МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ГАДЖИ МАСМАЛИ оглы МАСМАЛИЕВ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

1211.01 – Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

БАКУ - 2013

Работа выполнена на кафедре **«Прикладная математика» Бакинского Государственного Университета.**

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **А.Х. Ханмамедов**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук **А.Я. Ахундов** (Институт Математики и Механики НАН Азербайджана)

кандидат физико-математических наук, доцент **Я.А. Шарифов** (Бакинский Государственный Университет)

Ведущая организация: **Азербайджанский Технический Университет** (кафедра «Математика»)

Защита диссертации состоится «28» января 2014 г. в 11^{00} часов на заседании Диссертационного Совета FD.02.016 по присуждению ученой степени доктора философии при Бакинском Государственном Университете.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Бакинского Государственного Университета.

Адрес: 1148, ул. З. Халилова, 23.
Автореферат разослан «25» декабря 2013 года.

Ученый секретарь Диссертационного Совета FD.02.016 — **Доктор наук по математике, профессор Н.К. Ахмедов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время интегрирование нелинейных уравнений методом обратной спектральной задачи представляет особый интерес и является активным предметом изучения.

Под обратными задачами спектрального анализа принято понимать задачи восстановления линейного оператора по тем или иным его спектральным характеристикам.

Основополагающие результаты в области обратных задач получены И.М.Гельфанда, Б.М.Левитана, В.А.Марченко, М.Г.Крейна, Ю.М.Березанского, Л.Д.Фаддеева, М.Г.Гасымова. В дальнейшем появились много работ, посвященных решению обратных задач в различных постановках для операторов Штурма-Лиувилля, одномерного оператора Дирака и их разностных аналогов. Результаты этих работ отражены в работах П.Дейфта, Е.Трубовица, В.С.Буслаева, В.Фомина, И.А.Андерса, В.П.Котлярова, Р.Нютона, С.В.Манакова, Г.Флашки, В.А.Юрко, И.М.Гусейнова, Г.Ш.Гусейнова, Дж.Тешля, И.М.Набиева, А.Х.Ханмамедова, И.Е.Егоровой и др.

В настоящее время обратные спектральные задачи исключительно важную роль играют также при исследовании некоторых нелинейных уравнений математической физики. Большинство из таких уравнений родились нуждами теории нелинейных волн, являющейся по сей день активным предметом изучения.

В середине шестидесятых годов XX века в связи с физической проблемой, известной как проблема Ферми-Паста-Улама, развивалась физика нелинейных явлений . Эти авторы начали исследование вопроса о равнораспределении энергии в нелинейных дискретно нагруженных струнах. Однако в противоположность их ожиданиям оказалось, что перераспределяется лишь самая малая часть энергии. Было обнаружено что, такие системы периодически возвращаются к своему начальному состоянию. Это явление свидетельствовало

тому, что должна существовать дискретная модель, которая допускает распространяющиеся без изменения форм волны. М.Тода в 1969 году впервые нашел такую одномерную модель, которая получила впоследствии название «цепочка Тоды». Это был первый случай, когда удалось решить бесконечную систему нелинейных уравнений в частных разностях. Подробное исследование цепочки Тоды отражено в монографии М.Тоды.

При дальнейшем развитии теории нелинейных явлений исключительно важную роль сыграло открытие К.Гарднера, Дж.Грина, М.Крускала, Р.Миуры. Они изобрели метод решения задачи Коши для уравнения Кортевега- де Фриза, использующий идеи прямой и обратной задачи рассеяния для одномерного уравнения Шредингера. Основная идея их метода получила дальнейшее развитие в работе П.Лакса, введшего понятие операторной $L-A$ пары. В.Е.Захаров и А.Б.Шабат показали, что понятие $L-A$ пары Лакса не является специальным свойством уравнения Кортевега-де Фриза, а применимо и к другому уравнению, важному для физических приложений, - нелинейному уравнению Шредингера. Вскоре были найдены другие интегрируемые аналогичным механизмом нелинейные уравнения, такие как уравнение нелинейной струны, уравнение синуса Гордона. Эти результаты привели к созданию нового метода математической физики – метода обратной спектральной задачи. В настоящее время имеется обширная литература, посвященная методу обратной спектральной задачи. Здесь ограничимся указанием монографий В.А.Марченко, В.Е.Захарова, С.В.Манакова, С.П.Новикова, Л.П.Питаевского, М.Абловица и Х.Сигура, Ф.Калоджеро и А.Дегаспериса, М.Тоды, Л.А.Тахтаджяна и Л.Д.Фаддеева, Дж.Лэмба, Дж.Тешля. Применения этого метода к различным задачам приведены в работах Г.Флашки, С.В.Манакова, Ю.М.Березанского, М.И.Гехтмана, Е.Шмойша, Е.Я.Хруслова, И.Т.Хабибуллина, А.Боутет де Монвела, И.Е.Егоровой, Н.Е.Фирсовой, И.М.Гусейнова и Аг.Х.Ханмамедова, Г.У.Уразбоева.

Среди нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной спектральной задачи, оказались также два замечательных нелинейных разностных уравнения, такие как цепочка Тоды и цепочка Вольтерра, имеющие важные приложения в физике твердых тел, в физике плазмы и в зоологии. Следует отметить, что эти нелинейные цепочки в некотором смысле являются дискретными аналогами уравнения Кортевега-де Фриза. С другой стороны, в работах П.Лакса, Б.М.Левитана методом обратной спектральной задачи исследованы высшие уравнения Кортевега-де Фриза. Такие уравнения отличаются от простого уравнения Кортевега-де Фриза тем, что входящий в $L-A$ пары Лакса первый оператор не меняется, но второй оператор подвергается существенным изменениям. Вместе с тем для дискретных нелинейных уравнений подобный вопрос исследован весьма мало. Основным объектом исследования диссертации является нелинейная цепочка

$$\begin{cases} \dot{a}_n = \dfrac{\alpha}{2} a_n (b_n - b_{n+1}) + \dfrac{\beta}{2} a_n \left(a_{n-1}^2 - a_{n+1}^2 + b_n^2 - b_{n+1}^2\right), a_n = a_n(t) > 0,\ b_n = b_n(t), \\ \dot{b}_n = \alpha\left(a_{n-1}^2 - a_n^2\right) + \beta\left[a_{n-1}^2 (b_{n-1} + b_n) - a_n^2 (b_n + b_{n+1})\right], \cdot = \dfrac{d}{dt} \end{cases} \tag{*}$$

где α, β - вещественные числа. Особенностью рассматриваемой цепочки является то, что она служит обобщением цепочки Тоды $(при\, \alpha = 1, \beta = 0)$ и цепочки Вольтерра $(при\, \alpha = 0, \beta = 1, b_n = 0)$. Уместно подчеркнуть, что в диссертации при исследовании глобальной разрешимости задачи Коши для цепочки (*) в отличие от некоторых традиционных работ используется прямой способ. Это обстоятельство с одной стороны позволяет расширить класс начальных данных, а с другой - усилить ранее полученные результаты для цепочек Тоды и Вольтера. Кроме того, более сложная структура второго оператора пары Лакса потребовала значительной модификации некоторых классических рассуждений.

Цель работы. Исследование однозначной разрешимости задачи Коши для некоторых систем (конечных и бесконечных) нелинейных дифференциальных уравнений в различных классах. Применение метода обратной спектральной задачи к интегрированию этих систем уравнений.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены достаточные условия дискретности спектра для некоторого класса дискретных операторов Штурма – Лиувилля;
- доказана однозначная разрешимость задачи Коши для одной конечной системы нелинейных дифференциальных уравнений и методом обратной спектральной задачи получены явные формулы для решения;
- установлена глобальная разрешимость задачи Коши для полубесконечной системы нелинейных дифференциальных уравнений в классе равномерно ограниченных последовательностей и методом обратной спектральной задачи получены формулы, позволяющие найти решение;
- доказана глобальная разрешимость задачи Коши для бесконечной (полубесконечной и бесконечной в обе стороны) системы нелинейных дифференциальных уравнений в классе вполне непрерывных операторов и в классе операторов Гильберта- Шмидта;
- доказана глобальная разрешимость задачи Коши для бесконечной (полубесконечной и бесконечной в обе стороны) системы нелинейных дифференциальных уравнений в классе быстроубывающих решений и методом обратной спектральной задачи получены формулы, позволяющие найти решение;
- найден явный вид так называемого солитонного решения бесконечной в обе стороны системы нелинейных дифференциальных уравнений в классе быстроубывающих решений;
- установлена глобальная разрешимость периодической задачи Коши для бесконечной в обе стороны системы нелинейных дифференциальных уравнений;

- доказана локальная разрешимость задачи Коши для бесконечной цепочки Тоды с неограниченными начальными данными.

Общая методика исследований. В работе применяются методы теории функций и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, методы теории функции комплексного переменного.

Теоретическая и практическая ценность. Установленные в диссертации результаты носят, в основном, теоретический характер. Они могут быть использованы в различных вопросах спектральной теории разностных операторов и теории нелинейных дифференциальных уравнений.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждены на семинарах кафедр « Прикладная математика», «Дифференциальные и интегральные уравнения», «Уравнения математической физики» Бакинского Государственного Университета, на семинарах отделов «Негармонический анализ», «Дифференциальные уравнения» Института Математики и Механики НАН Азербайджана. Результаты диссертации также докладывались на четвертом конгрессе математического конгресса тюркского мира(Баку, 1-3 июля 2011 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, список которых приводятся в конце автореферате.

Объем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 130 страницах, состоит из введения, двух глав, включающих 14 параграфов, и списка литературы, содержащего 138 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава посвящена спектральному анализу разностных операторов Штурма-Лиувилля. В этой главе найдены достаточные условия дискретности спектра некоторого класса разностных операторов Штурма-Лиувилля. Особенность

этого класса заключается в том, что входящие в нем операторы не являются полуограниченными. При этом полученные достаточные условия с одной стороны носят самостоятельный интерес, а с другой - позволяют рассматривать задачу Коши для цепочки Вольтера с неограниченным начальным условием в том случае, когда ассоциированный с этой цепочкой разностный оператор Штурма-Лиувилля имеет чисто дискретный спектр.

Пусть $l_2[0,\infty)$-гильбертово пространство последовательностей $x=(x_n)_0^\infty$ таких, что $\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^2<\infty$. Рассмотрим минимальный замкнутый оператор L_0, порожденный в $\ell_2(0,\infty]$ разностным выражением

$$(\ell_0 y)_n = a_{n-1}y_{n-1}+b_n y_n + a_n y_{n+1}, a_n>0, \operatorname{Im} b_n = 0, n\ge 0 \qquad (1)$$

и граничным условием

$$y_{-1}=0\,. \qquad (2)$$

В параграфе 1.1 сформулируются некоторые известные факты, относящиеся к обратной спектральной задаче по спектральной функции минимального замкнутого оператора L_0.

В параграфе 1.2 рассматривается оператор L_1, полученный из оператора L_0 при $b_n=0$. Оператор L_1 предполагается неограниченным и самосопряженным.

Теорема 1. *Пусть* $a_n\to+\infty$ *при* $n\to\infty$ *и оператор* L_1 *самосопряжен. Тогда спектр оператора* L_1 *чисто дискретен, если выполняется одно из следующих условий:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}},\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}\right\}=q^+<1,\qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}},\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}\right\}=q^->1.$$

Параграф 1.3 посвящен операторам L_0, входящими в класс операторов Гильберта-Шмидта.

Теорема 2. *Оператор* L_0 *является вполне непрерывным в том и только в том случае, когда* $a_n \to 0, b_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 3. *Для того чтобы оператор* L_0 *был оператором Гильберта-Шмидта, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\|L_0\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{2a_n^2 + b_n^2\right\} < \infty .$$

При этом число $\|L_0\|_2$ *является нормой Гильберта-Шмидта оператора* L_0.

В предпоследнем параграфе первой главы приведены вспомогательные факты, относящиеся к краевой задаче рассеяния оператора L_0. Исследован также непрерывный спектр оператора L_0.

Теорема 4. *Оператор* L_0 *имеет непрерывный спектр, заполняющий отрезок* $[-2,2]$, *если только* $a_n \to 1, b_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

В последнем параграфе 1.5 первой главы сформулированы прямая и обратная задачи рассеяния для разностного оператора L Штурма-Лиувилля, порожденного в $\ell_2(-\infty,+\infty)$ разностным выражением

$$(\ell y)_n = a_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1},\ a_n > 0, \operatorname{Im} b_n = 0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где коэффициенты a_n, b_n удовлетворяют условию $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \{|a_n - 1| + |b_n|\} < \infty.$

Вторая глава посвящена исследованию задачи Коши в различных классах для некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений таких, как цепочки Тоды, цепочки Вольтера и их обобщений, несомненно, представляющих прикладной интерес. Более того, методом обратной спектральной задачи указаны способы интегрирования таких цепочек.

В параграфе 2.1 приведены вспомогательные факты, относящиеся к теории операторов, зависящих от параметра.

В параграфе 2.2 рассматривается следующая задача Коши для конечной цепочки

$$\begin{cases} \dot{a}_n = \dfrac{\alpha}{2} a_n (b_n - b_{n+1}) + \dfrac{\beta}{2} a_n (a_{n-1}^2 - a_{n+1}^2 + b_n^2 - b_{n+1}^2), \\ \dot{b}_n = \alpha(a_{n-1}^2 - a_n^2) + \beta\left[a_{n-1}^2 (b_{n-1} + b_n) - a_n^2 (b_n + b_{n+1})\right], n = 0, \ldots N, \\ a_{-1} = a_N = 0, \ \cdot = \dfrac{d}{dt}, \end{cases} \tag{3}$$

$$a_n(0) = a_n^0 > 0,\ b_n(0) = b_n^0, \quad n = 0, \ldots, N. \tag{4}$$

где α, β есть вещественные числа. При этом решение ищется среди непрерывно дифференцируемых на положительной полуоси функций.

Теорема 5. *При любых начальных данных* $a_n^0 > 0$, b_n^0 *задача (3), (4) имеет единственное решение, определенное на полуоси* $[0, \infty)$.

После установления глобальной разрешимости указывается эффективный алгоритм построения решения. В $(N+1)-$ мерном комплексном евклидовом пространстве рассмотрим оператор $L^{(N)}$, порожденный разностным выражением (1) при $n = 0,1,\ldots,N, a_{-1} = a_N = 0$ и граничным условием (2), причем коэффициенты $a_n, b_n, n = 0,1,\ldots,n-1$, зависят от t и удовлетворяют задаче (3), (4). Пусть $\{\lambda_k(t), \alpha_k(t)\}_{k=0}^{N}$ – спектральные данные оператора $L^{(N)}$, т.е $\lambda_k(t)$- собственное значение оператора $L^{(N)}$, $\alpha_k(t)$- норма соответствующего собственного вектора.

Теорема 6. *Динамика спектральных данных оператора* $L^{(N)}$ *описывается формулами*

$$\lambda_k(t) = \lambda_k(0) = \lambda_k,$$

$$\alpha_k^{-1}(t) = \alpha_k^{-1}(0) e^{-\frac{\alpha\lambda_k + \beta\lambda_k^2}{2} t} \left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k^{-1}(0) e^{-\frac{\alpha\lambda_k + \beta\lambda_k^2}{2} t} \right)^{-1}, \tag{5}$$

$$k = 0,1,\ldots,N.$$

Теперь решение задачи (3), (4) может быть найдено при помощи следующей процедуры. По начальным данным $a_n(0) = a_n^0 > 0,\ b_n(0) = b_n^0,\quad n = 0,\dots,N$, строим спектральные данные $\{\lambda_k(0), \alpha_k(0)\}_{k=0}^{N}$ в момент времени $t = 0$. Из формул (5) найдем набор $\{\lambda_k(t), \alpha_k(t)\}_{k=0}^{N}$. По последнему набору построим так называемые моменты S_n по формуле

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \alpha_k^{-1}(t), n = 0,1,2,\dots$$

и ганкелевы определители D_n по формулам

$$D_n = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_n \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} & S_{n+1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-1} & S_{2n+1} \end{vmatrix}$$

$(n = 0,1,\dots;\ D_{-1} = 1, \Delta_{-1} = 0, \Delta_0 = S_1)$.

Тогда решение $a_n = a_n(t), b_n = b_n(t)$ находится по формулам

$$a_n = \left(D_{n-1}D_{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} D_n^{-1},\ b_n = \Delta_n D_n^{-1} - \Delta_{n-1} D_{n-1}^{-1}\ .$$

В параграфе 2.3 для последовательностей $a(t) = \{a_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, $b(t) = \{b_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ вещественнозначных функций $a_n = a_n(t) \in C^{(1)}[0,\infty)$, $b_n = b_n(t) \in C^{(1)}[0,\infty)$ рассматривается следующая задача Коши для полубесконечной цепочки

$$\begin{cases} \dot a_n = \dfrac{\alpha}{2} a_n(b_n - b_{n+1}) + \dfrac{\beta}{2} a_n(a_{n-1}^2 - a_{n+1}^2 + b_n^2 - b_{n+1}^2), \\ \dot b_n = \alpha(a_{n-1}^2 - a_n^2) + \beta\left[a_{n-1}^2(b_{n-1} + b_n) - a_n^2(b_n + b_{n+1})\right], \\ n = 0, 1, \dots, \quad a_{-1} = 0, \ \cdot = \dfrac{d}{dt}, \end{cases} \tag{6}$$

$$a_n(0) = \tilde a_n > 0,\ b_n(0) = \tilde b_n,\ n = 0,1,\dots, \tag{7}$$

где последовательности $\tilde a_n, \tilde b_n$ являются ограниченными. Изучена глобальная разрешимость задачи (6), (7). Введем в рассмотрение банаховы пространства $B = \ell_\infty[0,\infty) \times \ell_\infty[0,\infty)$ и $C([0,T];B)$ непрерывных на отрезке $[0,T]$ функций $x(t)$ со значениями в B относительно нормы $\|x(t)\|_{C([0,T];B)} = \max\limits_{0\le t\le T}\|x(t)\|_B$.

Будем искать такое решение $x(t) = (a(t), b(t))$ задачи (6), (7), которое при любом $T > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\|a(t), b(t)\|_{C([0,T];B)} < \infty\ . \tag{8}$$

Теорема 7. *Решение задачи (6), (7) существует и единственно в классе (8).*

Здесь также найдена динамика функции Вейля соответствующей спектральной задачей, позволяющая получить явные формулы для решения задачи (6), (7). Кроме того, доказан аналог теоремы 7 для бесконечной в обе стороны цепочки.

Параграф 2.4 посвящен изучению цепочки (6) в классе вполне непрерывных операторов и в том числе в классе операторов Гильберта-Шмидта. Это означает, что ассоциированный с цепочкой (6) разностный оператор

$$\left(L_0(t)y\right)_n = a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1}, n = 0,1,\dots, y_{-1} = 0$$

является вполне непрерывным или же оператором Гильберта-Шмидта. Будем искать решение $x(t) = \left(a_n(t), b_n(t)\right)_{n=0}^{\infty}$ задачи (6), (7), удовлетворяющее при любом $T > 0$ условию

$$\|x(t)\|_{C([0,T];\ell_2[0,\infty))} < \infty\ . \tag{9}$$

Теорема 8. *Решение задачи (6), (7) существует и единственно в классе (9), если* $\tilde a_n, \tilde b_n \in \ell_2[0,\infty)$.

Обозначим через c_0 банахово пространство последовательностей $x = \left(x_n\right)_{n=0}^{\infty}$, сходящихся к нулю, с нормой $\|x\| = \max\limits_{n\ge 0}|x_n|$. Ищем решение $x(t) = \left(a_n(t), b_n(t)\right)_{n=0}^{\infty}$ задачи

(6), (7) в классе

$$\|x(t)\|_{C([0,T];c_0)} < \infty . \qquad (10)$$

Теорема 9. *Решение задачи (6), (7) существует и единственно в классе (10), если* $\tilde{c}_n \to 0, \tilde{b}_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Полученные результаты распространяются также на случай бесконечной в обе стороны цепочки.

В параграфе 2.5 для цепочки Вольтерра

$$\dot{c}_n = c_n(c_{n-1} - c_{n+1}), \;\; n = 0,1,2,...;c_{-1} = 0, \;\; \cdot = \frac{d}{dt}, \qquad (11)$$

исследуется задача Коши

$$c_n(0) = \tilde{c}_n > 0, \quad n = 0, 1,..., \qquad (12)$$

где последовательность $\tilde{c}_n$ такова, что разностное выражение

$$(\ell_0 y)_n = \sqrt{\tilde{c}_{n-1}}\, y_{n-1} + \sqrt{\tilde{c}_n}\, y_{n+1}, \;\; n = 0,1,...,\tilde{c}_{-1} = 0$$

и граничное условие $y_{-1} = 0$ порождают в $\ell_2[0,\infty)$ самосопряженный, вообще говоря, неограниченный оператор с чисто дискретным спектром. Будем искать такое решение задачи (11), (12), что ассоциированный с ней разностный оператор $L = L(t)$ сильно непрерывно дифференцируем, самосопряжен и имеет чисто дискретный спектр. Пусть это решение существует. Тогда спектральные данные ассоциированного с задачей (11), (12) оператора $L = L(t)$ уже зависят от t. Точнее говоря, справедливы формулы:

$$\lambda_k(t) = \lambda_k(0) = \lambda_k,$$

$$\alpha_k^{-1}(t) = \alpha_k^{-1}(0)e^{-\lambda_k^2 t}\left(\sum_{k-0}^{\infty}\alpha_k^{-1}(0)e^{-\lambda_k^2 t}\right)^{-1}, k = 0,1,.... \qquad (13)$$

Тогда решение может быть найдено следующей процедурой. По начальному условию $c_n(0) = \tilde{c}_n$ строим разностный оператор Штурма-Лиувилля $L(0)$, пусть $\{\lambda_k(0), \alpha_k^{-1}(0)\}_{k=0}^{\infty}$- его спектральные данные. Подсчитаем спектральные данные

$\{\lambda_k(t), \alpha_k^{-1}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ по формуле (13).Решая по последнему набору обратную задачу восстанавливаем коэффициенты оператора $L = L(t)$, которые служат решением задачи (11), (12).

Далее, доказывается, что предложенная процедура действительно приводит к решению задачи (11),(12).

Параграф 2.6 посвящен изучению задачи Коши для полубесконечной нелинейной цепочки. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dot{a}_n = \dfrac{\alpha}{2}a_n(b_n - b_{n+1}) + \dfrac{\beta}{2}a_n(a_{n-1}^2 - a_{n+1}^2 + b_n^2 - b_{n+1}^2), a_n = a_n(t) > 0,\, b_n = b_n(t), \\ \dot{b}_n = \alpha(a_{n-1}^2 - a_n^2) + \beta[a_{n-1}^2(b_{n-1} + b_n) - a_n^2(b_n + b_{n+1})], n = 0,1,..., \\ \cdot = \dfrac{d}{dt}, a_{-1} = 0, \end{cases} \qquad (14)$$

$$a_n(0) = \tilde{a}_n > 0, b_n(0) = \tilde{b}_n, n = 0,1,..., \sum_{n=1}^{\infty} n\{|\tilde{a}_n - 1| + |\tilde{b}_n|\} < \infty . \qquad (15)$$

Будем искать такое решение $a_n(t), b_n(t) \in C^{(1)}[0,\infty)$задачи (14), (15), что при любом $T > 0$ имеет место неравенство

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} n\{|a_n(t) - 1| + |b_n(t)|\}\right\|_{C[0,T]} < \infty . \qquad (16)$$

Теорема 10. *Задача (14), (15) имеет в классе (16) единственное решение.*

Предположим теперь, что коэффициенты оператора L_0 зависят от t и удовлетворяют задаче (14), (15). Пусть $\{S(z,t), z_k(t), M_k(t), k = 1,..., N\}$ – его данные рассеяния.

Теорема 11. *Динамика данных рассеяния оператора* $L_0 = L_0(t)$ *описывается формулами*

$$S(z,t) = S(z,0)\exp\left(-\frac{\alpha(z^{-1} - z) + \beta(z^{-2} - z^2)}{2}t\right)$$

$$z_k(t) = z_k(0) = z_k, \qquad (17)$$

$$M_k(t) = M_k(0)\exp\left(-\frac{\alpha(z_k^{-1} - z_k) + \beta(z_k^{-2} - z_k^2)}{2}t\right),$$

$$k = 0,1,..., N.$$

Затем, используя формулы (17) указывается способ построения решение задачи (14), (15).

В параграфе 2.7 второй главы исследуется задача Коши для бесконечной в обе стороны нелинейной цепочки. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dot a_n = \dfrac{\alpha}{2} a_n(b_n - b_{n+1}) + \dfrac{\beta}{2} a_n\left(a_{n-1}^2 - a_{n+1}^2 + b_n^2 - b_{n+1}^2\right), a_n = a_n(t) > 0,\ b_n = b_n(t), \\ \dot b_n = \alpha\left(a_{n-1}^2 - a_n^2\right) + \beta\left[a_{n-1}^2(b_{n-1} + b_n) - a_n^2(b_n + b_{n+1})\right], n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots, \\ \cdot = \dfrac{d}{dt}, \end{cases} \tag{18}$$

$$a_n(0) = a_n^0 > 0, b_n(0) = b_n^0, n = 0, 1, \ldots, \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\left\{\left|a_n^0 - 1\right| + \left|b_n^0\right|\right\} < \infty . \tag{19}$$

Будем искать такое решение $a_n(t), b_n(t) \in C^{(1)}[0,\infty)$ задачи (18), (19), что при любом $T > 0$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\left\{\left|a_n(t) - 1\right| + \left|b_n(t)\right|\right\} \right\|_{C[0,T]} < \infty . \tag{20}$$

Теорема 12. *Задача (18), (19) имеет в классе (20) единственное решение.*

Далее, находится эволюция данных рассеяния ассоциированного с задачей (18), (19) оператора $L = L(t)$ и методом обратной спектральной задачи интегрируется система уравнений (18). В этом параграфе построено точное решение задачи (18), (19), входящее в класс (20).

В параграфе 2.8 исследована задача Коши для периодической цепочки

$$\begin{cases} \dot a_n = \dfrac{\alpha}{2} a_n(b_n - b_{n+1}) + \dfrac{\beta}{2} a_n(a_{n-1}^2 - a_{n+1}^2 + b_n^2 - b_{n+1}^2), \\ \dot b_n = \alpha(a_{n-1}^2 - a_n^2) + \beta\left[a_{n-1}^2(b_{n-1} + b_n) - a_n^2(b_n + b_{n+1})\right], \\ n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots,\ a_{n+N} = a_n,\ b_{n+N} = b_n , \end{cases} \tag{22}$$

$$a_n(0) = a_n^0,\ b_n(0) = b_n^0,\ n = 0, \pm 1, \ldots, \tag{23}$$

где N - фиксированное натуральное число. Решение ищется среди непрерывно дифференцируемых на положительной полуоси функций $a_n(t), b_n(t)$. Имеет место

Теорема 13. *Периодическая задача (22), (23) имеет единственное решение при любых начальных данных* $a_{n+N}^0 = a_n^0, b_{n+N}^0 = b_n^0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$

Последний параграф второй главы посвящен вопросу существования локального решения задачи Коши для цепочки Тоды с неограниченными начальными данными. Для последовательностей вещественнозначных функций $a(t) = \left(a_n(t)\right)_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n(t) > 0$ $b(t) = \left(b_n(t)\right)_{n=-\infty}^{\infty}$ рассмотрим следующую цепочку Тоды

$$\begin{aligned} \dot a_n &= \frac{1}{2} a_n(b_n - b_{n+1}), \\ \dot b_n &= a_{n-1}^2 - a_n^2,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned} \tag{24}$$

Для цепочки (24) поставим задачу Коши:

$$\begin{gathered} a_n(0) = a_n^0 > 0,\ b_n(0) = b_n^0, \\ a_n^0 \to 0,\ b_n^0 - n \to 0 \text{ при } n \to \pm\infty . \end{gathered} \tag{25}$$

Возникает вопрос: существует ли решение задачи (24), (25), имеющее ту же асимптотику, что и начальные данные.

Рассмотрим банахово пространство $C([0,T]; c_0)$, введенное в параграфе 2.4. Будем рассматривать задачу (24), (25) в классе последовательностей $a_n(t), b_n(t)$ таких, что $\|x(t)\|_{C([0,T];c_0)} < \infty$, где $x(t) = \left(a_n(t), b_n(t) - n\right)_{n=-\infty}^{+\infty}$, хотя бы для малых значений T.

Теорема 14. *Существует число* $t_0 > 0$ *такое, что задача (24), (25) имеет единственное решение* $a_n(t), b_n(t)$, *определенное на отрезке* $[0, t_0]$ *и удовлетворяющее условию*

$$\|x(t)\|_{C([0,t_0];c_0)} < \infty \text{, где } x(t) = (a_n(t), b_n(t) - n)_{n=-\infty}^{+\infty}.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору А.Х.Ханмамедову за постановку задач и ценные советы.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Масмалиев Г.М., Ханмамедов Аг.Х. Об условиях дискретности спектра полубесконечной матрицы Якоби с нулевой диагональю// Украинский Математический Журнал, 2010, т.62, №2, с.285-288.
2. Масмалиев Г.М., Ханмамедов Аг.Х. Спектральный анализ одного класса разностных операторов Шредингера// Доклады Академии Наук России, 2011, т.436, №6, с.731-732.
3. Масмалиев Г.М. Задача Коши для цепочки Вольтера с неограниченным начальным условием// Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, 2012, №2, с.21-25.
4. Масмалиев Г.М., Ханмамедов Аг.Х. Метод решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений // Доклады НАН Азербайджана, 2012, т. LXVIII, №2, с.10-13.
5. Masmaliyev H.M., Khanmamedov A.Kh. A solution method for system of nonlinear differential equations//Transactions of NAS Azerbaijan,2012,vol.XXXII, №1,p.101-106.
6. Masmaliyev H.M., Khanmamedov A.Kh. Solution method of the Cauchy problem for the Volterr chain with unbounded initial condition//Abstact of the IV Congress of the Turkic World Mathematical Society, Baku,1-July, 2011, p.125.
7. Масмалиев Г.М. Глобальная разрешимость задачи Коши для бесконечной системы нелинейных дифференциальных уравнений //Journal of contemporary applied mathematics, vol 3, No1, (2013), p. 64-67.

Hacı Məsmalı oğlu Məsmalıyev

Tərs spektral məsələ metodu ilə bəzi qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemlərinin inteqrallanması

Xülasə

Dissertasiya işi sonlu və sonsuz qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemləri üçün Koşi məsələsinin birqiymətli həll olunmasına və spektral analizin tərs məsələsi metodunun bu tənliklər sistemlərinə tətbiqinə həsr olunmuşdur. Dissertasiyada aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

- bir sinif diskret Şturm-Liuvill operatorlarının spektrinin diskret olması üçün kafi şərtlər tapılmışdır;
- sonlu qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinin birqiymətli həll olunması isbat olunmuş və spektral analizin tərs məsələsi metodu ilə həllin aşkar şəkli tapılmışdır;
- yarımsonsuz qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinin qlobal həll olunması isbat olunmuş və spektral analizin tərs məsələsi metodu ilə həlli tapmağa imkan verən düsturlar alınmışdır;
- sonsuz (yarımsonsuz və hər iki tərəfə sonsuz) qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinin tamam kəsilməz operatorlar və Hilbert-Şmidt operatorları sinfində qlobal həll olunması isbat olunmuşdur;
- sonsuz (yarımsonsuz və hər iki tərəfə sonsuz) qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinin sürətlə azalan həllər sinfində qlobal həll olunması isbat olunmuş və spektral analizin tərs məsələsi metodu ilə həlli tapmağa imkan verən düsturlar alınmışdır;
- hər iki tərəfə sonsuz qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinin sürətlə azalan həllər sinfinə daxil olan soliton həll qurulmuşdur;
- və hər iki tərəfə sonsuz qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemi üçün periodik Koşi məsələsinin qlobal həll olunması isbat olunmuşdur;
- qeyri-məhdud başlanğıc verilənlə malik sonsuz Toda zənciri üçün Koşi məsələsinin lokal həll olunması isbat olunmuşdur.

Haci Masmali oqlu Masmaliyev

The integration of some systems of nonlinear differential equations by the inverse spectral problem

Summary

Dissertation is devoted to the study of the unique solvability of the Cauchi problem for finite and infinite systems of nonlinear differential equations and application of the inverse spectral problem for the inteqration of these systems of equations.

In the thesis there are obtained the following main results:

-there are found sufficient conditions for a discrete spectrum for a class of discrete Sturm-Liouville operators;

-there is proved the unique solvability of the Cauchy problem for a finite system of nonlinear differential equations and by the method of inverse spectral problem there obtained explicit formulas for solutions;

- there is set the global solvability of the Cauchy problem for the semi-infinite system of nonlinear differential equations in the class of uniformly bounded sequences and by the method of the inverse spectral problem there are obtained formulas to find a solution;

- there is proved global solvability of the Cauchy problem for an infinite (semi- infinite and infinite in both directions) system of nonlinear differential equations in the class of compact operators and in the class of Hilbert-Schmidt operators;

- there is proved global solvability of the Cauchy problem for an infinite (semi- infinite and infinite in both directions) system of nonlinear differential equations in the class of rapidly decreasing solutions and by the method of the inverse spectral problem there are derived formulas to find a solution;

- there is found explicit form of the so-called soliton solutions infinite in both directions of the system of nonlinear differential equations in the class of fast-decreasing solutions;

- there is set the global solvability of the Cauchy problem for the periodic infinite in both directions system of nonlinear differential equations;

- there is proved local solvability of the Cauchy problem for the infinite Toda chain with unbounded initial data.

Подписано к печати .
Формат бумаги 60x84 1/16. Тираж 100.

Издательство «Бакы Университети»,
Баку, АЗ 1148, ул. З.Халилова, 23.

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏNSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Əlyazması hüququnda

HACI MƏSMALI OĞLU MƏSMALIYEV

TƏRS SPEKTRAL MƏSƏLƏ METODU İLƏ BƏZİ QEYRİ_XƏTTİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMLƏRİNİN İNTEQRALLANMASI

1211.01- Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

BAKI - 2013