МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

АЗИЗОВ ФУАД ДЖАВАНШИР оглы

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ ТРАЕКТОРИЯМИ ЦЕПИ МАРКОВА

1208.01 – Теория вероятностей

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

БАКУ-2013

Работа выполнена в отделе « Функциональной анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана.**

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, проф. **Ф.Г.Рагимов**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф. Т**.Г.Насирова**

кандидат физико-математических наук, доц. К**.М.Джафаров**

Ведущая организация:

Азербайджанский Государственный Экономический Университет, кафедра «**Информационная экономика и технологии»**

Защита диссертации состоится **27 декабря** 2013 г. в **14^{00}** часов на заседании диссертационного совета **FD.02.017** при Бакинском Государственном Университете.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Бакинского Государственного Университета.

Адрес: ул. З.Халилов, 23, Az 1148, г. Баку.

Автореферат разослан 26 ноября 2013 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
FD.02.017 БГУ **к.ф.-м.н. М.М.Муталлимов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Основные задачи теории случайных блужданий связаны с временем первого прохождения за границу и имеют многочисленные применения в прикладных вопросах теории вероятностей и математической статистики.

В современном этапе теории случайных блуждании успешно развиваются так называемая, теория граничных задач для случайных блужданий. Прикладные значение этой теории объяснено в работах А.А. Боровкова, А.А. Новикова, Т.Г. Насирова, Ф.Г. Рагимова, Д. Сигмунда, М. Вудруфа, А.Гата, С.Х. Зханга и др. в которых изучаются задачи, так называемой, теории нелинейного восстановления и статистического последовательного анализа.

Дальнейшие развитие теории граничных задач для случайных блужданий, а также теории нелинейного восстановления привело к необходимости развития теории граничных задач для цепи Маркова, изучению которой посвящены работы Г. Алемейра, Х. Кестена, В.Ф. Мелфи, Т.Л. Лайа, А.А. Боровкова, А.А. Новикова, М. Поллака и А. Г. Тартаквского и др.

Цель работы. Целью настоящей диссертации является изучение некоторых нелинейных граничных задач для цепей Маркова.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие результаты:

- Доказаны интегральные предельные теоремы для семейства моментов первого выхода цепи Маркова за нелинейную границу.

- Доказаны интегральные предельные теоремы для времени первого пересечения уровня случайным блужданием, описываемым авторегрессионным процессом первого порядка $(AR(1))$.

- Доказаны усиленные законы больших чисел для граничных функционалов, связанных с пересечением нелинейных границ траекторией цепи Маркова.

- Изучено асимптотическое поведение условной вероятности пересечения нелинейных граничных траекторией цепи Маркова.

- Доказаны интегральные предельные теоремы для момента первого выхода возмущенной цепи Маркова.

- Изучено асимптотическое поведение локальных вероятностей пересечения нелинейных границ траекторией возмущенной цепи Маркова.

Методика исследования. В работе применяются вероятностные методы теории предельных теорем для общих цепей Маркова, а также теории нелинейного Марковского восстановления.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в прикладных областях теории случайных процессов и математической статистики, теории очередей, математической теории страхования, математической теории финансов и др.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на научной конференции, посвященной 90-летию БГУ (Баку, 2009) на Международной конференции, посвященной 80-летию академика Ф.Г, Максудова (Баку, 2010), на Международной конференции, посвященной 80-летию проф. Ю.Дж. Мамедова (Баку, 2010), на XIII Международной конференции имени академика Кравчука (Киев, 2010), на IV Congress of the Turkic World Mathematical Society (Baku, 2011), на семинарах кафедры «Теория вероятностей и математическая статистика» при БГУ, отдела «Функциональной анализ» ИММ НАН Азербайджана.

Публикация. Основные результаты диссертации опубликованы в 16 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структуры и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, и списка литературы, содержащего 79 наименований. Объем 137 работы страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы и излагаются постановки граничных задач для цепи Маркова, а также дается кроткое обсуждение полученных результатов в диссертации.

Пусть $X = (X_n,\ n \in Z^+),\ Z^+ = \{0,1,2,...\}$ есть неоднородная цепь Маркова со значениями на действительной прямой $R = (-\infty, \infty)$ и с переходной вероятностью

$$P(X_{n+1} \in B \mid X_n = \upsilon) = P_n(\upsilon, B),$$

$\upsilon \in R$ и $B \in \beta(R) - \sigma -$ алгебра борелевских множеств в R.

Рассмотрим момент первого выхода

$$\tau_a = \inf\{n \geq 1 : X_n > f_a(n)\} \tag{1}$$

цепи Маркова X за нелинейную (неслучайную) границу $f_a(t),\ a > 0,\ t > 0$, зависящую от некоторого растущего параметра a. Здесь всегда будем считать $\inf\{\varnothing\} = \infty$.

В параграфе 1.1 настоящей диссертации доказываются интегральные предельные теоремы для момента первого выхода τ_a вида (1).

Будем обозначить через $\xi_n(\upsilon)$ случайную величину, распределение которой совпадает с распределением скачка цепи Маркова X_n из состояния υ в момент временны n, т.е. имеет место равенство

$$P(\upsilon + \xi_n(\upsilon) \in B) = P_n(\upsilon, B),\ B \in \beta(R).$$

Относительно цепи Маркова X_n будет предполагать, что она является цепью с асимптотически однородным (во времени и в пространстве) средним сносом, т.е. для некоторого числа $\mu \in R$

$$E\xi_n(\upsilon) \to \mu \text{ при } n \to \infty \text{ и } \upsilon \to \infty.$$

Отметим, что здесь не предполагается конечность математического ожидания $E\xi_n(\upsilon)$ для всех n и υ.

Обозначим через $W_1 = W_1(\mu)$ класс семейств функций f_a, удовлетворяющих следующим условиям регулярности:

1) Для каждого a функция $f_a(t)$, положительная, монотонно возрастает и непрерывно-дифференцируемой при $t \geq 0$, причем $f_a(1) \uparrow \infty$ при $a \to \infty$;

2) Для каждой функции $n = n(a)$ от a, такой что $n = n(a) \to \infty$ и $\frac{1}{n} f_a(n) \to \mu > 0$ при $a \to \infty$ выполняется соотношение $f_a^{'}(n) \to \theta$ при $a \to \infty$ для некоторого числа $\theta \in [0, \mu)$.

3) Для каждого a функция $\frac{f_a(t)}{t}$ строго убывает к нулю при $t \to \infty$.

Отметим, что из условий 1) и 3) вытекает, что уравнение $f_a(n) = n\mu$ относительно n имеет единственное решение $N_a = N_a(\mu)$, причем $N_a \to \infty$ при $a \to \infty$.

Ниже нам понадобится применять отношение частичного порядка на множестве случайных величин: если для любых случайных величин η_1 и η_2 выполняется неравенство $P(\eta_1 \geq x) \leq P(\eta_2 \geq x)$ для любого $x \in R$, то будем писать $\eta_1 \overset{d}{\leq} \eta_2$.

Сформулируем полученные результаты

Теорема 1.1. Пусть $f_a \in W_1$ и цепь X имеет асимптотически однородный во времени и в пространстве средний снос $\mu > 0$, причем $X_n \to \infty$ почти наверное при $n \to \infty$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1) Для которого момента времени M и пространственного уровня V семейство квадратов скачков $\{\xi_n^2(\upsilon), n \geq M, \upsilon \geq V\}$ равномерно интегрируемо по n и υ, причем

$E\xi_n(\upsilon) = \mu + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{\upsilon}}\right)$ и $D\xi_n(\upsilon) \to \sigma^2 > 0$ при $n \to \infty$ и $\upsilon \to \infty$.

2) Последовательность $\frac{X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, $n \geq 1$ является равномерно непрерывной по вероятности.

Тогда имеет место

$$\lim_{a \to \infty} P\left(\frac{\tau_a - N_a}{\lambda\sqrt{N_a}} \leq x\right) = \Phi(x), \text{ где } \lambda = \frac{\sigma}{\mu - \theta} \text{ и } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy.$$

Теорема 1.2. Пусть $f_a \in W_1$ и цепь X имеет асимптотически однородный во времени и в пространстве средней снос $\mu > 0$, причем $X_n \to \infty$ почти наверное при $n \to \infty$. Пусть выполняются следующие условия:

1) Для некоторого пространственного уровня V и момента времени M семейство $\{|\xi_n(\upsilon)|,\ n \ge M, \upsilon \ge V\}$ обладает интегрируемо мажорантой.

2) Существует положительная функция $A(t) > 0,\ t \ge 0$ такая, что

$$\lim_{\delta \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{A([n(1+\delta)])}{A(n)} = 1 \qquad (2)$$

и

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{X_n - n\mu}{A(n)} \le x \right) = G(x),\ \ x \in R$$

где $G(x)$-непрерывная функция распределения.

3) Последовательность $\dfrac{X_n - n\mu}{A(n)}$, $n \ge 1$ является равномерно непрерывной по вероятности.

Тогда имеет место

$$\lim_{a \to \infty} P\left(\frac{\tau_a - N_a}{A([N_a])} \le x \right) = 1 - G(-\lambda x), \text{ где } \lambda = \mu - \theta .$$

В следующей предельной теореме рассматривается однородная во времени цепь Маркова с начальным значением $X_0 = \upsilon$ предполагается, что она является о частично однородной в пространстве, т.е. переходная вероятность $P(\upsilon, du) = P(X_1 = X_1(\upsilon) \in du)$ при $u > 0$ и $\upsilon > 0$ зависит лишь от разности $u - \upsilon$. Это означает, что в области $\upsilon > 0$ траектория цепи $X_n = X_n(\upsilon)$ ведет себя, как обычный процесс суммирования независимых одинаково распределенных случайных величин, распределенных как некоторая случайная величина ξ.

Теорема 1.3. Пусть для каждого a функция $f_a(t)$ положительная, монотонно возрастает, непрерывно-дифференцируема при $t \ge 0$ и $f_a^{'}(t) \le M < \infty$ для достаточно больших a и t. Предположим, что цепи X с начальным значением $X_0 = \upsilon$ является однородной во времени и 0- частично однородной в пространстве, причем распределение приращения цепи X (случайной величины ξ) сосредоточено на $[M, \infty)$, т.е. $P(\xi \ge M) = 1$ и имеет место

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{X_n}{A(n)} \le x \right) = G_\alpha(x), \quad x > 0$$

где $G_\alpha(x)$ функция распределения устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha \in (0,1)$, $A(n) = n^{1/\alpha} L(n)$ и $L(x)$ - медленно меняющаяся функция в бесконечности.

Кроме того, пусть $n = n(a) \to \infty$ и $a \to \infty$ так, что $\dfrac{f_a(n)}{A(n)} \to x > 0$.

Тогда

$$\lim_{a \to \infty} P\left(K_\alpha(a)\tau_a \ge x^{-\alpha}\right) = G_\alpha(x), \text{ где } K_\alpha(a) = \left[\frac{f_a(n)}{L(n)}\right]^{-\alpha}.$$

В параграфе 1.2 первой главы диссертации доказываются интегральные предельные теоремы для времени первого выхода за уровень случайного блуждания, описываемого авторегрессионым процессом с дискретным временем первого порядка (авторегрессионой последовательностей первого порядка $(AR(1))$.

Пусть $\xi_n, n \ge 1$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$. Как известно, авторегрессионная последовательность первого порядка $AR(1)$ определяется как решение уравнения

$X_n = \beta X_{n-1} + \xi_n, \;\; n \ge 1, \;\; X_0 = x$, где x и β - неслучайные константы и будем предполагать, что $x \ge 0$ и $|\beta| < 1$.

Положим $T_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} X_k$, $n \geq 1$, и рассмотрим семейство моментов первого выхода

$$\tau_a = \inf\{n \geq 1 : T_n > a\} \tag{3}$$

процесса T_n, $n \geq 1$ за уровень $a > 0$.

Семейство моментов первого выхода τ_a, $a > 0$ типа (3) возникает в прикладных задачах, связанных с $AR(1)$-последовательностей.

Основными результатами параграфа 1.2 являются следующие теоремы.

Теорема 1.4. Пусть $E\xi_n = 0,\ D\xi_n = 1$ и $0 < \beta < 1$. Тогда имеет место

$$\lim_{a\to\infty} P\left(\frac{\tau_a - \frac{a}{\lambda}}{\sigma\sqrt{a}} \leq x \right) = \Phi(x),$$ равномерно по $x \in R$, где $\lambda = \dfrac{\beta}{1-\beta^2}$,

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{\lambda}} \text{ и } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy .$$

В следующей теореме рассматривается момент первого выхода $\theta_a = \inf\{n \geq 1 : H_n > a\}$ процесса $H_n = n\Delta(T_n / n)$, $n \geq 1$ за уровень $a > 0$, где $\Delta(x)$, $x \in R$ -некоторая борелевская функция.

Теорема 1.5. Пусть $\beta \in (0,1)$ и ξ_n, $n \geq 1$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $E\xi_1 = 0$ и $D\xi_1 = 1$. Пусть функция $\Delta(x)$ дважды непрерывно-дифференцируемы в R, причем $\Delta(\lambda) > 0$ и $\Delta'(\lambda) \neq 0$ в точке $x = \lambda = \dfrac{\beta}{1-\beta^2}$.

Тогда

$$\lim_{a\to\infty} P\left(\frac{\theta_a - N_a}{\Delta'(\lambda)\sqrt{N_a}} \leq \frac{x}{\Delta(\lambda)} \right) = \Phi(x), \text{ где } N_a = \frac{a}{\Delta(\lambda)} .$$

В параграфе 1.3 первой главы диссертации доказываются усиленные законы больших чисел типа Колмогорова для нелинейных граничных функционалов цепи Маркова.

Рассмотрим семейство моментов первого выхода

$$\tau_a = \inf\{n : X_n > f_a(n)\}$$

цепи Маркова X_n за нелинейную границу $f_a(t),\ t \geq 0$, зависящую от некоторого рустующего параметра $a > 0$, причем $f_a(1) \uparrow \infty$ при $a \to \infty$.

Обозначим через Π_β^0 класс функций (границ) вида $f_a(t) = ag(t)$, где $g(t)$ является положительной непрерывной, вынутой и монотонно возрастает для достаточно больших t, причем $g(t)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\beta \in [0,1)$, т.е. она имеет вид $g(t) = t^\beta L(t)$, где $L(t)$ является медленно меняющейся функцией на бесконечности.

Обозначим через $N_a = N_a(\mu)$ решение уравнение $f_a(n) = n\mu$, которое существует и единственно для достаточно больших a в силу сделанных допущений относительно функции $f_a(t)$. Ясно, что $N_a \to \infty$ при $a \to \infty$.

Основным результатом параграфе 1.3 является следующая

Теорема 1.6. Пусть $f_a(t) \in \Pi_\beta^0$ и цепь Маркова $X = (X_n, n \geq 0)$ имеет асимптотически однородный во времени и в пространстве средний положительный снос $\mu > 0$, причем $X_n \xrightarrow{п.н} \infty$ при $n \to \infty$. Предположим, что существует неотрицательная случайная величина ξ с конечным средним, такая, что для некоторого пространственного уровня V и момента времени M выполняется соотношение

$$|\xi_n(\upsilon)| \overset{d}{\leq} \xi \text{, для всех } \upsilon \geq V,\ n \geq M.$$

Тогда имеет место

$$\frac{\tau_a}{N_a} \xrightarrow{п.н} 1 \text{ при } a \to \infty.$$

В параграфе 1.4 изучается асимптотическое поведение условной вероятности пересечения нелинейных границ траекторией цепи Маркова.

Пусть на некотором пространстве $(\Omega, \Im, P)$ задана вещественнозначная цепь Маркова $X = (X_n, n \geq 0)$ и задано некоторое семейство нелинейных функций (границ) $f_a(t),\ t \geq 0$, зависящих от растущего параметра $a \geq 0$.

Рассмотрим семейство моментов остановки

$$\tau_a = \inf\{n : X_n \geq f_a(n)\}$$

При изучении локальных предельных терем для момента первого выхода τ_a ключевую роль играет условная вероятность $P(\tau_a \geq n \mid X_n = x)$ пересечения нелинейных границ траекторией цепи Маркова.

В настоящем параграфе доказывается теорема об асимптотическом поведении указанной условной вероятности при $x = x(a) \to \infty$ и $a \to \infty$.

Обозначим через $W_2 = \{f_a\}$ класс семейств нелинейных функций (границ) $f_a(t),\ t \geq 0,\ a \geq 0$ удовлетворяющих следующим условиям регулярности:

1. Для каждого a функция $f_a(t)$ монотонно возрастает и непрерывно-дифференцируема при $t > 0$.
2. Для любой функции $n = n(a) \to \infty$ при $a \to \infty$, такой, что из сходимости $\dfrac{f_a(n)}{n} \to \mu$ при $a \to \infty$ следует, что для некоторого $\theta \in [0, \mu)$ выполняется $f_a'(n) \to \theta$ при $a \to \infty$.
3. Для любых функций $n = n(a) \to \infty$ и $m = m(a) \to \infty$ при $a \to \infty$, таких, что $\dfrac{n}{m} \to 1$ выполняется предельное соотношение $\dfrac{f_a'(n)}{f_a'(m)} \to 1$ при $a \to \infty$.

Обозначим

$$\overline{X}_n = \frac{X_n(\upsilon)}{n},\ \delta_a(n,x) = nx - f_a(n),\ l_a(n,x,\upsilon) = P(\tau_a \geq n \mid \overline{X}_n = x),$$

$$L_a(n,x,r,\upsilon) = P(X_n - X_{n-k} - k\theta \geq r, 1 \leq k \leq n-1 \mid \overline{X}_n = x)$$

и $\psi(r,\upsilon) = P\left(\inf\limits_{k \geq 1}(X_k - k\theta) \geq r\right)$.

Основным результатом параграфа 1.2 является следующая.

Теорема 1.7. Пусть $f_a \in W_2$ и цепь Маркова $X_n = X_n(\upsilon)$ с $X_0 = \upsilon$ является однородной во времени и 0-частично однородной в пространстве с $\mu = E\xi > 0$ и $\sigma^2 = D\xi < \infty$ и случайная величина ξ имеет плотность распределения.

Кроме того, пусть $x = x(a) \to \mu$ и $n = n(a) \to \infty$ при $a \to \infty$, так, что $x - \mu = O(1/\sqrt{n})$ и $\delta_a(n,x) = O(1)$. Тогда для $r > 0$ и $|\upsilon| \leq c < \infty$ имеет место

$$L_a(n,x,r,\upsilon) \to \psi(r,\upsilon) \text{ при } a \to \infty.$$

В второй главе диссертационной работы изучаются нелинейные граничные задача для возмущенных цепей Маркова.

Пусть на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$ задана неоднородная во времени цеп Маркова $X = (X_n, n \in Z^+)$ со значениями на $R = (-\infty, \infty)$ и переходной вероятностью

$$P(X_{n+1} \in B \mid X_n = \upsilon) = P_n(\upsilon, B),$$

где $\upsilon \in R$ и $B \in \beta(R) - \sigma -$ алгебра борелевских множеств в R.

Наряду с цепью Маркова X рассмотрим последовательность случайных величин $\varepsilon_n, n \in Z^+$ определенных на $(\Omega, \Im, P)$, таких, что для каждого n случайная величина ε_n измерима относительно σ алгебры $\Im_n = \sigma(X_k, k \leq n)$.

Положим

$$T_n = X_n + \varepsilon_n,\ n \in Z^+.$$

Будем называть последовательность случайных величин $\varepsilon_n, n \geq 1$ случайным возмущением, а последовательность случайных величин T_n, $n \geq 1$ возмущенной цепи Маркова.

Рассмотрим семейство моментов первого выхода

$$\tau_a = \inf\{n : T_n > f_a(n)\} \tag{4}$$

возмущенной цепи Маркова T_n за нелинейную границу $f_a(t)$, $t > 0$, зависящую от некоторого растущего параметра $a > 0$.

Относительно случайного возмущения $\varepsilon_n, n \geq 0$ будем предполагать, что она медленно меняется, т.е. выполняются следующие условия: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{n \geq 1} P\left\{\max_{0 \leq k \leq n\delta} |\varepsilon_{n+k} - \varepsilon_n| \geq \varepsilon\right\} = 0 \tag{5}$$

и

$$\frac{1}{n} \max_{k \geq n} |\varepsilon_k| \xrightarrow{P} o \text{ при } n \to \infty. \tag{6}$$

Обозначим через Π_β^1 класс семейств правильно меняющихся функции X с показателем $\beta \in [0,1)$ таких, что $P(\tau_a \leq \delta N_a) \to o$ при $a \to \infty$ и $f_a'(t) \leq d$ при $t \geq \delta N_a$ для некоторых чисел $\delta \in (0,1)$ и $0 < d < \mu$.

Следующие теоремы являются основными результатами параграфа 2.1.

Теорема 2.1. Пусть $f_a(t) \in W_1$ и цепь Маркова X_n имеет асимптотически однородной во времени и в пространстве средний снос $\mu > 0$, причем $X_n \xrightarrow{п.н} \infty$ при $n \to \infty$ и пусть для некоторого момента времени M и пространственного уровня V семейство случайных величин $\{|\xi_n(\upsilon)|,\ n \geq M,\ \upsilon \geq V\}$ обладает интегрируемой мажорантой.

Тогда:

1) Если выполняется (6), то $\tau_a \xrightarrow{п.н} \infty$ при $a \to \infty$ и для всех $a \geq 0$.

2) Если $\frac{\varepsilon_n}{n}\xrightarrow{п.н}0$ при $n\to\infty$, то $\frac{\tau_a}{N_a}\xrightarrow{п.н}1$ при $a\to\infty$.

Теорема 2.2. Пусть $f_a(t)\in W_1$ и цепь Маркова X_n имеет асимптотически однородный во времени и в пространстве средний снос $\mu>0$, причем $X_n\xrightarrow{п.н}\infty$ при $n\to\infty$.

Пусть также выполняются следующие условия:

1) Для некоторого пространственного уровня V и момента времени M семейство случайных величин $\{|\xi_n(\upsilon)|, \upsilon\ge V,\ n\ge M\}$ обладает интегрируемой мажорантой.
2) Существует медленно меняющая функция на бесконечности $L(t),\ t>0$, такая, что выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_n-n\mu}{A(n)}\le x\right)=G_\alpha(x),\text{ где } A(t)=t^{1/\alpha}L(t),\ \alpha\in[1,2)\text{ и}$$

$G_\alpha(x)$ - непрерывная функция распределения.

3) Последовательности $\frac{X_n-n\mu}{A(n)}$ и $\varepsilon_n,\ n\ge1$ являются равномерно непрерывными по вероятности, причем $\frac{\varepsilon_n}{A(n)}\xrightarrow{P}0$ при $n\to\infty$.

Тогда

$$\lim_{a\to\infty}P\left(\frac{\tau_a-N_a}{A(N_a)}\le x\right)=1-G_\alpha(-\lambda x)$$

где $\lambda=\mu-\theta,\ N_a=N_a(\mu)$ решение уравнения $f_a(n)=n\mu$.

Теорема 2.3. Пусть для каждого a положительная функция $f_a(t)$ монотонно возрастает, непрерывно-дифференцируема при $t\ge0$ и $f_a'(t)\le M<\infty$ для достаточно больших a и t.

Предположим, что цепь Маркова $X=(X_n,\ n\in Z^+)$ с начальным значением $X_0=\upsilon$ является однородной во времени и 0-

частичнооднородной в пространстве, причем распределение F приращения цепи Маркова X сосредоточено на $[M,\infty)$ и выполняется сходимость для $x>0$

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\dfrac{X_n}{A(n)} \le x\right) = G_\alpha(x)$, где $A(t)=t^{1/\alpha}L(t)$, $\alpha\in(0,1)$ и $G_\alpha(x)$ некоторая непрерывная функция распределения.

Кроме того пусть $n=n(a)\to\infty$ и $a\to\infty$ так, что $\dfrac{f_a(n)}{A(n)}\to x>0$ и случайное возмущение ε_n монотонно возрастает, причем $\dfrac{\varepsilon_n}{A(n)}\xrightarrow{P} o$ при $n\to\infty$.

Тогда имеет место

$$\lim_{a\to\infty} P\left(K_\alpha(a)\tau_a \ge x^{-\alpha}\right) = G_\alpha(x), \text{ где } K_\alpha(a)=\left[\frac{f_a(n)}{L(n)}\right]^{-\alpha}.$$

В следующей теореме рассматривается важный класс возмущенных цепей Маркова. Пусть $\Delta(x)$ некоторая борелевская функция, определенная на $R=(-\infty,\infty)$.

Положим

$$H_n = n\Delta\left(\frac{X_n}{n}\right),\ n\ge 1 \text{ и } H_0=0.$$

Рассмотрим момент первого пересечения

$$\theta_a = \inf\{n : H_n > f_a(n)\} \tag{7}$$

процесса H_n за нелинейную границу $f_a(t)$.

Доказывается следующая интегральная предельная теорема для θ_a.

Теорема 2.4. Пусть цепь Маркова X_n имеет асимптотически однородный во времени и во пространстве средний снос $\mu>0$, причем $X_n \xrightarrow{п.н} \infty$ при $n\to\infty$.

Пусть $f_a(t)\in W_1(\Delta(\mu))$ и выполняются следующие условия:

1) Для некоторого момента времени M и пространственного уровня V семейство квадратов скачков $\left\{\xi_n^2(\upsilon), \upsilon \geq V, n \geq M\right\}$ равномерно интегрируемо, причем выполняются соотношения

$$E\xi_n(\upsilon) = \mu + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{\upsilon}}\right) \text{ и } D\xi_n(\upsilon) \to \sigma^2 > 0$$

при $n \to \infty$ и $\upsilon \to \infty$.

2) Последовательность $\dfrac{X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, $n \geq 1$ является равномерно непрерывной по вероятности.

3) Функция $\Delta(x)$ дважды непрерывно-дифференцируема в точке $x = \mu$, причем $\Delta(\mu) > 0$ и $\Delta'(\mu) \neq 0$.

Тогда имеет место

$$\lim_{a\to\infty} P\left(\frac{\theta_a - N_a}{\sigma\sqrt{N_a}} \leq \frac{|\Delta'(\mu)|}{\lambda} x\right) = \Phi(x), \text{ где } \lambda = \Delta(\mu) - \theta .$$

В параграфе 2.2 изучаются закон больших чисел и усиленный закон больших чисел для момента первого выхода τ_a вида (4) возмущенной цепи Маркова за нелинейную границу

В этом параграфе доказываются следующие результаты.

Теорема 2.5. Пусть $f_a(t) \in \Pi_\beta^1$ и цепь Маркова X_n имеет асимптотически однородный во времени и в пространстве средним снос $\mu > 0$, причем $X_n \xrightarrow{п.н.} \infty$ при $n \to \infty$. Кроме того пусть выполняются следующие условия:

1) для некоторого момента времени M и пространственного уровня V семейство случайных величин $\left\{|\xi_n(\upsilon)|, n \geq M, \upsilon \geq V\right\}$ обладает интегрируемой мажорантой.

2) Для случайного возмущения ε_n выполняется соотношение (6).

Тогда

$$\frac{\tau_a}{N_a} \xrightarrow{P} 1, \text{ где } N_a = N_a(\mu) \text{ - решение уравнения } f_a(n) = n\mu .$$

Теорема 2.6. Пусть выполняются условия теорема 2.5 относительно цепи Маркова и нелинейная граница $f_a(t)$ имеет вида $f_a(t) = ag(t)$, причем положительная функция $g(t) = t^{\beta} L(t)$, $\beta \in [0,1)$ монотонно возрастает и является вогнутом.

Тогда, если $\frac{\varepsilon_n}{n} \xrightarrow{п.н.} 0$ при $n \to \infty$, то $\frac{\tau_a}{N_a} \xrightarrow{п.н.} 1$ при $a \to \infty$.

Рассмотрим семейство моментов первого выхода (7) с $f_a(t) \equiv a$, положим

$$\tau_a = \inf\{n \geq 1 : H_n > a\}. \tag{8}$$

В параграфе 2.3 указанном параграфе изучается асимптотическое поведение совместного распределения момента первого выхода τ_a и перескока $R_a = H_{\tau_a} - a$ при $a \to \infty$, т.е. вероятности $P(\tau_a = n, R_a \leq r)$.

Относительно цепи Маркова $X_n = X_n(\upsilon)$ будем предполагать, что она с начальным значением $X_0 = \upsilon$ является однородной во времени и частично однородной в пространстве.

Относительно случайной величины ξ, связанной с X_n будем предполагать, что она имеет нерешетчатое распределение с $\nu = E\xi > 0$ и $\sigma^2 = D\xi < \infty$. А относительно функции $\Delta(x)$ предполагаем, что она непрерывно-дифференцируема в некоторой окрестности точки $x = \nu$, причем $\mu = \Delta(\nu) > 0$ и $\Delta'(\nu) \neq 0$.

Из свойства частично однородности цепи Маркова $X_n = X_n(\upsilon)$ вытекает, что последовательность

$$Z_n = Z_n(\upsilon) = n\Delta(\nu) + n\Delta'(\nu)\left(\frac{X_n}{n} - \nu\right), n \geq 1$$

также является частично однородной в пространстве цепью Маркова.

Поэтому в области $\upsilon > V$ цепь Маркова Z_n ведет себя как сумма независимых одинаково распределенных случайных величин $\eta_1, \eta_2, \ldots,$, причем проекция распределения случайной величины η_1 совпадает проекцией распределения случайной величины $\eta = \Delta(\nu) + \Delta'(\nu)(\xi - \nu)$ на множестве $(V - \upsilon, \infty)$.

Обозначим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i,\ \tau_+ = \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\},\ H(r) = \frac{1}{ES_{\tau_+}} \int_0^r P(S_{\tau_+} > x)dx,\ r > 0$$

и $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},\ \rho = |\Delta'(\nu)|\sigma$.

Основным результатом параграфа 2.3 является следующая теорема.

Теорема 2.7. Пусть $0 < V < \upsilon \leq c < \infty$ и выполняются выше перечисленные условия относительно цепи Маркова X_n и функции $\Delta(x)$. Предположим, что

$$n = n(a) = \frac{a}{\mu} + \theta_a \sqrt{a/\mu}\ \text{, где } \theta_a \to \theta \in R \text{ при } a \to \infty.$$

Тогда

$$P(\tau_a = n, R_a \leq r) \sim \frac{\mu}{\rho\sqrt{n}} \varphi\left(\frac{\theta\mu}{\rho}\right) H(r),\ a \to \infty$$

равномерно по θ из ограниченно множества в R.

Заключение

В диссертационной работе исследованы некоторые нелинейные граничные задачи для цепей Маркова. В ней изучены асимптотические свойства локальных вероятностей и доказаны предельные теоремы для нелинейных граничных функционалов, связанных с моментом первого пересечения нелинейных границ траекторией цепи Маркова, а также траекторией возмущенной цепи Маркова.

Приведем основные результаты, полученные в диссертации:

- Доказаны интегральные предельные теоремы для семейства моментов первого выхода цепи Маркова за нелинейную границу.

- Доказаны интегральные предельные теоремы для времени первого пересечения уровня случайным блужданием, описываемым авторегрессионным процессом первого порядка $(AR(1))$.

- Доказаны усиленные законы больших чисел для граничных функционалов, связанных с пересечением нелинейных границ траекторией цепи Маркова.

- Найдена асимптотика условной вероятности пересечения нелинейных граничных траекторией цепи Маркова.

- Доказаны интегральные предельные теоремы для момента первого выхода возмущенной цепи Маркова.

- Изучено асимптотическое поведение локальных вероятностей пересечения уровня траекторией возмущенной цепи Маркова.

Основные результаты диссертации опубликовано в следующих работах.

1. Абдурахманов В.А., Азизов Ф. Дж. Интегральные предельные теоремы для момента первого достижения парабол цепей Маркова. AMEA-nın RMİ-nin 50-illik yubleyinə həsr olunmuş Beynəlxalq Konfransın Materialları. Bakı-2009, səh.5
2. Rahimov F.H., Abdurakhmanov V.A., Azizov F.Dj. Integral limit theorems for the first passage time of parabolas by Markov chains. National Academy of Sciences of Azerbaijan Proceedings of İnstitute of Mathematics and Mechanics. Volume XXXI (XXXIX). Baku-2009, pp.139-144
3. Рагимов Ф.Г., Азизов Ф. Дж. Об усиленном законе для времени пересечения нелинейных границ траекторией цепи Маркова. Akademik F.Q.Maqsudovun 80-illik yubleyinə həsr olunmuş Beynəlxalq Konfransın Materialları. Bakı-2010, səh.295-296
4. Rahimov F.H., Azizov F.Dj. On the first passage time of one-sided nonlinear boundary by the trajectory of Markov chain. Transaction of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Volume XXX, №1. “Elm”, Baku-2010, pp.161-166.
5. Азизов Ф. Дж., Рагимов Ф.Г. О времени пересечения односторонней нелинейной границы траекторией цепи Маркова.XIII International Scientific M.Kravchuk Conference. Kiyev – 2010, səh.96.
6. Рагимов Ф.Г., Азизов Ф. Дж., Т.Э. Гашимова. О некоторых асимптотических свойствах с вероятностью единица момента первого выхода возмущенного случайного блуждания за линейную границу. Y.C.Məmmədovun 80 illik yubleyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və Mexanikanın Aktual problemləri” mövzusunda Beynəlxalq konfransın Materialları. Bakı-2010, səh.80-81.
7. V.A.Abdurahmanov, Azizov F.Dj., V.S.Halilov. Asymptotic Behaviour of the conditional probabality of intersection of the level of Markov chain trajectory Turkic World Mathematical society Book of Abstracts. Baku-2011, pp.302

8. Азизов Ф. Дж. Интегральные предельные теоремы для времени пресечения односторонней нелинейных границы траекторией цепи Маркова с возмущением. Akademik Z.İ.Xəlilovun 100 illik yubleyinə həsr olunmuş Beynəlxalq Konfransın Materialları. Bakı-2011, səh.16-18
9. Rahimov F.H., Azizov F.Dj., Halilov V.S. Integral limit theorem for the first passage time for the level of random walk, described with AR(1)sequences.Transaction of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Volume XXXII, №4. "Elm", Baku-2012, pp.95-100.
10. Рагимов Ф.Г., Азизов Ф. Дж. Интегральные предельные теоремы для момента времени пресечения нелинейных границ цепей Маркова. «Теория вероятностей и её применения» (журнал имени А.Н.Колмогоров), том 57, выпуск I, 2012 Москва. стр. 178-185
11. Rahimov F. H., Azizov F.Dj. On asymptotic behavior of conditional probability of crossing the nonlinear boundary by Markov chain trajectory. Proceedings of the International conference devoted to the 100-the anniversary of academician I.I.Ibrahimov. Baku-2012, pp.205-206
12. Azizov F.Dj. On asymptotic behavior of conditional probability of crossing the nonlinear boundary by Markov chain trajectory. National Academy of Sciences of Azerbaijan Proceedings of İnstitute of Mathematics and Mechanics. Volume XXXVI(XLIV). Baku-2012, pp.9-16
13. Azizov F.Dj., Abdurahmanov V.A., Halilov V.S. Asymptotics of numerical characteristics of the first passage time of lavel by the trajectory of perturbed Markov chain. National Academy of Sciences of Azerbaijan Proceedings of İnstitute of Mathematics and Mechanics. Volume XXXVII(XLV). Baku-2012, pp.33-38
14. Рагимов Ф.Г., Азизов Ф. Дж. Асимптотики локальных вероятностей в задачах пересечения границ траекторией цепи Маркова. Вестник Бакинского Университета. серия Физико-Математических наук № 2, 2012, стр.26-36
15. Алиев С.А. Азизов Ф. Дж., Халилов В.С. Интегральная предельная теорема для момента первого выхода за уровень случайного блуждания, описываемого нелинейной функцией от последовательности AR(1). Международной конференции,

посвященной 90-лет со дня рождения Гейдара Алиева. Баку-2013, стр. 127-128
16. Рагимов Ф.Г., Азизов Ф. Дж., Халилов В.С. Об асимптотическом поведении момента первого выхода возмущенной цепей Маркова за нелинейную границу. Международной конференции, посвященной 90-лет со дня рождения Гейдара Алиева. Баку-2013, стр. 190-192

Личный вклад соискателя в совместно опубликованных научных работах:

[1]- [7], [9], [10], [11], [13]-[16] - В этих работах соавторы участвовали лишь при постановке задач и в обсуждениях при доказательстве результатов. Формулировки и доказательства основных результатов в этих работах принадлежат самому автору диссертации.

Əzizov Fuad Cavanşir oğlu

Makov zəncirinin trayektoriyaları ilə təsvir olunan təsadüfi dolaşmalar üçün bəzi qeyri-xətti sərhəd məsələlərinin tədqiqi

Xülasə

Dissertasiya işində Markov zənciri üçün bəzi qeyri-xətti sərhəd məsələləri tədqiq edilmişdir. İşdə Markov zəncirinin və həyəcanlanmış Markov zəncirinin trayektoriyalarla qeyri-xətti sərhəddi birinci dəfə kəsmə anı ilə bağlı qeyri-xətti sərhəd funksionalları üçün limit teoremləri isbat edilmiş və lokal ehtimalların asimptotik xassələri öyrənilmişdir.

İşdə aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

- Markov zəncirinin qeyri-xətti sərhəddi birinci dəfə kəsmə anı üçün inteqral limit teoremləri isbat edilmişdir
- Birinci tərtib avtoreqresion proseslə təsvir olunan təsadüfi dolaşmanın səviyyəni birinci dəfə kəsmə anı üçün inteqral limit teoremləri isbat edilmişdir.
- Markov zəncirinin qeyri-xətti sərhəddi kəsməsi ilə bağlı sərhəd funksionalları üçün gücləndirilmiş böyük ədədlər qanunu isbat edilmişdir.
- Markov zəncirinin qeyri-xətti sərhəddi kəsməsinin şərti ehtimalının asimptotikası tapılmışdır.
- Həyəcanlanmış Markov zəncirinin qeyri-xətti sərhəddi birinci dəfə kəsmə anları ailəsi üçün inteqral limit teoremləri isbat edilmişdir.
- Həyəcanlanmış Markov zəncirinin trayektoriyalarla xətti sərhəddi (səviyyəni) kəsməsinin lokal ehtimallarının asimptotik xassələri öyrənilmişdir.

FUAD JAVANSHIR OGLI AZIZOV

INVESTIGATION OF SOME NONLINEAR BOUNDARY CROSSING PROBLEMS FOR MARKOV CHAINS

SUMMARY

In the thesis some nonlinear boundary crossing problems for Markov chains are investigated. Asymptotic properties of local probabilities are studied and limit theorems are proved for nonlinear boundary functionals, described by the first time intersection of nonlinear boundary by trajectory of Markov chain and of perturbed Markov chain.

The following main results are obtained in the thesis:

- Integral limit theorems for family of the first crossing moments of Markov chains for nonlinear boundary are proved;
- Integral limit theorems for the first crossing time a level by random walk, described by the autoregressive sequence of first order (AR(1)) are proved;
- The strong Laws for nonlinear boundary functionals of Markov chains are proved;
- Limit behavior of conditional probability of crossing of nonlinear boundaries by trajectory of Markov chain is studied;
- The integral limit theorems of first crossing moment of perturbed Markov chain are proved;
- Asymptotic behavior of local probabilities of crossing the level by trajectory of perturbed Markov chain is studied.

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ
TƏTBİQİ RİYAZİYYAT İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

ƏZİZOV FUAD CAVANŞİR OĞLU

MARKOV ZƏNCİRİNİN TRAYEKTORİYALARI İLƏ TƏSVİR OLUNAN TƏSADÜFİ DOLAŞMALAR ÜÇÜN BƏZİ QEYRİ-XƏTTİ SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN TƏDQİQİ

1208.01 – Ehtimal nəzəriyyəsi

Riyzaiyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq
üçün təqdim olunmuş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

BAKI - 2013