НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

МАФТУН НИЗАМИ кызы ГЕЙДАРОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

1211.01-Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2013

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

MƏFTUN NIZAMI QIZI HEYDƏROVA

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB YARIMXƏTTİ BİPARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN TƏDQİQİ

1211.01-Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2013

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu-nun** «Riyazi fizika tənlikləri» kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Karlen İ.Xudaverdiyev**

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Əkbər B.Əliyev**
(Azərbaycan Texniki Universiteti);
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Mahir M.Səbzəliyev**
(Azərbaycan Dövlət Neft Akademiyası).

Aparıcı təşkilat:
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
«Riyazi analiz» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 07 iyun 2013-cü il saat 16^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 23 aprel 2013-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена в отделе «Уравнения математической физики» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, проф. **Карлен И.Худавердиев**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, проф. **Акпер Б.Алиев** (Азербайджанский Технический Университет);
кандидат физико-математических наук, доц. **Махир М.Сабзалиев** (Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия).

Ведущая организация:
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет кафедра «Математический анализ».

Защита диссертации состоится 07 июня 2013 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 23 апреля 2013 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическая модель некоторых практических задач сводится к решению различных задач для параболических уравнений. Среди этих проблем особый интерес представляет исследование существования и единственности решений, соответствующих смешанных задач.

Среди параболических уравнений наиболее подробно исследованы линейные и нелинейные уравнения второго порядка. В этом направлении следует отметить исследования проводимые О.А.Ладыженской, О.А.Олейником, Е.Ландисом, А.А.Новрузовым, И.Т.Мамедовым, К.И.Худавердиевым и другими. В последнее время в связи с появлением новых материалов и новых технологических процессов, возникла необходимость в исследовании различных смешанных задач для параболических уравнений высокого порядка[1]. Во многих случаях, для исследования уравнений высокого порядка не могут известные классические методы быть применены. Исследования, проводимые для параболических уравнений высокого порядка не так подробны и всеобъемлющие как исследования проводимые для параболических уравнений второго порядка. Среди параболических уравнений высокого порядка особый интерес представляет исследование нелинейных уравнений с бипараболической главной частью. К исследованию этих уравнений посвящены очень мало работ.

Как известно, для линейных параболических уравнений разрешимость основных краевых задач и задачи Коши зависит лишь от гладкости функций, определяющих задачу, т.е. от коэффициентов, свободных членов уравнений, функций, задающих начальные и граничные условия и границу той области, в которой ищется решение. Гладкость и глобальная существование решений задач Коши и смешанной задачи для этих уравнений зависят не только от гладкости заданных функций, они зависят от характера нелинейностей (относительно искомых функций и их производных)

Благодаря результатам по линейным задачам для параболических уравнений и благодаря теореме Лере-Шаудера о

[1] Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа. М.ФИЗМАТЛИТ. 2007 г.,734 стр.

неподвижных точках вполне непрерывных преобразований, вопрос о разрешимости “в целом” краевых задач и задачи Коши для нелинейных параболических уравнений сводится к вопросу об априорной ограниченности всевозможных решений в некоторых функциональных пространствах.

Диссертационная работа посвящёна изучению вопросов существования и единственности обобщённого, почти всюду и классического решений одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка с однородными граничными условиями типа Рикье. Как было отмечено данная задача имееет большое практическое и теоретическое значение .Таким образом, тема диссертационной работы представляет научный интерес и актуальна.

Цель работы. Изучение вопросов существования (как в малом, так и в целом) и единственности обобщённого, почти всюду и классического решений смешанной задачи с однородными граничными условиями типа Рикье для полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка.

Общая методика исследований. Для исследования рассматриваемой смешанной задачи мы сначала пользуемся методом Фурье. После применения схемы метода Фурье решение изучаемой смешанной задачи сводится к решению некоторой счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье $u_n(t)$ $(n = 1,2,...)$ по системе $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ искомой функции $u(t,x)$. А для решения этой системы пользуемся обобщённым принципом сжатых отображений и принципом Шаудера о неподвижной точке. Кроме того, для доказательства теорем существования в целом обобщённого, почти всюду и классического решений изучаемой смешанной задачи применяются усиленный принцип Шаудера о неподвижной точке и методы априорных оценок.

Научная новизна. В работе комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке доказаны теоремы существования в малом (т.е. справедливые при достаточно малых значениях T) обобщённого, почти всюду и классического решений рассматриваемой смешанной задачи. Далее, с помощью усиленного принципа Шаудера доказана теорема существования в целом (т.е. для любого конечного T) обобщённого решения, а методами априорных оценок доказаны теоремы существования в целом почти всюду и классического решений изучаемой смешанной задачи. Кроме того, с помощью неравенства Беллмана доказаны теоремы о единственности в целом для всех трёх типов решений, рассматриваемой смешанной задачи.

Теоретическая и практическая ценность. Задача, изученная в диссертации, представляет не только теоретический, но и большой практический интерес. Основные результаты диссертации могут быть использованы при решении различных задач математической физики.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научной конференции, посвящённой 70-летию члена корреспондента НАН Азербайджана, профессора Б.А.Искендерова (Баку, 17 мая 2006 г.), на Международном Симпозиуме «Современные проблемы математики, механики и информатики» (Нахичевань, ноябрь 2007 г.), на XIII Международной конференции по математике и механике, посвящённой 70-летию со дня рождения академика А.Дж.Гаджиева (Баку, 21-23 ноября 2007), на научных семинарах отделов «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики» и «Функциональный анализ» ИММ НАНА и на семинарах кафедр «Математика и методика её преподавания», «Дифференциальные и интегральные уравнения» и «Теория функций и функциональный анализ» Бакинского Государственного Университета.

Публикации. Полное содержание диссертации опубликовано в 10 работах автора, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения и трёх глав. Объём диссертации 137 страниц, библиография содержит 43 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения и трёх глав. Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована её цель и дан краткий обзор работ, непосредственно связанных с темой данной диссертации.

Глава I, состоящая из четырёх разделов, посвящена изучению вопросов существования и единственности обобщённого решения следующей одномерной смешанной задачи:

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (0\le t\le T, 0\le x\le\pi), & (1) \\
u(0,x)=\varphi(x)\ \ (0\le x\le\pi),\quad u_t(0,x)=\psi(x)\ \ (0\le x\le\pi), & (2) \\
u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0\quad (0\le t\le T), & (3)
\end{cases}
$$

где $0<T<+\infty$; F,φ,ψ - заданные функции, а $u(t,x)$ - искомая функция, причём под обобщённым решением задачи (1)-(3) понимаем следующее

Определение. Под обобщённым решением задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

а) $u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_t(t,x)\in C([0,T]\times[0,\pi])$;

$u_{xxx}(t,x),u_{tx}(t,x)\in C([0,T];L_2(0,\pi))$;

б) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле;

в) выполняется интегральное тождество

$$
\int_0^T\int_0^\pi\{u_t(t,x)\cdot V_t(t,x)-2u_{tx}(t,x)\cdot V_x(t,x)+u_{xxx}(t,x)\cdot V_x(t,x)+
$$

$$
+\text{☞}(u(t,x))\cdot V(t,x)\}dxdt+\int_0^\pi\psi(x)\cdot V(0,x)dx=0 \quad (4)
$$

для любой функции $V(t,x)$, обладающей свойствами

$$
V(t,x)\in C([0,T]\times[0,\pi]), V_t(t,x)\in L((0,T)\times(0,\pi)),
$$

$$
V_x(t,x)\in L([0,T];L_2(0,\pi)), \tag{5}
$$

$$
V(T,x)=0\ \ (0\le x\le\pi),\ V(t,0)=V(t,\pi)=0\ (0\le t\le T), \tag{6}
$$

где

$$
\text{☞}(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),
$$

$$
u_t(t,x),u_{tx}(t,x)). \tag{7}
$$

В 1.1 приводятся некоторые известные факты и устанавливается ряд новых вспомогательных фактов. В частности, обозначается через $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида

$$
u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx, \tag{8}
$$

рассматриваемых на $[0,T]\times[0,\pi]$, для которых все функции $u_n(t)\in C^{(l)}\big([0,T]\big)$ и

$$J_T(u)\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<+\infty\,, \qquad (9)$$

где $l\ge 0$ - целое число, $\alpha_i\ge 0\ (i=\overline{0,l}),1\le\beta_i\le 2\ \ (i=\overline{0,l})$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\|=J_T(u)$. Известно, что все эти пространства банаховы.

Так как система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ полная в пространстве $L_2(0,\pi)$, то очевидно, что каждое обобщённое решение $u(t,x)$ задачи (1)-(3) имеет вид (8), где

$$u_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t,x)\sin nx dx\ (n=1,2,...;\ t\in[0,T]). \qquad (10)$$

Тогда, после применения формальной схемы метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)\ (n=1,2,...)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_n(t)=(1+n^2t)\cdot e^{-n^2t}\cdot\varphi_n+te^{-n^2t}\cdot\psi_n+\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^{\pi}\text{☞}(u(\tau,x))\sin nx\cdot$$

$$\cdot(t-\tau)e^{-n^2(t-\tau)}\,dxd\tau\ \ (n=1,2,...;\ t\in[0,T])\,, \qquad (11)$$

где

$$\varphi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx\,,\psi_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(x)\sin nx dx\ \ (n=1,2,...), \qquad (12)$$

а оператор ☞ определён соотношением (7).

Таким образом, решение задачи (1)-(3) сведено к решению системы (11) относительно функций $u_n(t)\ (n=1,2,...)$.

Далее, исходя из определения обобщённого решения задачи (1)-(3), доказана следующая

Лемма. Если $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$ - любое обобщённое решение задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ удовлетворяют системе (11).

В 1.2 с помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности обобщённого решения задачи (1)-(3).

Теорема 1.2[*]. Пусть

1. $F(t,x,u_1,...,u_6)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right)$.
2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)\times[-R,R]\times(-\infty,\infty)$

$$\left|F(t,x,u_1,...,u_6)-F(t,x,\widetilde{u}_1,...,\widetilde{u}_6)\right|\le C_R\cdot\sum_{i=1}^{6}\left|u_i-\widetilde{u}_i\right|, \tag{13}$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного обобщённого решения.

В 1.3, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказана следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) обобщённого решения задачи (1)-(3).

Теорема 1.3. Пусть

1. $\varphi(x)\in C^{(2)}([0,\pi]), \varphi'''(x)\in L_2(0,\pi)$ и
   $\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(0)=\varphi''(\pi)=0$;
   $\psi(x)\in C([0,\pi]),\ \psi'(x)\in L_2(0,\pi)$ и $\psi(0)=\psi(\pi)=0$.
2. $F(t,x,u_1,...,u_6)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right)$.
3. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)\times[-R,R]\times(-\infty,\infty)$

$$\left|F(t,x,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)-F(t,x,u_1,u_2,u_3,\widetilde{u}_4,u_5,\widetilde{u}_6)\right|\le$$
$$\le C_R\cdot\left(\left|u_4-\widetilde{u}_4\right|+\left|u_6-\widetilde{u}_6\right|\right), \tag{14}$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда существует в малом обобщённое решение задачи (1)-(3).

Замечание 1.1. Следует отметить, что условия 1 теоремы 1.3, наложенные на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, не только

---

[*] Для теорем и замечаний сохраняем нумерации диссертации.

достаточны, но и необходимы для существования обобщённого решения задачи (1)-(3).

Замечание 1.2. Теорема 1.2 является теоремой о единственности в целом, а теорема 1.3 является теоремой о существовании в малом обобщённого решения задачи (1)-(3). Из этих двух теорем следует справедливость следующей теоремы о существовании в малом единственного в целом обобщённого решения задачи (1)-(3).

Теорема 1.4. Пусть

1. Выполнены условия 1 и 2 теоремы 1.3.
2. Выполнено условие 2 теоремы 1.2.

Тогда существует в малом единственное в целом обобщённое решение задачи (1)-(3).

В 1.4 с помощью усиленного принципа Шаудера о неподвижной точке доказана следующая теорема о существовании в целом обобщённого решения задачи (1)-(3).

Теорема 1.5. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 1.3.
2. В $[0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6$

$$\left|F(t,x,u_1,\dots,u_6)\right| \le C\cdot\left(1+\left|u_1\right|+\dots+\left|u_6\right|\right), \tag{15}$$

где $C>0$ - постоянная.

Тогда существует обобщённое решение задачи (1)-(3).

Глава II, состоящая из семи разделов, посвящена изучению вопросов существования и единственности решения почти всюду задачи (1)-(3), причём под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем следующее

Определение. Под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

а) $u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x), u_t(t,x)$,

$u_{tx}(t,x)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\right)$;

$u_{xxxx}(t,x), u_{txx}(t,x), u_{tt}(t,x)\in C\left([0,T];L_2(0,\pi)\right)$;

б) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле;

в) уравнение (1) удовлетворяется почти всюду в $(0,T)\times(0,\pi)$.

Очевидно, что каждое решение почти всюду задачи (1)-(3) является и её обобщённым решением.

В 2.1 приведены некоторые известные факты, используемые в данной главе, и установлен ряд новых вспомогательных фактов. В частности, доказана следующая

Лемма. Если $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$ - любое решение почти всюду задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ удовлетворяют системе (11).

В 2.2 с помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 2.1. Пусть

1. $F(t,x,u_1,...,u_6)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right)$.
2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^6$

$$\left|F(t,x,u_1,...,u_6)-F(t,x,\widetilde{u}_1,...,\widetilde{u}_6)\right|\le C_R\cdot\sum_{i=1}^{6}\left|u_i-\widetilde{u}_i\right|,$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного решения почти всюду.

В 2.3, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказана следующая теорема существования в малом решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 2.2. Пусть

1. $\varphi(x)\in C^{(3)}([0,\pi]),\varphi^{(4)}(x)\in L_2(0,\pi)$ и
   $\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(0)=\varphi''(\pi)=0$;
   $\psi(x)\in C^{(1)}([0,\pi]),\ \psi''(x)\in L_2(0,\pi)$ и $\psi(0)=\psi(\pi)=0$.

2. $F(t,\xi_0,...,\xi_6),F_{\xi_i}(t,\xi_0,...,\xi_6)$ $(i=\overline{0,6})\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right)$.

3. $F(t,0,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=F(t,\pi,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=0$
   $\forall t\in[0,T],\xi_2,\xi_4,\xi_6\in(-\infty,\infty)$.

Тогда существует в малом решение почти всюду задачи (1)-(3).

Замечание 2.1. Так как из условия 2 теоремы 2.2 следует выполнение всех условий теоремы 2.1, то при условиях теоремы 2.2

решение почти всюду задачи (1)-(3) не только существует в малом, но и оно единственное в целом.

Замечание 2.2. Отметим, что условие 1 теоремы 2.2, наложенные на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, не только достаточны, но и необходимы для существования решения почти всюду задачи (1)-(3).

Замечание 2.3. Как видно из формулировки теоремы 2.2, для существования в малом решения почти всюду задачи (1)-(3) от функции $F(t,x,u_1,...,u_6)$ и её производных $F_x(t,x,u_1,...,u_6)$, $F_{u_i}(t,x,u_1,...,u_6)$ $(i=\overline{1,6})$ при $|u_1|+...+|u_6|\to+\infty$ ничего не требуется, т.е. на порядок роста при $|u_1|+...+|u_6|\to+\infty$ этих функций никакого ограничения нет.

В 2.4 стандартным методом, т.е. умножением уравнения (1) на подходящую функцию и последующим почленным интегрированием (включая некоторые интегрирования по частям), доказана следующая теорема об априорной ограниченности (в определённом смысле) решений почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 2.3. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид:

$$F(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_{tx}) = f(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_{tx}) + \\ + f_0(x,u) + f_1(t,u_t)\cdot u_{tx} + (f_2(x,u_x))_x, \qquad (17)$$

причём:

а) $f_0(x,u)\in C([0,\pi]\times(-\infty,\infty))$ и $\forall x\in[0,\pi]$, $u\in(-\infty,\infty)$

$$\int_0^u f_0(x,\xi)d\xi \equiv g_0(x,u) \le C\cdot(1+u^2)\,; \qquad (18)$$

б) $f_1(t,V)\in C([0,T]\times(-\infty,\infty))$;

в) $f_2(x,V)\in C^{(1)}([0,\pi]\times(-\infty,\infty))$ и $\forall x\in[0,\pi]$, $V\in(-\infty,\infty)$

$$-\int_0^V f_2(x,\xi)d\xi \equiv g_2(x,V) \le C + \delta\cdot V^2,\ 0\le\delta<\frac{1}{2\pi^2}\,; \qquad 19)$$

г) $f(t,x,u_1,...,u_6)\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right)$ и в $[0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6$

$$f(t,x,u_1,...,u_6)\cdot u_5 \le$$

$$\leq C\cdot(1+u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_5^2)+\delta_0\cdot u_6^2,\ 0\leq\delta_0<2, \qquad (20)$$

где $C>0$ - постоянная.

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) справедливы априорные оценки:

$$\int_0^{\pi} u_t^2(t,x)dx\leq C_0,\ \int_0^{\pi} u_{xx}^2(t,x)dx\leq C_0 \quad \forall t\in[0,T]; \qquad (21)$$

$$\int_0^T\int_0^{\pi} u_{tx}^2(t,x)dxdt\leq C_0. \qquad (22)$$

Следствие. Из первой априорной оценки (21) следует справедливость априорных оценок:

$$\|u(t,x)\|_{C(Q_T)}\leq R_0,\ \|u_x(t,x)\|_{C(Q_T)}\leq R_0, \qquad (23)$$

где $Q_T\equiv[0,T]\times[0,\pi]$.

Замечание 2.4 (анализ условий теоремы 2.3):

а) Отметим, что функция $f_0(x,u)$, фигурирующая в (17) и удовлетворяющая условию (18), может, в частности, иметь виды:

$$f_0(x,u)=-u^{2k-1},$$

$$f_0(x,u)=-2ku^{2k-1}\cdot e^{u^{2k}}$$

и т.д., где k - любое натуральное число;

б) от функции $f_1(t,V)$, фигурирующей в (17), при $|V|\to+\infty$ ничего не требуется, т.е. на порядок её роста при $|V|\to+\infty$ никакого ограничения нет; только требуется непрерывность функции $f_1(t,V)$ в $[0,T]\times(-\infty,\infty)$;

в) в условии (19) требование достаточной малости числа $\delta\geq 0$ можно снять, если в (19) V^2 заменить на $|V|^{\gamma}$, где $0<\gamma<2$;

г) отметим, что функция $f(t,x,u_1,...,u_6)$, удовлетворяющая одностороннему условию (20), может, в частности, иметь вид:

$$f(t,x,u_1,...,u_6)=-u_5^{2k-1}\cdot\Phi(t,x,u_1,...,u_6), \qquad (24)$$

где k - любое натуральное число, а функция $\Phi(t,x,u_1,\ldots,u_6)\in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6)$ -совершенно произвольная, удовлетворяющая лишь условию

$$\Phi(t,x,u_1,\ldots,u_6)\ge 0.$$

Далее, таким же образом, как объяснено в предыдущем пункте *в*), в условии (20) достаточную малость числа δ_0 ($0\le\delta_0<2$) можно убрать, если в (20) u_6^2 заменить на $|u_6|^\gamma$, где $0<\gamma<2$.

В 2.5, пользуясь априорными оценками (21)-(23), доказана следующая теорема о более сильной, чем (21) и (22), априорной оценке для решений почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 2.5. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 2.3.
2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^2\times(-\infty,\infty)^4$

$$|F(t,x,u_1,\ldots,u_6)|\le C_R\cdot\{1+|u_3|\cdot(|u_3|+|u_3|\cdot|u_5|+u_5^2+|u_6|)+$$
$$+|u_4|\cdot(1+|u_5|)+|u_5|^3+|u_5|\cdot|u_6|+|u_6|\},$$

т.е.

$$|F(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_{tx})|\le C_R\cdot\{1+|u_{xx}|\cdot(|u_{xx}|+|u_{xx}|\cdot|u_t|+$$
$$+u_t^2+|u_{tx}|)+|u_{xxx}|\cdot(1+|u_t|)+|u_t|^3+|u_t|\cdot|u_{tx}|+|u_{tx}|\},$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) справедлива априорная оценка:

$$\|u(t,x)\|_{B^{3,1}_{2,2,T}}\le C_0. \tag{25}$$

Следствие. Из априорной оценки (25) следует справедливость следующих априорных оценок:

$$\|u(t,x)\|_{C(Q_T)}\le R_0,\ \|u_x(t,x)\|_{C(Q_T)}\le R_0,$$
$$\|u_{xx}(t,x)\|_{C(Q_T)}\le R_0,\ \|u_t(t,x)\|_{C(Q_T)}\le R_0; \tag{26}$$

$$\int_0^\pi u_{xxx}^2(t,x)dx\le R_0,\quad \int_0^\pi u_{tx}^2(t,x)dx\le R_0\quad \forall t\in[0,T]. \tag{27}$$

В 2.6, пользуясь априорными оценками (26) и (27), доказана следующая теорема о более сильной, чем (25), априорной оценке для решений почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 2.5. Пусть

1. Выполнены условия 2 и 3 теоремы 2.2.
2. Выполнены все условия теоремы 2.4.
3. $\forall R > 0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)\times[-R,R]\times(-\infty,\infty)$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,...,\xi_6)\right| \le C_R \cdot (1+\xi_4^2+\xi_6^2) \quad (i=0,1,2),$$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,...,\xi_6)\right| \le C_R \cdot (1+|\xi_4|+|\xi_6|) \quad (i=3,5),$$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,...,\xi_6)\right| \le C_R \quad (i=4,6),$$

где $C_R > 0$ - постоянная.

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) справедлива априорная оценка:

$$\|u(t,x)\|_{B_{2,2,T}^{4,2}} \le C_0. \tag{28}$$

Следствие. Из априорной оценки (28), в силу структуры пространства $B_{2,2,T}^{4,2}$, следует справедливость следующих априорных оценок:

$$\left\|\partial^i u(t,x)/\partial x^i\right\|_{C(Q_T)} \le R_0 (i=\overline{0,3}),$$

$$\left\|\partial^{1+j} u(t,x)/\partial t\partial x^j\right\|_{C(Q_T)} \le R_0 (j=0,1); \tag{29}$$

$$\int_0^\pi u_{xxxx}^2(t,x)dx \le R_0, \int_0^\pi u_{txx}^2(t,x)dx \le R_0 \ \forall t\in[0,T]. \tag{30}$$

В 2.7, пользуясь результатом раздела 2.3 (т.е. теоремой 2.2 о существовании в малом решения почти всюду задачи (1)-(3)) и результатами разделов 2.4-2.6, за три этапа, последовательно усиливаясь, обеспечивающих априорную ограниченность в $B_{2,2,T}^{4,2}$ (теорема 2.5) решений почти всюду задачи (1)-(3), доказана следующая теорема о существовании в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 2.6. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 2.2.
2. Выполнены все условия теоремы 2.3.

3. Выполнено условие 2 теоремы 2.4.
4. Выполнено условие 3 теоремы 2.5.

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение почти всюду.

Глава III, состоящая из четырёх разделов, посвящена изучению вопросов существования и единственности классического решения задачи (1)-(3), причём под классическим решением задачи (1)-(3) понимаем следующее

Определение. Под классическим решением задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, непрерывную в замкнутой области $[0,T]\times[0,\pi]$ вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющую всем условиям (1)-(3) в обычном смысле.

Очевидно, что каждое классическое решение задачи (1)-(3) является и её решением почти всюду.

В 3.1 приведены некоторые известные факты и установлен ряд новых вспомогательных фактов.

В 3.2 установлена теорема о единственности в целом классического решения задачи (1)-(3).

В 3.3, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказана следующая теорема существования в малом классического решения задачи (1)-(3).

Теорема 3.2. Пусть

1. $\varphi(x)\in C^{(4)}([0,\pi]), \varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,\pi)$ и $\varphi^{(2s)}(0)=\varphi^{(2s)}(\pi)=0$ $(s=\overline{0,2})$;
$\psi(x)\in C^{(2)}([0,\pi]), \psi'''(x)\in L_2(0,\pi)$ и $\psi^{(2s)}(0)=\psi^{(2s)}(\pi)=0$ $(s=0,1)$.
2. $F(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6), F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\,(i=\overline{0,6})$,
$F_{\xi_i\xi_j}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\,(i,j=\overline{0,6})\in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6\right)$.
3. $F(t,0,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=F(t,\pi,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=0\ \forall t\in[0,T]$,
$\xi_2,\xi_3,\xi_4\in(-\infty,\infty)$.

Тогда существует в малом классическое решение задачи (1)-(3).

В 3.4 методом априорных оценок доказана следующая теорема о существовании в целом классического решения задачи (1)-(3).

Теорема 3.3. Пусть
1. Выполнены все условия теоремы 3.2.
2. Выполнены все условия одной из теорем 2.3.

3. Выполнено условие 2 теоремы 2.4.
4. Выполнено условие 3 теоремы 2.5.

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное классическое решение.

В заключение, пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю – заслуженному деятелю науки, доктору физико-математических наук, профессору К.И.Ху-давердиеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Гейдарова М.Н. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для бипараболических уравнений четвёртого порядка // Тезисы научной конференции, посвящённой 70-летию член-корреспондента НАН Азербайджана, профессора Б.А.Искендерова, Баку, 17 мая 2006 г., с.67.
2. Гейдарова М.Н., Худавердиев К.И. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка//Рукопись депонир. в АЗНИИНТИ, г.Баку 13.07.06, 2789-Аз., 46 с.
3. Худавердиев К.И., Гейдарова М.Н. Исследование обобщённого решения одномерной смешанной задачи для полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка // Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2007, №1, с.5-14.
4. Худавердиев К.И., Гейдарова М.Н. Исследование решения почти всюду одномерной смешанной задачи для полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка//Тезисы Международного Симпозиума «Современные проблемы математики, механики и информатики», г.Нахичевань, ноябрь 2007 г., с.94.
5. Худавердиев К.И., Гейдарова М.Н. Исследование классического решения одномерной смешанной задачи для полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка // Тезисы XIII Международной конференции по математике и механике, посвящ. 70-летию со дня рождения академика А.Дж.Гаджиева, Баку, 21-23 ноября 2007г., с.145.

6. Худавердиев К.И., Гейдарова М.Н. Исследование решения почти всюду одномерной смешанной задачи для полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка // Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2008, №2, с.5-15.
7. Khudaverdiyev K.I., Haydarova M.N. On existence in large for almost everywhere solution of one-dimensional mixed problem for fourth order semili-near biparabolic equation // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, 2008, v.XXIX, p.79-96.
8. Худавердиев К.И., Гейдарова М.Н. О существовании в малом классического решения одномерной смешанной задачи для полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка // Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2009, №3, с.21-33.
9. Худавердиев К.И., Гейдарова М.Н. Исследование классического решения одномерной смешанной задачи для полулинейного бипараболического уравнения четвёртого порядка // Воронежский Государственный Педагогический Университет, «Новые технологии в образовании» научно-технический журнал, 2009, №6, с.55-86.
10. Худавердиев К.И., Гейдарова М.Н. О классической разрешимости одномерной смешанной задачи для полулинейных бипараболических уравнений четвёртого порядка// Известия Саратовского Университета, серия математика, механика, информатика, 2011, т.11, в.4, с.58-67.

MƏFTUN NİZAMİ qızı HEYDƏROVA

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB YARIMXƏTTİ BİPARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN TƏDQİQİ

X Ü L A S Ə

Dissertasiya işi dördüncü tərtib yarımxətti biparabolik tənlik üçün Rikye tipli sərhəd şərtli birölçülü qarışıq məsələnin ümumiləşmiş, sanki hər yerdə və klassik həllərinin varlığı və yeganəliyi məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- Baxılan qarışıq məsələnin ümumiləşmiş, sanki hər yerdə və klassik həllərinin qlobal yeganəliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir;
- Baxılan qarışıq məsələnin ümumiləşmiş, sanki hər yerdə və klassik həllərinin lokal varlığı haqqında teoremlər isbat edilmişdir;
- Baxılan qarışıq məsələnin ümumiləşmiş, sanki hər yerdə və klassik həllərinin qlobal varlığı haqqında teoremlər isbat edilmişdir.

MAFTUN NIZAMI qizi HAYDAROVA

STUDY OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR FOURTH ORDER SEMILINEAR BIPARABOLIC EQUATION

S U M M A R Y

This thesis is dedicated to the study of existence and uniqueness for generalized, almost everywhere and classical solutions of one-dimensional mixed problem for fourth order semilinear biparabolic equation with Riquier type boundary conditions.

Following main results are obtained:

- theorems on global uniqueness for generalized, almost everywhere and classical solutions of mixed problem under consideration are proved;
- theorems on local existence for generalized, almost everywhere and classical solutions of mixed problem under consideration are proved;
- theorems on global existence for generalized, almost everywhere and classical solutions of mixed problem under consideration are proved.