НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

МУБАРИЗ ТАПДЫГ оглы КАРАЕВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ И БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

1202.01-Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора наук по математике

Баку – 2013

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

MÜBARİZ TAPDIQ OĞLU QARAYEV

OPERATORLAR NƏZƏRİYYƏSİ VƏ BANAX CƏBRLƏRİNİN BƏZİ MƏSƏLƏLƏRİ

1202.01-Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2013

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “Funksional analiz”** şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Bilal T.Bilalov**
(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu);
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Əli M.Əhmədov**
(Bakı Dövlət Universiteti);
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Anatoliy B.Antoneviç**
(Belarus Dövlət Universiteti).

Aparıcı təşkilat:
Voronej Dövlət Universiteti
«Əməliyyatlar tədqiqinin riyazi üsulları» kafedrası (Rusiya).

Dissertasiyanın müdafiəsi 21 iyun 2013-cü il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 14 mart 2013-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена в отделе **«Функциональный анализ» Института Математики и Механики НАН Азербайджана.**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, проф. **Билал Т.Билалов** (Институт Математики и Механики НАН Азербайджана);
доктор физико-математических наук, проф. **Али М.Ахмедов** (Бакинский Государственный Университет);
доктор физико-математических наук, проф. **Анатолий Б.Антоневич** (Беларусский Государственный Университет).

Ведущая организация:
Воронежский Государственный Университет
кафедра «Математические методы исследований операций» (Россия).

Защита диссертации состоится 21 июня 2013 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 14 марта 2013 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория операторов и теория банаховых алгебр –два важных направления в функциональном анализе, и вообще, в анализе.

Благодаря основополагающим работам И.М.Гельфанда, Г.Е.Шилова, М.А.Наймарка, М.Нагумо, С.Мазура и др., теория банаховых алгебр начала все больше использоваться в решениях и доказательствах известных задач и теорем теории операторов. Для этого достаточно, например, подчеркнуть, что известная спектральная теорема фон Неймана[1] для нормальных операторов в гильбертовом пространстве выводится из теории банаховых алгебр, а именно, из принадлежащего Гельфанду и Наймарку описания коммутативных C^*-алгебр. Вообще говоря, о связи между теорией операторов и банаховых алгебр, в первую очередь следуеть отметить ту же теорему Гельфанда и Наймарка, которая показывает, что каждая абстрактная C^*-алгебра с единицей изометрически $*$-изоморфна к C^*-алгебре операторов в гильбертовом пространстве[2]. При этом важную роль играет понятие представления банаховых алгебр, которое является, как бы «мостом» между абстрактными банаховыми алгебрами и алгебрами операторов, действующих в банаховых (в частности, гильбертовых) пространствах.

Пусть $H = H(\Omega)-$гильбертово пространство комплексно-значных функций на некотором множестве Ω такое, что для каждого $\lambda \in \Omega$ эволюционный функционал $f \to f(\lambda)$ непрерывен. Тогда в силу теоремы М.Рисса, для каждого $\lambda \in \Omega$ существует единственная функция $k_\lambda \in H$ такая, что $f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle$ для всех $f \in H$. Функцию $k_\lambda = k_\lambda(z)$ называют воспроизводящим ядром пространства H.

В 1907 году С.Заремба[3] впервые нашел функции $K(x, y)$ и гильбертово пространство H_k, удовлетворяющее воспроизводящим

---

[1] Рудин У. Функциональный анализ. Изд. «Мир», Москва 1975, 443с.

[2] Arveson W. An invitation to C^*-algebra, Springer-Verlag, 1976, 106p.

[3] Zaremba S.L. L'equation biharmonique et une classe remarquable de functions fundamentals harmoniques. Bull. Int. Acad. De Cracovie, 1907, p.147-196.

свойствам для классов гармонических функций. Затем идея воспроизводящих ядер появилась в диссертациях Г.Сегьё, С.Бергмана и С.Бохнера. В частности, С.Бергман вводил воспроизводящие ядра от одного и нескольких переменных для классов гармонических и аналитических функций, и он назвал их ядерными функциями. Важные результаты были получены именно с использованием этих ядерных функций в теории функции от одного и нескольких комплексных переменных, в теории конформных отображений и т.д. Кроме того, в теории вероятности понятие воспроизводящих ядер было использовано А.Н.Колмогоровым, Е.Парзеном и другими.

Отметим, что общая теория воспроизводящих ядер начиная с 1943 года, разработана Н.Ароншайном и развита Л.Шварцем, а также М.Г.Крейном в несколько другом контексте. Дальнейшее развитие теории получено в работе Ароншайна[4].

Современное состояние теории пространств и ядер, Бергмана отражено в работах Н.Н.Тарханова, Х.Хеденмальма, Б.Коренблюма, К.Жу и В.А.Малышева. Связи между теорией воспроизводящих ядер и описанием инвариантных подпространств операторов, кажется, впервые появилась в работе Х.Шапиро.

Символ Березина $\widetilde{A}$ линейного оператора A, действующего в функциональном гильбертовом пространстве (коротко, ф.г.п.) $H = H(\Omega)$, обладающим воспроизводящим ядром $K(x, y)$, определяется формулой

$$\widetilde{A}(y) := \left\langle A\frac{K(x,y)}{\|K(x,y)\|}, \frac{K(x,y)}{\|K(x,y)\|} \right\rangle, y \in \Omega .$$

Символ Березина впервые был введен Ф.А.Березиным[5]. В действительности, Березин вводил понятия ковариантного и контравариантного символа оператора. С.Бергер и Л.Кобурн впервые фактически использовали контравариантный символ оператора Теплица, то есть символ Березина оператора Теплица.

---

[4] Aronszajn N. Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math. Sc. 1950, p.337-404.

[5] Березин Ф.А. Ковариантные и контравариантные символы операторов. Изв. АН СССР, сер. мат. 1972, т.36, с.1134-1167.

Центральную роль в этой теории играет формула следа для ядерных операторов A, полученная Березиным[6] с помощью символа Березина. Березин вывел из этой формулы классическую асимптотику спектра эллиптического дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в области пространства $\mathbb{C}^n$.

Именно этот результат Березина, видимо, дал толчок к дальнейшей характеризации операторов из классов Шаттена-Неймана в терминах их символов Березина. Например, Э.Нордгрин и П.Розенталь характеризовали компактный оператор, действующий в так-называемом стандартном ф.г.п., в терминах символов Березина его унитарных орбитов.

Символ Березина очень эффективен во многих случаях в том смысле, что он содержит много информаций для оператора. Оказывается, что во многих ф.г.п. оператор A однозначно определяется своим символом Березиным $\widetilde{A}$. Успешно применяется он в исследовании операторов Теплица и Ханкеля. Естественно возникает вопрос: какие еще информации для оператора носит его символ Березина?

Вопрос является тонким и отсутствует общий ответ его. Некоторые положительные результаты содержатся в известной книге К.Жу, а негативные результаты получены в работах Ш.Акслера, П.Розенталья и Э.Нордгрина и П.Розенталья. Поэтому представляет интерес найти новые применения техники символов Березина в теории операторов.

Это направление, начало которому положили работы Ф.А.Березина 70-х годов, переживает сейчас второе рождение. При этом внимание уделяется как вопросам, лежащим на стыке теории операторов и алгебры, так и аналитическим вопросам точного описания свойств операторов Теплица и Ханкеля в терминах их символов. Обсуждаемое направление –бурно развивающаяся область, окончательные очертания которой, вероятно, еще не видны.

Пусть H-гильбертово пространство и $B(H)$-алгебра линейных ограниченных операторов в H. Числовой областью оператора $A \in B(H)$ называют множество

[6] Березин Ф.А. Квантование. Изв. АН СССР, сер. мат. 1974, т.38, с.1116-1175.

$$W(A)=\{\langle Ax,x\rangle : x\in (H)_1\}.$$

Числовой радиус определяется равенством

$$w(A):=\sup\{|\lambda| : \lambda\in W(A)\}.$$

Важность изучения числовой области операторов объясняется тем, что $\sigma(A)\subset\overline{W(A)}$ ($\sigma(A)$-спектр оператора A) и

$$\frac{1}{dist(\lambda,\sigma(A))}\le\left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|\le\frac{1}{dist(\lambda,W(A))}$$

для всех $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\overline{W(A)}$ (П.Халмош, Д.Густавсон, К.Рао и др.). Числовая область является важным для изучения операторов. В частности, геометрические свойства $W(A)$ часто дают необходимую информацию об алгебраических и аналитических свойствах оператора A.

Например, известно, что $W(A)=\{\mu\}$ тогда и только тогда, когда $A=\mu I$; $W(A)\subset\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $A=A^*$; $W(A)$ имеет внутреннюю точку тогда и только тогда, когда существует $a,b\in\mathbb{C}$ с $a\neq 0$ такие, что $aA+bI$ является самосопряженным. Кроме того, если A-нормален, то $\overline{W(A)}=conv\sigma(A)$, где $convS$ обозначает выпуклую оболочку множества S. Следовательно, $\overline{W(A)}$ полностью определяется по спектру $\sigma(A)$ нормального оператора A (П.Халмош, Ч.-К.Ли, J.-T. Пун и др.).

Известно также, что для любого $A\in B(H)$

$$\frac{1}{2}\|A\|\le w(A)\le\|A\|$$

(П.Халмош, Д.Густавсон, К.Рао и др.).

Для конкретных операторов представляет особый интерес явное описание числовой области и получение для их числового радиуса более тонких оценок, чем вышеприведенных. Так, например, И.М.Юсубов доказал, что числовая область оператора левого сдвига L, действующего в n-мерном унитарном пространстве по формуле

$$L(x_1,x_2,...,x_n)=(x_2,x_3,...,x_n,0),$$

является замкнутым кругом с центром в начале координат и с радиусом, равным $\cos\frac{\pi}{n+1}$. У.Хаагеруп и Д.Харп получили для числового радиуса произвольного нильпотентного оператора $N \in B(H)$ изящную оценку

$$w(N) \le \|N\| \cos\frac{\pi}{n+1},$$

где $n \ge 2$ -порядок нильпотентности оператора N (т.е. $N^n = O,\ N^{n-1} \ne 0$). Однако, в общем случае до сих пор явна не описана числовая область $W(N)$ оператора N. Поэтому, изучение числовой области и числового радиуса операторов из классов C_0 и C_{00} Секефальви-Надя и Фояша безусловно представляет интерес. Напоминаем, что оператор T принадлежит классу C_0, если существует функция $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ (банахова алгебра всех ограниченных аналитических функций в единичном круге $\mathbb{D}$) такая, что $\varphi(T) = 0$, и что $T \in C_{00}$, если $s - \lim_n T^n = s - \lim_n T^{*n} = 0$.

Пусть X -сепарабельное банахово пространство и $A \in B(X)$. Напомним, что подпространство $E \subset X$ называется циклическим подпространством для оператора A, если $span\{A^n E : n \ge 0\} = X$, где $span\{...\}$ -замкнутая линейная оболочка множества $\{...\}$ в пространстве X. В частности, вектор $x \in X$ называется циклическим для A, если $span\{A^n x : n \ge 0\} = X$. Кратность спектра оператора A определяется по формуле

$$\mu(A) = \inf\{\dim E : span\{A^n E : n \ge 0\} = X\}.$$

Подпространство $E \subset X$ называется инвариантным относительно оператора A, если $AE \subset E$, т.е., если $Ax \in E$ для всех $x \in E$. Одна из фундаментальных проблем теории операторов состоит из исследования этих трех взаимосвязанных понятий. Эти проблемы имеют достаточно широкую область применения. Например, если $X = C[0,1]$ и $A = M_x$, где $M_x f(x) = xf(x)$ - оператор умножения в $C[0,1]$, то классическая аппроксимационная теорема Вейерштрасса означает просто, что 1 является циклическим вектором для оператора M_x (Н.К.Никольский, Г.Раджави, П.Розенталь, Б.Секефальви-Надь, Ч.Фояша и др.).

Отметим также, что понятие циклическое подпространство важно в связи с общей проблемой существования нетривиального инвариантного подпространства оператора, потому, что оператор $A \in B(X)$ не имеет нетривиальное инвариантное подпространство в том и только в том случае, если каждый ненулевой вектор $x \in X$ является циклическим вектором оператора A.

Пусть $A \in B(X)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$-некоторое число. Если $AY = \lambda YA$ для некоторого ненулевого оператора $Y \in B(X)$, то λ называется обобщенным собственным значением оператора A и Y называется обобщенным собственным вектором оператора A (М.М.Маламуд, И.Бисвас, А.Ламберт, С.Петрович и др.). Эти два понятия приобрели популярность после знаменитой теоремы В.И.Ломоносова о существования нетривиального гиперинвариантного подпространства для компактного оператора. В дальнейшем С.Браун и Х.Ким, Р.Мур и К.Пирси обобщили теоремы Ломоносова показав, что если оператор $A \in B(X)$ имеет ненулевой компактный обобщенный собственный вектор, то A имеет нетривиальное гиперинвариантное подпространство. Поэтому представляет интерес задача об описании обобщенных собственных векторов конкретных классов операторов.

Обычная свертка $*$ и так-называемое произведение Дюамеля $\otimes$ для двух подходящих функций $f(x)$ и $g(x)$, определяются по формулам

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$
.
$$(f \otimes g)(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

Хорошо известно, что сверточная банахова алгебра является радикальной алгеброй (И.М.Гельфанд, Д.Ф.Райков, Г.Е.Шилов, С.Риккарт и др.). Однако, банахова алгебра функций с умножением произведения Дюамеля $\otimes$ (будем называть ее алгеброй Дюамеля) не является радикальной, и она мала изучена; нам известны лишь работы Н.Уигли, где впервые начато изучение такой алгебры, а также работы

К.Меррифилда и С.Ватсона и Дж.Стюарта. Поэтому представляет естественный интерес задача об описании замкнутых идеалов алгебры Дюамеля $(\mathcal{A},\otimes)$, а также найти новые области для применений алгебры Дюамеля, и вообще, произведений Дюамеля.

Пусть H-гильбертово пространство. Дж.Дедденс определил для каждого обратимого оператора A из $B(H)$ следующую алгебру:

$$B_A=\left\{X\in B(H):\sup_{n\geq 0}\left\|A^n XA^{-n}\right\|=C_X<+\infty\right\}.$$

Им доказано, что если $A\geq 0$, то алгебра B_A совпадает с гнездовой алгеброй (термин гнездовая алгебра принадлежит У.Арвезону), порожденной гнездой $\{E_A([0,\lambda]):\lambda\geq 0\}$, где E_A --спектральная мера оператора A, которое дает удобную характеризацию гнездовых алгебр. Далее, И.Тодоров распространил результат Дедденса к слабо или сильно замкнутым бимодулям гнездовой алгебры. Дж.Дедденс и Т.Вонг доказали, что если $A=\lambda I+N$, где $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ комплексное число и N-нильпотентный оператор, то алгебра B_A совпадает с коммутантом $\{A\}'$ оператора A. Доказательство этого утверждения существенно опирается на гильбертовость пространства H. Поэтому представляет интерес задача об обобщении результата Дедденса и Вонга для любой унитальной банаховой алгебры, в частности, для банаховой алгебры $B(X)$ операторов в банаховом пространстве X.

В силу вышеизложенных, актуальной представляется дальнейшее изучение воспроизводящих ядер и символов Березина, задачи связанные с ними, а также их применений в теории операторов. А также актуальными представляются задачи изучения числовой области и числового радиуса операторов, не являющихся нильпотентными, в частности, операторов из класса C_{00}, и алгебр Дюамеля и Дедденса и их применений.

Цель работы. Диссертация посвящена, в основном, изучению следующих вопросов:

- исследовать некоторые задачи, связанные с воспроизводящим ядром и символом Березина, в частности, исследовать граничные поведения символов Березина операторов и использовать ее для характеризации операторов из класса Шаттена фон Неймана, обобщить теоремы единственности для символов Березина и функции расстояния Никольского для более общих ф.г.п.;

- применить технику воспроизводящих ядер и символов Березина в исследовании инвариантных подпространств и обратимости операторов, а также изучить некоторые специальные вопросы из теории суммирования с привлечением техники символов Березина;
- изучить числовую область и числовой радиус некоторых операторов из классов C_0 и C_{00}, а также исследовать множество Березина и число Березина некоторых операторов, особенно модельных операторов $\varphi(M_\theta)$;
- применить технику банаховых алгебр в описании циклических векторов некоторых вольтерровых операторов, в описании замкнутых идеалов алгебр Дюамеля, в исследовании кратности спектра прямых сумм операторов и представлений банаховых алгебр, а также в описании обобщенных собственных векторов оператора интегрирования;
- изучить некоторые специальные свойства элементов абстрактных, а также операторных банаховых алгебр, исследовать алгебры Дедденса и подпространства Шульмана, и изучить их некоторые свойства, описать коммутанта операторов в терминах алгебры Дедденса и подпространства Шульмана, а также исследовать некоторые задачи для операторов, допускающих $\wp$-унитарных дилатаций и приводящие подпространства некоторых операторов Теплица.

Научная новизна.

1. Изучено граничное поведение символов Березина операторов, действующих в пространствах Бергмана и Харди, и отрицательна решена одна задача Н.Зорбоски. Доказаны теоремы единственности для символов Березина и функции расстояния. Частично решена задача Р.Янга о воспроизводящих ядер подмодулей модуля Харди $H^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$.Дана характеризация некоторых операторов, включая функции от модельных операторов, из класса Шаттена-фон Неймана в терминах символов Березина. А также дается контрпример к одному вопросу С.Бергера и Л.Кобурна о компактном операторе, действующий в стандартном ф.г.п.
2. С применением метода символов Березина даются альтернативные доказательства классических теорем Абеля для

последовательностей и рядов комплексных чисел. Вводится понятие (e)- сходимости для последовательностей и рядов, дается критерий для (e)- сходимости и доказывается регулярность этой сходимости. С применением техники символов Березина доказаны теоремы типа Берлинга-Арвезона для инвариантных подпространств в более общих ф.г.п. А также исследуется обратимость операторов в ф.г.п. с привлечением техники символов Березина и базисов Рисса.

3. Полностью описана числовая область произвольного компактного нильпотентного оператора A в гильбертовом пространстве с порядком нильпотентностью равным 2, доказав, что она является замкнутым кругом с центром в начале координат и с радиусом равным $\frac{\|A\|}{2}$. Также рассматривается множество Березина и число Березина модельных операторов и дается некоторая локализация числовой области оператора в терминах множеств Березина.

4. С применением метода произведений Дюамеля описаны циклические векторы и инвариантные подпространства некоторых сверточных операторов, включая обычный оператор интегрирования и оператора двойного интегрирования. В частности, решена одна старая задача из теории инвариантных подпространств в пространстве Фреше, а именно, доказана одноклеточность оператора интегрирования в пространстве бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$. Описаны обобщенные собственные векторы оператора интегрирования, действующего в пространстве $L^p[0,1]$. С использованием техники банаховых алгебр вычислены кратности спектра прямых сумм некоторых операторов и представлений банаховых алгебр. Введено понятие алгебра Дюамеля и изучены ее некоторые свойства.

5. Изучаются некоторые свойства элементов абстрактных и операторных банаховых алгебр. Вводятся понятия алгебры Дедденса и подпространство Шульмана, и изучаются их некоторые свойства и взаимосвязи. В частности, описывается коммутант оператора в терминах алгебры Дедденса и подпространства Шульмана. Алгебра Дедденса используется также в исследовании обобщенных собственных векторов операторов.

6. Дается обобщение и сравнительно простое доказательство некоторых теорем для операторов из класса $C_{\wp}$. Изучаются некоторые вопросы, связанные с так-называемым классом квазидиагональных операторов по Халмошу. Обобщается один результат Дедденса и Вонга для нильпотентного оператора в гильбертовом пространстве на любую банахову алгебру с единицей. Исследуются приводящие подпространства оператора Теплица в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$.

Метод исследования. Используется ряд глубоких фактов функционального анализа, теории операторов, теории банаховых алгебр, теории суммирования, теории пространств Харди и теории сверхточных алгебр.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах теории операторов и теории банаховых алгебр, теории функциональных гильбертовых пространств, а также при исследовании различных задач в пространствах Харди и Бергмана.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на общеинститутском семинаре ИММ НАНА, на семинаре кафедры «Теория функций и функциональный анализ» БГУ (рук. проф. А.М.Ахмедов), на семинаре отдела «Функциональный анализ» ИММ НАНА (рук. проф. Н.Ш.Искендеров), а также на Республиканских конференциях (1989, 1994, 1995, 1998), 28-й Иранской ежегодной конференции по математике (1997, Тебриз), 30-й Иранской международной конференции по математике (1999, Ердебил), 1-ом всемирном турецком математическом симпозиуме (1999, Елази), международной конференции по числовой области и числовом радиусе (2006, Бремен), международной конференции по комплексному анализу и теории потенциала (2006, Гебзе), международной математической конференции (2008, Стамбул), международной конференции по анализу и его применениям (2008, Алигарх), 7-м международном конгрессе по анализу и его приложениям (2009, Лондон), международной конференции по анализу и применениям (2010, Мусгат), международной конференции по теории операторов и ее приложениям (2010, Берлин), в Стамбульском Университете им. Сабанчы (рук. Проф. А.Айтуна), в Анкаринском Университете (рук. проф. Ч.Орхан), в Льйонском

Университете (рук. проф. И.Чалендарь), на различных международных и республиканских научных конференциях, проведенных в Баку.

Публикация. Основные результаты диссертации опубликованы в 46 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав и списка литературы, содержащего 198 наименований. Объем работы 252 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится краткий обзор результатов, связанные с темой диссертации, обосновывается актуальность темы и излагаются основные результаты.

Глава I посвящена решениям некоторых задач для воспроизводящих ядер и символов Березина.

В 1.1 даны основные определения, обозначения и предварительные сведения.

В 1.2 изучается граничное поведение символов Березина. Дается контрпример к следующему вопросу Н.Зорбоски[7]: существуют ли радиальные пределы почти всюду на единичной окружности символа Березина произвольного линейного ограниченного оператора, действующего в пространстве Бергмана $L_a^2(\mathbb{D})$?

Основным результатом этого параграфа является следующий контрпример.

Пример 1.2.3. Пусть $a_n = n^{-ic}$, где $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и пусть $b_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_j,\ n \geq 0$ (мы положим $a_0 := 0$). Пусть $D_{\{b_n\}}$ - диагональный оператор относительно стандартного ортонормированного базиса $e_n(z) = \left\{\sqrt{n+1}z^n\right\}_{n\geq 0}$ пространство Бергмана $L_a^2(\mathbb{D})$. Тогда символ Березина $\widetilde{D}_{\{b_n\}}$ оператора $D_{\{b_n\}}$ не имеет радиальные граничные значения нигде в единичной окружности $\mathbb{T}$.

[7] Zorboska N. Proc. Amer. Mth.Soc. 2003, v.131, p.793-800.

В 1.3 доказаны некоторые теоремы единственности для символов Березина и функции расстояния $\theta_E(\lambda)$, определенный Н.К.Никольским[8] по формуле

$$\theta_E(\lambda) = \sup\{|f(\lambda)| : f \in E, \|f\| = 1\}, \ \lambda \in \Omega,$$

где $E \subset H$ замкнутое подпространство H.

Основными результатами этого параграфа являются следующие, которые обобщают известные результаты Н.К.Никольского, Э.Фриджина и Р.Янга.

Лемма 1.3.2. Пусть $H = H(\Omega)$ -гильбертово пространство, элементы которого являются функциями на некотором множестве Ω. Если H обладает свойствами (i_1) и (i_2), то соответствие $A \leftrightarrow \widetilde{A}$ является взаимно однозначным.

Теорема 1.3.4. Пусть $H = H(\Omega)$ -гильбертово пространство, элементы которого являются функциями на некотором множестве Ω, которое удовлетворяет условиям (i_1) и (i_2). Пусть E_1 и E_2 являются замкнутыми подпространствами пространства H. Тогда имеют место следующие утверждения:

(а) если $\theta_{E_1}(\lambda) = \theta_{E_2}(\lambda) \quad (\forall \lambda \in \Omega)$, то $E_1 = E_2$;

(б) если $k_{E_1,\lambda}(\lambda) = k_{E_2,\lambda}(\lambda) \quad (\forall \lambda \in \Omega)$, где $k_{E_i,\lambda}$ есть воспроизводящее ядро подпространства $E_i (i = 1,2,)$, то $E_1 = E_2$.

В 1.4 частично решается одна задача Р.Янга[9], которая состоит в следующем: если E_1, E_2-два подмодуля модуля $H^2(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ с воспроизводящими ядрами $k_{E_1,\lambda}(z)$ и $k_{E_2,\lambda}(z)$, соответственно, то вытекает ли из неравенства $k_{E_1,\lambda}(\lambda) \le k_{E_2,\lambda}(\lambda) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{D} \times \mathbb{D})$ включение $E_1 \subset E_2$?

Для функций $f \in H^2(\mathbb{D}^n)$ будем обозначать через $[f]$ наименьшее инвариантное подпространство операторного пучка $M_z := (M_{z_1}, ..., M_{z_n})$, действующего в $H^2(\mathbb{D}^n)$.

Основной результат этого параграфа -следующая теорема.

---

[8] Никольский Н.К. Ann.Inst.Fourier, Grenoble, 1995, v.45, p.143-159.
[9] Yang R. Int.Equat.Oper.Theory, 2004, v.48,p.411-423.

Теорема 1.4.1. Пусть E_1, E_2-два подмодули модуля $H^2(\mathbb{D}^n)$ с воспроизводящими ядрами $k_{E_1,\lambda}(z)$, $k_{E_2,\lambda}(z)$, соответственно, такие, что $E_1 = [f_0]$ для некоторого $f_0 \in E_1$ с $\|f_0\| \le 1$ (т.е. E_1-циклический подмодуль) и $k_{E_1,\lambda}(\lambda) \le k_{E_2,\lambda}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{D}^n$. Тогда $E_1 \subset E_2$.

Для $n = 2$, теорема 1.4.1 дает частичный ответ на вопрос Р.Янга.

В 1.5 дается контрпример к одному вопросу С.Бергера и Л.Кобурна. Напоминаем, что в стандартных функциональных гильбертовых пространствах $H(\Omega)$ компактность оператора A влечет равенство $\lim\limits_{\lambda \to \xi \in \partial\Omega} \widetilde{A}(\lambda) = 0$. С.Бергер и Л.Кобурн[10] поставили вопрос о справедливости обращения последнего утверждения в пространствах Харди и Бергмана. Здесь мы приведем пример в пространстве Бергмана $L_a^2(\mathbb{D})$, отрицательно отвечающий на вопрос С.Бергера и Л.Кобурна.

Пример 1.5.1. Рассмотрим оператор одностороннего взвешенного сдвига $T_\Lambda, T_\Lambda e_n(z) = \lambda_n e_{n+1}(z),\ n \ge 0,$ с весовой последовательностью

$$\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\ge 0} = \left\{(-1)^n \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right\}_{n\ge 0},$$

в пространстве Бергмана $L_a^2(\mathbb{D})$; здесь $e_n(z) = \sqrt{n+1}\, z^n$,, $|z| < 1,\ n \ge 0$-ортонормированный базис в пространстве Бергмана $L_a^2(\mathbb{D})$. Тогда символ Березина $\widetilde{T}_\Lambda(\lambda)$ оператора T_Λ обращается в нуль на границе $\partial\mathbb{D}$ круга $\mathbb{D}$, но T_Λ не является компактным оператором в пространстве $L_a^2(\mathbb{D})$.

В 1.6 характеризуются операторные идеалы Шатена-фон Неймана в терминах символов Березина.

Настоящий параграф мотивирован вопросами Э.Нордгрина и П.Розенталя[11].

---

[10] Berger C, Coburn L.A. Proc.NAS USA, 1986, v.83, p.3072-3073.
[11] Nordgren E., Rosenthal P. Oper.theory: Adv.Appl. 1994, v.73, p.362-368.

Для каждой функции $\varphi \in H^{\infty}$ оператор $\varphi(M_{\theta})$ определяется по формуле $\varphi(M_{\theta})f = P_{\theta}\varphi f, f \in K_{\theta}$.

Основными результатами этого параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 1.6.1 Пусть θ-внутренняя функция и $\varphi \in H^{\infty}$-непостоянная функция. Положим

$$h_{\theta,\phi}(z) := \frac{\phi(z) - (1 - |\theta(z)|^2)\left(\phi(M_{\theta})\right)^{\sim}(z)}{\theta(z)}.$$

Тогда верны следующие утверждения:

1) $\varphi(M_{\theta}) \in \sigma_{\infty}$ тогда только тогда, когда $h_{\theta,\phi} \in H^{\infty} + \left(C(T)\right)^{\sim}$;

2) $\varphi(M_{\theta}) \in \sigma_{p}$ $(0 < p < +\infty)$ тогда и только тогда, когда $h_{\theta,\phi} \in H^{\infty} + \left(B_{p}^{1/p}\right)^{\sim}$.

Теорема 1.6.4. Пусть $K = K(\Omega)$-стандартное ф.г.п. над некотором множестве Ω, $A : K \to K$-линейный ограниченный оператор и $H \subset K$-замкнутое A-инвариантное подпространство (т.е. $AH \subset H$). Тогда оператор $A \mid H$ является компактным оператором в том и только в том случае, если

$$\lim_{\lambda \to \partial\Omega} \tilde{P}_{U^{-1}H}(\lambda)\left(U^{-1}AU\right)^{\sim}(\lambda) = 0$$

для всех унитарных операторов $U : K \to K$.

Глава II диссертации посвящена применениям техники воспроизводящих ядер и символов Березина в различных вопросах анализа и теории операторов, включая теорию суммирования, инвариантные подпространства и задачи обратимости операторов.

В 2.1 с применением техники символов Березина мы даем функционально аналитические доказательства классических теорем Абеля в теории суммирования.

В 2.2 мы даем одно обобщение метода Абеля для сходимости последовательностей и рядов комплексных чисел, которое мы назовем (e)-сходимостью. В терминах символов Березина, мы даем критерий для (e)-сходимостей и докажем регулярность метода (e)-сходимости для последовательностей.

Определение 2.2.1. Пусть $H = H(\Omega)$ -функциональное гильбертово пространство над некотором множестве Ω с непустой границей $\partial\Omega$ с воспроизводящим ядром

$$k_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z),$$

где $e := \{e_n(z)\}_{n\geq 0}$ -ортонормированный базис пространства H. Пусть $\{a_n\}_{n\geq 0}$ -произвольная последовательность комплексных чисел.

(1) Мы будем говорить, что $\{a_n\}_{n\geq 0}$ является (e)-сходящим к a, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |e_n(\lambda)|^2$ сходится для всех $\lambda \in \Omega$ и

$$\lim_{\lambda\to\partial\Omega} \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} |e_n(\lambda)|^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n |e_n(\lambda)|^2 = a$$

существует.

(2) Мы говорим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (e)-сходится к a, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |e_n(\lambda)|^2$ сходится для всех $\lambda \in \Omega$ и

$$\lim_{\lambda\to\partial\Omega} \sum_{n=0}^{\infty} a_n |e_n(\lambda)|^2 = a$$

существует.

Теорема 2.2.2. (i) Если $\{a_n\}_{n\geq 0}$ -ограниченная последовательность комплексных чисел, то $\{a_n\}$ (e)-сходится к L, тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\lambda\to\partial\Omega} \widetilde{D}_{\{a_k\}}(\lambda) = L$$

существует.

(ii) Если $\{a_n\}_{n\geq 0}$ -ограниченная последовательность комплексных чисел, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ является (e)-сходящимся к L, тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\lambda\to\partial\Omega}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|e_n(\lambda)\right|^2\right)\widetilde{D}_{\{a_k\}}(\lambda)=L$$

существует.
(iii) Если H является стандартным функциональным гильбертовым пространством, то метод (e)-сходимости для последовательностей является регулярным.

В 2.3 мы используем понятия воспроизводящих ядер, символа Березина и функции расстояния Никольского, для описания инвариантных подпространств операторов в некоторых ф.г.п.. В частности, даются описания инвариантных подпространств некоторых классов теплицевых операторов в H^2. Одним из основных результатов этого параграфа является следующее.

Следствие 2.3.4. а) Если θ-внутренняя функция и $E\subset H^2$ является замкнутым подпространством, то $T_\theta E\subset E$ тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{P}_E(\lambda)=\frac{1-|\lambda|^2}{1-|\theta(\lambda)|^2}\sum_{i=1}^{\dim E_\theta}|\eta_i(\lambda)|^2 \quad (\forall\lambda\in\mathbb{D})$$

для некоторого ортонормированного базиса $\{\eta_i\}_{i\geq 1}$ подпространства $E_\theta := E\Theta\theta E$.

б) Если $\theta(z)\equiv z^n$, то $z^nE\subset E$ тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{P}_E(\lambda)=\frac{1-|\lambda|^2}{1-|\lambda|^{2n}}\sum_{i=1}^{n}|\eta_i(\lambda)|^2 \quad (\forall\lambda\in\mathbb{D}).$$

Если $E\subset H^2$ является z^n-инвариантным подпространством с конечной коразмерности, тогда соответствующие функции $\eta_i (i=1,2,...,n)$ в последней формуле являются конечными произведениями Бляшке.

В 2.4 мы даем другое доказательство теоремы Берлинга об описании z-инвариантных подпространств[12] в пространстве Харди

[12] Beurling A. Acta math. 1949, v.81, p.239-253.

H^2, основанное на техники воспроизводящих ядер и операторов Теплица.

В 2.5 доказывается теорема типа Берлинга-Арвезона для общих ф.г.п..

Заметим, что известное описание А.Берлинга об инвариантных подпространств $E \subset H^2$ оператора сдвига S эквивалентно к равенству $\widetilde{P}_E(\lambda) = |\theta(\lambda)|^2$ для некоторой внутренней функцией θ и для всех $\lambda \in \mathbb{D}$. С другой стороны, У.Арвезон[13] изучал важное пространство H_d^2 (названное впоследствии пространством Арвезона) аналитических функций в единичном шаре B_d пространства $\mathbb{C}^d$ с воспроизводящим ядром $k_\lambda(z) = \left(1 - \overline{\lambda}_1 z_1 - \overline{\lambda}_2 z_2 - \ldots - \overline{\lambda}_d z_d\right)^{-1}$. Он доказал, что для каждого подмодуля $E \subset H_d^2$ существует последовательность мультипликаторов $\{\varphi_i\}$ из H_d^2 такая, что $P_E = \sum_{i \ge 1} M_{\varphi_i} M_{\varphi_i}^*$ в сильной операторной топологии, и следовательно, $\widetilde{P}_E(\lambda) = \sum_{i \ge 1} |\varphi_i(\lambda)|^2$. Если E содержит ненулевого полинома, Арвезон[14] доказал, что последовательность $\{\varphi_i\}$ является «внутренней», в том смысле, что для почти всех $\xi \in \partial B_d$ относительно нормированной естественной меры σ в ∂Bd $\sum_{i \ge 1} |\varphi_i(\lambda)|^2 \to 1$ при некасательном приближении λ к точке ξ, или эквивалентно, $\widetilde{P}_E(\lambda) \to 1$ при $\lambda \to \xi$ некасательно. Общий случай был доказан У.Грином, С.Рихтером и К.Сандбергом.

В этом параграфе мы изучаем аналогичные вопросы для общих ф.г.п. Основной результат - следующий.

Теорема 2.5.1. Пусть $H = H(\mathbb{D})$-сепарабельное ф.г.п. комплекснозначных функций над единичном круге $\mathbb{D}$ с воспроизводящим ядром $k_{H,\lambda}$ такое, что $H^\infty(\mathbb{D}) \subset Mult(H)$.

---

[13] Arvezon W. Acta math. 1998, v.181, p.159-228.
[14] Arvezon W. Reine Angew. Math. 2000, v.522, p.173-236.

Предположим, что оператор сдвига S является изометрией в H. Если $E \subset H$ замкнутое подпространство такое, что $SE \subset E$, тогда существуют функции $\Phi_i \in E\theta SE$ такие, что

$$\|\Phi_i\|_H = 1,\ i = 1, 2, ..., \dim(E\theta SE)$$

и

$$\widetilde{P}_E(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{\dim(E\theta SE)} |\Phi_i(\lambda)|^2 \right) \frac{1}{\left(1 - |\lambda|^2\right) \|k_{H,\lambda}\|_H^2}, \lambda \in \mathbb{D}.$$

Следствие 2.5.2. Пусть $H = H(\Omega)$-стандартное ф.г.п., удовлетворяющее условиям теоремы 2.5.1. Тогда для каждого S-инвариантного подпространства E с конечной коразмерности мы имеем

$$\lim_{\lambda \to \partial\Omega} \frac{1}{\left(1 - |\lambda|^2\right) \|k_{H,\lambda}\|_H^2} \sum_{i=1}^{\dim(E\theta SE)} |\Phi_i(\lambda)|^2 = 1.$$

Учитывая, что модуль Харди $H^2(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ и пространство Арвезона $H^2 := H^2(\mathbb{C}^d)$ являются стандартными ф.г.п., следующее следствие улучшает результаты Р.Янга и У.Арвезона.

Следствие 2.5.4. (а) Если замкнутый подмодуль $E \subset H^2(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ имеет конечную коразмерность, то $\lim\limits_{\lambda \to \partial(\mathrm{D}^2)} \tilde{P}_E(\lambda) = 1$.

(б) Пусть E замкнутый подмодуль пространства Арвезона H^2, который имеет конечную коразмерность. Тогда каждая последовательность мультипликаторов $\Phi_1, \Phi_2, ...,$ удовлетворяющая $\sum\limits_n M_{\Phi_n} M_{\Phi_n}^* = P_E$, является внутренней, т.е. $\lim\limits_{\lambda \to \xi} \sum\limits_n |\Phi_n(\lambda)|^2 = 1$ для всех $\xi \in \partial\mathbb{B}_d$.

В 2.6 исследуется обратимость операторов в ф.г.п. с привлечением техники символов Березина и базисов Рисса.

Основным результатом этого параграфа является следующее.

Теорема 2.6.4. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \ge 1}$-Карлесонова последовательность различных точек из $\mathbb{D}$, B-соответствующее произведение Бляшке, $X := \{k_{\lambda_n} : n \ge 1\}$-соответствующий базис Рисса в модельном пространстве $K_B = H^2 \theta B H^2$, и пусть $r(X) = \|U\| \|U^{-1}\|$– соответствующий констант Рисса для семейства X. Пусть $A \in B(H^2)$ такой оператор, что $A^* K_B \subset K_B$, и обозначим $M_A = P_B A | K_B$, где P_B-ортогональный проектор из H^2 на K_B. Предположим, что

1) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| A \hat{k}_{\lambda_n} - \widetilde{A}(\lambda_n) \hat{k}_{\lambda_n} \right\|^2 \right)^{1/2} := \tau_A^{\Lambda} < +\infty$

и

2) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| A^* \hat{k}_{\lambda_n} - \widetilde{A}^*(\lambda_n) \hat{k}_{\lambda_n} \right\|^2 \right)^{1/2} := \tau_{A^*}^{\Lambda} < +\infty$,

где $\widetilde{A}$ обозначает символ Березина оператора A. Если

$$\inf_{z \in \mathrm{D}} \left| \widetilde{A}(z) \right| := \delta > \delta_0 := r(X) \|U\| \max\left\{ \tau_A^{\Lambda}, \tau_{A^*}^{\Lambda} \right\},$$

тогда оператор M_A является обратимым в K_B и

$$\left\| M_A^{-1} \right\| \le \left(\frac{\delta}{r(X)} - \|U\| \tau_A^{\Lambda} \right)^{-1}.$$

Глава III посвящена, в основном, изучению числовой области и числового радиуса некоторых операторов из классов C_0 и C_{00}. Также рассматривается множество Березина и число Березина некоторых операторов, особенно модельных операторов $\varphi(M_\theta)$. Дается некоторая локализация числовой области оператора в терминах множеств Березина.

Основным результатом 3.1. является следующая теорема, которая описывает числовую область произвольного квадратичного нильпотентного оператора в H.

Теорема 3.1.7. Пусть H-комплексное гильбертово пространство и $T \in B(H)$-ненулевой оператор такой, что $T^2 = 0$. Тогда числовая область $W(T)$ оператора T есть диск (открытый или замкнутый) с центром в 0 и с радиусом $\frac{\|T\|}{2}$.

Следствие 3.1.8. Если $T \in B(H)$ является ненулевым компактным оператором такой, что $T^2 = 0$, тогда $W(T)$ является замкнутым диском с центром в 0 и с радиусом $\frac{\|T\|}{2}$.

Пример 3.1.9. Пусть $(V_0 f)(x) = \int\limits_{-x}^{x} f(t)dt$ -кососимметрический вольтерров оператор в пространстве $L^2(-1,1)$. Тогда его числовая область $W(V_0)$ является замкнутым диском с центром в 0 и с радиусом $\frac{2}{\pi}$, т.е. $W(V_0) = \overline{\mathbb{D}}_{2/\pi}$.

В 3.2 доказывается неравенство типа У.Хаагерупа и Д.Харпа для некоторых сжатий из класса C_{00}.

Пусть $x \in H^2(E)$ и $x = x_i x_e$ -ее внутренне–внешняя факторизация, где x_e является скалярной функцией. Основной результат этого параграфа следующая теорема.

Теорема 3.2.2. Пусть θ-двусторонняя внутренняя функция, $K_\theta = H^2(E) \ominus \theta H^2(E)$ (E-некоторое вспомогательное гильбертово пространство) –модельное пространство и $M_\theta = P_\theta S_E | K_\theta$ соответствующий модельный оператор. Предположим, что существует $x \in (K_\theta)_1 \bigcap H^\infty(E)$ и целое число $n \geq 1$ такие, что:

(а) $S^{*n} x_e \in H^\infty(\mathbb{D})$, где S-односторонний сдвиг в $H^2 = H^2(\mathbb{D})$, $Sf = zf$;

(б) $\langle M_\theta^k x, x \rangle = 0$ для всех $k \geq n$;

(в) $|\langle M_\theta x, x \rangle| = w(M_\theta)$.

Тогда $w(M_\theta) \leq \cos \frac{\pi}{n+1}$.

Следующий результат дает лучшую оценку, чем в теореме Хаагерупа-Харпа[15].

Следствие 3.2.5. Предположим, что $T \in B(H)$ удовлетворяет условиям: $\|T\| \le 1, T^3 = 0$ и существует $x \in (H)_1$ такой, что $\langle T^2 x, x\rangle = 0$ и $|\langle T x, x\rangle| = w(T)$. Тогда $w(T) \le \frac{1}{2}$.

В 3.3 оценивается числовой радиус некоторых сжатий из более общих классов. Например, доказана следующая теорема.

Теорема 3.3.3. Пусть $T \in B(H)$-сжатие такое, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in (H)_1$ такой, что $\|T^n x_\varepsilon\| < \varepsilon$ для некоторого $n \ge 2$ и $w(T) \le |\langle Tx_\varepsilon, x_\varepsilon\rangle| + \varepsilon$. Тогда $w(T) \le \cos\frac{\pi}{n+1}$.

В 3.4 вводятся понятия множество Березина и число Березина операторов, действующих в ф.г.п. $H = H(\Omega)$, которые определяются формулами $Ber(A) = Range(\widetilde{A})$ и $ber(A) = \sup\left\{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right| : \lambda \in \Omega\right\}$, и для конкретных операторов даются их явные описания. В частности, доказывается, что $ber(V) \approx 0{,}49084$ для оператора интегрирования $Vf = \int_0^z f(t)dt$ в $H^2(\mathbb{D})$.

Один из основных результатов этого параграфа локализует замыкание числовой области оператора $A \in B(H)$ в терминах множеств Березина операторов, ассоциированных с A.

Следующее предложение оценивает число Березина функции от модельного оператора $\varphi(M_\theta)$.

Предложение 3.4.9. Пусть $\varphi \in H^\infty$ и $\theta \in (\Sigma) -$ непостоянная функция. Тогда

$$dist(\varphi, \theta H^\infty) \ge ber(\varphi(M_\theta)) \ge dist(\varphi, \theta h^\infty).$$

[15] Haagerup U., Harpe P. Proc. Amer. Math. Soc. 1992, v.115, p.371-379.

Как уже отмечено, $\frac{\|A\|}{2} \le w(A)$ для любого $A \in B(H)$. Так как $ber(A) \le w(A)$, естественно спросить: когда выполняется неравенство $\frac{\|A\|}{2} \le ber(A)$?

Здесь решается этот вопрос в случае, $A = \varphi(M_\theta)$. А именно, следующая теорема является основным результатом этого параграфа.

Теорема 3.4.11. Пусть θ-непостоянная внутренняя функция такая, что $\sigma(\theta) \bigcap \mathbb{T} \ne \varnothing$. Пусть $E \subset \mathbb{T}$-некоторое множество такое, что $mesE > 0$ и $\sigma(\theta) \bigcap \mathbb{T} \subset E$. Тогда $\frac{\|\varphi(M_\theta)\|}{2} \le ber(\varphi(M_\theta))$ для всех $\varphi \in H_E^{\infty,d}$.

Здесь $H_E^{\infty,d}$ обозначает множество $\{f \in H^\infty : |f(\xi)| = \|f\|_\infty$ на множестве $E \subset \mathbb{T}$ с $mesE > 0\}$.

В главе IV рассматриваются произведения Дюамеля и изучаются их применения к некоторым вопросам теории операторов. Напоминаем, что произведение Дюамеля двух подходящих функций f и g определяется с формулой[16]:

$$(f \circledast g)(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

4.1 решает одну старую задачу из теории инвариантных подпространств в пространстве Фреше, а именно, мы докажем одноклеточность оператора интегрирования $Jf(x) = \int_0^x f(t)dt$ в пространстве $C^\infty = C^\infty[0,1]$ бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$.

В 1966 году Микусински[17] доказал одноклеточность оператора J в подпространстве

[16] Wigley N. Duke Math.J. 1974, v.14, p.211-217.
[17] Mikusinski J. Stud. Math. 1966, v.28, p.1-8.

$$C_0^{\infty} := \left\{ f \in C^{\infty} : f^{(k)}(0) = 0, k = 0,1,2,... \right\}$$

пространства C^{∞}. Однако, вопрос о том, является ли одноклеточным оператор интегрирования J во всем пространстве C^{∞}, кажется, оставался открытым[18]. Здесь мы распространим результат Микусинского на все пространство C^{∞}, и таким образом, даем полное решение последнего вопроса.

В 4.2 рассматривается аналог произведения Дюамеля для функций от двух переменных:

$$(f \otimes g)(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^x \int_0^y f(x-t, y-\tau) g(t,\tau) d\tau dt ,$$

где $f, g \in C^{(n)}([0,1]\times[0,1])$, $n \geq 2$. С применением такой свертки мы даем описание циклических векторов сужения оператора двойного интегрирования

$$(Wf)(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(t,\tau) d\tau dt$$

на $W-$инвариантное подпространство $E_{xy} \subset C^{(n)}([0,1]\times[0,1])$, которое состоит из функций, зависящих от произведения аргументов xy. Обозначим $W_{xy} = W\big|E_{xy}$, т.е., $\left(W_{xy} f\right)(xy) = \int_0^x \int_0^y f(t\tau) d\tau dt$.

Теорема 4.2.1. Пусть $f \in E_{xy}$. Тогда $f \in Cyc(W_{xy})$ (т.е., f является циклическим вектором для W_{xy}) в том и только в том случае, если $f(0) \neq 0$.

Отметим, что теорема 4.2.1. фактически описывает циклические векторы оператора

$$(K_{\ln x} f)(x) = \int_0^x \ln\frac{x}{y} f(y) dy$$

в пространстве $C^{(n)}[0,1]$.

[18] Никольский Н.К. Итоги науки и техники. Матеем. Анализ, 12, Изд. ВИНИТИ, 1974, с.199-412.

Пусть $C_A^{(n)}(\mathbb{D}), n \geq 1$,-алгебра всех n раз непрерывно дифференцируемых функций на $\overline{\mathbb{D}}$, голоморфных в $\mathbb{D}$.

В 4.3 докажем, что $C_A^{(n)}(\mathbb{D})$-банахова алгебра относительно произведения Дюамеля, и опишем пространство ее максимальных идеалов.

В 4.4 вводится понятие алгебры Дюамеля, и изучаются ее некоторые свойства. Напоминаем, что любую банаховую алгебру функций с умножением произведения Дюамеля $\circledast$ мы будем называть алгеброй Дюамеля.

Уигли[19] доказал, что пространства Харди $H^p = H^p(\mathbb{D}), 1 \leq p \leq \infty$, являются банаховыми алгебрами относительно произведения Дюамеля $\circledast$, т.е. являются алгебрами Дюамеля.

Мы рассмотрим следующий общий вопрос: при выполнении каких условий данное банахово пространство X аналитических функций в единичном круге $\mathbb{D}$ будет алгеброй Дюамеля?

Здесь мы решаем этот вопрос, показав, что при выполнении некоторых естественных условий каждое банахово пространство аналитических функций в единичном круге $\mathbb{D}$ является алгеброй Дюамеля, и опишем ее замкнутые идеалы. Наш результат, в частности, обобщает и улучшает результата Уигли.

Следующая теорема является основным результатом этого параграфа.

Теорема 4.4.2. Пусть X-банахово пространство аналитических функций в единичном круге $\mathbb{D}$, в котором непрерывно действуют оператор интегрирования J и оператор сдвига S. Предположим также, что выполняются следующие условия:

(а) $\{z^n\}_{n\geq 0}$-полная равномерно минимальная система в X;

(б) если $f \in X$ и $\dfrac{f(z)}{z^n} \in Hol(\mathbb{D})$, тогда $\dfrac{f(z)}{z^n} \in X$, $\forall n \geq 1$;

(в) $\left\|z^{n+m-i}\right\|_X \leq C_i \left\|z^n\right\|_X \left\|z^m\right\|_X$ для всех $m, n \geq i$ $(i \geq 0)$ и некоторого $C_i > 0$.

---

[19] Wigley N. Canad.Math.Bull. 1975, v.18, p.597-603.

Тогда X является алгеброй Дюамеля и каждый нетривиальный замкнутый идеал E алгебры $(X, \otimes)$ имеет вид

$$E = X_n := \left\{ f \in X : f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0 \right\}$$

для некоторого $n \geq 1$.

В 4.5 мы применим метод произведения Дюамеля для вычисления кратности спектра прямых сумм операторов вида $J \oplus A$ и $T \oplus A$, где $J -$ оператор интегрирования и $T -$ оператор взвешенного сдвига. Например, доказана следующая теорема.

Теорема 4.5.2. Пусть $J, Jf(z) = \int_0^z f(t)dt$ -оператор интегрирования в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$, и пусть $A \in B(X)$ -оператор такой, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n! \left\| A^n x \right\| \right)^2 = C_x < +\infty$$

для любого $x \in X$ (X -сепарабельное банахово пространство). Тогда $\mu(J \oplus A) = 1 + \mu(A)$.

В 4.6 мы докажем формулу сложения для кратности спектра прямых сумм представлений банаховых алгебр.

Теорема 4.6.1. Пусть A-унитальная коммутативная банахова алгебра, удовлетворяющая условию Лина, и пусть $L -$ ее регулярное представление. Тогда $\mu(L \oplus \tau) = 1 + \mu(\tau)$ для любого представления τ алгебры A.

Для доказательства теоремы 4.6.1 доказывается следующая основная лемма, которая представляет и независимый интерес.

Лемма 4.6.2. Пусть $\pi : A \to B(X_1)$ и $\tau : A \to B(X_2)$ -два представления алгебры A (необязательно коммутативной), и пусть $\{\xi_1 \oplus \eta_1, ..., \xi_n \oplus \eta_n\}$ является циклическим множеством представления $W\xi_1 = \eta_1$. Если существует сплетающий оператор $W \in B(X_1, X_2)$ (т.е., $W\pi(b) = \tau(b)W$ для каждого $b \in A$) такой, что $W\xi_1 = \eta_1$, то $\mu(\tau) < n$.

В 4.7 описываются обобщенные собственные значения и обобщенные собственные векторы вольтерров оператора интегрирования $Vf(x)=\int_0^x f(t)dt$ в пространстве $L^p[0,1],\ 1\le p<\infty$.

Пусть E-банахово пространство, $A\in B(E)$ и $\lambda\in\mathbb{C}$. Следуя А.Бисваса, А.Ламберта и Ж.Петровича[20], мы говорим, что λ является обобщенным собственным значением (коротко, о.с.з.) для оператора A, если существует ненулевой оператор $X\in B(E)$ такой, что $AX=\lambda XA$; такой оператор X называется обобщенным собственным вектором (коротко-о.с.в.), соответствующий λ.

Основной результат этого параграфа дает полное описание множества обобщенных собственных векторов оператора V в $L^p[0,1],\ 1\le p<\infty$, который усиливает основной результат работы Бисваса, Ламберта и Петровича, а также дает альтернативное доказательство результата М.Маламуда[21]. Он состоит в следующем.

Теорема 4.7.2. Пусть $\lambda\in(0,\infty)$, и пусть $X\in B\left(L^p[0,1]\right)$ является ненулевым оператором. Тогда:

(i) если $\lambda\le 1$, то $XV=\lambda VX$ тогда и только тогда, когда существует функция $\varphi\in L^p[0,1]$ такая, что $X=D_\varphi C_\lambda$, то есть

$$(Xf)(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x \varphi(x-t)f(\lambda t)dt,\qquad f\in L^p[0,1];$$

(ii) если $\lambda>1$, то $XV=\lambda VX$ тогда и только тогда, когда существует функция $\varphi\in L^p[0,1]$ такая, что $XC_{1/\lambda}=D_\varphi$.

Здесь C_λ обозначает оператор композиции, $C_\lambda f(x)=f(\lambda x)$, и D_f обозначает оператор Дюамеля, определенного в пространстве $L^p[0,1]$, как обычно, по формуле

$$D_f g(x)=(f\otimes g)(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

---

[20] Biswas A., Lambert A., Petrovic S. Glasgow Math. J. 2002, v.44, p.512-534.
[21] Маламуд М.М. Труды Моск. матем. общества, 1994, т.55, с.73-78.

В 4.8 мы опишем нециклические векторы для произвольного антианалитического оператора Теплица $T_{\overline{\varphi}}$, $\left(\varphi \in H^{\infty}\right)$, $T_{\overline{\varphi}} f = P_{+}\overline{\varphi} f$, в пространстве Харди H^2 в терминах коммутанта оператора $T_{\overline{\varphi}}$. С применением берлингского описания $T_{\overline{z}}$-инвариантных подпространств нетрудно доказать, что $f \in H^2$ является нециклическим вектором для оператора обратного сдвига $S^* = T_{\overline{z}}$ в том и только в том случае, если $T_{\overline{\theta}} f = 0$ для некоторой внутренней функции θ.

Наша цель в настоящем параграфе –показать, что аналог этого критерия для оператора S^*, имеет место и для произвольного антианалитического оператора Теплица $T_{\overline{\varphi}}$. Это частично решает задачу Никольского, поставленной в его книге, где в частности, требовалось описать все циклические векторы операторов Теплица $T_{\overline{\varphi}}, \varphi \in H^{\infty}$.

Основной результат этого параграфа –следующая теорема.

Теорема 4.8.1. Пусть $\varphi \in H^{\infty}$-непостоянная функция, и пусть $T_{\overline{\varphi}}$-антианалитический оператор Теплица, действующий в пространстве Харди H^2, и пусть $f \in H^2$. Тогда f является нециклическим вектором для оператора $T_{\overline{\varphi}}$ в том и только в том случае, если существует ненулевой оператор A из коммутанта $\left\{T_{\overline{\varphi}}\right\}'$ оператора $T_{\overline{\varphi}}$ такой, что $Af = 0$.

Следствие 4.8.2. Пусть $f \in H^2$. Тогда $f \in Cyc(T_{\overline{\varphi}})$ тогда и только тогда, когда $Af \neq 0$ для каждого ненулевого оператора A из коммутанта $\left\{T_{\overline{\varphi}}\right\}'$ оператора $T_{\overline{\varphi}}$.

Глава V диссертации посвящена изучению некоторых свойств элементов абстрактных, а также операторных банаховых алгебр. Мы введем понятия алгебры Дедденса и подпространства Шульмана, и изучаем их свойства и взаимосвязи.

В 5.1 обобщается один результат Дж.Дедденса и Т.Вонга для нильпотентного оператора в гильбертовом пространстве на любую банахову алгебру с единицей.

Пусть $B-$ банахова алгебра с единицей e. Для каждого обратимого элемента $a \in B$ положим

$$B_a := \left\{ x \in B : \sup_{n \geq 0} \left\| a^n x a^{-n} \right\| = C_x < +\infty \right\},$$

и будем называть ее алгеброй Дедденса.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 5.1.2. Пусть B -банахова алгебра с единицей e. Если $a = e + b$, где b является нильпотентным элементом алгебры B, тогда алгебра Дедденса B_a совпадает с коммутантом $\{a\}'$, т.е. $B_a = \{a\}' = \{b\}'$.

В 5.2 мы вводим понятие подпространства Шульмана и изучаем некоторые вопросы для таких подпространств. Для любых двух операторов $L, M \in B(H)$ мы рассмотрим следующее подпространство пространства $B(H)$:

$$U(L, M) := \{L\}' + \{L\}' M .$$

Такие подпространства подробно изучены В.С.Шульманом[22] для оператора интегрирования $V, (Vf)(x) = \int_0^x f(t)dt$, и оператора умножения на независимое переменное $T, (Tf)(x = xf(x)$, в пространстве $L_2[0,1]$ связи с задачами нетранзитивности корневых алгебр. Мы назовем подпространства $U(L, M)$ подпространством Шульмана. Связь между алгеброй Дедденса и подпространством Шульмана устанавливается в следующей теореме, которое является основным результатом этого параграфа (ниже число $\lambda \in \mathbb{C}$ считается таким, что оператор $L_\lambda = \lambda I + L$ является обратимым).

[22] Shulman V.S. Banch Center Public. 1994, v.30, p.313-325.

Теорема 5.2.1. Пусть операторы $L, M \in B(H)$ удовлетворяют условию Клейнеке-Широкова, т.е. $X = [M, L] \in \{L\}'$. Тогда пересечение алгебры Дедденса $B_{\lambda I+L}$ и слабое замыкание подпространства Шульмана $U(L, M)$ совпадает с коммутантом оператора L, т.е.

$$B_{\lambda I+L} \cap \overline{U(L,M)}^{w} = \{L\}'.$$

Следующая теорема, с использованием понятий алгебры Дедденса и подпространства Шульмана, дает общую процедуру для построения обратимого оператора без нетривиальных обобщенных собственных значений в единичной окружности $\mathbb{T}$.

Теорема 5.2.4. Пусть $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$, и пусть $A \in B(H)$-обратимый оператор, удовлетворяющий условию Клейнеке-Широкова для некоторого оператора $M \in B(H)$. Предположим, что $B_{A^{-1}} \subset \overline{U(A,M)}^{w}$. Если $\lambda XA = AX$, то $X = 0$.

В 5.3 собраны некоторые результаты для квадратичных элементов банаховых алгебр.

Пусть A-комплексная банахова алгебра с единицей e.Для каждого необратимого квазирегулярного по фон Нейману элемента a определим $q_a := a(e - ab)$ и $p_a := ab$, где $b \in A$ и $a = aba$. Ясно, что $q_a^2 = 0$ и $p_a^2 = p_a$.

Мы приведем следующий результат для элементов q_a и $p_a^{\perp} = e - p_a$.

Предложение 5.3.5. Пусть $A -$банахова алгебра с единицей e. Предположим, что $x, y, a \in A$ являются такими, что a квазирегулярен (в смысле фон Неймана) и $xa - ya = q_a x$. Если $\sigma(x) = \{0\}$ (т.е. если x-квазинильпотентен), то $\sigma\left(p_a^{\perp} x\right) = \{0\}$.

Пусть V-изометрия в гильбертовом пространстве H. Определим следующие числа:

$\alpha_X = dist\left(\left[N_V, X\right], \{V\}'\right)$, $\beta = dist\left(N_V, \{V\}'\right)$, $\gamma = dist\left(V^*, \{V\}'\right)$, где $\{V\}'$ – коммутант оператора $V, \left[N_V, X\right] = N_V X - X N_V$, $X \in \{V\}'_1$ (единичная сфера коммутанта $\{V\}'$). Каждое из этих чисел количественно характеризует «степень неунитарности» оператора V, поэтому представляет интерес сравнение этих чисел.

Предложение 5.3.15. Если V -неунитарная изометрия в H, то верны оценки:

$$\frac{1}{2}\sup\left\{\alpha_X : X \in \{V\}''_1\right\} \le \beta \le \gamma ,$$

где $\{V\}''_1$ -единичная сфера бикоммутанта $\{V\}'' = \left\{\{V\}'\right\}'$.

В 5.4 мы изучаем некоторые свойства операторов из класса $C_\wp$ и их обобщений.

Пусть H -гильбертово пространство. Говорят, что $T \in B(H)$ принадлежит классу $C_\wp$ $(\wp > 0)$, если существует гильбертово пространство $K \supset H$ и унитарный оператор $U \in B(K)$ такой, что

$$T^n = \wp P_H U^n \big| H \quad (n = 1, 2, ...),$$

где P_H -ортогональный проектор из K в H. U называется унитарной $\wp$ - дилатацией оператора T.

В этом параграфе, используя другие характеристики классов $C_\wp$, мы дадим существенное обобщение и сравнительно простые доказательства некоторых известных результатов Фуруты и Стамфли.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема, (ниже $|a|$ обозначаем спектральный радиус элемента a)

Теорема 5.4.8. Пусть $a \in \mathcal{A}$ и выполняются следующие условия:

1) $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$;

2) $a^2 + \lambda a + \mu e = 0$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

3) $\|R_t(a)\| \le \dfrac{1}{t-|a|}$ для некоторого $t > |a|$.

Тогда $\|a\| = |a|$.

В 5.5 используя, в частности, технику оператора условного ожидания теории вероятности, исследуем приводящие подпространства оператора Теплица

$$T_\varphi, T_\varphi f = P_+ \varphi f,\ f \in H^2\ \left(\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})\right).$$

Этот результат существенно усиливает теоремы Э.Нордгрина[23] о существования нетривиальных приводящих подпространств для аналитического оператора Теплица вида $T_{\varphi\circ\theta}\left(\phi \in H^\infty\right)$, где θ - внутренняя функция.

Теорема 5.5.1. Оператор Теплица $T_{\varphi\circ\theta}$, где $\varphi \in L^\infty$, имеет нетривиальное приводящее подпространство.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Караев М.Т. О доказательстве единственности решения системы интегральных уравнений. Матер. XI респ. конф. молод. учен. Баку, 1994, с.3-7.
2. Караев М.Т. Использование произведения Дюамеля в описании инвариант-ных подпространств. Труды ИММ АН Азерб, 1995, с.137-146.
3. Караев М.Т., Мустафаев Г.С. О некоторых свойствах операторов из класса $C_\wp$. Изв. АН Азерб. сер. физ.-тех. матем. наук, №1-3, 1995, с.45-49.
4. Караев М.Т. О числовых характеристик некоторых операторов, ассоциированных с изометриями. Спектральная теория операторов и ее прилож. 1997, т.11, с.90-98.

[23] Nordgren E. Duke Math. J. 1967, v.34, p.175-181.

5. Karaev M.T. About some properties of Deddens algebras. Abstracts 28-th Annual Iranian Mathematics Conference, 28-31 march 1997, Tabriz University.
6. Караев М.Т. Одна теорема о сложении кратностей спектра. Труды ИММ НАНА, 1998, т.8, с. 123-128.
7. Karaev M.T. Expectation operators, reducing subspaces and cyclic sets. Transections AS Azerb., 1999, v.19, p.81-85.
8. Karaev M.T. On some numerical values of operators. 30-th Iranian intern. conf. on math. August 1-4, 1999, Mohaghegh Ardabili Univ. Ardabil, Iran
9. Karaev M.T. On some problems of Berezin symbols of bounded linear operators. I st Turkish world math. symposium, Abstracts, 29 June -2 July 1999, Elazig, Turkey p. 76
10. Караев М.Т. О символе Березина. Зап. науч. семин. РОМИ, 2000, т.270, с.80-89.
11. Караев М.Т., Мустафаев Г.С. Разложение элемента $\sin a$ по экспонентам для эрмитовых элементов a. Зап. науч. семин. ПОМИ, 2000, т.281, с.139-144.
12. Караев М.Т. Символы Березина и классы Шатена-Неймана. Матем. заметки, 2002, т.72, с.207-215.
13. Караев М.Т. Некоторые применения произведения Дюамеля. Зап. науч. семин. ПОМИ, 2003, т.303, с.145-160.
14. Karaev M.T., Mustafayev H.S. On some properties of Deddens algebras. Rocky Mountain J. Math. 2003, v.33, p.915-926.
15. Караев М.Т. Новые доказательства неравенства Хаагерупа-Харпа. Матем. заметки, 2004, т.75, с.787-788.
16. Karaev M.T. Closed ideals in C^{∞} with the Duhamel product as multiplication. J. Math. Anal. Appl. 2004, v.300, p.297-302.
17. Karaev M.T. Functional analysis proofs of Abel's theorems. Proc. Amer. Math. Soc. 2004, v.132, p.2327-2329.
18. Karaev M.T. The numerical range of a nilpotent operator on a Hilbert space. Proc. Amer. Math. Soc. 2004, v.132, p.2321-2326.
19. Karaev M.T. Pehlivan S., Some results for quadratic elements of a Banach algebra. Glasgow Math. J. 2004, v.46, p.431-441.
20. Karaev M.T., Tuna H. Description of maximal ideal space of some Banach algebra with multiplication as Duhamel product, Complex Variables: Theory and Appl. 2004, v.49, p.449-457.

21. Karaev M.T., Pehlivan S. Some results related with statistical convergence and Berezin symbols. J. Math. Anal. Appl. 2004, v.299, p.333-340.
22. Karaev M.T. Remarks on some theorems on convolution, Real Analysis Exchange, 2004/2005, v.30, p.877-882.
23. Karaev M.T. On some problems related to Berezin symbols, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Ser.I, 2005, v.340, p.715-718.
24. Karaev M.T., Saltan S. Some results on Berezin symbols, Complex Variables: Theory and Appl. 2005, v.50, p.185-193.
25. Karaev M.T., Saltan S. A Banach algebra structure for the Wiener algebra $W(\mathbb{D})$ of the disc, Complex Variables: Theory and Appl. 2005, v.50, p.299-305.
26. Karaev M.T. Invariant subspaces, cyclic vectors, commutant and extended eigenvectors of some convolution operators, Methods of Functional Analysis and Topology. 2005, v.11, p.48-59.
27. Караев М.Т. О некоторых применениях обыкновенного и обобщенного произведений Дюамеля. Сибирский мат. журн. 2005, т.46, с.553-566.
28. Karaev M.T. Berezin symbol and invertibility of operators on the functional Hilbert spaces. J. Funct. Anal. 2006, v.238, p.181-192.
29. Karaev M.T. On extended eigenvalues and extended eigenvectors of some operator classes. Proc. Amer. Math. Soc. 2006, v.134, p.2383-2392.
30. Karaev M.T. On the spectral multiplicity of a direct sum of operators. Colloq. Math. 2006, v.104, p.105-112.
31. Karaev M.T. New proof of Nagnibida's theorem. J. Funct. Spaces Appl. 2006, v.4, p.85-90.
32. Karaev M.T., Tuna H. On some applications of Duhamel product. Linear and Multilinear Algebra. 2006, v.54, p.301-311.
33. Karaev M.T. On estimate of numerical radius on some contractions. Укр.мат. журн. 2006, т.58, с.1335-1339.
34. Karaev M.T. On invertibility of operators on the model space. Inter. Conf. on complex analysis and potential theory Abstracts Gebze Inst. of Technology. September 8-14 2006, p.8.
35. Karaev M.T. Berezin set and Berezin number of operators and their applications. The 8 th Workshop on Numerical ranges and numerial radii, WONRA 06, Univ. of Bremen, July 15-17, 2006, p.14.
36. Karaev M.T. On the proof of Beurling's theorem on z-invariant subspaces. Expositiones Math. 2007, v.25, p.1265-267.

37. Караев М.Т. Применение теории бахановых алгебр к формуле сложения спектральных кратностей семейств операторов. Функц. анализ и его прилож. 2007, т.41, с.93-95.
38. Karaev M.T. On the Riccati equations. Monatshefte für Math. 2008, v.155, p.161-166.
39. Karaev M.T. On a Beurling-Arveson type theorem for some functional Hilbert spaces and related questions. Integ. Equat. Oper. Theory. 2008, v.62, p.77-84.
40. Karaev M.T. On the boundary behavior of Berezin symbols. Mathematics Workshop Days. (Summability, sequence spaces and applic.) Istambul Commerce Univ. May 15-16 2008, p.37
41.Karaev M.T., M.Gurdal. Some results for the weighted shift operators on the Banach spaces. Intern. Conf. on analysis and applic. (ICAA -08) Aligarh Muslum Univ., India, November 3-5, 2008, p.13.
42.Karaev M.T. On the Duhamel algebras. 7-th Intern. ISAAC congress, Imperial College, London, 12-18 July 2009, p.58 .
43. Karaev M.T. On the numerical radius of some C_{00} contractions. Linear Algebra Appl. 2009, v.421, p.818-822.
44. Karaev M.T. Banach algebra techniques for spectral multiplicity. Arch. Math. 2009, v.93, p.417-152.
45. Karaev M.T., N.Sh.Iskenderov. Numerical range and numerical radius for some operators, Linear Algebra and Applications, 2010, v.432, p.3149-3158.
46. Karaev M.T. (e)-convergence and related problem, C.R. Acad. Sci. Paris, Sr. I, 348(2010), 1059-1062.

MÜBARİZ TAPDIQ oğlu QARAYEV

OPERATORLAR NƏZƏRİYYƏSİ VƏ BANAX CƏBRLƏRİNİN BƏZİ MƏSƏLƏLƏRİ

X U L A S Ə

Dissertasiya işi törədici nüvə, Berezin simvolu və Dühamel hasillərinin operatorlar nəzəriyyəsinin və Banax cəbrlərinin müxtəlif məsələlərinin tətbiqlərinə həsr olunub. İşdə aşağıdakı yeni nəticələr alınıb:

1. Berqman fəzasında təsir edən operatorların Berezin simvolunun sərhəddəki davranışı öyrənilmiş və Zorboskanın bir sualına mənfi cavab verilmişdir. $H^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$ Xardi modulunun alt modulunun törədici nüvəsi barədə Yanqın məsələsi bir xüsusi halda həll edilmişdir. Model operatorların Şatten-fon Neyman sinfinə daxil olması üçün Berezin simvolu terminində kriteriya verilmişdir. Standart funksional Hilbert fəzasında təsir edən kontrmisal verilmişdir.

2. Berezin simvolları metodunun yığılma nəzəriyyəsinin bəzi məsələlərinə tətbiqləri verilmişdir. Həmçinin, bu metodun tətbiqi ilə Berlinq-Arvezon tipli teorem isbat edilmiş və eyni zamanda operatorların tərsə malik olmaları məsələsi öyrənilmişdir.

3. İlk dəfə nilpotentlik dərəcəsi 2 olan kompakt nilpotent A operatorunun ədədi bölgəsinin mərkəzi sıfır nöqtəsində və radiusu $\frac{\|A\|}{2}$ olan qapalı dairə olduğu isbat edilmişdir.

4. Dühamel cəbri anlayışı verilmiş və Dühamel cəbri və Dühamel hasilləri metodu tətbiq edilərək operatorlar nəzəriyyəsinin bəzi məsələləri, xüsusi olaraq, operatorların invariant alt fəzaları, dövrlü vektorları, spektral qatları və ümumiləşdirilmiş məxsusi vektorları öyrənilmişdir.

5. Abstrakt və operator Banax cəbrlərinin elementlərinin bəzi xassələri öyrənilmişdir. Deddens cəbri və Şulman alt fəzaları anlayışları verilmiş, onların bəzi xassələri və tətbiqləri öyrənilmişdir.

6. $C_{\wp}$ sinfindən olan operatorlar və Xalmoşa görə kvazidiaqonal operatorların bəzi xassələri öyrənilmiş, nilpotent operatorlar üçün Deddens və Vonqun bir nəticəsinin vahid elementinə malik ixtiyari banax cəbrlərinə ümumiləşməsi verilmişdir.

MUBARIZ TAPDIG oglu KARAEV

SOME QUESTIONS OF OPERATOR THEORY AND BANACH ALGEBRAS

SUMMARY

The dissertation work is devoted to applications of reproducing kernel, Berezin symbol and Duhamel products in the various problems of operator theory and Banach algebras. In this study the following new results are obtained:

1. Boundary behavior of Berezin symbol of the Bergman space operators is studied and a question of Zorboska is negatively answered. A problem of Yang about reproducing kernel of submodule of the Hardy module $H^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$ is partially solved. For model operators, a criterion for membershipness in the Schatten-fon Neumann classes is obtained. A counter-example to the question of Berger and Coburn about compact operators on the standart functional Hilbert space is given.
2. The applications of the Berezin symbols method in some problems of summability theory are given. Also, by application of this method, the Beurling-Arveson type theorem is proved and moreover, invertibility problem of operators is studied.
3. It is proved that the numerical range of any compact square zero operator A is the closed disk with center at 0 and the radius equal to $\frac{\|A\|}{2}$.
4. The concept of Duhamel algebra is introduced and with applications of Duhamel algebras and Duhamel products techniques some problems of operator theory, in particular, invariant subspaces, cyclic vectors, spectral multiplicities and extended eigenvectors of operators are investigated.
5. Some properties of the elements of abstract and operator Banach algebras are studied. The notions of Deddens algebra and Shulman subspace are introduced and some of their properties and applications are studied.
6. Some properties of $C_{\wp}$ class operators and quasidiagonal operators are studied and a result due to Deddnes and Wong for the nilpotent operators is extended to the arbitrary unital Banach algebras.

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

MÜBARİZ TAPDIQ oğlu QARAYEV

OPERATORLAR NƏZƏRİYYƏSİ VƏ BANAX CƏBRLƏRİNİN BƏZİ MƏSƏLƏLƏRİ

01.01.01 – Riyazi analiz

riyaziyyat üzrə elmləri doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2012

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

МУБАРИЗ ТАПДЫГ оглы КАРАЕВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ И БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

01.01.01 – Математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой
степени доктора наук по математике

Баку – 2012