НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

МАГОМЕДАЛИ МУСА оглы МАМЕДОВ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1202.01-Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2013

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

MƏHƏMMƏDƏLİ MUSA OĞLU MƏMMƏDOV

XƏTTİ OPERATORLAR DƏSTƏSİNDƏN İBARƏT SİSTEMLƏRİN SPEKTRAL MƏSƏLƏLƏRİ VƏ ONLARIN TƏTBİQLƏRİ

1202.01- Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2013

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Funksional analiz"** şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Həmidulla İ.Aslanov**

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Əkbər B.Əliyev**
(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu);
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Bəhram Ə.Əliyev**
(Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti).

Aparıcı təşkilat:
Azərbaycan Dövlət Neft Akademiyası
«Ali riyaziyyat» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 05 aprel 2013-cü il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 15 fevral 2013-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена в отделе «Функциональный анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, проф. **Гамидулла И.Асланов**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, проф. **Акпер Б.Алиев**
(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана);
кандидат физико-математических наук, доц. **Бахрам А.Алиев**
(Азербайджанский Государственный Педагогический Университет).

Ведущая организация:
Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия
кафедра «Высшая математика».

Защита диссертации состоится 05 апреля 2013 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 15 февраля 2013 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Настоящая диссертация посвящена исследованию разрешимости системы неограниченных операторных пучков и некоторым ее применениям.

Так как многие задачи для дифференциальных уравнений в частных производных, бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений и псевдодифференциальных уравнений могут быть сведены к некоторым задачам для дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами, то исследование дифференциально-операторных уравнений является одной из важных математических проблем.

Исследование спектральных свойств дифференциальных операторов, когда спектральный параметр входит и в уравнению и в граничные условия берет свое начало с работы Дж.Виргкофа. Некоторые аспекты таких задач изложена в монографии Я.Д.Тамаркина.

Полнота системы собственных и присоединенных функций дифференциальных операторов в случае, когда спектральный параметр линейно входит и в уравнению и в граничные условия исследованы в работах А.Н.Кожевникова; Л.А.Катко и С.Г.Крейн и других. Для регулярных и сильно регулярных граничных задач изучен функция Грина, асимптотика собственных значений, полнота корневых функций, разложение по корневым функциям данного оператора. Некоторые обобщения этих задач даны в монографии М.Л.Расулова.

Отметим, что задачи, когда спектральный параметр входит в граничные условия имеют большие прикладные значения и многие задачи математической физики приводит к таким задачам.

Если граничные условия содержит производные по времени, то после применения метода разделения переменных получается задачи, указанные выше. Изучение спектральных задач для системы линейных операторных пучков имеет важное значение при изучение начально-краевых задач для параболических уравнений, когда граничные условия содержит производные по времени.

В этом случае, решение задачи Коши для параболических операторно-дифференциальных уравнений аппроксимируется линейными комбинациями элементарных решений данного уравнения.

Задача Коши для параболических операторно-дифференциальных уравнений первого, второго и высоких порядков исследован

С.Я.Якубовым. Даны применения полученных результатов к решению задачи Коши для параболических уравнений. Исследованы некоторые граничные задачи для квазиэллиптических уравнений и смешанные задачи для некоторых параболических уравнений.

Данная диссертация также посвящена подобным задачам для системы операторных пучков и некоторым его применениям.

Все сказанное указывает на актуальность темы диссертационной работы.

Цель работы. Решение системы линейных операторных пучков с неограниченными операторными коэффициентами, доказательство полноты системы корневых элементов и суммируемость рядов по корневым элементам по методу Абеле, применения полученных абстрактных результатов к некоторым начально-краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнения с частными проводными параболического типа.

Общая методика исследований. В диссертации использованы методы неограниченных операторов в гильбертовом пространстве, теория дифференциальных и интегральных уравнений, теория интерполяционных пространств, методы спектральной теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

Научная новизна. В работе получены следующие основные результаты:
- доказана теорема о коэрцитивной разрешимости системы линейных операторных пучков;
- доказана теорема о полноте системы корневых элементов;
- доказана теорема о суммируемости по Абелю ряда по корневым элементам;
- доказана базисность по Абелю системы корневых элементов дифференциальных операторов в случае, когда спектральный параметр входит в граничные условия;
- доказана полнота элементарных решений операторно-дифференциальных уравнений первого порядка.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертационной работе результаты носят, в основном, теоретический характер, и могут быть использованы при изучении спектральных свойств дифференциальных операторов, а также при изучении различных задач математической физики.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах кафедры «Математический анализ и теория функций» и «Дифференциальные уравнения и математическая кибернетика» Сумгаитского Государственного Университета, на конференции «Функциональный анализ и задачи математической физики», посвященной 80-летию Бакинского Государственного Университета (Баку-1999), на Республиканской научной конференции аспирантов и молодых исследователей (Баку-1999), на научной конференции, посвященной 70-летнему юбилею, член-корр. НАН Азербайджана, проф.Я.Дж.Мамедова (Баку-2001), на научной конференции, посвященной 85-летию заслуженного деятеля науки, проф.А.Ш.Габибзаде (Баку-2001), на I Международной конференции «Обратные задачи теоретической и математической физики» (Сумгаит-2003), на Международной конференции, посвященной 45-летию ИММ НАНА (Баку-2004), на научной конференции «Методы математической физики», посвященной 90-летнему юбилею академика М.Л.Расулова (Баку-2006), на XII Международной конференции, посвященной 70-летнему юбилею член-корр. НАНА, проф. Б.А.Искендерова (Баку-2007), на научной конференции, посвященной 100-летнему юбилею академика А.И.Гусейнова (Баку-2007), на научной конференции «Методы математической физики», посвященной 90-летнему юбилею член-корр. НАНА, проф.Г.Т.Ахмедова (Баку-2007), на Международной конференции, посвященной 80-летнему юбилею академика Ф.Г.Максудова (Баку-2010), на Международной конференции Болгарии-Турции-Украйны «Математический анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» (Болгария-2010).

Публикации. Полное содержание диссертации опубликованы в 28 работах автора, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, списка используемой литературы, включающей 98 наименований. Объем диссертации 115 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена изучению коэрцитивной разрешимости системы неограниченных операторных пучков и некоторым ее применениям к начально-краевым задачам для дифференциальных уравнений.

В первом параграфе приводится основные понятия и некоторые вспомогательные факты из теории операторных пучков и операторно-дифференциальных уравнений.

Во втором параграфе исследуется коэрцитивная разрешимость системы операторных пучков с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах.

Пусть H и H^{ν}, $\nu = 1,2,...,m$ гильбертовы пространства. Рассмотрим в H систему операторных пучков

$$\begin{gathered} L(\lambda)u = \lambda u - Au = f\,,\ f \in H\,, \\ L_{\nu}(\lambda)u = \lambda C_{\nu} u - B_{\nu} u = g_{\nu}\,,\ \nu = 1,2,...,s\,,\ g_{\nu} \in H\,, \\ L_{\nu} u = C_{\nu} u = 0\,,\ \nu = s+1,...,m\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Точка λ комплексной плоскости называется регулярной точкой пучка или системы пучков (1),

$$Z(\lambda) = (L(\lambda), L_1(\lambda),..., L_s(\lambda)),$$

действующего из H в $H \bigoplus\limits_{\nu=1}^{s} H^{\nu}$ или системы пучков (1), если оператор $Z(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $Z^{-1}(\lambda)$ определенный во всем пространстве $H \bigoplus\limits_{\nu=1}^{s} H^{\nu}$. При этом

$$D(Z(\lambda)) = \\ = \begin{Bmatrix} u : u \in H, L(\lambda)u \in H, L_{\nu}(\lambda)u \in H, L(\lambda)u \in H^{\nu}, \nu = 1,2,...,s, \\ C_{\nu} u = 0, \nu = s+1,...,m \end{Bmatrix}$$

Доказывается следующая теорема:

Теорема 1.1. Пусть выполнены следующие условия:

1. A-замкнутый оператор с плотной областью определения в пространстве H;
2. $C_{\nu} \in \sigma_{\infty}(H(A), H^{\nu})$, $\nu = 1,2,...,s$.

$B_{\nu} \in B(H(A), H^{\nu})$, $\nu = 1,2,...,s$

$C_{\nu} \in B(H(A), H^{\nu})$, $\nu = s+1,...,m$

3. оператор $\Omega : u \to \Omega u = (Au, C_1 u,..., C_m u)$ является обратимым опе-

ратором из $H(A)$ в $H\bigoplus_{\nu=1}^{m} H^{\nu}$;

4. спектр $Z(\lambda)$ лежит в множестве K и при $\lambda \overline{\in} K$

$\left\| Z^{-1}(\lambda) \right\|_{B\left(H \overset{s}{\underset{\nu=1}{\oplus}} H^{\nu}, H \right)} \le C_{\nu} |\lambda|^{-1}$, $|\lambda| \to \infty$

Тогда оператор

$$Z_s(\lambda): u \to Z_s(\lambda)u = (L(\lambda)u, L_1(\lambda)u, ..., L_s(\lambda)u)$$

является изоморфизмом из $H(A)$ в $H\bigoplus_{\nu=1}^{s} H^{\nu}$ и для решения задачи (1) справедлива следующая оценка

$$\|u\|_{H(A)} + |\lambda| \left(\|u\|_H + \sum_{\nu=1}^{s} \|C_{\nu} u\|_{H^{\nu}} \right) \le C \left(\|f\|_H + \sum_{\nu=1}^{s} \|g_{\nu}\|_{H^{\nu}} \right)$$

В параграфе 2 главы 1 исследуется суммирование методом Абеля рядов по корневым векторам системы неограниченных линейных операторных пучков. Рассмотрим однородную задачу

$$\begin{gathered} L(\lambda)u = \lambda u - Au = 0, \\ L_{\nu}(\lambda)u = \lambda C_{\nu} u - B_{\nu} u = 0, \nu = 1,2,...,s, \\ C_{\nu} \in B(H(A), H^{\nu}), \ \nu = s+1,...,m. \end{gathered} \tag{2}$$

Теорема 2.1. Пусть выполнены следующие условия:

1. A-замкнутый оператор с плотной областью определения в пространстве H и при некотором $\rho > 0$, $J \in \sigma_p(H(A), H^{\nu})$;
2. $C_{\nu} \in \sigma_p(H(A), H^{\nu})$, $\nu = 1,2,...,s$,

$B_{\nu} \in (H(A), H^{\nu})$, $\nu = 1,2,...,s$,

$C_{\nu} \in B(H(A), H^{\nu})$, $\nu = s+1,...,m$.

3. оператор $\Omega: u \to \Omega u = (Au, C_1 u, ..., C_m u)$ является обратимым оператором из $H(A)$ в $H\bigoplus_{\nu=1}^{m} H^{\nu}$;
4. линейное многообразие

$\{(u,v) | u \in H(A), v = (C_1 u, ..., C_s u), C_{\nu} u = v = s+1,...,m\}$ плотно в гильбертовом пространстве $H\bigoplus\limits_{\nu=1}^{s}H^{\nu}$;

5. Спектр $Z(\lambda)$ лежит во множестве $K=\{\lambda:|\lambda|<r,|\arg\lambda|<\theta$ при $0<\theta<\frac{\pi}{2p}$ и некотором $r\}$. При $\lambda\,\overline{\in}\,K$

$$\left\|Z^{-1}(\lambda)\right\|_{B\left(H\bigoplus\limits_{\nu=1}^{s}H^{\nu}çH\right)}\le C_{\nu}|\lambda|^{-1},|\lambda|\to\infty.$$

Тогда спектр системы пучков (2) дискретен и система корневых векторов $\{(u_k,C_1u_k,...,C_su_k)\}$ где u_k -корневые вектора системы пучков (2), образуют базис для метода суммирования Абеля порядка γ в $H\bigoplus\limits_{\nu=1}^{s}H^{\nu}$, где $\gamma\in\left(p,\frac{\pi}{2p}\right)$.

В §3 главы 1 исследуется коэрцитивная разрешимость задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с линейными параметрами и переменным коэффициентом. Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, когда спектральный параметр линейно входит в уравнение, а также в граничные условия т.е.

$$L(\lambda)u=\lambda u(x)+a(x)u^{(m)}(x)+Bu(x)=f(x),\ x\in[0,1] \tag{3}$$

$$L_{\nu}(\lambda)=\lambda\left(\alpha_{\nu}u(0)+\beta_{\nu}u^{(m_{\nu})}(1)+\sum_{i=1}^{N_{\nu}}\delta_{\nu i}u^{(m_{\nu})}(x_{\nu i})+T_{\nu}u\right)+T_{\nu_0}u=g_{\nu},$$

$$\nu=1,2,...,s, \tag{4}$$

$$L_{\nu}(\lambda)=\alpha_{\nu}u^{(m_{\nu})}(0)+\beta_{\nu}u^{(m_{\nu})}(1)+\sum_{i=1}^{N_{\nu}}\delta_{\nu i}u^{(m_{\nu})}(x_{\nu i})+T_{\nu}u=0,$$

$\nu=s+1,...,m$ где $m\ge1$, $m_{\nu}\le m-1$, $x_{\nu_i}\in(0,1)$, α_{ν}, β_{ν}, $\delta_{\nu i}$, g_{ν} - комплексные числа, $a(x)$ скалярная функция, $0\le s\le m$, B-оператор в $L_2[0,1]$, T_{ν} и T_{ν_0}-функционалы в $L_2[0,1]$.

<u>Теорема 3.1.</u> Пусть выполнены следующие условия:

1. $m\ge1$, $m_{\nu}\le m-1$, $0<\delta\le m$;
2. $a(x)\in C[0,1]$, $a(x)\ne0$, $a(0)=a(1)$.

$$\sup_{x\in[0,1]} \arg a(x) - \inf_{x\in[0,1]} \arg a(x) < 2\pi \text{, если } m \text{-четное,}$$
$$\sup_{x\in[0,1]} \arg a(x) - \inf_{x\in[0,1]} \arg a(x) < \pi \text{, если } m \text{-нечетное;}$$

3. Оператор B из $W_2^{\,m}(0,1)$ в $L_2(0,1)$ компактен; T_ν, T_{ν_0} - непрерывные линейные функционалы соответственно в $W_2^{(m_\nu)}[0,1]$ $W_2^{(m-\varepsilon)}[0,1]$ при некотором $\varepsilon > 0$;

4. Функциональные условия (4) или эквивалентные или функциональные условия C_ν, $\nu = 1,..,m$ являются ρ-регулярными относительно чисел $\omega_j = e^{2\pi i \frac{j-1}{m}}$, $j = 1,...,m$ где $\rho = \dfrac{m}{2}$, если m-четное и $p = \left[\dfrac{m}{2}\right]$ или $p = \left[\dfrac{m}{2}\right] + 1$, если m - нечетное.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $R_\varepsilon > 0$ такое, что при всех комплексных λ, для которых $|\lambda| > R_\varepsilon$ и при $m = 2p$ входящих в угол

$$\frac{m\pi}{2} - \pi + \sup \arg a(x) + \varepsilon < \arg \lambda < \frac{m\pi}{2} + \pi + \inf \arg a(x) - \varepsilon$$

при $m = 2p + 1$, входящих в угол

$$\frac{m\pi}{2} + \sup \arg a(x) + \varepsilon < \arg \lambda < \frac{m\pi}{2} + \pi + \inf \arg a(x) - \varepsilon$$

при $m = 2p - 1$, входящих в угол

оператор $Z(\lambda) : u \to Z(\lambda)u = \left(L(\lambda)u, L_1(\lambda)u_1, ..., L_s(\lambda)u\right)$ устанавливается изоморфизм из $W_2^{\,m}\left((0,1), C\nu u = 0, \nu = s+1,...,m\right)$ на $L_2(0,1) \otimes C^s$ и для решения задачи (3)-(4) справедлива оценка

$$\|u\|_{w_2^{\,m}(0,1)} + |\lambda| \left(\|u\|_{L_2(0,1)} + \sum_{\nu=1}^{s} |C_\nu u| \right) \le C(\varepsilon) \left(\|f\|_{L_2(0,1)} + \sum_{\nu=1}^{s} |g_\nu| \right)$$

§4 главы 1 посвящен спектральной задаче для обыкновенных дифференциальных уравнении. Обыкновенные дифференциальные операторы хорошо изучены в книге М.А.Наймарка. В работах многих авторов рассмотрены граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений в случае, когда главные части дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В частности, в книге Н. Данфарда и Дж. Шварца, а так же в работах Г.М.Кеселмана и Михайлова, доказано базисность системы корневых функций регулярных граничных задач. Базисность по Абелю для нерегулярных граничных задач с постоянными коэффициентами главной части изучены на множествах гладких функций в работах Хромова, А.Г.Костюченко и Разиевского, А.Г.Костюченко и А.А.Шкаликова. В известной книге М.Л.Расулова изучено разложение гладких функций в случае, когда коэффициенты главной части-комплекснозначные функции.

Рассматривается однородная граничная задача для обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, когда спектральный параметр линейно входит в уравнения и граничные условия

$$L(\lambda)u = \lambda u(x) + a(x)u^{(m)}(x) + Bu(x) = 0\,,\ x \in [0,1] \qquad (5)$$

$$\begin{gathered} L_\nu(\lambda) = \lambda\left(\alpha_\nu u^{(m_\nu)}(0) + \beta_\nu u^{(m_\nu)}(1) + \sum_{i=1}^{N_\nu} \delta_{\nu i} u^{(m_\nu)}(x_{\nu i}) + T_\nu u\right) + \\ + T_{\nu_0} u = \lambda C_\nu u + T_{\nu_0} u = 0, \qquad \nu = 1,2,\ldots,s. \end{gathered} \qquad (6)$$

$$L_\nu(\lambda) = \alpha_\nu u^{(m_\nu)}(0) + \beta_\nu u^{(m_\nu)}(1) + \sum_{i=1}^{N_\nu} \delta_{\nu i} u^{(m_\nu)}(x_{\nu i}) + T_\nu u = 0\,,\ \nu = s+1,\ldots,m$$

где $x_{\nu i} \in (0,1)$, $m \ge 2, m_\nu \le m-1, \alpha_\nu, \beta_\nu \delta_{\nu i}$-комплексные числа, $a(x)$-скалярная функция, B-оператор в $L_2(0,1)$,T_ν, T_{ν_0}-функционалы в $L_2(0,1)$.

Доказана следующая теорема

<u>Теорема 4.1.</u> Пусть выполнены следующие условия:

1. $m \ge 2$, $0 \le m-1$, $0 < s \le m$, $a(x) \in C[0,1]$, $a(x) \ne 0$, $a(0) = a(1)$;
2. оператор B является компактной из $W_2^m(0,1)$ в $L_2(0,1)$;
3. T_ν и T_{ν_0} непрерывные линейные функционалы соответственно в $W_2^{m_\nu}(0,1)$ и $W_2^{m-\varepsilon}(0,1)$ при $\varepsilon > 0$;
4. граничные условия (6) являются p-регулярными относительно чисел $\omega_j = e^{2\pi i \frac{j-1}{m}}$, $j = 1,2,\ldots,m$ где $\rho = \dfrac{m}{2}$ если m-четное число и

$\rho = \left[\frac{m}{2}\right]$ или $\rho = \left[\frac{m}{2}\right] + 1$ если m -нечетное;

5. если $m = 4k + j$ и k -неотрицательное число, $j = 0{,}2,$ то $\sup\limits_{x\in[0,1]} \arg a(x) < 2\pi - \frac{\pi i}{2}$, $\inf\limits_{x\in[0,1]} \arg a(x) > -\frac{\pi i}{2}$, если $m = 4k + j$ u - неотрицательное число, $j = 1{,}3$ то $\sup\limits_{x\in[0,1]} \arg a(x) < \pi - \frac{\pi i}{2}$, $\inf\limits_{x\in[0,1]} \arg a(x) > -\frac{\pi i}{2}$.

Тогда спектр задачи (5)-(6) дискретен и система вектор-функции $\{(u_k, C,U_k,\ldots,C_s U_k)\}$ где u_k -корневые функции задачи (5)-(6) образуют базис Абеля порядка α в пространстве $L_2[0,1] \oplus C^s$ где $\alpha \in \left(\frac{1}{m}, \frac{\pi}{2\theta}\right)$ и

$$\max\left(\pi - \frac{\pi i}{2} - \inf \arg a(x), \frac{\pi i}{2} - \pi + \sup \arg a(x)\right) < \theta < \pi \text{ при } p = \frac{m}{2},$$

$$\max\left(\pi - \frac{\pi i}{2} - \inf \arg a(x), \frac{\pi i}{2} + \sup \arg a(x)\right) < \theta < \pi \text{ при } \rho = \left[\frac{m}{2}\right] + 1.$$

Глава 2 посвящена изучению начально-краевых задач для параболических уравнений и состоит из двух параграфов.

В первом параграфе изучается полнота элементарных решений дифференциально-операторных уравнений, и полученные абстрактные результаты применяются для дифференциальных уравнений с частями - производными.

Рассматривается в сеперабельном гильбертовом пространстве H задача Коши для однородного дифференциально-операторного уравнения первого порядка

$$u'(t) = Au(t) + Bu(t) \tag{7}$$

$$u(0) = \varphi_0 \tag{8}$$

Доказана следующая теорема

<u>Теорема 1.2.</u> Пусть выполнены следующие условия:

1. оператор A в H имеет платную область определения;

2. при некотором $p>0$ и $\lambda_0 \in \rho(A)$ оператор $R(\lambda_0, A) \in \sigma_p(H)$;

3. существуют лучи $l_k(a)$ между лучами $\alpha > 0, \beta \in [0,1]$ такие, что $\|R(\lambda, A)\| \le C|\lambda|^{-1}$, $|\arg\lambda| \le \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ или $\lambda \in \ell_k(a)$;

4. B-оператор в H, $D(B) \supset D(A)$ и при любом $\varepsilon > 0$ $\|Bu\| \le \varepsilon \|Au\|^{\beta} \|u\|^{1-\beta} + C(\varepsilon)\|u\|$, $u \in D(A)$;

5. $\varphi_0 \in D(A)$.

Тогда задача (7)-(8) имеет единственное решение

$$u(t) \in C([0,T],H) \cap C'([0,T],E(A),H)$$

и существуют числа C_{jn} такие что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \left\| u(t) - \sum_{j=1}^{n} C_{n_j} u_j(t) \right\| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \left\| u'(t) - \sum_{j=1}^{n} C_{n_j} u'_j(t) \right\| + \left\| Au(t) - \sum_{j=1}^{n} C_{j_n} Au_j(t) \right\| = 0$$

где $u(t)$-решение задачи (1)-(2) а $u_j(t)$-элементарные решения уравнения (1).

Теорема 2.2. Пусть выполнены следующие условия:

1. оператор A в H имеют платную область определения $D(A)$;
2. при некотором $p>0$ и $\lambda_0 \in \rho(A)$ оператор $R(\lambda_0, A) \in \sigma_p(H)$;
3. существуют лучи $\ell_k(a)$ с лучами между соседними лучами не больше $\dfrac{\pi}{2}$ такие, что $\|R(\lambda, A)\| \le C|\lambda|^{-1}$, $|\arg\lambda| \le \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ или $\lambda \to \infty$;
4. B оператор в H, $D(B) \supset D(A)$ и оператор B $R(\lambda_0, A)$ в H компактен;
5. $\varphi_0 \in [H, H(A)]_{1-\frac{1}{p},p}$ при некотором $p \in (1,\infty)$. Тогда задача (7)-(8) имеет единственное решение $u \in W_0^1((0,T), H(A)H)$ и существуют числа C_{jn} такие что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\left(\left\|u'(t)-\sum_{j=1}^n C_{jn}u_t'(t)\right\|^p+\left\|Au(t)-\sum_{j=1}^n C_{jn}Au_t(t)\right\|^p\right)dt=0$$

где $u(t)$-решение задачи (1)-(2), а $u(t)$-элементарное решение уравнения (1).

Рассматривается начально-краевая задача

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+a(x)\frac{\partial^{2m}u(t,x)}{\partial x^{2m}}+\sum_{k=0}^{2m-1}a_k(x)\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial x^k}=0\,, \tag{9}$$

$$L_\nu(\lambda)=\alpha_\nu u_x^{(m_\nu)}(t,0)+\beta_\nu u_x^{(m_\nu)}(t,1)+\sum_{i=1}^{N_\nu}\delta_{\nu i}u(t,x_{\nu i})+T_\nu u(t_i)=0\,,$$

$$\nu=1,2,...,2m \tag{10}$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x) \tag{11}$$

где $x_{\nu p}\in(0,1),\ \ m_\nu\le 2m-1$.

<u>Теорема 3.2.</u> Пусть выполнены следующие условия:

1. $a(x)\neq 0\,,\ a(x)\in C[0,1],\ a_k(x)\in L_2[0,1],\ k=0,1,...,2m-1\,,$
2. $|\arg a(x)|<\dfrac{\pi}{2},$ если m-четное, $|\arg a(x)|>\dfrac{\pi}{2},$ если m-нечетное;
3. $$\theta=\begin{vmatrix}\alpha_1\omega^{m_1},...,\alpha_1\omega_{m_1}^{m}\,\beta_1\omega_{m+1}^{m}...\beta_1\omega_{2m}^{m_1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{2m}\omega^{m_{2m}},...,\alpha_{2m}\omega_m^{m_{2m}}\,\beta_{2m}\omega_{m+1}^{m_{2m}}...\beta_{2m}\omega_{2m}^{m_{2m}}\end{vmatrix}\neq 0\,,$$

где $\omega_1=1,\quad \omega_2=e^{i\frac{\pi}{m}},\ldots,\omega_{2m}=e^{i\frac{\pi}{m}(2m-1)}$;

4. при некотором $q\in(1,\infty)$ функционал T_ν в $W_q^{m_\nu}(0,1)$ непрерывен;
5. $\varphi_0\in W_2^{2m}((0,1),L_\nu u=0,\quad \nu=1,2,...,2m)$.

Тогда задача (9), (10), (11) имеет единственное решение $u\in C'((0,T],W_2^{2m}(0,1),L_2(0,1))$ и существуют числа C_{jn} такие, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\left(\left\|u'(t)-\sum_{j=1}^n C_{n_j}u_j'(t)\right\|_{L_2(0,1)}+\left\|Au(t)-\sum_{j=1}^n C_{j_n}Au_j(t)\right\|_{W_2^{2m}(0,1)}\right)=0$$

где $u(t,x)$-решение задачи (9), (10), (11) а $u_j(t,x)$-элементарные решения задачи (9), (10).

Пусть G-ограниченная область в пространстве R^r с бесконечно гладкой $(2r-1)$ мерной границей Г. Рассмотрим в $(0,T]\times G$ начально-краевую задачу

$$A(x,D_x,D_t)=D_t u(t,x)+\sum_{|\alpha|\le 2m} a_j(x)D_x^2 u(t,x)=0 \qquad (12)$$

$$B_\nu(x',D_x)u=\sum_{|\alpha|=m_\nu} b_{\nu\alpha}(x')D_x^\alpha u(t,x')=0,\ x'\in\tilde{A},\ \nu=1,...,m \qquad (13)$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x) \qquad (14)$$

где $m_\nu\le 2m-1,\quad D_t=\frac{\partial}{\partial t},\quad D_x^\alpha=D_1^{\alpha_1}...D_r^{\alpha_r},\quad D_j=-\frac{\partial}{\partial x_j}.$

<u>Теорема 4.2.</u> Пусть выполнены следующие условия

1. $a_\alpha\in C^\infty(\overline{G}),\quad b_{\nu\alpha}\in C^\infty(G);$
2. $A_0(x,\sigma,\lambda)=\lambda+\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\sigma^r\ne 0$ при

$x\in\overline{G},\quad \sigma\in R^r,\quad |\arg\lambda|\le\frac{\pi}{2}$ или $\lambda\in\ell_k(0,\varphi_k)$, где ℓ_k-такие лучи, углы между соседними лучами которых меньше $\frac{2m\pi}{2}$;

3. В полуплоскости $|\arg\lambda|\le\frac{\pi}{2}$ и на лучах ℓ_k выполнены следующие условия:

Рассмотрим уравнение на полупрямой $y\ge 0$,

$$A_0\left(o,\sigma'-i\frac{d}{dy}\nu\right)u(y)=0$$

с краевыми условиями.

$$B_{\nu_0}\left(o,\tau,-i\frac{d}{dy}\right)u(y)\Big|_{y=0}=h_\nu,\quad \nu=1,2,...,m,$$

где $\sigma'=(\sigma_1,...,\sigma_{r-1})$. Требуется, чтобы при $\lambda\in S,\ \tau\in R^{r-1},$

$|\tau'|+|\lambda|\neq 0$ эта задача имела одно и только одно решение, стремящееся к нулю при $y\to\infty$ вместе со всеми производными для любых чисел h_ν;

4. $\varphi_0\in W_2^{2m}(G,B_\nu u=0,\quad \nu=1,2,...,m).$

Тогда задача (12), (13), (14) имеет единственное решение

$u\in C'((0,T],W_2^{2m}(G),L_2(G)).$

и существуют числа C_{jn} такие, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\left(\left\|u'(t,x)-\sum_{j=1}^{n}C_{n_j}u_j(t,x)\right\|_{L_2(G)}+\right.$$

$$\left.+\left\|u(t,x)-\sum_{j=1}^{n}C_{j_n}u_j(t,x)\right\|_{W_2^{2m}(G)}\right)=0$$

где $u(t,x)$-решение задачи (12), (13), (14) а $u_j(t,x)$-элементарные решения задачи (12), (13).

§2 главы 2 посвящен изучению полноты элементарных решений системы дифференциально-операторных уравнений и их приложения.

Пуст E и E^ν, $\nu=1,...,s$ -банаховы пространства. Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных -операторных уравнений

$$L(D_t)u=u'(t)+Au(t)=f(t) \tag{15}$$

$$L_\nu(D_t)u=A_\nu^0u'(t)+A_\nu^1u(t)=f_\nu(t),\ \nu=1,2,...,s \tag{16}$$

$$u(0)=u_0 \tag{17}$$

Доказывается следующая теорема.

<u>Теорема 5.2.</u> Пусть выполнены условия:

1. A плотно определенный замкнутый оператор в E, $D(A)=E_1$;
2. A_ν^0, $\nu=1,2,...,s$ и A_ν^1, $\nu=1,2,...,s$ из E_1 и E^ν ограниченные операторы;
3. для некоторого $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right]$, $\alpha>0$ все комплексные числа из угла

$\left|\arg\lambda\right| \le \dfrac{\pi}{2}+\alpha$ при достаточно больших модулей являются регулярными числами операторного пучка

$$Z(\lambda): u \to Z(\lambda)u = \left(L(\lambda)u, L_1(\lambda)u, \ldots, L_s(\lambda)u\right)$$

ограниченно действующего из E_1 в $E \oplus E^1 \oplus E^2 \oplus \ldots \oplus E^s$ и для $\left|\arg\lambda\right| \le \dfrac{\pi}{2}+\alpha$, $\alpha \to \infty$

$$\left\|Z^{-1}(\lambda)\right\|_{B\left(E\oplus E^1\oplus E^2\oplus\ldots\oplus E^s, E\right)} \le C\left|\lambda\right|^{-\eta}$$

$$\left\|A_\nu^0 Z^{-1}(\lambda)\right\|_{B\left(E\oplus E^1\oplus E^2\oplus\ldots\oplus E^s, E^\nu\right)} \le C\left|\lambda\right|^{-\eta},\ \nu = 1,2,\ldots,s\,.$$

4. для некоторого $\theta \in (1-\eta, 1]$, $\mu \in [0,\eta]$, $f \in C_\mu^\theta\left((0,T];E\right)$, $f_\nu \in C_\mu^\theta\left((0,T];E^\nu\right)$;

5. $u_0 \in E_1$.

Тогда существует единственное решение $u(t)$, задачи (15), (16), (17) функция $t \to \left(u(t), A_{10}u(t), \ldots, A_{s0}u(t)\right)$ из $(0,T]$ в $E + E_1 + \ldots + E^s$ непрерывно дифференцируема и из $[0,T]$ в $E + E_1 + \ldots + E^s$ непрерывна, и для $t \in (0,T]$ выполняются следующие оценки

$$\left\|u(t)\right\|_E + \sum_{\nu=1}^{s}\left\|A_\nu^0 u(t)\right\|_{E^\nu} \le$$

$$\le C\left(\left\|A_\nu^0\right\| + \left\|u_0\right\| + \left\|f\right\|_{C_\mu((0,T),E)} + \sum_{\nu=1}^{s}\left\|f_\nu\right\|_{C_\mu\left((0,T),E^\nu\right)}\right)$$

$$\left\|u(t)\right\| + \left\|Au(t)\right\| + \sum_{\nu=1}^{s}\left\|A_\nu^0 u(t)\right\|_{E^\nu} \le$$

$$\le C\left\{t^{\eta-1}\left[\left\|A_\nu^0\right\| + \left\|u_0\right\|\right] + t^{\eta-\mu-1}\left(\left\|f\right\|_{C_\mu^\theta([0,T],E)} + \sum_{\nu=1}^{s}\left\|f_\nu\right\|_{C_\mu^\theta\left((0,T),E^\nu\right)}\right)\right\}.$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Г.И.Асланову за постоянную помощь.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Алиев И.В., Мамедов М.М. Коэрцитивная разрешимость задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с линейными параметрами. Материалы науч. конф. «Вопросы функционального анализа и математической физики», посвященной 80-летию БГУ, им. М.Э.Расулзаде, 1999, с.58-60.

2. Мамедов М.М. Об одной нерегулярной краевой задаче. Aspirantların, gənc tədqiqatçıların respublika elmi konfransının materialları. Bakı, 1999, səh. 8 – 9.

3. Мамедов М.М. Коэрцитивная разрешимость задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с линейными параметрами. Депонирование в АзНИИНТИ, Баку 2655 Аз. 31.03.2000.

4. Алиев И.В., Мамедов М.М. Смещанные задачи для параболических уравнений. Тезисы науч. конф., посвященной 70–летию член-корр. НАНА, проф. Я.Дж.Мамедова. 2001, стр. 131 – 132.

5. Мамедов М.М. Нерегулярная эллиптическая краевая задача с линейным параметром. prof. Ə.Ə.Novruzovun xatirəsinə həsr edilmiş elmi konfransın materialları. 2001, səh. 23 – 24.

6. Мамедов М.М. Нерегулярная эллиптическая краевая задача с линейным параметром. Материалы науч. конф., посвященной 85-летию заслуженного деятеля науки, проф. А.Ш.Габибзаде. 2001. с.118-119.

7. Алиев И.В., Мамедов М.М. Некоторые свойства позитивных операторов. Доклады НАНА, т.LVII, №4-6, 2001, с. 21-27.

8. Мамедов М.М. О сходимости рядов по корневым вектором операторов. Доклады НАНА, т. LVIII, №1-2, 2002, с. 3-7.

9. Мамедов М.М. Корректная и коэрцитивная разрешимость задачи Штурма-Лиувилля с операторным коэффициентом на всей оси. Доклады НАНА, т.LVIII, №3-4, 2002, с. 37-43.

10. Алиев И.В., Мамедов М.М. Краевая задача с параметром для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Nəzəri və riyazi fizikanın tərs məsələləri». I Beynəlxalq elmi konfransının materialları. Sumqayıt, 2003, səh. 116– 118 .

11. Алиев И.В., Мамедов М.М. Многоточечная задача для обыкновенного дифференциального уравнения с полиномиальным параметром. Доклады НАНА, т.LIX, №1-2, 2003, с. 26-29.

12. Мамедов М.М. Суммируемость по методу Абеля рядов корневых векторов в краевых задачах для эллиптических дифференциально-

операторных уравнений с оператором в краевых условиях. Доклады НАНА, т.LIX, №3-4, 2003, с. 23-27.

13. Мамедов М.М. Базисность Абеля корневых функций обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Тезисы X Международной конференции по математике и механике, посвященной 45-летию ИММ НАНА, 2004, с.100.

14. Мамедов М.М. Суммирование методом Абеля рядов по корневым векторам системы неограниченных линейных операторных пучков. Sumqayıt Dövlət Universiteti, Elmi Xəbərlər. с.6, 2006, №4, səh. 42-48.

15. Мамедов М.М. Коэрцитивная разрещимость системы неограниченных линейных операторных пучков. AMEA-nın həqiqi üzvü, əməkdar elm xadimi, f.-r.e.d., prof. Məcid Lətif oğlu Rəsulovun 90 illiyinə həsr olunmuş "Riyazi fizikanın üsulları" 2006. s. 117-118.

16. Мамедов М.М. Нелокальная краевая задача для эллиптических дифференциально-операторных уравнении. Тезисы XII Международной конференции по математике и механике, посвященной 70 летному юбилею чл.-корр. НАНА, профессора Б.А.Искендерова. 2007, с.112.

17. Mamedov M.M. Fullness of elementary solutions of mixed problems for parabolic equations. NASA, Proceedings of IMM of NASA, v.XXVII, 2007. p.37-44.

18. Мамедов М.М. Полнота элементарных решений дифференциально-операторных уравнений. Bakı Dövlət Universiteti, əməkdar elm xadimi, akademik Əşrəf Hüseynovun 100 illik yubleyinə həsr olunmuş elmi konfransın tezisləri, 25 oktyabr 2007, səh. 98.

19. Мамедов М.М. Полнота элементарных решений дифференциально-операторных уравнений. AMEA-nın müxbir üzvü, prof. Q.T.Əhmədovun anadan olmasının 90 illiyinə həsr olunmuş respublika elmi konfransının tezisləri, BDU, 2007. s. 22-23.

20. Mamedov M.M. Summability by the Abel method of series with respect to the root vectors of the system of unbounded linear operator bundles. Proceedings of IMM of NASA, v.XXVIII, 2008. p.51-58.

21. Aslanov H.I.,Mamedov M.M. Completeness of elementary solutions of differential-operator equations. Transactions of NASA, issue mathematics and mechanics, ser. of phys.-tech. and math. sc., v.XXVIII, №1, 2008, p.25-32.

22. Мамедов М.М. Разрешимость и полнота элементарных решений параболических дифференциально-операторных уравнений. Sumqayıt Dövlət Universiteti Elmi Xəbərlər. с. 9, 2009, №2, səh. 22-28.

23. Мамедов М.М. Коэрцитивная разрешимость системы линейных операторных пучков и суммируемость по корневым векторам. Abstracs of International conference devoted to the 80-th anniversary of academician F.G.Magsudov. 2010. p.212-214.

24. Асланов Г.И., Мамедов М.М. Об одной нелокальной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Технологии и методики в образовании, научна-техн. журнал, №3, Воронежский Государственный Педагогический Университет, 2010. стр. 7 – 11.

25. Асланов Г.И., Мамедов М.М. Об одной нелокальной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Bulgarian–Turkish–Ukrainian Scinetific Conference, "Mathematical Analysis, Differential Equations and their applications" Sunny Beach, Bulgaria 2010. pg.56-57.

26. Мамедов М.М. Об одной нелокальной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Sumqayıt Dövlət Universiteti Elmi Xəbərlər. c.11, 2011, №1, səh. 47-53.

27. Mamedov M.M. Solvability and completeness of solutions of parabolic differential – operator equations. Математичн. Студіі. –т.36, №1. 2011. p.77 – 85.

28. Aslanov H.I., Mamedov M.M. Coercive solvability of a nonlocal boundary value problem for a fourth order ordinary differential equation. Math. Analysis Differential Equations and Applications. Sunny beach, Bulgaria, 2011, №3, p. 33-46.

MƏHƏMMƏDƏLİ MUSA oğlu MƏMMƏDOV

XƏTTİ OPERATORLAR DƏSTƏSİNDƏN İBARƏT SİSTEMLƏRİN SPEKTRAL MƏSƏLƏLƏRİ VƏ ONUN TƏTBİQLƏRİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işində qeyri-məhdud xətti operatorlar dəstəsindən ibarət sistemlərin həll olunması məsələsinə baxılmış, bu sistemlərin koersitiv həll olunması haqqında teoremlər isbat edilmişdir. Bu sistemlərin məxsusi və qoşulmuş elementlər sisteminə nəzərən ayrılışların Abel metodu ilə cəmlənməsi öyrənilmişdir. Spektral parametrin həm tənliyə, həm də sərhəd şərtlərinə xətti daxil olduğu halda bir sinif adi diferensial tənliklərin koersitiv həll olunması şərtləri müəyyən edilmiş, uyğun bircins sərhəd məsələsinin spektrinin diskretliyi isbat edilmiş, məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sisteminin Abel mənada bazisliyi isbat edilmişdir.

Hilbert fəzalarında birinci tərtib bircins operator-differensial tənliklər üçün Koşi məsələsinə baxılmış, onun elementar həllərinin tamlığı isbat edilmişdir. Alınmış mücərrəd nəticələr xüsusi törəməli parabolik tənliklər üçün başlanğıc sərhəd məsələlərinə tətbiq edilmiş, elementar həllərin tamlığı teoremi isbat edilmişdir.

Dissertasiyada aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır.

Operator dəstələrindən ibarət sistemin koersitv həll olun bilməsi isbat edilmişdir;

Operatorlar dəstələrindən ibarət sistemin məxsusi və qoşulmuş elementləri sisteminin tamlığı isbat edilmişdir.

Məxsusi və qoşulmuş elementlərə görə ayrılışın Abel mənada cəmlənməsi isbat edilmişdir.

Tənliyə və sərhəd şərtlərinə spektral parametr xətti daxil olduğu halda adi diferensial operatorların məxsusi və qoşulmuş elementlər sisteminin Abel mənada bazisliyi isbat edilmişdir.

Birinci tərtib operator diferensial tənliklərin elementar həllər sisteminin tamlığı isbat edilmişdir.

Parabolik tənliklər üçün başlanğıc-sərhəd məsələsinin elementar həllər sisteminin tamlığı isbat edilmişdir.

MAHAMMEDALI MUSA OGLU MAMEDOV

SPECTRAL PROBLEMS OF THE SYSTEM OF LINEAR OPERATOR PENCILS AND THEIR APPLICATIONS

SUMMARY

In the dissertation work the systems of linear operator pencils with unbounded coefficients are studied, theorems on coercive solvability of the given system are proved. The theorems on Abel summation of series in system of Eigen and ad joint elements of the system of operator pencils are proved. In the case when the spectrum linearly enters in equation and boundary conditions, the coercive solvability of the boundary-value problem is proved, the discreteness of the spectrum and Abel basicity of the system of Eigen and ad joint functions of the problem is proved.

The completeness of the system of elementary solutions of the Cauchy problem for first order operator-differential equations in Hilbert space is proved. Applying the obtained abstract results, the completeness of the system of Eigen and ad joint functions of initial-boundary value problem for parabolic equations is proved.

At the end of the dissertation, the systems of operator-differential equations in Hilbert space is considered, and the completeness of the system of elementary solutions of the given system is proved.

In the dissertation work, the following main results are obtained.

- Coercive solvability of the system of operator pencils is proved.
- Completeness of the system of root elements is proved.
- Abel sum ability of series in root vectors of the system of operator pencils is proved.
- Abel basicity of the root functions is established for ordinary differential operators when the spectral parameter enters into the equation and boundary conditions.
- Completeness of elementary solutions of the system of operator-differential equations of first order is proved.
- Completeness of elementary solutions of an initial boundary value problem for parabolic equations is proved.