}}(t),\psi(t)\right),\quad п.\,в.\quad t\in\left[0,\overline{T}\right].$$

Если выполняется дополнительное условие

$$\left(\frac{\partial f^*\left(\overline{x}(t),\overline{u}(t),t\right)}{\partial x} - \frac{\partial f^*\left(x_0(t),u_0(t),t\right)}{\partial x}\right)\psi(t) = 0,\quad п.\,в.\quad t\in\left[0,\overline{T}\right],$$

то сопряженная система уравнений, будет иметь вид

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial f^*\left(\overline{x}(t),\overline{u}(t),t\right)}{\partial x}\psi(t),\quad п.\,в.\quad t\in\left[0,\overline{T}\right],$$

с условиями трансверсальности

$$H\left(C_\alpha \cap X, \psi(0)\right) = \left(\bar{x}(0), \psi(0)\right), \quad H\left(C_\beta \cap X,\ -\psi\left(\bar{T}\right)\right) = \left(\bar{x}\left(\bar{T}\right), -\psi\left(\bar{T}\right)\right).$$

В конце этого параграфа рассматривается аналогичная линейная задача и соответствующим методом и получено необходимое условие. Для иллюстрации теоремы приводятся примеры.

В параграфе 4.2 рассматривается задача с терминальным критерием качества с фазовыми и конечными ограничениями для неавтономной системы

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, u, t), \\ &x(0) \in C_\alpha, \\ &u(t) \in U(t), \quad \text{п.в.} \quad t \in [0, T], \\ &x(t) \in X, \quad t \in [0, T], \\ &\varphi(x(T)) \to \min. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь все параметры удовлетворяют те же условия. Дополнительно предполагаем, что $\dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$ непрерывно. T – фиксирован.

Функцию $u(t)$, $t \in [0, T]$ назовем допустимым управлением, если она измерима и является однозначной ветвью многозначного отображения $U(t)$, так что соответствующее решение $x(t)$, $t \in [0, T]$ заданной системы уравнений удовлетворяет начальному условию $x(0) \in C_\alpha$ и включению $x(t) \in X$, $t \in [0, T]$.

Задача заключается в нахождении допустимого управления $u(t)$, $t \in [0, T]$, для которого $\varphi(x(T))$ минимальна.

Пусть $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $t \in [0, T]$ является решением задачи (11) и $\dfrac{\partial \varphi(\bar{x}(T))}{\partial x} \neq 0.$

Рассмотрим соответствующую задачу без фазового ограничения

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in f(x(t), U(t), t), \quad t \in [0, T], \\ x(0) \in C_\alpha, \\ \varphi(x(T)) \to \min. \end{cases} \tag{12}$$

Определение. Если существует подмножество $\tilde{C}_\alpha \in conv\Omega(E^n)$ и решение $(x_0(t), u_0(t)), t \in [0,T]$ задачи (12), для которого выполняются включения

$$T\big(f(\bar{x}(t), U(\bar{x}(t),t),t), \dot{\bar{x}}(t)\big) \subseteq T\big(f(x_0(t), U(t),t), \dot{x}_0(t)\big), \quad п.в. \quad t \in [0,T],$$

$$T(C_\alpha \cap X, \bar{x}(0)) \subseteq T\big(\tilde{C}_\alpha, x_0(0)\big),$$

и равенство

$$x_0(T) = \bar{x}(T),$$

то $(x_0(t), u_0(t))$, $t \in [0,T]$ называется подобным к решению $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $t \in [0,T]$ задачи (11).

Теорема 6. Пусть существует подобное к $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $t \in [0,T]$ решение $(x_0(t), u_0(t))$, $t \in [0,T]$ задачи (12). Тогда существует ненулевое абсолютно непрерывное решение сопряженной системы уравнений

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial f^*(x_0(t), u_0(t), t)}{\partial x}\psi(t), \quad п.в. \quad t \in [0,T],$$

с условиями трансверсальности

$$H(C_\alpha \cap X, \psi(0)) = (\bar{x}(0), \psi(0)), \qquad \psi(T) = -\frac{\partial \varphi(x_0(T))}{\partial x},$$

для которого выполняется условие максимума

$$\max\{(f(\bar{x}(t), u, t), \psi(t)) : u \in U(\bar{x}(t), t)\} = (\dot{\bar{x}}(t), \psi(t)), \quad п.в. \quad t \in [0,T].$$

Если выполняется дополнительное условие

$$\left(\frac{\partial f^*(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)}{\partial x} - \frac{\partial f^*(x_0(t), u_0(t), t)}{\partial x}\right)\psi(t) = 0, \quad п.в. \quad t \in [0,T],$$

то сопряженная система уравнений будет иметь вид

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial f^*(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)}{\partial x}\psi(t), \quad п.в. \quad t \in [0,T],$$

с условиями трансверсальности

$$H(C_\alpha \cap X, \psi(0)) = (\bar{x}(0), \psi(0)), \qquad \psi(T) = -\frac{\partial \varphi(\bar{x}(T))}{\partial x}.$$

В конце этого параграфа рассматривается аналогичная линейная задача и соответствующим методом получено необходимое условие. Для иллюстрации теоремы приводится пример.

В параграфе 5.1 Главы 5 рассматривается задача быстродействия с запаздыванием и фазовым ограничением

?(?)=??(?),??−?,?(?), ??0,?,???, +∞,

? =??,??−?,0, ?>0,?0=??, ??=??,??≠??

,

???, п.в. ??0,?,

(13)

???, ??0,?, ??,????,

Заданная функция ?, ??−?,0 является измеримой и ограниченной. Область управлений- ??. Функции ?,?,?, ????, ????, являются непрерывными и ?,?,?????? Ω(??)

.

некоторое замкнутое выпуклое подмножество ??

. Функцию ???, ??[0,?] назовем допустимым управлением на отрезке 0,?, если она измерима и соответствующее решение ?, ??[0,?] заданной системы уравнений удовлетворяет начальному условию ?=??, ??−?,0, ?0=?? и включению

???, ??[0,?]

.

Задача заключается в нахождении допустимого управления

?, ??[0,?]

, для которого

минимальна.

Пусть

??,??, ??[0,?]

является решением задачи (13), где

?

есть время быстродействия и

????

является подмножеством, для которого выполняется равенство

Рассмотрим соответствующую задачу без фазового ограничения

??????, ??−?, ?,??0,?, ???, +∞, ?? =??, ??−?,0, ? >0,

?0=??, ??=??, ??=??,?→min.

(14)

Определение. Если существуют измеримая ограниченная начальная функция

??, ??−?,0,

точки

??, ??

и соответствующее оптимальное решение

(?0?, ?0?), ??[0,?]

задачи (14), для которого выполняется включение

???, ??−?, ???, ??????0?, ?0?−?,?,?0?, п.в. ??0,?,

то

?0?,?0?, ??[0,?]

называется подобным к решению

??,??), ??[0,?]

задачи (13).

Доказывается

Теорема 7. Пусть существует подобное к
??,??), ??[0,?]
решение
?0?,?0?), ??[0,?]
задачи (14). Тогда существует ненулевое абсолютно непрерывное решение сопряженной системы
??=−????0?, ?0? −?,?0????? −????0? +?,?0?,?0? +????? +?,

что выполняется условие максимума

Если выполняется дополнительное условие
?????,??−?,????−????0?,?0?−?,?0?????+?????+?,??,??+???−????0?
+?,?0?,??+????? +?=0

п. в.

?−?]
и

то сопряженная система уравнений имеет вид
??=−?????,??−?,?????(?)−????? +?,??,?? +????(? +?)

п. в.

??=−?????,??−?,??????,

п. в.

.

В конце этого параграфа рассматривается аналогичная линейная задача и соответствующим методом получено необходимое условие. Для иллюстрации теоремы приводится пример.

В параграфе 5.2 рассматривается терминальная задача оптимального управления с запаздыванием и фазовым ограничением

?(?)=??(?),?? −?,?(?), ??0,?,???,+∞,?>0,

? =??,?? −?,0,?0=??,

???, п.в. ??0,?,

(15)

???, ??0,?,

??→???.

Заданная функция
?, ??[−?,0)

является измеримой и ограниченной. Область управления-
??.

Функции
?,?,?, ????, ????,????

являются непрерывными в области их определения и
?,?,?????? ?(??)

.

некоторое замкнутое выпуклое подмножество
??

.

фиксирован.

Функцию
???, ??[0,?]

назовем допустимым управлением на отрезке
0,?,

если она измерима и соответствующее решение
?, ??[0,?]

заданной системы уравнений удовлетворяет начальному условию
?=??,??−?,0,

включению

???, ??[0,?]

и

????.

Задача заключается в нахождении допустимого управления

?, ??[0,?]

, для которого

0=??

и

минимальна.

Пусть

??,??, ??[0,?]

является решением задачи (15) с условием

??(?(?))??=0

и

????

является подмножеством, для которого выполняется равенство

Рассмотрим соответствующую задачу без фазового ограничения

??=???, ??−?, ?(?), ??0,?, ??=??, ??[−?,0), ?0=??,

???? п.в. ??0,?, ?(?(?))→???.

(16)

Определение. Если существуют измеримая ограниченная начальная функция

??, ??−?,0,

начальная точка

xα

и соответствующее решение

(?0?, ?0?), ??[0,?]

задачи (16), для которого выполняются включение

и равенство

то
?0?,? 0? , ??[0,?]

называется подобным к решению
??,??), ??[0,?]

задачи (15).
Доказывается

Теорема 8. Пусть существует подобное к
??,??), ??[0,?]

решение
?0?,? 0? , ??[0,?]

задачи (16), тогда существует ненулевое абсолютно непрерывное решение сопряженной системы

??=−??? ? 0?, ?0? −?,? 0? ???? −?? ??0? +?,?0?,?0? +????? +?,

что выполняется условие максимума

Если выполняется дополнительное условие

?????,??−?,????−????0?,?0?−?,?0????? +? ???? +?,??,?? +??? −????0?
+?,?0?,?? +????? +?=0

п. в.

,

и

то сопряженная система уравнений имеет вид
??=−?????,??−?,?????(?)−???? ? +?,??,?? +????(? +?)

п. в.

0,?−?,

??=−?????,??−?,??????,

п. в.

,

В конце этого параграфа рассматривается аналогичная линейная задача и соответствующим методом получено необходимое условие. Для иллюстрации теоремы приводится пример.

В параграфе 6.1 Главы 6 основным объектом исследования является следующая негладкая задача оптимального управления с фазовым ограничением

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = f(t,x,u),\ t \in [0,T],\\
&x(0) \in C_0,\ \ x(T) \in C_1,\\
&u \in U(t), \qquad \text{п.в. } t \in [0,T],\\
&x(t) \in X,\ \ t \in [0,T],\\
&T \to \min,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где $f:[0,T]\times E^n \times E^m \to E^n$, и $X-$ некоторое непустое регулярное замкнутое подмножество пространства E^n, C_0, C_1 – некоторые регулярные компактные подмножества в E^n.

Предпологаем, что для каждого $x \in E^n$ функция $f(\cdot,x,\cdot)$ измерима по t и u.

Существует измеримая вещественнозначная функция $k(t,u)$, для которого функция $f(t,\cdot,y)$ удовлетворяет условию Липщица с независимой от x функцией $k(t,u)$, $U(t)$ компактнозначное многозначное отображение которое является измеримым и удовлетворяющим оценке $|U(t)| \le k(t)$, где $k(t)$ некоторая неотрицательная скалярная функция, интегрируемая по Лебегу на любом конечном отрезке времени $[0,T]$.

Функцию $u(t) \in U(t),\ t \in [0,T]$ назовем допустимым управлением на отрезке $[0,T]$, если она измерима и соответствующее решение $x(t),\ t \in [0,T]$ заданной системы уравнений удовлетворяет начальному условию $x(0) \in C_0$ и включению $x(t) \in X,\ t \in [0,T]$.

Задача заключается в нахождении допустимого управления $u(t),\ t\in[0,T]$, которое приводит систему из начального положения C_0 в конечное положение C_1 за минимальное время, при этом траектория не выходит за пределы множества X в течении всего процесса.

Пусть $(\bar{x}(t),\bar{u}(t)),\ t\in[0,\bar{T}]$ является решением задачи (17), $\bar{T}$ -есть время быстродействия, $U(\bar{x}(t),t)\subset U(t)$ является подмножеством, которое определяется следующим образом

$$U(\bar{x}(t),t)=\{u\in U(t): f(t,\bar{x}(t),u)\in T(X,\bar{x}(t))\ \ п.в.\ t\in[0,\bar{T}]\},$$

здесь $T(X,\bar{x}(t))$ является касательным конусом к X в точке $\bar{x}(t)$ для каждого фиксированного $t\in[0,\bar{T}]$.

Рассмотрим соответствующую задачу без фазового ограничения

$$\begin{aligned}&\dot{x}=f(t,x,u),\\&u\in U(t),\ \ п.в.\ t\in[0,T],\\&x(0)\in\tilde{C}_0,\ \ x(T)\in\tilde{C}_1\\&T\to\min.\end{aligned}\qquad(18)$$

Определение. Если существуют компактные регулярные подмножества $\tilde{C}_0,\tilde{C}_1$ и соответствующее решение $(x_0(t),u_0(t)),\ t\in[0,\bar{T}]$, задачи (18), для которого выполняются включения

$$T(f(\bar{x}(t),U(\bar{x}(t),t),\dot{\bar{x}}(t))\subseteq T(f(x_0(t),U(t),t),\dot{x}_0(t)),\qquad п.в.\quad t\in[0,\bar{T}],$$

$$T(C_0\cap X,\bar{x}(0))\subseteq T(\tilde{C}_0,x_0(0)),\ T(C_1\cap X,\ \bar{x}(\bar{T}))\subseteq T(\tilde{C}_1,x_0(\bar{T})),$$

то $(x_0(t),u_0(t)),\ t\in[0,\bar{T}]$ называется подобным к решению $(\bar{x}(t),\bar{u}(t)),\ t\in[0,\bar{T}]$ задачи (17).

Сформулируется и и доказывается основная теорема.

Теорема 9. Пусть существует подобное к $(\bar{x}(t),\bar{u}(t)),\ t\in[0,\bar{T}]$ решение $(x_0(t),u_0(t)),\ t\in[0,\bar{T}]$ задачи (18). Тогда существует ненулевое абсолютно непрерывное решение сопряженного дифференциального включения

$$-\dot{\psi}(t)\in\partial_x f(t,x_0(t),u_0(t))\psi(t),\qquad п.в.\qquad t\in[0,\bar{T}],$$

для которого выполняются:

1. Условие максимума

$\max\{(f(t,\bar{x}(t),u),\psi(t)),\ \ u \in U(\bar{x}(t),t)\} = (\dot{\bar{x}}(t),\psi(t))$ $\ \ $ *п.в.* $t \in [0,\bar{T}]$;

2. Условия трансверсальности

$\psi(0) \in N(C_0 \cap X, \bar{x}(0)), \qquad -\psi(\bar{T}) \in N(C_1 \cap X, \bar{x}(\bar{T}))$;

3. Если выполняется дополнительное включение

$-\dot{\psi}(t) \in \partial_x f(t,x_0(t),u_0(t))\psi(t) \cap \partial_x f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\psi(t)$ $\quad$ *п.в.* $\quad t \in [0,\bar{T}]$,

то сопряженное дифференциальное включение будет иметь вид

$$-\dot{\psi}(t) \in \partial_x f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\psi(t) \quad \text{п.в.} \quad t \in [0,\bar{T}]$$

с теми же условиями трансверсальности.

Доказывается следующая важная

Лемма 3. Пусть $x(t),\ t \in [0,T]$ абсолютно непрерывная функция, для которой $x(t) \in X,\ \forall t \in [0,T]$, где X -некоторое регулярное замкнутое подмножество. Тогда выполняется включение

$$\dot{x}(t) \in T(X,x(t)) \quad \text{п.в.} \ \ t \in [0,T].$$

В конце этого параграфа для иллюстрации теоремы приводится пример.

В параграфе 6.2 основным объектом исследования является следующая негладкая задача оптимального управления с фазовым ограничением

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t,x,u), t \in [0,T],\\ &x(0) \in C_0,\\ &u \in U(t), \quad \text{п.в.}\ t \in [0,T],\\ &x(t) \in X,\ \ t \in [0,T],\\ &\varphi(x(T)) \to \min, \end{aligned} \tag{19}$$

Функцию $u(t) \in U(t),\ \ t \in [0,T]$ назовем допустимым управлением на отрезке $[0,T]$, если она измерима и соответствующее решение $x(t),\ t \in [0,T]$ заданной системы уравнений удовлетворяет начальному условию $x(0) \in C_0$ и включению $x(t) \in X,\ \ t \in [0,T]$.

Задача заключается в нахождении допустимого управления $u(t),\ \ t \in [0,T]$ для которого $\varphi(x(T))$ минимальна.

Пусть $(\bar{x}(t),\bar{u}(t)),\ t\in[0,T]$ является решением задачи (19), $U(\bar{x}(t),t)\subset U(t)$ является подмножеством, которое определяется следующим образом
$U(\bar{x}(t),t)=\{u\in U(t): f(t,\bar{x}(t),u)\in T(X,\bar{x}(t))\ \ п.в.\ t\in[0,T]\}$,
где $T(X,\bar{x}(t))$ является касательным конусом к X в точке $\bar{x}(t)$ для каждого фиксированного $t\in[0,T]$.

Рассмотрим соответствующую задачу без фазового ограничения

$$\begin{aligned}
&\dot{x}=f(t,x,u),\\
&u\in U(t),\quad п.в.\ t\in[0,T],\\
&x(0)\in\tilde{C}_0,\\
&\varphi(x(T))\to\min.
\end{aligned}\tag{20}$$

Определение. Если существует компактное регулярные подмножество $\tilde{C}_0$ и соответствующее решение $(x_0(t),u_0(t)),\ t\in[0,T]$, задачи (20), для которого выполняются включения
$T(f(\bar{x}(t),U(\bar{x}(t),t),\dot{\bar{x}}(t))\subseteq T(f(x_0(t),U(t),t),\dot{x}_0(t))\quad п.в.\quad t\in[0,T]$,

$$T(C_0\cap X,\bar{x}(0))\subseteq T(\tilde{C}_0,x_0(0)),$$

и равенство

$$x_0(T)=\bar{x}(T),$$

то $(x_0(t),u_0(t)),\ t\in[0,T]$ называется подобным к решению $(\bar{x}(t),\bar{u}(t)),\ t\in[0,T]$ задачи (19).

Сформулируется и доказывается

Теорема 10. Пусть существует подобное к $(\bar{x}(t),\bar{u}(t)),\ t\in[0,T]$ решение $(x_0(t),u_0(t)),\ t\in[0,T]$ задачи (20). Тогда существует ненулевое абсолютно непрерывное решение сопряженного дифференциального включения
$-\dot{\psi}(t)\in\partial_x f(t,x_0(t),u_0(t))\psi(t)\quad п.в.\quad t\in[0,T]$,

для которого выполняются:

1. Условие максимума

$$\max\{(f(t,\bar{x}(t),u),\psi(t)),\ \ u\in U(\bar{x}(t),t)\}=(\dot{\bar{x}}(t),\psi(t))\quad п.в.\ t\in[0,T];$$

2. Условия трансверсальности

$$\psi(0)\in N(C_0\cap X,\bar{x}(0)),\qquad -\psi(T)\in\partial\varphi(\bar{x}(T));$$

3. Если выполняется дополнительное включение
$-\dot{\psi}(t) \in \partial_x f(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) \cap \partial_x f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\psi(t) \quad$ *п.в.* $\quad t \in [0, T]$,
то сопряженное дифференциальное включение будет иметь вид.
$-\dot{\psi}(t) \in \partial_x f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\psi(t) \quad$ *п.в.* $\quad t \in [0, T]$,
с теми же условиями трансверсальности.
Приводится соответствующий пример.

В параграфе 7.1 Главы 7 рассматривается задача быстродействия для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} \in F(t, x), && t \in [0, T], \\
&x(0) \in C_0, && x(T) \in C_1, \\
&x(t) \in X, && t \in [0, T], \\
&T \to \min,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где $F(t, x)$ измеримо по t и липщицево по x, компактнозначное многозначное отображение, C_0 и C_1 заданные компактные регулярные подмножества пространства E^n, X некоторое регулярное замкнутое подмножество пространства E^n. Задача заключается в нахождении такого решения $x(t), t \in [0, T]$ дифференциального включения, переводящее систему из начального состояния C_0 в конечное состояние C_1 за наименьшее время, не выходя за пределы множества X в течении всего процесса.

Пусть $\bar{x}(t),\ t \in [0, \bar{T}]$ является решением задачи быстродействия, где $\bar{T}$ есть время быстродействия. Обозначим

$$\bar{F}(t, \bar{x}(t)) = F(t, \bar{x}(t)) \cap T(X, \bar{x}(t)),\ \ t \in [0, \bar{T}]$$

где $T(X, \bar{x}(t))$ является касательным в смысле Кларка конусом к X в точке $\bar{x}(t) \in X$, для каждого фиксированного $t \in [0, \bar{T}]$.

Рассмотрим соответствующую задачу без фазового ограничения

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} \in F(t, x), && t \in [0, T], \\
&x(0) \in \tilde{C}_0, && x(T) \in \tilde{C}_1, \\
&T \to \min.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Определение. Если существуют компактные регулярные подмножества $\tilde{C}_0, \tilde{C}_1$ и соответствующее решение $x_0(t), t \in [0,\overline{T}]$ задачи быстродействия (22), для которого выполняются включения

$$T(\overline{F}(t,\overline{x}(t)),\ \dot{\overline{x}}(t)) \subseteq T(F(t,x_0(t)),\ \dot{x}_0(t)) \qquad \textit{п.в.}\ \ t \in [0,\overline{T}],$$

$$T(C_0 \cap X,\ \overline{x}(0)) \subseteq T(\tilde{C}_0, x_0(0)),$$

$$T(C_1 \cap X,\ \overline{x}(\overline{T})) \subseteq T(\tilde{C}_1, x_0(\overline{T})),$$

то $x_0(t),\ t \in [0,\overline{T}]$ называется подобным к решению $\overline{x}(t),\ t \in [0,\overline{T}]$ задачи (21).

Сформулируем основную теорему этого пункта.

Теорема 11. Пусть существует подобное к $\overline{x}(t),\ t \in [0,\overline{T}]$ решение $x_0(t), t \in [0,\overline{T}]$ задачи (22), тогда существует нетривиальное абсолютно непрерывное решение $\psi(t),\ t \in [0,\overline{T}]$ сопряженного дифференциального включения

$$-\dot{\psi} \in \partial_x H(F(t,x_0(t)),\ \psi), \qquad \textit{п.в.}\quad t \in [0,\overline{T}]$$

с условиями трансверсальности

$$\psi(0) \in N(C_0 \cap X, \overline{x}(0)), \qquad -\psi(\overline{T}) \in N(C_1 \cap X, \overline{x}(\overline{T}))$$

для которого выполняется условие максимума

$$H(\overline{F}(t,\overline{x}(t)), \psi(t)) = (\dot{\overline{x}}(t), \psi(t)),\ \textit{п.в.}\ \ t \in [0,\overline{T}].$$

Приводится пример.

В параграфе 7.2 рассматривается экстремальная задача для дифференциальных включений с терминальным функционалом и фазовыми ограничениями

$$\begin{aligned} &\dot{x} \in F(t,x), \quad t \in [0,T], \\ &x(0) \in C_0, \\ &x(t) \in X, \quad t \in [0,T], \\ &\varphi(x(T)) \to \min, \end{aligned} \tag{23}$$

где $F(t,x)$ измеримое по t и липщицевое по x, компактнозначное многозначное отображение, $\varphi -$ локально липщецевая функция. X - некоторое регулярное замкнутое, а C_0- некоторое компактное регулярное подмножество пространства E^n. T фиксирован.

Параллельно рассмотрим вспомогательную задачу без фазового ограничения

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x), \;\; t \in [0,T], \\ x(0) \in \tilde{C}_0 \\ \varphi(x(T)) \to \min . \end{cases} \qquad (24)$$

Здесь $\tilde{C}_0$ -некоторое компактное регулярное подмножество в E^n .

Пусть $\bar{x}(t), \;\; t \in [0,T]$ является решением задачи (23). Определим

$$\bar{F}(t,\bar{x}(t)) = F(t,\bar{x}(t)) \cap T(X,\bar{x}(t)), \quad \text{п.в.} \quad t \in [0,T].$$

Здесь $T(X,\bar{x}(t))$ является касательным конусом в смысле Кларка к X в точке $\bar{x}(t) \in X$, для каждого фиксированного $t \in [0,T]$.

Определение. Если существует начальное компактное подмножество $\tilde{C}_0$ и соответствующее решение $x_0(t), t \in [0,T]$ задачи (24), для которого выполняются включения

$$T(\bar{F}(t,\bar{x}(t)),\dot{\bar{x}}(t)) \subseteq T(F(t,x_0(t)),\dot{x}_0(t)) \quad \text{п.в.} \;\; t \in [0,T],$$

$$T(C_0 \cap X,\bar{x}(0)) \subseteq T(\tilde{C}_0,x_0(0)),$$

и равенство

$$\bar{x}(T) = x_0(T),$$

то $x_0(t), \; t \in [0,T]$ называется подобным к решению $\bar{x}(t), \; t \in [0,T]$ задачи (23).

Сформулируем основную теорему этого пункта.

Теорема 1.2. Пусть существует подобное к $\bar{x}(t), \; t \in [0,T]$ решение $x_0(t), \; t \in [0,T]$ задачи (24). Тогда существует ненулевое абсолютно непрерывное решение $\psi(t), \; t \in [0,T]$ сопряженного дифференциального включения

$$-\dot{\psi} \in \partial_x H(F(t,x_0(t)),\psi)$$

с условиями трансверсальности

$$\psi(0) \in N(C_0 \cap X,\bar{x}(0)), \qquad -\psi(T) \in \partial\varphi(\bar{x}(T))$$

для которого выполняется условие максимума

$$H(\bar{F}(t,\bar{x}(t)),\psi(t)) = (\dot{\bar{x}}(t),\psi(t)) \quad \text{п.в.} \; t \in [0,T].$$

Методика применения теорем

Для применения теорем

1. Нужно найти оптимальное решение исходной задачи с теми же граничными условиями, но без фазового ограничения.
2. Нужно определить, выходит ли на границу фазового ограничения оптимальная траектория этой задачи без фазового ограничения. И возможно ли движение по границе из этой точки выхода, определив граничные участки. Если да, то состыкуя их с внутренними участками, мы рассматриваем подозрительную на оптимальность решению исходной задачи с фазовым ограничением.
3. Исследуем структуру этой траектории, т.е. устроена ли она подобно тому, как устроена некоторая оптимальная траектория вспомогательной задачи без фазового ограничения. Для этого решаем соотношение в виде включения

$$T(\overline{F}(t,\overline{x}(t)),\dot{\overline{x}}(t)) \subseteq T(F(t,x_0(t)),\dot{x}_0(t)), \quad t\in[0,T],$$

с неизвестным $\dot{x}_0(t),\ t\in[0,T]$.

Для конкретной траектории $\overline{x}(t), t\in[0,T]$, отыскать решение $x_0(t),\ t\in[0,T]$, этого включения не представляет особого труда, но для того, чтобы она была подобной к $\overline{x}(t), t\in[0,T]$, нужна доказать ее оптимальность. Имея в виду, что вспомогательная задача является задачей без фазового ограничения и для этих задач достаточные условия оптимальности хорошо развиты, тут особых трудностей не будет. В случае, если решение $x_0(t),\ t\in[0,T]$ оптимальное, то оно будет подобным для $\overline{x}(t), t\in[0,T]$, следовательно, $\overline{x}(t), t\in[0,T]$ становится подозрительным на оптимальность для исходной задачи с фазовым ограничением. Если любая траектория $x_0(t),\ t\in[0,T]$, найденная из этого включения не будет оптимальной, то сделаем вывод, что для $\overline{x}(t), t\in[0,T]$ подобное решение не существует, следовательно, наша теорема неприменима.

Последний случай может случится, например, если $n=2$, управление одномерное и в вспомогательной задаче максимальное число переключений равняется единице, то, в случае, когда $T(U(\bar{x}(t),\bar{u}(t))$ меняет «знак» два раза, тогда включение

$$T(U(\bar{x}(t)),\bar{u}(t)) \subseteq T(U,u_0(t)), \quad \text{п.в. } t \in [0,T],$$

не будет иметь решения, следовательно, подобное решение не существует.

В заключении приведем примеры, иллюстрирующие утверждения теорем диссертации.

Пример 1.

Рассмотрим задачу оптимального управления с фазовым ограничением (случай терминального функционала)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \quad x(0) = (0,1), \ |u| \le 1, \ x_2 \ge 0, \\ x_1(2) \to \min . \end{cases}$$

Решение.

Сначала решим задачу, когда фазовое ограничение $x_2 \ge 0$ не учитывается. Применяя принцип максимума к этой задаче, получим

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}(1-t)^2 + \frac{1}{2}, \quad x_2(t) = 1 - t,$$

которое соответствует управлению $u(t) = -1, \ t \in [0,2]$.

Теперь проверим, возможно ли движение по границе фазового ограничения.

Если $x_2(t) = 0, \ t \in I \subset [0,2]$, то $\dot{x}_2 = 0, \ t \in I \Rightarrow$

Движение по границе происходит с управлением $u(t) = 0, \quad t \in I$.

Ясно, что оптимальная траектория выходя на границу фазового ограничения с нее не сойдет. Таким образом, подозрительная на оптимальность траектория будет соответствовать управлению

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, \ t \in [0,\tau] \\ 0, \ t \in (\tau,2], \end{cases}$$

где $\tau = 1$ - есть момент выхода на границу фазового ограничения.

Для подозрительного на оптимальность управления

$$\overline{u}(t)=\begin{cases}-1, & t\in[0,1]\\ 0, & t\in(1,2].\end{cases}$$

легко найти

$$U(\overline{x}(t))=\begin{cases}[-1,1], & t\in[0,1],\\ [0,1], & t\in(1,2].\end{cases}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу без фазового ограничения

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=u, \qquad (x_1(0),x_2(0))=(-\dfrac{3}{2},2),\ |u|\le 1,\end{cases}$$

$$x_1(2)\to\min.$$

Существует ли подобное к $\overline{x}(t), t\in[0,2]$ решение этой вспомогательной задачи. Чтобы дать ответ на этот вопрос рассмотрим включение вида

$$T(\overline{F}(\overline{x}(t)),\dot{\overline{x}}(t))\subseteq T(F(x_0(t)),\dot{x}_0(t))$$

или

$$T(U(\overline{x}(t)),\overline{u}(t))\subseteq T(U,u_0(t)), \qquad \text{п.в.} \quad \mathrm{t}\in[0,2],$$

или

$$[0,+\infty]\subseteq T([-1,+1],\,u_0(t)), \qquad \text{п.в.} \quad \mathrm{t}\in[0,2],$$

где управление $u_0(t),\ \ t\in[0,2]$ должно принимать значения $+1$ или -1. Эти значения могут чередоваться. Очевидно, что этому включению удовлетворяет единственное управление $u_0(t)=-1$, $t\in[0,2]$, при том оно оптимальное и $x_0(t)=\left(-\dfrac{1}{2}(2-t)^2+\dfrac{1}{2},\ 2-t\right),\quad t\in[0,2]$. Таким образом, мы показали, что существует подобное решение $x_0(t),\ t\in[0,2]$, как решение вспомогательной задачи, следовательно, существует абсолютно непрерывная ненулевая сопряженная функция $\psi(t),\ t\in[0,2]$, как решение сопряженного дифференциального уравнения

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1=0\\ \psi_2=-\psi_1, \quad \psi(2)=(-1,0),\end{cases}$$

для которой выполняется условие максимума

$$H(U(\bar{x}(t)),\psi_2(t)) = (\bar{u}(t),\psi_2(t)),$$

где

$$\begin{cases}\psi_1(t) = -1\\ \psi_2(t) = t-2, \ t \in [0,2].\end{cases}$$

Для наглядности приведем конкретный вид следующих решений:

- решение исходной задачи, не учитывая фазовое ограничение:

$$x(t) = \left(-\frac{1}{2}(1-t)^2 + \frac{1}{2}, \quad (1-t) \right), \ t \in [0,2]$$

- подозрительная на оптимальность, решение

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}(1-t)^2 + \frac{1}{2}, \ 1-t \right), & t \in [0,1], \\ \left(\frac{1}{2}, 0 \right), & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Теперь проведем небольшое сравнение с необходимым условием Дубовицкого-Милютина. Если применить необходимые условия Дубовицкого-Милютина, то условие максимума по Дубовицкому-Милютину даст

$$H(U,\psi_2(t)) = (\bar{u}(t),\psi_2(t)), \qquad t \in [0,2].$$

Для тех моментов $t \in [0,2]$, когда траектория находится на границе фазового ограничения, это условие будет выполняться только с функцией $\psi_2(t) = 0, \ t \in (1,2]$, так как в этом случае $\bar{u}(t) = 0 \in \operatorname{int}[-1,1], \ t \in (1,2]$.

Пример 2.

Рассмотрим задачу быстродействия с фазовым ограничением

$$\dot{x} \in F(x),$$

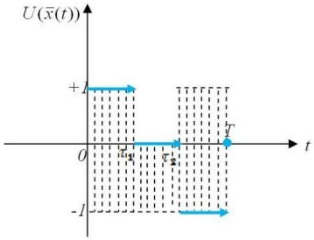
$$x(0) \in C_0, \ x(T) \in C_1, \quad x_2 \le 1{,}2,$$

где

$$x \in E^2, F(x) = Ax + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ U = \{u : |u| \le 1\},$$

$C_0 = \{(x_1, x_2) \in E^2 : \ x_1 = -1, \ |x_2| \le 1\}, \ C_1 = \{(x_1, x_2) \in E^2 : 1 \le x_1 \le 2, \ x_2 = 0\}$
,
$T \to \min$.

Решение.
В случае, когда фазового ограничения нет, движение начинается с управлением $u(t) = +1, \ t \in [0, \tau]$ по параболе $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{2}$ с точки $x(0) = (-1{,}1)$ до точки $x(\tau) = \left(-\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, затем с управлением $u(t) = -1, \ t \in (\tau, T]$, по параболе $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + 1$ до попадания в конечную точку $x(T) = (1{,}0)$. Этим завершается рассмотрение пункта 1, методики применения теорем.
Теперь учитываем фазовое ограничение $x_2 \le 1{,}2$. Рассмотрим управление: $\bar{u}(t) = 1, \ t \in [0, \tau_1]$, до выхода траектории на фазовое ограничение, затем $\bar{u}(t) = 0, \ t \in (\tau_1, \tau_2]$, при движении по границе фазового ограничения, после чего переключение на управление $\bar{u}(t) = -1, \ t \in (\tau_2, \bar{T}]$ до попадания в конечную точку (1,0). Найдены соответствующие моменты переключения: $\tau_1 = 0{,}2, \ \tau_2 = \frac{13}{12}$ и точки выхода $\bar{x}(\tau_1) = \left(-\frac{39}{50}, \ 1{,}2\right)$ и схода $\bar{x}(\tau_2) = (0{,}28, \ 1{,}2)$, соответственно.
Соответствующие графики управлений и траекторий приведены на рисунках 1 и 2.



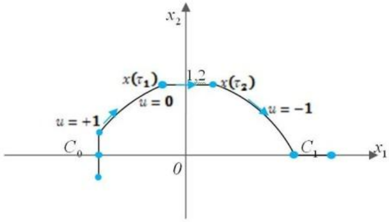


Рис. 1 Рис.2

Для подозрительного на оптимальность управления

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau_1], \\ 0, & t \in (\tau_1, \tau_2], \\ -1, & t \in (\tau_2, \bar{T}], \end{cases}$$

легко найти

$$\bar{F}(\bar{x}(t)) = A\bar{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U(\bar{x}(t)),$$

где

$$U(\bar{x}(t)) = \begin{cases} [-1,1], & t \in (0, \tau_1], \\ [-1,0], & t \in (\tau_1, \tau_2], \\ [-1,1], & t \in (\tau_2, \bar{T}]. \end{cases}$$

Этим завершается рассмотрение пункта 2, методики применения теорем.

Рассмотрим вспомогательную задачу без фазового ограничения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u, \quad x(0) \in \mathcal{C}_0 = C_0, \quad x(T) \in \mathcal{C}_1 \end{cases}$$

$$|u| \le 1$$

$$T \to \min .$$

Существует ли подобное решение $x_0(t),\ t \in [0, \bar{T}]$ этой задачи?

Решая включения

$$(-\infty, 0] \subseteq T([-1,1], u_0(t)) \quad \textit{п.в.} \ \ t \in [0, \tau_2],$$

и

$$[0, \infty) \subseteq T([-1,1], u_0(t)), \quad \textit{п.в.} \ \ t \in (\tau_2, \bar{T}].$$

с неизвестным $u_0(t),\ t\in[0,\overline{T}]$, которое может иметь значения +1 или -1, приходим к выводу, что единственное управление

$$u_0(t)=\begin{cases}+1,\ t\in[0,\tau_2],\\ -1,\ t\in(\tau_2,\overline{T}].\end{cases}$$

будет их решением, притом, оно оптимальное для вспомогательной задачи. Следовательно, соответствующее решение $x_0(t),\ t\in[0,\overline{T}]$ (см. Рис.4) будет подобным к $\overline{x}(t),\ t\in[0,\overline{T}]$ (см. Рис.2). Здесь в качестве подмножества $\mathcal{C}_1$ взято горизонтальный отрезок, длиной единица, левый конец которого есть точка $x_0(\overline{T})$ (см. Рис.4). Легко проверяется, что последние два включения в определении подобного решения тоже выполняются, притом между соответствующими касательными конусами имеет место равенство. Тогда в силу теоремы, существует нетривиальное и абсолютно непрерывное решение

$$\begin{cases}\psi_1(t)=1,\\ \psi_2(t)=\dfrac{13}{12}-t,\end{cases}\qquad t\in\left[0,\ \frac{137}{60}\right],$$

сопряженной системы уравнений

$$\begin{cases}\dot\psi_1=0,\\ \dot\psi_2=-\psi_{1,}\end{cases}$$

для которой выполняется условие максимума (Рис.3)

$$H(U(\overline{x}(t)),\quad \psi_2(t))=(\overline{u}(t),\psi_2(t))\qquad \text{п.в.}\ \ t\in\left[0,\frac{137}{60}\right],$$

и условия трансверсальности. Здесь $\overline{T}=\dfrac{137}{60}$.

Для проверки этих условий надо учесть, что имеют место следующие формулы

$$H(U,\psi)=|\psi_2|,\qquad H(C_0,\psi)=-\psi_1+|\psi_2|,\quad H(C_1,\psi)=\frac{3}{2}\psi_1+\frac{1}{2}|\psi_1|$$

и $H(U(\bar{x}(t)),\psi)=\dfrac{1}{2}|\psi_2|-\dfrac{1}{2}\psi_2,\ t\in(\tau_1,\tau_2]$.

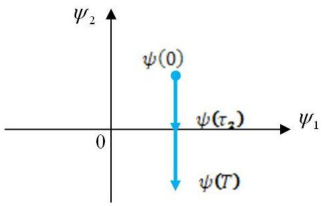


Рис.3

Из вида сопряженной функции ясно, что

$$(\psi_1(0),\psi_2(0))=\left(1,\ \frac{13}{12}\right)\quad \text{и}\quad (\psi_1(\bar{T}),\psi_2(\bar{T}))=\left(1,\ -\frac{6}{5}\right).$$

В силу формул для опорных функций $H(C_0,\psi),H(C_1,\psi)$ выполнение условий трансверсальности проверяется непосредственно.

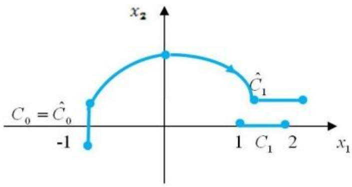


Рис. 4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной диссертации разработан новый подход-Метод подобных решений в исследовании задач оптимального управления с фазовыми ограничениями при получении регулярного принципа максимума Понтрягина. С помощью этого метода осуществляется сведение исследовании таких задач к тесно связанным с ними задачам без фазового ограничения.

При этом

а) сопряженная функция является абсолютно непрерывной.

б) сопряженная функция является нетривиальной на всем отрезке времени, этим и исключается случай вырождения задачи

в) сопряженная система уравнений однородная, хотя в постановке задачи присутствует активное фазовое ограничение.

г) приведены многочисленные примеры задач с фазовыми ограничениями, где полученные необходимые условия удачно применяются. Этим и показывается широта круга применяемости полученных необходимых условий.

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

1. Иманов М.Г. Регулярные решения задач оптимального управления с терминальным функционалом, запаздыванием и фазовыми ограничениями // Труды ИСА РАН, т.53(3), 2010, с.61-68.
2. Иманов М. Г. Метод подобных решений в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями // Докл. НАН Азерб. LXVI 2010. №5, с.10-18.
3. Иманов М. Г. Регулярные решения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями и терминальным критерием качества // Докл. НАН Азерб. LXVI 2010. № 6, с.43-49.
4. Иманов М.Г. Задача быстродействия для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями / Материалы X Республиканской конференции молодых ученых по математике и механике, Баку, Элм, 1991, с.113-114.
5. Иманов М.Г. Новые необходимые условия для дифференциальных включений с терминальным функционалом и неавтономным фазовым ограничением, Известия Педагог. Университета, № 1, 2012, с.3-7.
6. Иманов М.Г. Регулярные оптимальные решения задачи быстродействия для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями, Научные труды. Фундаментальные науки, Баку, 2012, №2, т.11(42), с.49-54.
7. Иманов М.Г. Интегральный принцип максимума для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями / Материалы IX конференции молодых ученых по математике и механике, Баку, Элм, 1989, с.151-153.
8. Иманов М.Г. Метод подобных решений в задачах быстродействия для дифференциальных включений с фазовым ограничением // Известия НАНА, серия физико-технических и математических наук, т.32, №3, 2012, с.137-147.
9. Иманов М.Г. Метод подобных решений в задачах быстродействия с фазовыми ограничениями // Труды ИСА РАН, т.53(2), 2010, с.208-216.

10. Иманов М.Г. Регулярный принцип максимума для дифференциальных включений с терминальным функционалом и фазовыми ограничениями // Научные труды. Фундаментальные науки, Баку, 2012, №1, т.11(41), с.107-114.
11. Иманов М.Г. Некоторые случаи непрерывности сопряженной функции в линейной задаче оптимального управления с фазовым ограничением / Тезисы научной конференции посвященной 70-летию проф. Г.К. Намазова, Баку, 2002, с.67-68.
12. Иманов М.Г. Необходимое условие в линейной задаче быстродействия с фазовым ограничением // В кн. :Современная математика в физико- технических задачах, М:, изд. МФТИ, 1987, с.71-74.
13. Иманов М.Г. Необходимое условие в линейной задаче быстродействия с фазовым ограничением / Материалы VII Республиканской конференции молодых ученых по математике и механике, Баку-Элм, 1987, с.136-140.
14. Иманов М.Г. Новые необходимые условия оптимальности для управляемых систем с фазовыми и концевыми ограничениями // Известия Педагог. Университета, №4, 2011, с.19-31.
15. Иманов М.Г. Об одной задаче оптимального управления с фазовым ограничением / Всесоюзная школа «Оптимальное управление, «Геометрия и анализ», тезисы докладов, 29 сентябрь -9 октябрь, 1988, Кемерово, с.73.
16. Иманов М.Г. Применение метода подобных решений в задачах с терминальным критерием качества и фазовыми ограничениями // Труды ИСА РАН, т.53(3), 2010, с.52-60.
17. Иманов М.Г. Применение метода подобных решений к негладким задачам оптимального управления с терминальным функционалом и фазовыми ограничениями // Известия НАНА, серия физико технических и математических наук, том 31, №6, 2011, стр.56-63.
18. Иманов М.Г. Регулярный принцип максимума Понтрягина для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями // ДАН Азерб., том LXVII, №5, 2011, с.9-18.
19. Иманов М.Г., Марданов М.Дж. Об одной задаче оптимального управления с запаздыванием и фазовым ограничением /

Всесоюзная конференция «Негладкий анализ и его приложения к математической экономике», Тезисы докладов, Баку, Элм, 1991, с.21.

20. Иманов М.Г., Применение метода подобных решений к негладким задачам быстродействия и фазовыми ограничениями // Вестник БГУ, серия физико-математических наук, №4, 2011, с.43-57.
21. Иманов М.Г., К регулярности сопряженных переменных в задачах быстродействия для дифферен-циальных включений с фазовым и концевыми ограничениями // Труды ИСА РАН, том 62, выпуск 3, 2012, с.98-103.
22. Марданов М.Дж., Иманов М.Г. Некоторые свойства сопряженной функции в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями / Всесоюзная конференция «Негладкий анализ и его приложения к математической экономике», Тезисы докладов, Баку, Элм, 1991, с.32.
23. Марданов М.Дж., Иманов М.Г. К регулярности решения задач оптимального управления с запаздыванием и фазовыми ограничениями // ДАН Азерб., том LXVII, №2, 2011, с.20-28.
24. Mardanov M.J., Imanov M.H. Regular solutions of optimal control problems with delay and state constrains / IV Congress of the Turkic World Mathematical Society, 1-3 July, 2011, Baku, Azerbaijan, p.378.
25. Mardanov M.J., Imanov M.H. The method of similar solutions in the time optimal control problems with delay and state constrains // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 2, N2, 2011, pp.166-175.
26. Imanov M.H. Application of the Method of similar solutions in the time optimal control problems with state constrains // Applied and Computational Mathematics an International Journal, vol 10, N3, 2011, pp.463-471.
27. Imanov M.H. On regular maximum principle of Pontryagin / Regional Conference on Mathematics and theoretical physics, Faculty of Science, Tabriz University, 22-25 November, 1992, p.18.

28. Imanov M.H. On regular maximum principle / The 2-nd Turkish-Azerbaijan mathematics symposium, September 8-14, 1992, Baku, p.44.
29. Imanov M.H. On regular solutions of the time optimal control problems with state constraints / 3rd International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, (COIA-2011), Bilkent University, Turkey, 22-24 August, 2011, pp.73-74.
30. Imanov M.H. Regular maximum principle in the time optimal control problems with time-varying state constraint // International Journal of Computer Science Issues, Vol.9, issue 2, No.3, pp.410-415 .
31. Imanov M.H. Application of the regular maximum principle in economics // Herald of the Azerbaijan Engineering Academy, Vol.4, N3, 2012, pp40-45.
32. Imanov M.H. Regular solution of optimal control problems with state constrains / IV Congress of the Turkic World Mathematical Society, 1-3 July, 2011, Baku, Azerbaijan, p.377.
33. Imanov M.H. Regularity analysis fir nonlinear terminal optimal control problems subject to state constraints // International Journal of Applied Mathematics and Statistics, vol 30, No 6, 2012, pp.80-92.
34. Imanov M.H. Regularity Analysis for nonlinear time optimal control problems subject to state constraints // Transactions of NAS of Azerbaijan, 2011, vol.XXXI, N1, pp.61-70.

Murad Həsən oğlu İmanov

Faza məhdudiyyətli optimal idarəetmə məsələlərinin requlyar həllərinin oxşar həllər metodu vasitəsilə tədqiqi

X Ü L A S Ə

Dissertasiya işində ilk dəfə olaraq faza məhdudiyyətli optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqində Pontryaginin requlyar maksimum prinsipinin alınması üçün yeni metod - oxşar həllər metodu verilir. Bu metodun tətbiqi ilə əsas faza məhdudiyyətli məsələlərin tədqiqi bu məsələlərlə sıx bağlı faza məhdudiyyəti olmayan məsələlərin tədqiqinə gətirilir. Təklif olunan yeni metodun vasitəsilə aşağıdakı yeni elmi nəticələr əldə edilir:

a) qoşma funksiya mütləq kəsilməzdir;

b) qoşma funksiya bütün parçada sıfırdan fərqlidir, bununla da çırlaşma halı aradan qalxmış olur;

c) faza məhdudiyyətinin aktiv olmasına baxmayaraq , qoşma tənliklər sistemi bircinsdir;

d) çoxlu sayda faza məhdudiyyətli misallar üzərində alınmış nəticələr müvəffəqiyyətlə tətbiq edilir. Bununla da, alınmış zəruri şərtlərin tətbiq dairəsinin nə qədər geniş olduğu göstərilir.

Murad Hasan İmanov

Investigation of regular solutions of optimal control problems with state constraints by the method of similar solutions

SUMMARY

In this thesis, a new approach - method of similar solutions in the study of optimal control problems with state constraints in obtaining regular Pontryagin maximum principle is given. With this method, the study of such problems is reduced to the closely related problems without state constraints.
By using of this method the following new results are received

a) the conjugate function is absolutely continuous;

b) the conjugate function is non-trivial on the whole time interval, thus the case of degeneracy of the problem is excluded;

c) the conjugate system of differential equations is homogeneous, although in the formulation of the problem there is an active state constraint.

g) numerous examples of such problems with state constraints, where the necessary conditions are applied successfully are given. This demonstrates the wide range of applicability of the received necessary conditions.

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ
TƏTBİQİ RİYAZİYYAT İNSTİTUTU

MURAD HƏSƏN OĞLU İMANOV

FAZA MƏHDUDIYYƏTLI OPTIMAL IDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRININ REQULYAR HƏLLƏRININ OXŞAR HƏLLƏR METODU VASITƏSILƏ TƏDQIQI

1214.01 – dinamik sistemlər və optimal idarəetmə

Riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilən dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

BAKI-2013