НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

МИРФАИГ МИРАББАС оглы МИРГЕЙДАРЛИ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1211.01-Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2013

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

MİRFAİQ MİRABBAS OĞLU MİRHEYDƏRLİ

KƏSİLƏN ƏMSALLI İKİNCİ TƏRTİB ELLİPTİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN İKİNCİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN TƏDQİQİ

1211.01-Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2013

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Riyazi analiz"** şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru **Fərman İ.Məmmədov**

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Əkbər B.Əliyev**
(Azərbaycan Texniki Universiteti);
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Əbdürrəhim F.Quliyev**
(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu).

Aparıcı təşkilat:
Bakı Dövlət Universiteti
«Diferensial və inteqral tənliklər» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 22 fevral 2013-cü il saat 16^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 21 yanvar 2013-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена в отделе «Математический анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, проф. **Фарман И.Мамедов**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, проф. **Акпер Б.Алиев**
(Азербайджанский Технический Университет);
кандидат физико-математических наук, доц. **Абдуррагим Ф.Гулиев**
(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана).

Ведущая организация:
Бакинский Государственный Университет
кафедра «Дифференциальные и интегральные уравнения».

Защита диссертации состоится 22 февраля 2013 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 21 января 2013 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математические модели ряда физических процессов: динамики жидкости, движения газа, Маковских процессов, процессов теплопередачи и массообмена и др. описываются различного рода краевыми задачами для линейных и квазилинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами.

В случае регулярных коэффициентов, теория эллиптических уравнений и связанные с ней основные краевые задачи, достаточно полно изучены и, имеют много важных глубоких результатов.

Предметом изучения настоящей диссертации является исследование второй краевой задачи, классически, так называемой, задачи Неймана для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. Исследование эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами стимулируется, также с внутренними потребностями теории уравнений с частными производными. Так, например, в вопросах разрешимости квазилинейных уравнений требуется изучить линейные краевые задачи и получить априорные оценки для их решения, не содержащие никаких априорных предположений о регулярности коэффициентов.

Уже в случае линейных уравнений известно, что эллиптические уравнения с разрывными коэффициентами имеют ряд отличительных свойств, по сравнению с уравнениями с регулярными коэффициентами. Так, например, известное уравнение Гильбарга-Серрина, являющееся линейным равномерно эллиптическим уравнением второго порядка с разрывными в одной точке коэффициентами, может иметь два различных решения первой краевой задачи из пространства Соболева W_2^2. А также, для таких уравнений одна точка может быть неустранимой в классе ограниченных решений. Тогда как, многие важные свойства эллиптических, даже параболических уравнений с регулярными коэффициентами сходны с уравнением Лапласа.

Что касается требований регулярности коэффициентов, в вопросах сильной разрешимости основных краевых задач линейных эллиптических уравнений в пространствах Соболева $W_p^2(D)$, то здесь до недавнего времени грань проходила по непрерывности коэффициентов. После недавних работ ряда авторов[1,2] стало ясно, что эту грань нужно передвинуть несколько дальше, а именно, было доказано, что для разрешимости основных краевых задач в пространствах Соболева $W_p^2(D)$ достаточно, чтобы разрывные коэффициенты уравнения удовлетворяли известному условию VMO (vanishing mean oscillation). По-видимому, здесь-то и проходит граница, так как существуют примеры, построенные Уральцевой[3], указывающие на невозможность получения $W_p^2(D)$ оценок, ни при каком $1 \le p < \infty$, для всего класса равномерно-эллиптических уравнений, без ограничения на гладкость коэффициентов. Хотя в этой ситуации, казалось, на грани краха всех свойств эллиптических уравнений, следует отметить, что основополагающие результаты по теории сингулярных интегралов позволяли доказать топологическими методами существование $W_p^2(D)$ априорных оценок при достаточной малости разрывов коэффициентов уравнения[4].

В этой связи, среди всех таких результатов примечательны исследования Кордеса[5], который показал, что если несколько «сузить» класс равномерно эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, то для их решений остаются справедливыми $\tilde{N}^{\alpha}$, и

---

[1] Palagachev D Quasilinear elliptic equations with VMO coefficients // *Trans. of Amer. Math. Sci.*, 1995, v.347, №7, p.2481-2493.

[2] Vitanza C. A new contribution to the $W^{2,p}$-regularity for a class of elliptic second order coefficients // *Le Mathematiche,* 1993, v.48, p.287-296

[3] Уральцева Н.Н. О невозможности W_q^2-оценок для многомерных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Краевые задачи мат.физ. и смеж. вопр. теор. функций, Л., 1967, т.5, с.250-254

[4] Talenty G. Sopra una classe di equazioni ellipticheа coefficienti misurableli // Ann. Math. Pure. Appl., 1965, v.69, p.285-304

[5] Cordes H.O. Über die erste Randwertauggabe bei quasilinearen differential gleichungen zweiter ordnung in mehz als zwei variablen // Math. Ann., 1956, v.131, p.278-312

даже $\tilde{N}^{1+\alpha}$ априорные оценки решения через $L_n(D)$ норму правой части уравнения. Впоследствии, такие ограничения на коэффициенты было принято называть условиями Кордеса.

Результат Кордеса наводит на мысль, что это именно тот класс, где нужно искать сильную разрешимость основных краевых задач для равномерно эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. Наконец, усилиями ряда авторов[6,7,4] была доказана сильная разрешимость в пространстве $W_2^2(D)$ задачи Дирихле для эллиптических и параболических уравнений с разрывными коэффициентами, удовлетворяющая условию Кордеса. Существуют примеры, утверждающие, что вне класса Кордеса не существует $W_p^2(D)$ разрешимость. Повидимому, W_p^2 - разрешимость, находится внутри класса Кордеса. Есть также примеры, показывающие, что для всего класса Кордеса порядок суммируемости- два и этот показатель для априорной оценки в пространстве $W_2^2(D)$ неулучшаем.

После фундаментальной работы Кордеса в течение долгого времени не удавалось доказать или опровергнуть существование $\tilde{N}^{\alpha}$ или $\tilde{N}^{1,\alpha}$ априорных оценок для всего класса равномерно эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. В 1980 году Крыловым и Сафоновым в их фундаментальной работе[8] была решена проблема Кордеса - была доказана неравенство Гарнака положительных решений и на ее основе была получена $\tilde{N}^{\alpha}$ априорная оценка для произвольного решения. Позже Сафоновым была доказана невозможность существования $\tilde{N}^{1,\alpha}$ и W_p^1 оценок для всего класса

---

[6] Алхутов Ю.А., Мамедов И.Т. Первая краевая задача недивергентных параболических уравнений 2-го порядка с разрывными коэффициентами // Матем. сб., 1986, т.131(173), №4(12), с.477-500

[7] Chicco M. Solvability of the Dirichlet problem in $H^{2,p}(\Omega)$ for a class of linear second order elliptic partial differential equations // Boll. Univ. Math. Italy, 1971, v.4, №4, p.374-387

[8] Крылов Н.В., Сафонов М.В. Некоторые свойство решений парабоилческих уравнений с измеримыми коэффициентами//Изв. АН СССР, 1980, т.44, №1, с. 161-175.

равномерно эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами.

В отличие от задачи Дирихле, задача Неймана для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами не была рассмотрена. Предмет изучения настояшей диссертаций является изучение этой ситуации. В случае гладких коэффициентов уравнения, задачу Неймана изучали в своих работах ряд авторов: М.Шехтер[9] Я.Лопатинский[10], Шапиро[11], С.Агмон, А.Дуглис, Л.Ниренберг[12]. Относительно сильной разрешимости в пространствах Соболева $W_p^2(D)$ основных краевых задач для линейных эллиптических уравнений с непрерывными коэффициентами, отметим работу О.А.Ладыженской[13].

Для эллиптических и параболических уравнений с разрывными коэффициентами задачу Дирихле рассматривали Алхутов Ю.А., Мамедов И.Т., Дж.Таленти, Жиков В.В., Козлов С.М., Сиражудинов М.М. и др. В работе Дж.Вен, М.Таин была рассмотрена смешанная краевая задача для некоторого класса нелинейных параболических уравнений с разрывными коэффициентами, удовлетворяющая условию, близкому Кордесу.

Цель работы. Исследование вопросов сильной разрешимости и единственности решения второй краевой задачи в пространствах Соболева $W_p^{\,2}(D)$ для класса нелинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, удовлетворяющей условию Кордеса.

---

[9] Schechter M. Integral inequalities partial differential operators and functions satisfying general boundary conditions // *Com. Pure. Appl. Math.,* 1959, v.12, p.37-66

[10] Лопатинский Я.Б. О методе решения граничных задач для системы эллиптических дифференциальных уравнений // *Укр. матем., журн.*, 1953, т.5, №2, с.123-151

[11] Шапиро З.Я. Об общей краевой задаче для эллиптических уравнений // *Изв. АН СССР, сер. мат., мех., астр.*, 1953, т.17, с.539-562

[12] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих условиях. Москва ИЛ, 1962.

[13] Ладыженская О.А. Простое доказательство основных краевых задач и задачи на собственные значения для эллиптических уравнений. Вестник ЛГУ, сер. физ. мат. мех. астр. 1955, №11, с.23-29

Общая методика исследования. В работе использованы топологические методы теории функциональных пространств и функционального анализа и качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

-Исследована сильная разрешимость задачи Неймана в пространстве Соболева $W_2^2(D)$ для класса линейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, удовлетворяющая условию Кордеса.

- Для уравнения с разрывными коэффициентами доказывается, что существует единственная функция $g(x) \in L_2(D)$, с точностью до постоянного множителя, такая, что задача Неймана сильно разрешима в пространстве Соболева $W_2^2(D)$ если правая часть $f(x)$ ортогональна к функции $g(x)$, далее показывается, что функция $g(x)$ является решением сопряженного оператора $L^* g = 0$ задачи Неймана, т.е. установлено, что коразмерность оператора L задачи Неймана равна единице.

-Исследована сильная разрешимость при любой правой части $f(x)$ задачи Неймана для некоторого класса квазилинейных уравнений с малыми членами имеющей разрывные коэффициенты, удовлетворяющие условию Кордеса.

-Для линейного оператора с младшими членами доказаны априорные оценки в пространствах Соболева $W_2^2(D)$

-Доказана $W_p^2(D)$ априорная оценка для решения задачи Неймана; полученные априорные оценки применяются к исследованию вопросов единственности решения второй краевой задачи для класса квазилинейных уравнений с разрывными коэффициентами

-Изучена краевая задача для однородного уравнения с младшими членами. Показано, что такая задача не требует ограничений типа малости норм $\|b_i\|_n$, $\|c\|_{n/2}$, и доказана соответствующая теорема.

-Доказана сильная разрешимость в $\widetilde{W}^{2,2}(D)$ задачи Неймана для класса полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, удовлетворяющая условию Кордеса.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер. Однако, полученные результаты могут быть использованы при изучении различных прикладных задач, описывающихся нелинейными эллиптическими уравнениями второго порядка. Результаты диссертации могут быть полезными при изучении различных вопросов теории случайных процессов и при обосновании сходимости численных процессов при численном решении нелинейных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре отдела «Дифференциальные уравнения» (рук. член-корр. НАНА, проф Б.А.Искендеров), на семинаре отдела «Негармонический анализ» (рук. проф. Б.Т.Билалов), на семинаре отдела «Уравнения математической физики» (рук. член-корр. НАНА проф. И.Т.Мамедов), на семинаре член-корр. НАНА проф. Р.В.Гусейенова и на семинаре проф. А.Алиева, на X Международной конференции по математике и механике, посвященной 45-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана (2004), на Международной конференции, посвященной 50-летию член.-корр. НАНА профессора И.Т.Мамедова (2005), на Международной конференции, посвященной 70 летию член.-корр. НАНА профессора Б. А. Искендерова (2006).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы включающей 55 наименований. Объем диссертации 140 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается обзор тематики в сравнении с известными результатами. Приводятся необходимые определения и обозначения. Перечисляются основные результаты, полученные в диссертации.

Прежде чем сформулировать основные результаты диссертации условимся некоторыми обозначениями и определениями.

Пусть $mes D$ - Лебегова мера области D;

$C^{\infty}\left(\overline{D}\right)$-пространство бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{D}$.

$C_0^{\infty}\left(D\right)$-пространство бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{D}$ с компактным в D носителем.

$L_p\left(D\right)$ - пространство измеримых функций в D, для которых конечна норма $\|u\|_{L_p(D)} = \left(\int\limits_D |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$. Иногда для краткости, если это не приведет к недоразумению, будем писать $\|u\|_{P,D}$ или $\|u\|_P$ вместо записи $\|u\|_{L_p(D)}$. $L_{\infty}\left(D\right)$ - пространство измеримых функций в D с конечной нормой: $\|u\|_{L_{\infty}(D)} = ess\sup\limits_D |u|$.

$C^{\beta}(D)$ - множество непрерывных функций, заданных в D, для которых конечна норма:

$$\|u\|_{C^{\beta}(D)} = \sup_{x \in D} |u(x)| + \sup_{\substack{x,y \in D; \\ x \ne y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\beta}}, \qquad 0 < \beta < 1;$$

$W_p^1(D)$-пространство функций $u \in L_p(D)$, имеющих производные $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1,2,...,n$ в смысле теории распределений в области D, также принадлежащих к пространству $L_p(D)$, снабженной нормой:

$$\|u\|_{W_p^1(D)} = \|u\|_{L_p(D)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_p(D)}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$W_p^2(D)$ - пространство функций заданных в D, с конечной нормой:

$$\|u\|_{W_p^2(D)} = \|u\|_{L_p(D)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_p(D)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_p(D)}, \ 1 \le p < \infty$$

$\widetilde{W}_p^1(D)$ - пространство функций $u \in W_p^1(D)$, плотным множеством в котором является совокупность всех функций из $C^\infty\left(\overline{D}\right)$, обращающихся в нуль $\frac{\partial u}{\partial n}$ на ∂D. $\widetilde{W}_p^2(D)$-подпространство $W_p^2(D)$, плотным множеством в котором является совокупность всех функций из $C^\infty\left(D\right)$, обращающихся в нуль $\frac{\partial u}{\partial n}$ на ∂D.

Пусть E_n - n-мерное Евклидово пространство точек $x = \left(x_1,\, x_2,\ldots,x_n\right)$, $n \geq 2$, D - ограниченная область в E_n с границей ∂D класса C^2.

Рассмотрим линейный оператор общего вида

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_i} + c\left(x\right), \tag{1}$$

где $\left\|a_{ij}\left(x\right)\right\|$, $i,\ j = 1,2,\ldots,n$ действительная симметричная матрица, $b_i(x)$ - измеримые функции, $c(x) \leq 0$.

Предположим, что для всех $x \in D$, $\xi \in E_n$ выполнено условие

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x\right)\xi_i \xi_j \leq \mu^{-1} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \tag{2}$$

где $\mu \in (0,1]$ - константа.

Условие Кордеса. Существует число $\delta \in \left(0,\, 1/\left(n-1\right)\right)$ такое, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\left(x\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\left(x\right)\right)^2} \leq \frac{1}{n-1} - \delta \tag{3}$$

Первая глава диссертации состоит из 4-х параграфов. В первом параграфе приводятся предварительные факты и утверждения, используемые в последующих параграфах. Применением принципа Лакса и Мильграма, в 1.2 доказывается сильная разрешимость задачи

Неймана в пространстве Соболева $W_2^2(D)$ для класса линейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, удовлетворяющая условию Кордеса.

Рассмотрим вопрос существования следующей задачи:

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=f(x) \quad \text{в} \quad D, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D}=0. \tag{5}$$

Определение 1. Функцию $u(x)\in W_p^2(D)$ будем называть сильным (почти всюду) решением уравнения (1), если она удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в D.

Определение 2. Функцию $u(x)\in \widetilde{W}_p^2(D)$ будем называть сильным решением задачи (4), (5) из пространства $W_p^2(D)$, если она удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в D.

Пусть L-оператор, имеет ограниченные измеримые в области D коэффициенты $\{a_{ij}(x)\}$, $i,\ j=1,2,...,n$, удовлетворяет условиям равномерной эллиптичности (2) и условию Кордеса, функция $f(x)$ предполагается из пространства $L_2(D)$. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Для всякой функции $f\in L_2(D)$ справедливо представление*

$$f(x)=Lu+\frac{tr\,a(x)}{n-1}\int_D g(y)\,f(y)\,dy, \tag{6}$$

где $u\in \widetilde{W}_2^2(D)$, $u_D=0$, функция $g\in L_2(D)$ не зависит от функций $u,\ f$, причем $\|g\|_2\le C_{13}(mes_n D)^{1/2}$. Если при этом $u\in \widetilde{W}_n^2(D)$, то функция $u(x)$ в представлении (6) - единственна; $tr\,a(x)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)$.

Из теоремы 1 вытекает следующая теорема, напоминающая аналогичную теорему в случае уравнения Пуассона.

Теорема 2. *Существует функция* $g \in L_2(D)$ *такая, что для того, чтобы задача (1), (2) имела решение из пространства* $\widetilde{W}_2^2(D)$, *достаточно, чтобы*

$$\int_D g(y)\, f(y)\, dy = 0 . \tag{7}$$

Условие (7) также необходимо в классе решений задачи $u(x) \in \widetilde{W}_n^2(D)$.

Пусть L-оператор вида (1), где $c(x) \equiv 0$. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Если, относительно коэффициентов оператора* L, *выполнены условия (2), (3) и условие:*

$$b_i(x) \in L_s(D); \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad \text{где} \quad s = n, \qquad \text{при} \quad n > 2, \tag{8}$$

$$s = 2 + \nu \quad \text{с каким либо положительным} \quad \nu > 0 \quad \text{при} \quad n = 2, \tag{9}$$

то для любой функции $u(x) \in \overset{\vee}{W}{}_2^2(D)$ *справедлива оценка:*

$$\begin{gathered} \|u\|_{W_2^2(D)} \leq C_{1.27}(\mu, \sigma, n, \partial D)\|Lu\|_{L_2(D)} + \\ + C_{1.29}(L, n, \partial D, diamD)\|u\|_{L_2(D)} \end{gathered} . \tag{10}$$

Теорема 4. *Пусть, относительно коэффициентов оператора* L, *выполнены условия (2), (3) и (8), (9). Тогда существует* $d(L, n, \partial D)$ *такое, что если* $mes\, D \leq d$, *то для любой функции* $u(x) \in \widetilde{W}_2^2(D)$, $u_D = 0$ *справедлива оценка:*

$$\|u\|_{W_2^2(D)} \leq C_{1.29}(\mu, \sigma, n, \partial D)\|Lu\|_{L_2(D)} . \tag{11}$$

Теорема 5. *Если, относительно коэффициентов оператора* L, *выполнены условия (2), (3) и условие:*

$$b_i(x) \in L_{n+1}(D); \qquad i = 1,2,\ldots,n . \tag{12}$$

То для всякой функции $u(x) \in \widetilde{W}_2^2(D)$ *справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^2(D)} \leq C_{1.34}(\mu, \sigma, n, \eta, \partial D)\|Lu - \eta u\|_{L_2(D)} \tag{13}$$

при $\eta > \eta_0(L, n, \mu, \sigma, \partial D)$.

Теорема 6. *Пусть, относительно коэффициентов оператора* L, *выполнены условия (2), (3), (12). Тогда, если* $\eta > \eta_0$, *то вторая краевая задача*

$$Mu = Lu - \eta u = f(x), \qquad x \in D; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0,$$

однозначно, сильно разрешима в $\widetilde{W}_2^2(D)$ *при всякой* $f(x) \in L_2(D)$. *При этом для решения* $u(x)$ *справедлива оценка:*

$$\|u\|_{W_2^2(D)} \le C_{1.29}\|f\|_{L_2(D)}. \tag{14}$$

В следующих теоремах 7 и 8 оператор L - имеет вид:

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tag{15}$$

Теорема 7. *Пусть* $\omega \ne 0$; *коэффициенты оператора* L, *система функций* $\{a_{ij}(x)\}$; $i, j = 1, 2, ..., n$ *удовлетворяет условиям (2), (3). Тогда для любой функции* $f(x) \in L_2(D)$ *задача:*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \omega^2 \frac{tr\, a(x)}{n-1}u = f(x), \qquad x \in D, \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0, \tag{17}$$

имеет единственное решение $u(x)$ *из пространства* $\widetilde{W}_2^2(D)$. *Причем, для решения* $u(x)$ *справедлива следующая оценка:*

$$\|u\|_{2,2} \le C_{1.44}\|f\|_2, \tag{18}$$

где

$$C_{1.44} = C_{1.45}\left(1 + C_{1.42}\left(\frac{mesD}{\omega}\right)^{\frac{2}{n+1}} C_{1.42}^2\left(\frac{mesD}{\omega}\right)^{\frac{4}{n+1}}\right)^{1/2}; \tag{19}$$

постоянные $C_{1.44}$, $C_{1.45}$ *зависят от* δ, n, μ.

Теорема 8. *Пусть* $\widetilde{L}$ *- оператор вида*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{(n-1)}{tr\,a(x)}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j},$$

относительно коэффициентов $\{a_{ij}(x)\}$; $i, j = 1,2,...,n$, *выполняются условия (2)-(3).*

(а) Тогда, для любой функции $f(x) \in L_2(D)$ *задача Неймана*

$$\begin{cases} \widetilde{L}\,u = f(x), & \text{ï .â.}\;\; x \in D \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0 \end{cases} \tag{20}$$

имеет единственное решение $u(x) \in \widetilde{W}_2^2(D)$, $u_D = 0$ *в смысле, что для* $\forall f(x) \in L_2(D)$ *существует постоянная* $C_{1.56}$, *функция* $u \in \widetilde{W}_2^2(D)$, $u_D = 0$ *и для почти всех* $x \in D$

$$\widetilde{L}\,u = f(x) + C_{1.56};$$

для $u(x)$ *имеет место следующая оценка:*

$$\|u\|_{2,2} \le C_{1.57}\,\|f\|_2,$$

с константой $C_{1.57}$ *зависящем от* n, μ *и* $mesD$.

(б) Существует единственное решение $q(x) \in L_2(D)$ *формально сопряженного уравнения*

$$\widetilde{L}^* q = 0, \tag{21}$$

такое, что для всякой функции $f(x) \in L_2(D)$ *удовлетворяющей*

$$\int_D q(x)\,f(x)\,dx = 0 \tag{22}$$

задача Неймана (20) *однозначно разрешима в обычном смысле:* $\exists u \in \widetilde{W}_2^2(D)$, $u_D = 0$, *что для почти всех* $x \in D$ *выполняется первое уравнение* (20)

Теорема 9. *Пусть* $\omega \neq 0$ *и выполняются условия:*

(а) Равномерная эллиптичность: существует число $\mu \in (0,1]$ *такое, что для всех* $z \in E_1$, $\theta \in E_n$ *и почти для всех* $x \in D$ *выполняются неравенство:*

$$\mu|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\, z,\, \theta)\xi_i\, \xi_j \le \mu^{-1}|\xi|^2\,; \tag{23}$$

(б) Условие Кордеса: найдется число $\delta \in \left(0,\, \dfrac{1}{(n-1)^2}\right)$ *такое, что при любых* $z \in E_1$, $\theta \in E_n$ *и почти всех* $x \in D$ *справедливо:*

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(x,\, z,\, \theta)}{\left[\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x,\, z,\, \theta)\right]^2} \le \frac{1}{n-1} - \delta\,; \tag{24}$$

(в) Условие на младшие члены: для всех $z \in E_1$, $\theta \in E_n$ *и, почти всех* $x \in D$ *имеет место неравенство:*

$$|b(x,\, z,\, \theta)| \le b_1(x)\left(1 + |\theta|^{\nu}\right), \tag{25}$$

где $b_1(x) \ge 0$ *принадлежит* L_p *при* $p > 2$, $\nu \in \left[0,\, \dfrac{n(p-2)}{p(n-2)}\right]$ *или же* $p = 2$, $\nu = 0$.

Пусть условия (а), (б), (в) выполняются относительно задачи

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\, u,\, u_x)u_{x_i x_j} - \frac{\omega^2 tra}{n-1} = b(x,\, u,\, u_x), \tag{26}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0. \tag{27}$$

Предположим, что $p = n$ *и мера области* D *достаточно мала, если* $\nu = 1$; $p \ne n$ *и мера области* D *произвольная, если* $\nu \ne 1$. *Тогда, для любой функции* $f(x) \in L_2(D)$, *существует решение задачи (26), (27), принадлежащей пространству* $\widetilde{W}_2^2(D)$.

Следующие теоремы 10 и 11 относятся к оператору L вида (15).

Теорема 10. *Пусть коэффициенты оператора* L *- функции* $\{a_{ij}(x)\}$, $i,\, j = 1,2,\ldots,n$ *- ограниченные измеримые в области* D

функции, удовлетворяющие условиям (2) и (3). Граница ∂D *области* D *принадлежит классу* C^2.

Тогда, существуют положительные постоянные $C_{2.2}$, u, ε, *зависящие от* n, δ, μ *и гладкости границы области, такие, что для всякой функции* $u(x) \in \widetilde{W}_p^2(D)$ *и числа* $p \in (2-\varepsilon,\ 2+\varepsilon)$, *справедлива априорная оценка вида:*

$$\|u\|_{2,p} \le C\|L\,u\|_p, \tag{28}$$

Теорема 11. *Пусть* $3 \le n \le 4$; *выполняются условия (24), (25) и следующие условия: непрерывность функций* $\{a_{ij}(x,\ z)\}$, $b(x,\ z)$ *относительно* $z \in E_1$ *для любых* $z_1,\ z_2 \in E_1$; *далее, справедливы*

$$|\,b(x,z_1) - b(x,z_2)\,| \le b_1(x)|z_1 - z_2|; \tag{29}$$

$$|\,a_{ij}(x,z_2) - a_{ij}(x,z_1)\,| \le C_{2.9}|z_1 - z_2|, \tag{30}$$

где $i,j = 1,2,\ldots,n$, $x \in D$, $z_1,\ z_2 \in E_1$, $C_{2.9}$ - *некоторая положительная постоянная,* $b_1(x) \in L_{2+\varepsilon}(D)$ *при некотором* $\varepsilon > 0$.

Тогда, если мера Лебега области D *достаточно мала и* $b(x,0) \in L_{2+\varepsilon}$, *то решение задачи Неймана*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\ u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = b(x,\ u) \qquad \text{п.в.} \quad x \in D, \tag{31}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0, \qquad \overline{u}_D = 0 \tag{32}$$

единственно в пространстве $\widetilde{W}_2^2(D)$.

В следующей теореме 12 рассматривается вопрос единственности общего квазилинейного уравнения :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\ u,\ u_x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - u = b(x,\ u,\ u_x). \tag{33}$$

Теорема 12. *Пусть* $n = 2$ *и коэффициенты уравнения*

$$L\,u \equiv \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = b\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{34}$$

удовлетворяют условиям (24) и, непрерывности относительно переменных- z, θ *функций* $\{a_{ij}(x, z, \theta)\}$; $i, j = 1, 2$, $b(x, z, \theta)$. *Более того, почти для всех* $x \in D$ *и любых* $z \in E_1$, $\theta \in E_n$ *выполняются следующие условия непрерывности:*

$$\left| b(x,\ z^1, \theta^1) - b(x,\ z^2, \theta^2) \right| \le b_1(x)\left|z^1 - z^2\right| + b_2(x)\left|\theta^1 - \theta^2\right|; \tag{35}$$

$$\left| a_{ij}(x,\ z^1, \theta^1) - a_{ij}(x,\ z^2, \theta^2) \right| \le a_1(x)\left|z^1 - z^2\right| + C_{2.17}\left|\theta^1 - \theta^2\right|, \tag{36}$$

где функции $a_1(x),\ b_1(x),\ b_2(x)$ *принадлежат пространству Лебега* $L_{2+\varepsilon}(D)$ *при некотором значении* $\varepsilon > 0$.

Если мера Лебега области D *достаточно мала и*

$$b(x, 0, 0) \in L_{2+\varepsilon}(D),$$

то тогда решение задачи

$$Lu = b\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \qquad \text{п.в.} \quad x \in D, \tag{37}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0, \qquad u_D = 0 \tag{38}$$

единственно в пространстве $\widetilde{W}_2^2(D)$.

В следующей теореме 13 L - общий линейный оператор вида (1).

Теорема 13. *Пусть выполнены предположения* (1), (2) *относительно старших коэффициентов оператора* L*; младшие коэффициенты* $b_i(x) \in L_n(D)$, $i = 1, 2, ..., n$, $c(x) \le 0$ *и* $c(x) \in L_{n/2}(D)$. *Предположим, что функция* $\psi(x)$, *заданная на границе* ∂D *регулярной области* D, *принадлежит классу* $W_2^{3/2}(\partial D) \cap C(D)$.

Тогда, задача

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = 0, \tag{39}$$

$$\left. u \right|_{\partial D} = \psi(x) \tag{40}$$

имеет единственное решение $u(x)$ *из пространства Соболева* $W_2^2(D)$*, совпадающее на границе с заданной функцией* $\psi(x)$.

Определение 3. Пусть $E \subset R^n$ некоторое подмножество, ограниченное и замкнутое, $h: R \to (0,\infty)$ -непрерывная монотонная функция, $h(0)=0$, μ -некоторая мера Радона. Пусть конечная система шаров $\{B_\nu = B(x_\nu, r_\nu\}_{\nu=1,2,...N}$, радиусы которых не превосходят числа $\delta > 0$, покрывают множество E, т.е., $E \subset \bigcup_\nu B_\nu$.

Пусть $\Lambda_\mu^{h,\delta}(E) = \inf\left\{\sum_\nu h(r_\nu)\mu(B_\nu)\right\}$, где нижняя грань берется по всем упомянутым шарам. Положим $\Lambda_\mu^h(E) = \lim_{\delta\to\infty} \Lambda_\mu^{h,\delta}(E)$.В случае $\mu = dx, h(t) = t^{-p+(p-1)\alpha}$, число $\Lambda_\mu^h(E)$ соответствует мере Хаусдорфа порядка $n-p+(p-1)\alpha$ для множества E. Мы его обозначим также через $mes_{n-p+(p-1)\alpha}(E)$. Определим $\Lambda_\omega^{-p+(p-1)\alpha}(E)$ как $\Lambda_\mu^{h(r)}(E)$ при $h(t) = t^{-p+(p-1)\alpha}$, $d\mu = \omega dx$.

Определение 4. Пусть $E \subset\subset D$ некоторый строго внутренний компакт области $D \subset R^n$. Будем говорить, что множество E устранимо для класса функций $C^\alpha(D)$ решений некоторого уравнения, скажем для уравнения (41) ниже, если, любое решение этого уравнения в $D \setminus E$ будет продолжим во внутрь всей E как решение.

Последний параграф 2.4 второй главы посвящен вопросам устранимых множеств типа теорем Карлесона. Для класса вырождающихся эллиптических уравнений дивергентной формы в следующей Теореме 14 показывается необходимое условие устранимости компакта в терминах весовой меры Хаусдорфа в классах C^α, $0< \alpha \le 1$, Ранее , достаточное условие было получено в работах Мамедова Ф. И., Гулиева А.[14] и Килпелмнен Zои[15], Тоесть, справедлив следующий результат.

Теорема 14. *Пусть* $1 < p < \infty$, ω- A_p *класс Маккенхаупта,* $E \subset\subset D$*-некоторый компакт в области* D. *Пусть* $0 < \alpha < k$ *- некоторое число, где* k *–порядок Гельдеровости решений уравнения*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0. \qquad (41)$$

Тогда для устранимости компакта E *в классе* $C^{\alpha}(D)$ *решений уравнения* (41) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\Lambda_{\omega}^{-p+(p-1)\alpha}(E) = 0.$$

В заключение, автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук Ф.И.Мамедову за постановку задач, ценные советы и обсуждение полученных результатов.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. I.T.Mamedov, M.M.Mirheyderli. Neumann problem for second order nondivergent elliptic equations with discontinuous coefficients. *Proc. of Math. Mech. İnst.of Nat. Acad. Sci of Azerbaijan,* 2003, v.XIX, p.135-152.
2. F.I.Mamedov, M.M.Mirheyderli. On solvability of Neumann problem for Cordess type quasilinear elliptic equations. *Trans. of Math. Mech. İnst.of Nat. Acad. Sci. of Azerbaijan,* 2004, v. XXIV, №7, p.109-126

---

[14] A.D. Kuliev and F.I.Mamedov, On the nonlinear weight analogue of the Landis-gerver's type mean value theorem and its applications to quasilinear equations. Proc. of Math. Mech. Inst. of Azerbaijan Nat.Acad.Sci., vol 12, pp. 74-81, 2000.
[15] T.Kilpelainen and X.Zong, Removable sets for continuous solutions of quasilinear elliptic equations. Proc. of Amer. Math. Soc. vol 130, no 6, pp. 1681-1688, 2002.

3. M.M.Mirheyderli. О смешанной краевой задаче для линейных недивергентных эллиптических уравнений Кордессовского типа. *Тезисы X межд. конф. по матем. и мех. посв. 45-летию ИММ*, 2004, *с.* 111-112.

4. M.M.Mirheyderli. О $W^{2,p}(D)$ оценке задачи Неймана для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. *Тезисы межд. конф. по матем. и мех. посв. 50-летию со дня рожд. чл.-корр. НАНА, проф. И.Т.Мамедова,* 2005, *с.*141

5. F.I.Mamedov, M.M.Mirheyderli. On $W^{2,p}$ apriori estimation and uniqueness of solution of Neumann problem for quasilinear elliptic equations with discontinuous coefficients. *Trans. of Math. Mech. İnst.of Nat. Acad. Sci. of Azerbaijan,* 2006, v.XXVI, №1, p.125-136

6. M.M.Mirheyderli. On solvability of Neumann problem for semi-linear elliptic equations with discontinuous coefficients. *Proc. of Math. Mech. İnst.of Nat. Acad. Sci of Azerbaijan,* 2008, v.XXIX, p.123-128.

7. F.I.Mamedov, M.M.Mirheyderli, A.D.Quliyev. On Carlson's type removability test for the degenerate quasilinear elliptic equations. *Intern. J. Dif. Eq., v.2011, p.1-23, Hindawi Publ.Corp.*

MİRFAİQ MİRABBAS oğlu MİRHEYDƏRLİ

KƏSİLƏN ƏMSALLI İKİNCİ TƏRTİB ELLİPTİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN İKİNCİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN TƏDQİQİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işində xətti və qeyri-xətti elliptik diferensial tənliklər üçün ikinci sərhəd məsələsinə baxılır. Əmsallar Kordes şərtini ödəyir. Bu istiqamətdə əvvəlki məlum nəticələrdə əmsallar kəsilməzlik şərtini odəyirdi. İşdə aşağıdakı yeni nəticələr alınmışdır:

- Kəsilən əmsallı, Kordes şərtini ödəyən xətti elliptik tənliklər üçün Neyman məsələsinin $W_2^2(D)$ Sobolev fəzasında güclü həllinin varlığı isbat edilmişdir.
- Kəsilən əmsallı, Kordes tipli tənliklər üçün isbat edilir ki, elə bir $g(x) \in L_2(D)$, funksiyası tapmaq olar ki, istənilən $g(x)$-ə ortoqonal $f(x)$ üçün Neyman məsələsi yeganə həllə malikdir.
- Müəyyən sinif kəsilən əmsallı kvazixətti tənliklər üçün Kordes şərti daxilində istənilən sağ tərəf üçün Neyman məsələsinin həllinin varlığı göstərilmişdir.
- -Kəsilən əmsallı kiçik hədlər də daxil olan, xətti tənliklər üçün $W_p^2(D)$ aprior qiymətləndirmə isbat edilmişdir.
- Bir sinif yarımxətti tənliklər üçün $W_2^2(D)$ Sobolev fəzasında güclu həllin varlığı isbat edilmişdir.

MIRFAIQ MIRABBAS oglu MIRHEYDARLI

STUDY OF THE SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

SUMMARY

In this dissertation, it has been considered the Neumann problem for a class of quasilinear elliptic equations of second order. The coefficients of equations are discontiniously and sutisfy Cordes condition. All previously results in this direction consern to the case of continuous coefficients in the leading part.

The following main results are obtained:

- İt was studied the strong solvability of Neuman problem in the Sobolev's space, where the leading coefficients satisfy Cordes's condition;
- For the equations with discontinuous coefficients it was proved that there exists a function $g(x) \in L_2(D)$ such that the Neumann problem is solvable if the right part is orthogonal to this function;
- It was established the strong solvability of the Neuman problem for the equations having small terms;
- It was proved the $W_p^2(D)$ a prior estimate for solutions of the Neuman problem for the solutions elliptic equations with discontinuous coefficients;
- It was studied the strong solvability problem in $\widetilde{W}^{2,2}(D)$ for the solutions of Neuman problem for semilinear elliptic equations/