НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

НИГЯР МАХАР кызы АСЛАНОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА И СЛЕДОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

1202.01-Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук по математике

Баку – 2013

Работа выполнена в отделе «Дифференциальные уравнения» Института Математики и Механики НАН Азербайджана.

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, проф. **Мамед Байрамоглы**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, проф. **Билал Т.Билалов**
(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана);
доктор физико-математических наук, проф. **Ибрагим М.Набиев**
(Бакинский Государственный Университет);
доктор физико-математических наук,проф. **Биландар П.Аллахвердиев**
(Турция, Спарта, Университет Сулейман Демиреля).

Ведущая организация:
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет кафедра «Математический анализ».

Защита диссертации состоится 13 сентября 2013 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 07 июня 2013 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория дифференциально-операторных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами является важным методом для исследования бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных и интегро- дифференциальных уравнений.

Она отражена во многих исследованиях, из которых можно ссылаться на монографии М.Ш.Бирмана и М.З.Соломяка, А.Г.Костюченко и И.С.Саргсяна, С.Якубова и Я.Якубова, В.Козлова и В.Мазьи, В.И.Горбачук и М.Л.Горбачука, С.Г.Крейна, А.Я.Шкаляра, Ф.С.Рофе-Бекетова и А.Холкина, а также на работы М.Отелбаева, М.Байрам-оглы, H.Amman, A.Aibeche, R.Delaubenfels, R.Labbas и B.Terrini, С.Якубова, Г.И.Асланова, Б.А.Алиева, Я.Якубова и многих др.

Изучению асимптотики собственных значений дифференциально-операторных уравнений посвящены многочисленные исследования. Список работ до 1979г. дан в монографии А.Г.Костюченко и И.С.Саргсяна. В этой области можно указать также на работы В.И.Горбачук, А.Г.Костюченко, Б.М.Левитана, Ф.Г.Максу-дова и М.Байрамоглы, В.А.Михайлца, Г.И.Асланова и Н.Х.Рагимова и др. Из работ, связанных с нашими исследованиями, укажем на работы А.Н.Кожевникова, А.М.Рыбака, Б.А.Алиева.

Несмотря на все имеющиеся результаты, рассмотрение еще неисследованных дифференциально-операторных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами является актуальной и по сегодняшний день.

Теория следов дискретных операторов начинается с известной работы И.М.Гельфанда и Б.М.Левитана, в которой вычислен регуляризованный след для скалярного уравнения Штурма-Лиувилля, заданного на конечном отрезке. После этой работы в литературе появились многочисленные исследования: вычисления высших следов, распространение следа на дифференциальные уравнения высших порядков, вычисление следов сингулярных дифференциаль-ных уравнений, также вычисления следов уравнений в частных производных. Укажем, например, на следующие работы в этом направлении: Б.М.Левитана, Л.А.Дикого, М.Г.Гасымова, М.Байрамоглы, В.Б.Лидского и В.А.Садовничего, С.А.Холберга и В.А.Крамера, П.Д.Лакса и др. Часть результатов, полученных разными авторами, вошла в монографию Б.М.Левитана и И.С.Саргсяна, В.А.Марченко и в обзорную статью В.А.Садовничего и В.Е.Подольского.

Регуляризованные следы применяются для приближенного вычисления первых собственных значений рассматриваемого оператора. Они также полезны и при решении обратных задач уравнений Штурма-Лиувилля. Такие вопросы изучены, например, в работах Б.М.Левитана, Л.А.Дикого, В.А.Садовничего, В.В.Дубров-ского и Е.М.Мелешко, В.А.Садовничего и В.Е.Подольского, С.А.Шкарина, H.Hochtdadt, S.Kotani, M.Krishna и др.

Первые результаты для оператора с непрерывном спектром получил И.М.Лифшиц, где он с помощью своей формулы вычислил изменение свободной энергии кристалла, при внедрении в него чужеродной примеси. Таким образом, регуляризованный след является мерой дефекта полной энергии системы при ее возмущении в ситуации, когда самая полная энергия системы бесконечна. Результаты по следам операторов с непрерывной частью спектра нашли свое дальнейшее развитие в работах М.Г.Крейна, Л.Д.Фадеева и др.

Последним этапам в теории следов является изучение регуляризованных следов дифференциально-операторных уравнений и операторов в общем виде. Первой работой, посвященной изучению следов дифференциальных уравнений с неограниченным операторным коэффициентом, является работа Ф.Г.Максудова, М.Байрамоглы и А.А.Адыгезалова, в которой впервые дано определение регуляризованного следа и вычислен такой след для операторного уравнения Штурма-Лиувилля с неограниченным операторным потенциалом. Далее, в этом направлении появились многочисленные исследования, охватившие, в том числе, абстрактные дискретные операторы. Здесь можно указать на работы В.В.Дубровского, Х.Х.Муртазина, З.Ю.Фазуллина, В.А.Садовничего и В.Е.Подольского, А.Байрамова, З.Оер и О.Байкал, И.Ф.Гашимова и др.

Что касается вычисления регуляризванного следа дифференциального уравнения с ограниченным операторным потенциалом, первый результат принадлежит Р.З.Халиловой.

В данной диссертации в сепарабельном гильбертовом пространстве изучается асимптотика собственных значений задач, порожденных сингулярными и регулярными дифференциально-операторными выражениями и граничными условиями, содержащими спектральный и действительный параметр и доказываются формулы следов соответствующих операторов. Задачи с краевыми условиями, зависящими от спектрального параметра, рассматривались, напмример, в работах Л.А.Котко и С.Г.Крейна, У.Фултона, Вальтера, В.Феллера, И.Албайрак, М.Байрамоглы и А.А.Адыгезалова, С.Якубова, М.А.Рыбака, Б.А.Алиева, Н.Б.Керимова и З.С.Алиева и др.

Задачи с краевыми условиями , зависящими от λ важны в теории вероятностей, а также их физические применения возникают в большом множестве задач теплопроводности, механических вибраций, диффузии в пористой среде, колебаний нагруженной струны.

Цель работы. Описание самосопряженных расширений симметричных операторов, порожденных дифференциально-операторным выражением Бесселя на конечном интервале и краевыми условиями содержащими спектральный и физический параметр; получение асимптотики спектра и формул следов этих расширений; исследование асимптотики спектра и доказательство формул следа для операторов, порожденных сингулярным дифференциальным выражением, заданным на неограниченном интервале; исследование асимптотики собственных чисел и вычисление регуляризованных следов операторов, порожденных регулярным дифференциально-операторным выражением и краевыми условиями, содержащими физический или спектральный параметр; изучение формул следов высших порядков и следа дифференциального оператора четвертого порядка.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты:

- в прямом произведении гильбертовых пространств описаны самосопряженные расширения минимального симметричного оператора, соответствующего краевым задачам для операторного уравнения Бесселя с краевыми условиями, содержащими спектральный параметр;
- изучено асимптотическое поведение собственных значений вышеуказанных операторов и доказаны формулы следов.
- получена асимптотика собственных значений для оператора, порожденного сингулярным дифференциально-операторным выражением, заданным на полуоси и вычислен след этого оператора;
- найдена асимптотика спектра и вычислен регуляризованный след оператора, порожденного сингулярным дифференциально-операторным выражением на полуоси и краевым условием в нуле, содержащим спектральный параметр;
- изучено асимптотическое поведение собственных значений операторов, порожденных регулярным дифференциально-операторным выражением, заданным на конечном отрезке, и граничными условиями зависящими от спектрального параметра, когда спектральный параметр

в граничных условиях находится перед самой функцией. Доказаны формулы следов этих операторов;
- вычислен регуляризованный след для операторов, соответствующих краевым задачам, когда спектральный параметр находится перед самой функцией и перед производной;
- получена формула следа для оператора, порожденного дифференциально-операторным выражением четвертого порядка и краевыми условиями, содержащими параметр;
- найдена формула второго регуляризованного следа для оператора, порожденного дифференциально-операторным выражением с неограниченным операторным коэффициентом, заданным на конечном отрезке и с краевым условием зависящим от λ;
- получена формула n-го регуляризованного следа оператора, порожденного дифференциально-операторным выражением второго порядка.

Общая методика исследований. В работе применяются методы теории самосопряженных операторов, теории линейных операторов в гильбертовом пространстве, теории функций комплексного переменного, теории возмущений.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, носят в основном теоретический характер. Они могут быть применены к исследованию спектральных свойств дифференциальных уравнений с частными производными и интегро-дифференциальных уравнений. При исследовании задач теплопроводности, механических вибраций, диффузии пористых сред, колебаний нагруженной струны и т.д. возникают краевые задачи на собственные значения для уравнений в частных производных, которые решены в диссертации методами дифференциально-операторных уравнений. Утверждения, доказанные на языке абстрактных операторов, использованы при изучении асимптотики собственных значений и вычислении регуляризованного следа краевой задачи для уравнения в частных производных в цилиндре, в случае, когда краевое условие содержит производную функции по времени.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно обсуждались на общеинститутских семинарах Института Математики и Механики НАН Азербайджана, на семинарах отделов «Дифференциальные уравнения» (рук.: член-корр НАНА, проф. Б.А.Искендеров), «Функциональный анализ» (рук.: д.ф.-м.н., проф. Н.Ш.Искендеров), «Негармонический анализ» (рук.: д.ф.-м.н., проф. Б.Т.Билалов), «Математический анализ» (рук.: д.ф.-м.н., проф.

Р.М.Рзаев), а также на международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летию со дня рождения акад. А.Д.Гаджиева (Баку, 2007), на международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию Института Математики и Механики НАНА (Баку, 2009), на международной конференции, посвященной 80-летию акад. Ф.Г.Максудова «Спектральная теория и ее приложения» (Баку, 2010), на международной конференции, посвященной 100-летию акад. З.И.Халилова «Функциональный анализ и его приложения» (Баку, 2011), на V международной научной конференции, посвященной 80-летию Дагестанского Государственного Университета (Махачкала, 2011), на IV международном конгрессе математического сообщества тюркского мира (Баку, 2011.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 20 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 213 страницах, состоит из введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 133 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введение обосновываются темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

В первой главе изучаются краевые задачи для операторного уравнения Бесселя с граничными условиями, зависящими от спектрального параметра.

Сингулярные дифференциально-операторные уравнения с краевыми условиями, зависящими от спектрального параметра, изучаются здесь впервые. Большие трудности связаны со сложным видом собственных функций.

В параграфах 1.1-1.5 первой главы изучается спектр и доказывается формула регуляризованного следа для самосопряженного оператора. В пространстве $L_2(H,(0,1))$ рассматри-вается задача

$$l[y] \equiv -y'' + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} y + Ay + q(t)y = \lambda y, \quad t \in (0,1), \quad \nu > 1,$$

$$y(1) - hy'(1) = \lambda y(1), \quad h < 0,$$

где $A = A^*$, A^{-1}вполне непрерывен в сепарабельном гильбертовом пространстве H. При этих условиях A дискретный оператор. Его собственные значения и собственные функции обозначаются через $\gamma_1 \le \gamma_2 \le \ldots$ и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, соответственно.

Операторная функция $q(t)$ при каждом t действует в H, слабоизмерима, $\|q(t)\|_H \le const \quad \forall\, t \in [0,1]$, также удовлетворяет следующим условиям:

1. $q(t)$ имеет вторую слабую производную на [0,1], $q^{(l)}(t)$ $(l = 0,1,2)$ самосопряженные операторы в H.
2. Существует такой оператор $c = c^*$ в H, что $\sum_{k=1}^{\infty} |(c\varphi_k, \varphi_k)| < const$.
3. $\int_0^1 (q(t)f, f)dt = 0, \forall f \in H$.

Отметим, что при выполнении условия 2, имеем также $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(q^{(l)}(t)\varphi_k, \varphi_k\right)\right| < const, \forall t \in [0,1],\ l = 0,1,2$.

В первом параграфе вводится пространство $L_2 \equiv L_2(H,(0,1)) \oplus H$ и, подобно Вальтеру и Ч.Фултону, определяется самосопряженный оператор L_0. Скалярным произведением элементов Y, Z в пространстве L_2 определяется как

$$(Y, Z) = \int_0^1 (y(t), z(t))dt - \frac{1}{h}(y_1, z_1),$$

где $Y = \{y(t), y_1\}$, $Z = \{z(t), z_1\}$; $y(t)$, $z(t) \in L_2\ (H,(0,1))$; $y_1, z_1 \in H$.

Областью определения оператора L_0 является

$$D(L_0) = \{Y \in L_2, l[y] \in L_2(H,(0,1)), y_1 = y(1)\},$$

и его действие на элементы из области определения, задается как

$$L_0\, Y = \{l[y], y(1) - hy'(1)\}.$$

Во втором параграфе, пользуясь теоремой Реллиха, доказывается дискретность спектра оператора L_0. Определяем в L_2 оператор $Q : QY = \{q(t)y(t), 0\}$. Очевидно, что Q самосопряженный ограниченный оператор в L_2. Пусть $L = L_0 + Q$. Из следующего соотношения для резольвент операторов L_0 и L

$$R_\lambda(L) = R_\lambda(L_0) - R_\lambda(L)QR_\lambda(L_0)$$

вытекает, что спектр оператора L также дискретен. Обозначим собственные числа операторов L и L_0 через $\mu_1 \le \mu_2 \le \dots$ и $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$, соответственно.

Для собственных чисел операторов L_0 и L получено следующее утверждение.

Теорема 1. Если $\gamma_k \sim a \cdot k^\alpha \left(0 < a, \alpha > 0\right)$, то $\lambda_n \sim \mu_n \sim dn^\delta$, где

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{2\alpha}{\alpha+2}, \text{ при } \alpha > 2 \\ \dfrac{\alpha}{2}, \text{ при } \alpha < 2 \\ 1, \text{ при } \alpha = 2 \end{cases}$$

Так же как и в работе Ф.Г.Максудова, М.Байрамоглы и А.Адыгезалова можно доказать следующую лемму.

Лемма 1. Если при $k \to \infty$, $\gamma_k \sim ak^\alpha$, $a > 0, \alpha > 2$, то существует подпоследовательность $\lambda_{n_1} < \lambda_{n_2} < \dots$ последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ такая, что

$$\lambda_k - \lambda_{n_m} \ge d\left(k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} - n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\right), \quad k = n_m, n_m + 1, \dots,$$

где d -некоторое положительное число.

Пользуясь теоремой 1 и леммой 1, получаем следующее равенство

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{n_m} \left(\mu_n - \lambda_n - \left(Q\psi_n, \psi_n\right)\right) = 0,$$

где $\{\psi_n\}$- ортонормированные собственные функции оператора L_0.

$\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)$ называем регуляризованным следом оператора L. В пятом параграфе доказывается, что его значение не зависит от выбора подпоследовательности $\{n_m\}$, удовлетворяющей утверждению леммы 1 и получается формула следа для оператора L.

Сперва доказывается следующая лемма.

Лемма 2. Если операторная функция $q(t)$ удовлетворяет условиям 1,2 и $\alpha>0$, тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1\left|\frac{2x_{m,k}^2h^2tJ_\nu^2(x_{m,k}\,t)(q(t)\varphi_k,\varphi_k)}{J_\nu^2(x_{m,k}\,)A(x_{m,k})}\right|dt+$$

$$+\sum_{k=N}^{\infty}\int_0^1\left|\frac{2x_{0,k}^2h^2tJ_\nu^2(x_{0,k}\,t)(q(t)\varphi_k,\varphi_k)}{J_\nu^2(x_{m,k}\,)A(x_{0,k})}\right|dt<\infty,$$

где

$$A(x_{m,k})=1-h-2x_{m,k}^2-2\gamma_k+\tfrac{h^2}{4}-x_{m,k}^2h+\gamma_kh+x_{m,k}^4+$$
$$+2\gamma_kx_{m,k}^2+\gamma_k^2+h^2x_{m,k}^2-\nu^2h^2 .$$

Согласно лемме 2, получаем

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)=\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1\frac{2x_{m,k}^2h^2tJ_\nu^2(x_{m,k}\,t)f_k(t)}{A(x_{m,k})J_\nu^2(x_{m,k}\,)}dt+$$

$$+\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1\frac{2x_{m,k}^2h^2tJ_\nu^2(x_{m,k}\,t)f_k(t)}{A(x_{m,k})J_\nu^2(x_{m,k}\,)}dt,$$

где $f_k(t)=(q(t)\varphi_k,\varphi_k)$.

Доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Если операторная функция $q(t)$ удовлетворяет условиям 1-3, то справедлива

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)=-\frac{2\nu\sum\limits_{k=1}^{\infty}(q(0)\varphi_k,\varphi_k)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(q(1)\varphi_k,\varphi_k)}{4}.$$

В конце пятого параграфа главы 1 приводится пример. Рассматривается краевая задача для дифференциальных уравнений в частных производных с граничным условием, включающим производную по времени. Задача приводится к операторной форме, для которой справедливы теоремы 1 и 2.

В шестом параграфе в пространстве $L_2\left(H,(0,1)\right)$ рассматривается уравнение

$$l[y] = -y'' + \frac{\nu - \frac{1}{4}}{t^2} y + Ay + q(t)y = \lambda y$$

с краевым условием

$$y'(1) = \lambda y(1).$$

При $q(t) \equiv 0$ в пространстве $L_2 = L_2\left(H,(0,1)\right) \oplus H$ векторов $Y = \{y(t), y_1\},\ Z = \{z(t), z_1\},\ y(t), z(t) \in L_2(H,(0,1)),\ y_1, z_1 \in H$ со скалярным произведением

$$(Y,Z)_{L_2} = \int_0^1 (y(t), z(t))dt + (y_1, z_1),$$

определяется самосопряженный оператор L_0

$$D(L_0) = \{Y \in L_2 / l[y] \in L_2(H,(0,1)), y_1 = y(1)\},$$

$$L_0 Y = \{l[y], y'(1)\}$$

и возмущенный оператор $L: L = L_0 + Q,\ QY = \{q(t)y(t), 0\}$.

Доказывается дискретность спектра оператора L_0. В седьмом параграфе получаем формулу для асимптотического распределения собственных значений операторов L_0 и L. В восьмом параграфе вычисляется регуляризованный след оператора L.

Во второй главе исследуются сингулярные краевые задачи в $L_2(H,(0,\infty))$ для уравнения

$$l[y] \equiv -y''(t) + ty(t) + Ay(t) + q(t)y(t) = \lambda y(t),$$

где A - самосопряженный оператор, действующий в H, $A > E$, E - единичный оператор в H, $A^{-1} \in \sigma_\infty$. При этих условиях спектр оператора A дискретен. Обозначим собственные значения A через $\gamma_1 \le \gamma_2 \le \ldots$ и ортонормированные собственные функции через $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$

.

Предполагается, что операторная функция $q(t)$ слабоизмерима, $\|q(t)\| < const$, $q^*(t) = q(t)$, $\forall t \in [0,\infty)$ и удовлетворяет еще условиям:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(q(t)\varphi_k, \varphi_k)| < const$, $\forall t \in [0,\infty)$.

2. $\frac{q_k(t)}{t}$ $(q_k(t) = (q(t)\varphi_k, \varphi_k))$ суммируема на $(0,\infty)$,

$\int\limits_0^\infty \frac{q_k(t)}{t} dt = 0 \quad \forall k = \overline{1,\infty}$.

3. $\int\limits_0^\delta \left|\frac{q_k(t)}{t^5}\right| dt < \infty$, $\delta > 0$, $\forall k = \overline{1,\infty}$.

В работе А.С.Печенцова вычислены регуляризованные следы всех порядков для оператора, порожденного выражением

$$l[y] \equiv (-1)^n \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} + xy$$

и краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{k_m} a_{mj} y^{(k_m - j)}(0) = 0, \quad m = \overline{1,n},$$

$$a_{m0} = 1, \quad k_n < k_{n-1} < \ldots < k_1 < 2n.$$

В первом параграфе второй главы в $L_2(H,(0,\infty))$ рассматривается задача

$$l[y] = \lambda y,$$
$$y'(0) - \lambda y(0) = 0.$$

Оператор, связанный с этой задачей, не является самосопряженным в $L_2(H,(0,\infty))$. Вводим пространство $L_2 = L_2(H,(0,\infty)) \oplus H$ со скалярным произведением для элементов $Y = (y(t), y_0), Z = (z(t), z_0) \in L_2$, определенным как

$$(Y,Z) = \int_0^\infty (y(t), z(t)) dt + (y_0, z_0).$$

Легко проверить, что оператор L_0, определенный в L_2 при $q(t) \equiv 0$ следующим образом

$$D(L_0)=\{Y\in L_2 / l[y]\in L_2(H,(0,\infty)), y_0=y(0)\}$$
$$L_0Y=\{l[y], -y'(0)\},$$
является самосопряженным.

При $q(t)\not\equiv 0$ соответствующий оператор обозначим через L
$$L: L_0=L_0+Q,\quad QY=\{q(t)y(t),0\}.$$

Во втором параграфе второй главы доказывается дискретность спектра оператора L_0.

В третьем параграфе получаем асимптотическую формулу для собственных значений оператора L_0.

Лемма 3. Собственные числа оператора L_0 распадаются на две серии:
$$\lambda_k\sim\sqrt{\gamma_k+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2},\qquad \lambda_{m,k}=\gamma_k+z_m^2,$$
где
$$z_m=cm^{\frac{1}{3}}+O\left(\frac{1}{m^{\frac{2}{3}}}\right)$$
при больших m.

Пользуясь леммой 3, получается следующее утверждение об асимптотике собственных значений оператора L_0.

Лемма 4. Если $\gamma_k\sim a\cdot k^{\alpha}$ $(a>0,\alpha>0)$, то собственные числа оператора L_0 имеют следующую асимптотику при больших n
$$\mu_n\sim d\cdot n^{\beta},$$
где
$$\beta=\begin{cases}\dfrac{2\alpha}{2+3\alpha}, \alpha\in\left(0,\dfrac{2}{3}\right)\\ \dfrac{\alpha}{2}, \alpha>\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{1}{3}, \alpha=\dfrac{2}{3}\end{cases}.$$

Обозначим собственные числа оператора L через $\mu_1 \le \mu_2 \le \ldots$ с учетом их кратностей.

В четвертом параграфе получена формула следа оператора L.

Доказывается следующая лемма.

Лемма 5. Пусть выполняется условие леммы 4. Тогда при $\alpha > \frac{2}{3}$ существует такая подпоследовательность $\{n_m\}$ натуральных чисел, что справедливо соотношение

$$\lambda_k - \lambda_{n_m} \ge \frac{d}{2}\left(k^{\frac{\alpha}{2}} - n_m^{\frac{\alpha}{2}}\right), \quad k = n_m, \quad n_m + 1, \ldots .$$

$\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n_m}(\mu_n - \lambda_n)$ называем регуляризованным следом оператора L. В дальнейшем показывается, что значение предела не зависит от выбора последовательности $\{n_m\}$, удовлетворяющей утверждению леммы 5.

Пользуясь леммой 5, доказывается следующее утверждение.

Лемма 6. Пусть $\|q(t)\| < const$ на интервале $[0,\infty)$ и выполняется условие леммы 5. Тогда при $\alpha > 2$ справедливо соотношение

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}\left(\mu_n - \lambda_n - (Q\psi_n, \psi_n)\right) = 0,$$

где $\{\psi_n\}$ – ортонормированные собственные функции оператора L_0.

Нормировав собственные функции оператора L_0, получаем

$$\psi_{m,k} = \frac{\sqrt{3}\left(\psi\left(x_{m,k}^2, t\right)\varphi_k, \psi\left(x_{m,k}^2, 0\right)\varphi_k\right)}{\pi x_{m,k}\left(J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x_{m,k}^3\right) + J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x_{m,k}^3\right)\right)\sqrt{x_{m,k}^2 + 1 + \left(x_{m,k}^2 + \gamma_k\right)^2}},$$

где

$$\psi\left(x_{m,k}^2, t\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{t + \gamma_k - x_{m,k}^2}\,K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\left(t + \gamma_k - x_{m,k}^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

Доказывается

Лемма 7. Если операторная функция $q(t)$ удовлетворяет условию 1 и $\alpha > 2$, то

$$\frac{3}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=M_k}^{\infty}\int_0^{\infty}\left|\frac{q_k(t)\psi\left(x_{m,k}^2,t\right)^2}{x_{m,k}^2\left(J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x_{m,k}^3\right)+J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x_{m,k}^3\right)\right)^2\left(x_{m,k}^2+1+\left(x_{m,k}^2+\gamma_k\right)^2\right)}\right|dt+$$

$$+\frac{3}{\pi^2}\sum_{k=K}^{\infty}\int_0^{\infty}\left|\frac{q_k(t)\psi\left(x_{0,k}^2,t\right)^2}{x_{0,k}^2\left(J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x_{0,k}^3\right)+J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x_{0,k}^3\right)\right)^2\left(x_{0,k}^2+1+\left(x_{0,k}^2+\gamma_k\right)^2\right)}\right|dt<\infty,$$

где $x_{m,k}$ вещественные, а $x_{0,k}$ мнимые нули характеристического определителя.

Согласно этой лемме,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)=$$

$$=\sum_{k=K}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\left|\frac{3q_k(t)\psi\left(x_{m,k}^2,t\right)^2dt}{\pi x_{m,k}^2\left(J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x_{m,k}^3\right)+J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x_{m,k}^3\right)\right)\left(x_{m,k}^2+1+\left(x_{m,k}^2+\gamma_k\right)^2\right)}\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{K-1}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{q_k(t)\psi\left(x_{m,k}^2,t\right)^2dt}{\pi x_{m,k}^2\left(J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x_{m,k}^3\right)+J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x_{m,k}^3\right)\right)\left(x_{m,k}^2+1+\left(x_{m,k}^2+\gamma_k\right)^2\right)}.$$

Доказывается следующая теорема о следе.

Теорема 3. Пусть выполняется условие леммы 6. Если операторная функция $q(t)$ удовлетворяет условиям 1-3, то справедлива формула

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)=0.$$

В пятом параграфе второй главы в пространстве $L_2(H,(0,\infty))$ рассматривается краевая задача

$$l[y]=-y''(t)+ty(t)+Ay(t)+q(t)y(t)=\lambda y(t),$$
$$y'(0)=0.$$

При $q(t)\equiv 0$ в $L_2(H,(0,\infty))$ определяем самосопряженный положительно определенный оператор L_2

$$D(L_2)=\{y(t)\in L_2(H,(0,\infty))/\,l[y]\in L_2(H,(0,\infty)),\,y'(0)=0\},$$
$$L_2 y=l[y].$$

Находим асимптотику спектра этого оператора и получаем формулу следа для возмущенного оператора.

В третьей главе исследуется асимптотика спектра и доказываются формулы для регуляризованных следов операторов, порожденных регулярными дифференциально-операторными выражениями.

В первом параграфе третьей главы получается асимптотическая формула для спектра оператора L_1, соответствующего в $L_2(H,(0,1))$ краевой задаче

$$l_1[y]=-y''(t)+Ay(t)+q(t)y(t)=\lambda y(t),$$
$$y(0)=0,$$
$$y(1)-hy'(1)=\lambda y(1).$$

где $A=A^*>E$, $E-$тождественный оператор в $H, A^{-1}\in\sigma_\infty$. Собственные числа и собственные элементы оператора A обозначаем через $\gamma_1\le\gamma_2\le\ldots$ и $\varphi_1,\varphi,\ldots$.

Предполагается, что операторная функция $q(t)$ слабоизмерима, $\|q(t)\|$, как функция от t, ограничена на $[0,1]$ и удовлетворяет, помимо этого, еще следующим условиям

1) $q(t)$ имеет вторую слабую производную на $[0,1]$, $q^{(l)}(t), l=0,1,2$ при каждом $t\in[0,1]$ являются ядерными самосопряженными операторными в H, т.е, $q^{(l)}(t)\in\sigma_1$, $\left[q^{(l)}(t)\right]^*=q^{(l)}(t)$;

2) функции $\left\|q^{(l)}(t)\right\|_1$, $l=\overline{0,2}$ ограничены на отрезке $[0,1]$. ($\|.\|_1$-норма в σ_1);

3) $q'(0)=q'(1)=0$;

4) $\int\limits_0^1 (q(t)f, f)dt = 0$ при любом $f \in H$.

Здесь σ_1 пространство компактных операторов, s - числа которых образуют сходящейся ряд.

Вводим пространство $L_2 = L_2(H,(0,1)) \oplus H$. Скалярное произведение в L_2 определяем как

$$(Y, Z)_{L_2} = \int\limits_0^1 (y(t), z(t))dt - \frac{1}{h}(y_1, z_1),$$

где

$$Y = \{y(t), y_1\},\ Z = \{z(t), z_1\},\ y(t), z(t) \in L_2(H,(0,1)).$$

Минимальный оператор, порожденный выражением l_1 в пространстве L_2, является симметрическим. В L_2 при $q(t) \equiv 0$ рассматриваем его самосопряженное расширение L_1 с областью определения

$$D(L_1) = \{Y \in L_2 / - y''(t) + Ay(t) \in L_2(H,(0,1)), y(0) = 0 \ u \ \text{y}_1 = y(1)\},$$

действующий как

$$L_1 Y = L_1\{y(t), y(1)\} = \{- y''(t) + Ay(t), y(1) - hy'(1)\},$$

также $L_1{}'$

$$L_1{}' = L_1 + Q, \quad Q\{y(t), y(1)\} = \{q(t)y(t), 0\}.$$

При данных условиях доказывается положительная определенность оператора L_1, устанавливается дискретность его спектра. Так как Q ограничен, то спектр $L_1{}'$ также дискретен. Обозначаем его собственные значения через $\mu_1 \le \mu_2 \le \ldots$.

Доказывается следующая лемма о собственных значениях.

Лемма 8. Собственные значения оператора L_1 распадаются на следующие две серии:

$$\lambda_k = -h\sqrt{\gamma_k} + 1 - \frac{h^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_k}}\right),\ \lambda_{k,n} = \gamma_k + (\pi n)^2 - 2h + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Пользуясь этой леммой, приходим к следующему утверждению.

Лемма 9. Пусть $A = A^* > E$, $A^{-1} \in \sigma_\infty$ и $\gamma_k \sim a \cdot k^\alpha$ $(a > 0,\ \alpha > 0)$. Тогда $\lambda_n \sim \mu_n \sim dn^\delta$, где

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{2\alpha}{\alpha + 2}, \ \alpha > 2 \\ \dfrac{\alpha}{2}, \ \alpha < 2 \\ 1, \ \alpha = 2 \end{cases}.$$

На основе леммы 9 получаем , что

$$\lim_{m \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{n_m} \left(\mu_n - \lambda_n - (Q\psi_n, \psi_n) \right) \right) = 0,$$

где $\{n_m\}$-некоторая подпоследовательность натурального ряда, $\{\psi_n\}$-ортонормированные собственные функции оператора L_1.

$\lim\limits_{m \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{n_m} (\mu_n - \lambda_n)$ называем регуляризованным следом оператора L_1'.

Нормировав собственные функции оператора L_1, получаем, что они имеют вид

$$\sqrt{\frac{4x_{k,n}h}{2x_{k,n}h - h\sin 2x_{k,n} - 2x_{k,n} + 2x_{k,n}\cos 2x_{k,n}}} \ \{\sin(x_{k,n}t)\varphi_k, \sin(x_{k,n})\varphi_n\},$$

$$\begin{pmatrix} n = \overline{0,\infty} & k = \overline{N,\infty} \\ n = \overline{1,\infty} & k = \overline{1, N-1} \end{pmatrix},$$

где $x_{k,n}$ - корни уравнения

$$\sin z - hz\cos z = (z^2 + \gamma_k)\sin z$$

($x_{k,0}$ -мнимый корень, а $x_{k,n}$, $n = \overline{1,\infty}$ – вещественный корень).

Доказывается следующая лемма.

Лемма 10. Если операторная функция $q(t)$ удовлетворяет условиям 1)-3) и $\alpha > 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^1 \frac{2x_{k,n}h\cos(2x_{k,n})f_k(t)\,dt}{2x_{k,n}h-h\sin 2x_{k,n}-2x_{k,n}+2x_{k,n}\cos 2x_{k,n}}\right|+$$

$$+\sum_{k=N}^{\infty}\left|\int_0^1 \frac{2x_{k,0}h\cos(2x_{k,0})f_k(t)\,dt}{2x_{k,0}h-h\sin 2x_{k,0}-2x_{k,0}+2x_{k,0}\cos 2x_{k,0}}\right|<\infty ,$$

где $f_k(t)=(q(t)\varphi_k\,\varphi_k)$.

Предполагаем выполнение также условия

5) $\int\limits_{1-\delta}^{1}\frac{|f_k(t)|}{t-1}dt<\infty$,

где $\delta>0$ - достаточно малое число.

Пользуясь леммой 3.1.4 доказывается следующая теорема о следе.

Теорема 4. Пусть выполняются условия леммы 9. Если операторная функция $q(t)$ удовлетворяет условиям 1)-5), то справедлива формула

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)=\frac{trq(1)+trq(0)}{4}.$$

Во втором параграфе третьей главы в $L_2(H,(0,1))$ рассматривается краевая задача

$$l[y]=\lambda y,$$
$$y'(0)=0,$$
$$y(1)-hy'(1)=\lambda y(1).$$

При $q(t)=0$ определяем в пространстве $L_2=L_2(H,(0,1))\oplus H$ самосопряженный оператор L_3 следующим образом

$$D(L_3)=\{Y=\{y(t),y_1\}\in L_2\,/\,l[y]\in L_2(H,(0,1)),\,y'(0)=0,\,y_1=y(1)\},$$
$$L_3Y=\{-y''(t)+Ay(t),\ y(1)-hy'(1)\}.$$

Изучается спектр этого оператора, также получается формула следа возмущенного оператора $L_4=L_3+Q$.

В третьем параграфе третьей главы в $L_2(H,(0,\pi))$-пространстве вектор функций $y(t)$, $t\in(0,\pi)$, для которых $\int\limits_0^{\pi}\|y(t)\|_H^2dt<\infty$, рассматривается задача

$$l[y]=\lambda y,$$
$$y(0)=0,$$
$$y'(\pi)-\lambda y(\pi)=0.$$
Заметим, что в работе М.А.Рыбака были построены самосопряженные расширения минимального оператора, соответствующего этой задаче в $L_2=L_2(H,(0,\pi))\oplus H$ со скалярным произведением
$$(Y,Z)=\int_0^\pi (y(t),z(t))_H\,dt+(y(\pi),z(\pi))_H,$$
$$Y=\{y(t),y(\pi)\},\ z=\{z(t),z(\pi)\}.$$
Выражение $l[y]$ при $q(t)\equiv 0$ обозначим через $l_0[y]$.

М.А.Рыбак получил асимптотику собственных значений оператора $L_5: L_5\ Y=\{l_0[y],\ y'(\pi)\}$,
$$D(L_5)=\{Y=\{y(t),y(\pi)\}\in L_2\,/\,l_0[y]\in L_2((0,\pi),H),y(0)=0\}.$$
Мы доказываем формулу следа для возмущенного оператора
$$L_6=L_5+Q,\ \ Q=\{y(t),y(\pi)\}=\{q(t)y(t),0\}.$$

В четвертом параграфе третьей главы рассматривается следующая задача в пространстве $L_2(H,(0,1))$:
$$l[y]\equiv -y''(t)+Ay(t)+q(t)y(t)=\lambda y(t),$$
$$y(0)=0,$$
$$-y(1)=\lambda y'(1).$$
Отметим, что в работе Б.А.Алиева была рассмотрена эта задача и получена асимптотическая формула для его собственных значений.

В пространстве $L_2=L_2(H,(0,1))\oplus H$ элементов $Y=\{y(t),y_1\}$ определяем следующий самосопряженный оператор L_8.
$$D(L_8)=\{Y=\{y(t),y'(1)\}\in L_2\,/\,l[y]\in L_2(H,(0,1)),y(0)=0\},$$
$$L_8Y=\{-y''(t)+Ay(t)+q(t)y(t),-y(1)\}.$$

В этом параграфе получена формула для регуляризованного следа оператора L_8.

В пятом параграфе рассматриваем дифференциальные операторы L_9 и L_{10}, порожденные, соответственно, выражениями
$$l_0[y]=-y''+Ay,\quad l[y]=-y''+Ay+q(t)y,$$

и граничными условиями

$$y'(0)=0,\ \ y'(\pi)-hy(\pi)=0$$

в пространстве $H_1=L_2(H,(0,\pi))$. Получаем формулу следа оператора L.

В четвертой главе изучаются следы высокого порядка и следы операторов высокого порядка.

В первом параграфе этой главы рассматривается задача

$$-y''(t)+Ay(t)+q(t)y(t)=\lambda y(t),$$

$$y(0)=0,$$

$$y'(\pi)-\lambda y(\pi)=0,$$

в пространстве $L_2(H,(0,\pi))$, где H - сепарабельное гильбертово пространство.

$A=A^*, A>E$, E -тождественный оператор, $A^{-1}\in\sigma_\infty$, $q^*(t)=q(t)$ слабоизмерима, также удовлетворяет условиям:

1. $q(t)$ имеет четвертую слабую производную на $[0,\pi]$, $q^{(l)}(t)\in\sigma_1$, и $\left\|q^{(l)}(t)\right\|_{\sigma_1}\le const$ для любого $t\in[0,\pi]$, $\left(l=\overline{0,4}\right)$, $Aq^{(l)}(t)\in\sigma_1$, $\left\|Aq^{(l)}(t)\right\|\le const, l=\overline{0,2}$;

2. $q'(0)=q'(\pi)=q(\pi)=0$;

3. $\int\limits_0^\pi (q(t)f,f)dt=0,\quad \forall f\in H.$

Доказывается формула второго регуляризованного следа оператора L, для которого в третьем параграфе третьей главы получена формула первого регуляризовонного следа. Оператор, соответствующий случаю $q(t)\equiv 0$, обозначаем через L_0.

Пусть $R_0(\lambda)$- резольвента оператора L_0^2. Согласно общим теоремам В.А.Садовничего и В.Е.Подольского для абстрактных опертаоров, получаем, что при условии ограниченности $L_0QL_0^{-1}$ ($Q(y(t),y(\pi)=(q(t)y(t),0))$) и $N>\dfrac{1}{2\omega}$, где $\omega\in[0,1)$, справедлива

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{n_m}\left(\lambda_n^2-\mu_n^2\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}tr\left[\left(L_0Q+QL_0+Q^2\right)R_0(\lambda)\right]^k d\lambda\right)=0 \text{ г}$$

де $\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots$и $\mu_1\le\mu_2\le\ldots$ собственные значения операторов L и L_0, соответственно.

Назовем

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{n_m}\left(\lambda_n^2-\mu_n^2-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}trq^2(t)dt\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_m}\sum_{k=2}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}tr\left[L_0Q+QL_0+Q^2R_0(\lambda)\right]^k d\lambda\right\}$$

вторым регуляризованным следом оператора L и обозначим его через $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{(2)}-\mu_n^{(2)}$.

Для вычисления второго регуляризованного следа оператора L доказывается лемма.

Лемма 11. Если $\gamma_j\sim a\cdot j^{\alpha}$, $a>0,\alpha>2$ и выполняются условия 1,2, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(\gamma_j+x_{j,k}^2\right)\frac{2x_{j,k}\int_0^{\pi}\cos\left(2x_{j,k}t\right)f_j(t)dt}{2x_{j,k}\pi-\sin 2x_{j,k}\pi+4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi}\right|+$$

$$+\sum_{j=N}^{\infty}\left|\frac{\left(\gamma_j+x_{j,0}^2\right)2x_{j,0}\int_0^{\pi}\cos\left(2x_{j,0}t\right)f_j(t)dt}{2x_{j,0}\pi-\sin 2x_{j,0}\pi+4x_{j,0}\sin^2 x_{j,0}\pi}\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left|\frac{4x_{j,k}\int_0^{\pi}\sin^2\left(x_{j,k}t\right)g_j(t)dt}{2x_{j,k}\pi-\sin\left(2x_{j,k}\pi\right)+4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g_j(t)dt\right|\right)+$$

$$+\sum_{j=N}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\left|\frac{4x_{j,0}\int_0^{\pi}\sin^2\left(x_{j,0}t\right)g_j(t)dt}{2x_{j,0}\pi-\sin 2x_{j,0}\pi+4x_{j,0}\sin^2 x_{j,0}\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g_j(t)dt\right|\right)<\infty,$$

где $$f_j(t)=\left(q(t)\varphi_j,\varphi_j\right),\ g_j(t)=\left(q^2(t)\varphi_j,\varphi_j\right).$$

Предполагается также выполнение следующего условия

4. $\int_{\pi-\delta}^{\pi}\frac{g_j(t)}{\pi-t}dt<\infty$ для малого $\delta>0$. Доказывается следующая теорема о следе.

Теорема 5. Пусть операторная функция $q(t)$ удовлетворяет условиям 1-4, $L_0^{-1}QL_0$ ограниченный в L_2 оператор, $\gamma_j\sim a\cdot j^{\alpha}, a>0, \alpha>2$. Тогда справедлива формула

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{(2)}-\mu_n^{(2)}\right)=-\frac{trq^2(0)}{4}-\frac{trAq(0)+trAq(\pi)}{2}+\frac{trq''(0)+trq''(\pi)}{8}.$$

Во втором параграфе получаем формулу следа для оператора, порожденного дифференциально -операторным выражением четвертого порядка.

В пространстве $L_2(H,(0,\pi))$, где H -сепарабельное гильбертово пространство, рассматривается задача

$$y^{IV}(x)+Ay(x)+p(x)y(x)=\lambda y(x),$$

$$y(0)=0,$$

$$y'(\pi)+hy(\pi)=0,$$

$$y''(0)=0,$$

$$y'''(\pi)+hy''(\pi)=0,\ h>0,$$

где $A=A^*>E$, E -тождественный оператор в H, $A^{-1}\in\sigma_\infty$. Обозначим собственные значения и ортонормированные собственные функции оператора A через $\gamma_1\le\gamma_2\le\ldots$ и $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$, соответственно.

Предполагаем, что операторная функция $p(x)$ действует при каждом x в H, слабоизмерима и удовлетворяет условиям:

1) $p(x)$ имеет вторую слабую производную $\left[p^{(l)}(x)\right]^*=p^{(l)}(x), l=\overline{0,2}$,

$\left\|p^{(l)}(x)\right\|<const$, $\forall\, x\in[0,\pi]$.

2). $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(p^{(l)}(x)\varphi_j,\varphi_j\right)\right|<const,\ l=\overline{0,2}$.

3). $p'(0)=p'(\pi)=0$.

4) $\displaystyle\int_0^\pi (p(x)f,f)dx=0,\ \forall f\in H$.

При $p(x)\equiv 0$ определяем в $L_2(H,(0,\pi))$ самосопряженный оператор L_0 с областью определения

$$D(L_0)=\{y(x)/\, y^{IV}(x)+Ay(x)\in L_2(H,(0,\pi)),\, y(0)=0,$$

$$y'(\pi)+hy(\pi)=0,\ y''(0)=0,\ \ y'''(\pi)+hy'(\pi)=0\},$$

действующей как

$$L_0 y(x)=y^{IV}(x)+Ay(x)$$

Возмущенный оператор обозначаем через $L: L=L_0+p$. В этом параграфе получаем формулу первого регуляризованного следа оператора L. Согласно теореме 1 в работе В.И.Горбачук[1] операторы L_0 и L имеют дискретные спектры. Обозначим их собственные значения через μ_n и λ_n, соответственно. Если $\gamma_k \sim rk^{\alpha}$, $r>0, \alpha>0$, то согласно той же работе собственные числа операторов L_0 и L ведут себя как

$$\mu_n \sim \lambda_n \sim dn^{\delta}\text{, где } d>0,\ \delta=\frac{4\alpha}{4+\alpha}.$$

Собственные числа оператора L_0 представимы в виде $\gamma_k+\alpha_m^4$, где α_m являются корнями уравнения

$$z\cos z\pi+h\sin z\pi=0$$

и имеют асимптотику

$$\alpha_m=m+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Ортонормированными собственными векторами оператора L_0 являются

---

[1] Горбачук В.И. Об асимптотике собственных значений граничных задач для дифференциальных уравнений в пространстве вектор функций. Украинский матем. журнал, 1975, т.27, №5, с.651-664

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{4\alpha_{m_n}}{2a_{m_n}\pi-\sin 2a_{m_n}\pi}}\sin(\alpha_{m_n}x)\varphi_{k_n} .$$

Доказываем, что при $\alpha>\frac{4}{3}$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}\left(\mu_n-\lambda_n-(p\psi_n,\psi_n)_{L_2}\right)=0 ,$$

где $\{n_m\}$ - некоторая подпоследовательность натурального ряда.

Имеет место лемма.

Лемма 12. При выполнении условий 1-3 справедливо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{2\alpha_m}{2\alpha_m\pi-\sin 2\alpha_m\pi}\int_0^{\pi}\cos(2\alpha_m x)(p(x)\varphi_k,\varphi_k)dx\right|<\infty .$$

$\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)$ называем регуляризованным следом оператора L. Пользуясь леммой 12, получаем

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\lambda_n-\mu_n)=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\alpha_m}{2\alpha_m\pi-\sin 2\alpha_m\pi}\int_0^{\pi}\cos 2\alpha_m x\, p_x(x)dx .$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $\gamma_k\sim ak^{\alpha}$, $a>0,\alpha>\frac{4}{3}$. Если операторная функция удовлетворяет условиям 1-4, то справедлива формула

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k(\pi)-p_k(0)}{4}$$

В третьем параграфе получаем формулу для n-го регуляризованного следа самосопряженного оператора с дискретным спектром, порожденного дифференциально-операторным выражением второго порядка.

В гильбертовом пространстве $H_1=L_2(H,(0,\pi))$ рассматриваются следующие два дифференциальных оператора L_0 и L, порожденные, соответственно, выражениями

$$l_0[y] = -y'' + Ay$$
$$l[y] = -y'' + Ay + Q(x)y,$$
и граничными условиями
$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) + hy(\pi) = 0,$$
где A-самосопряженный, полуограниченный снизу оператор и является обратным для вполне непрерывного оператора в H, $A > E$, E-единичный оператор в H.

Предполагаем, что операторная функция $Q(x)$ слабоизмерима и удовлетворяет условиям:

1. Операторная функция $Q(x)$ имеет $2n$-ю слабую производную на отрезке $[0,\pi]$ и $Q^{(2p-1)}(0) = Q^{(2p-1)}(\pi) = 0$, $p = \overline{1,n}$;, $Q^{(2p)}(\pi) = 0$, $p = \overline{0,n-2}$
2. $\|Q(x)\|_H \le const$.
3. $Q^{(l)}(x), l = \overline{0,2n}$, при каждом $x \in [0,\pi]$ являются самосопряженными операторами в H и
$$A^p\, Q^{(2(n-p))}(x),\ A^p\ Q^{(2(n-1-p))}(x) \in \sigma_1,\ x \in [0,\pi],$$
$$\left\|A^p Q^{(2(n-p))}(x)\right\|_1 < const,\ \left\|A^p\, Q^{(2(n-1-p))}(x)\right\|_1 < const$$
$$\forall x \in [0,\pi],\ p = \overline{0,n-1}.$$
4. $\int\limits_0^\pi (Q(x)f, f)dx = 0$ при любом $f \in H$.

Оператор L_0 имеет дискретный спектр. Обозначаем через $\gamma_1 \le \gamma_2 \le \ldots$ и $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ собственные числа и собственные элементы оператора A.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 13. Если при $i \to \infty$, $\gamma_i \sim a \cdot i^\alpha$ $(0 < a < \infty, \alpha > 2)$, то существует подпоследовательность $\mu_{k_1} < \mu_{k_2} < \ldots$ последователь-ности $\mu_1 \le \mu_2 \le \ldots$, такая, что
$$\mu_p - \mu_{k_m} \ge d\left(p^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} - k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\right), p = k_m, k_m + 1, \ldots,$$
где d - некоторое положительное число.

Пусть R_λ^0 и R_λ резольвенты операторов L_0 и L, соответственно. Вводим следующие обозначения

$$\mu_{(i)}^{(n)} = \sum_{s=k_{i-1}+1}^{k_i} \left\{ \mu_s^n + n \sum_{j=2}^{N} \frac{(1)^j}{j} \mathop{\mathrm{Re}\,s}_{\lambda=\mu_k} \left[\lambda^{n-1} tr\left(Q R_\lambda^0 \right)^j \right] \right\},$$

$$\lambda_{(i)}^{(n)} = \sum_{s=k_{i-1}+1}^{k_i} \lambda_s^n,\; k_0 = 0,$$

где $k_1 < k_2 < \dots$ некоторая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая лемме 13, N-натуральное число, удовлетворяющее условию

$$N > n + 1 + \frac{n+2}{\delta},\; \delta = \frac{2\alpha}{2+\alpha} - 1.$$

В этом параграфе получаем формулу для суммы ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\lambda_{(i)}^{(n)} - \mu_{(i)}^{(n)} \right)$. Сумма этого ряда не зависит от выбора подпоследовательности $k_1, k_2, \dots$, удовлетворяющей лемме 13. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\lambda_{(i)}^{(n)} - \mu_{(i)}^{(n)} \right)$ -назовем n-ым регуляризованным следом оператора L.

Доказывается следующая теорема.

Теорема 7. Пусть $\gamma_k \sim a \cdot k^\alpha$, $a > 0,\ \alpha > 2$. Если операторная функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям 1-4, то имеет место следующая формула

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\lambda_{(i)}^{(n)} - \mu_{(i)}^{(n)} \right) =$$

$$= n \frac{(1)^{n-1}}{4^n} \left[Q^{(2(n-1))}(\pi) - Q^{(2(n-1))}(0) \right] + \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-i} tr A^i Q^{(2(n-1-i))}(0).$$

В заключении автор выражает глубокую благодарность своему учителю доктору физико-математических наук, профессору М.Байрамоглы за постоянное внимание к работе и ценные советы. Автор также искренне благодарен член- корр. НАН Азербайджана, профессору Б.А.Искендерову за внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Асланова Н.М. Распределение собственных значений сингуляр-ного дифференциального оператораб заданного на всей оси. Изв. АН Азерб., 1997, т.XVIII, №4-5, с.15-20.
2. Асланова Н.М. Регуляризованный след операторного уравнения на конечном отрезке. Труды ИММ АНА, 1998, т.IX (XVII), с.23-26.
3. Aslanova N.M. Asymptotic behavior of the distribution function for one singular differential operator. Transactions of ASA, series phys.-tech. and math. sc. 1998, №3-4, p.3-5.
4. Aslanova N.M. The stability of the inverse problem of the scattering theory for non-self-adjoint operator. Transactions of ASA, series phys.-tech. and math. sc. 2000, v. XX, №4, p.30-34.
5. Aslanova N.M. The stability of the inverse problem of the scattering theory for non-self-adjoint operator on all axis. Proceedings of IMM of ASA, 2001, v.XXIV, p.28-36.
6. Асланова Н.М. Точность восстановления потенциала матричного уравнения Штурма-Лиувилля по данным рассеяния, известным на конечном интервале. Azerb. Texn. Univ. Elmi əsərlər, fundamental elmlər. 2004, c.3(9), №1, s.30-36.
7. Aslanova N.M. Integral generalization of the second order matrix differential equation. Transactions of ASA, series phys.-tech. and math. sc. 2004, v. XXIV, №1, p.71-78.
8. Aslanova N.M. Stability of reconstruction of the Sturm-Liouville operator with matrix coefficients on scattering data. Transactions of NASA, 2005, v. XXV, №1, p.33-42.
9. Aslanova N.M. Calculation of the regularized trace of differential operator with operator coefficient. Transactions of NASA, 2006, v. XXVI, №1, p.39-44.
10. Aslanova N.M. n-th regularized trace of differential operator equation. Transactions of NASA, 2006, v. XXVI, №7, p.27-32.
11. Асланова Н.М. Вычисление n -го регуляризованного следа задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии. Тезисы XIII межд. конф. по матем. и механ., посв. 70-летию акад. А.Д.Гаджиева, Баку 2007, с.27.
12. Aslanova N.M. Trace formula for Sturm-Liouville operator equation. Proceedings of IMM of NASA, v. XXVI, 2007, p.53-60.
13. Асланова Н.М. Формула следа одной граничной задачи для операторного уравнения Штурма-Лиувилля. Сибирский матем. журнал, 2008, т.49, №6, с.1207-1215.

14. Асланова Н.М., Асланов Х.М. Асимптотика собственных значений дифференциально-операторного уравнения второго порядка. Тезисы межд. конф. по матем. и механ., посв. 50-летию ИММ НАНА, Баку 2009, с.46.
15. Асланова Н.М. Исследование спектра и формула следа операторного уравнения Бесселя. Сибирский матем. журнал, 2010, т.51, №4, с.722-737.
16. Асланова Н.М., Асланов Х.М. Формула следа одной сингулярной задачи с параметром в граничном условии. Спектральная теория и ее приложения. Тезисы межд. конф. по матем. и механ., посв. 80-летнему юбилею акад. Ф.Г.Максудова, Баку 2010, с.68-70.
17. Байрамоглы М., Асланова Н.М. Распределение собственных значений и формула следа операторного уравнения Штурма-Лиувилля. Украинский матем. журнал, 2010, т. 62, №7, с.867-877.
18. Байрамоглы М., Асланова Н.М. Формула второго регуляризованного следа одной задачи Штурма-Лиувилля. Спектральная теория и ее приложения. Тезисы межд. конф., посв. 80- летнему юбилею акад. Ф.Г.Максудова, Баку 2010, с.101-103.
19. Асланова Н.М. Асимптотика спектра и формула следа одной сингулярной задачи. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения. Материалы V межд. конф., посв. 80-летию Дагестанского госуд. Унив., Махачкала 2011, с.55-57.
20. Асланова Н.М., Асланов Х.М., Бекалиев Р.М. Тождество для собственных значений операторного уравнения Штурма-Лиувилля. Функц. анализ и его приложения. Матер. межд. конф. посв. 100-летнему юбилею акад. З.И.Халилова, Баку 2011, с.48-50.
21. Байрамоглы М., Асланова Н.М. Формула следа для дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка. Функц. анализ и его приложения. Матер. межд. конф. посв. 100-летнему юбилею З.И.Халилова, Баку 2011, с.72-74.
22. Aslanova N.M. Study of the asymptotic eigenvalue distribution and trace formula of a second order operator differential equation. Boundary value problems2011, 2011:7, doi:10.1186/1687-2770-2011-7, 22p.
23. Aslanova N.M., Aslanov Kh.M. On identity for eigenvalues of one boundary value problem with eigenvalue dependent boundary condition. Transactions of NASA, series phys.-tech. and math. sc., 2011,v.XXXI, №4, p.27-34.
24. Bayramoglu M., Aslanova N.M.Formula for second order regularized trace of a problem with spectral parameter dependent boundary condition. Hacettepe Journal of Mathematics and statistics, v.40(5), 2011, p.635-647.

25. Bayramoglu M., Aslanova N.M. On asymptotics of eigenvalues and trace formula for second order differential operator equation. Proceedings of IMM of NASA, 2011, v.XXXV(XLIII), p.3-10.
26. Bayramoglu M., Aslanova N.M. The asymptotic behavior of eigenvalues and trace formula of second order differential operator equation. Book of abstracts IV congress of the Turkish world mathematical society, 1-3 July, Baku-2011, p.71.
27. Aslanova N.M. The asymptotics of eigenvalues and trace formula of operator associated with one singular problem. Boundary value problems 2012, 2012:8, doi:10.1186/1687-2770-2012-8, 12p.
28. Aslanova N.M., Aslanov Kh.M. The asymptotics of eigenvalues and trace formula of one singular problem. Transactions of NASA, series phys.-tech. and math. sc., 2012, v.XXXII, №1, pp.3-18.

NİGAR MƏHƏR qızı ASLANOVA

DİFERENSİAL-OPERATOR TƏNLİKLƏRİN SPEKTRİNİN VƏ İZLƏRİNİN TƏDQİQİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi qeyri-məhdud diferensial ifadələrlə doğrulmuş operatorların spektrinin və izlərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

İşdə aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

-Sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olduqda, operator Bessel tənliyi üçün sərhəd məsələlərinə uyğun minimal simmetrik operatorun öz-özünə qoşma genişlənmələrinin təsviri verilmiş və bu öz-özünə qoşma operatorların məxsusi ədədləri üçün asimptotik düstur və iz düsturları alınmışdır;

-Yarımoxda verilmiş sinqulyar diferensial-operator ifadə ilə doğrulmuş operatorun məxsusi ədədləri üçün asimptotik düstur alınmış və iz düsturu isbat edilmişdir;

- Spektral parametrdən asılı sərhəd şərti və yarımoxda verilmiş diferensial-operator ifadə ilə doğrulmuş operatorun spektri üçün asimptotik düstur tapılmış və requlərizə olunmuş iz hesablanmışdır;

-Parametrdən asılı sərhəd şərtləri və sonlu parçada verilmiş diferensial operator ifadələri ilə doğrulmuş operatorun məxsusi ədədləri üçün asimptotk düsturlar alınmışdır. Həmin opertaorların requlərizə olunmuş izləri hesablanmışdır;

- Parametrdən asılı sərhəd şərti və dördüncü tərtib diferensial operator ifadə ilə doğrulmuş operator üçün iz düsturu alınmışdır;

-λ parametri daxil olan sərhəd şərti və sonlu parçada verilmiş qeyri-məhdud operator əmsallı diferensial ifadə ilə doğrulmuş operatorun ikinci requlərizə olunmuş izi düsturu alınmışdır;

-İkinci tərtib diferensial operator ifadə ilə doğrulmuş operatorun n-ci requlərizə olunmuş izi düsturu alınmışdır.

NIGAR MAHAR GIZI ASLANOVA

INVESTIGATION OF THE SPECTRUM AND TRANCES OF THE DIFFERENTIAL OPERATOR EQUATIONS

ABSTRACTS

The dissertation work is devoted to the investigation of spectrum and calculations of regularized traces of operators generated by differential operator expressions with unbounded coefficients.

In the dissertation work the following main results are obtained:

- The selfadjoint extensions of minimal symmetric operator associated with boundary value problems for operator Bessel equation with spectral parameter dependent boundary conditions are described and the asymptotics of eigenvalues of this extensions are obtained;

-The asymptotics of eigenvalues of operator generated by singular differential operator expression given on semiaxis is found and the trace formula for this operator is proved;

- The asymptotics of spectrum of operator generated by differential operator expression given on semi axis and by spectral parameter dependent boundary condition is obtained. Also the regularized trace of this operator is calculated;

-The asymptotic formulas for eigenvalues of operator generated by regular differential operator equation given on finite segment and by spectral parameter dependent boundary conditions are found. The regularized traces of this operators are calculated;

-The trace formula of operator generated by the differential operator expression of fourth order and by boundary conditions containing parameter is proved;

-The formula for the second regularized trace of operator generated by differential operator expression with unbounded operator coefficient and by λ dependent boundary condition is found;

-The n-th regularized trace formula of the operator generated by second order differential operator expression is found.

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

NİGAR MƏHƏR QIZI ASLANOVA

DİFERENSİAL-OPERATOR TƏNLİKLƏRİN SPEKTRİNİN VƏ İZLƏRİNİN TƏDQİQİ

1202.01-Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2013