НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ШАМСИЯ АХЛИМАН кызы МУРАДОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ АНИЗОТРОПНОГО ДРОБНО-МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И ПОТЕНЦИАЛА РИССА В АНИЗОТРОПНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ

1202.01-Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2013

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

ŞƏMSİYYƏ ƏHLİMAN QIZI MURADOVA

ANİZOTROP KƏSR-MAKSİMAL OPERATOR VƏ RİSS POTENSİALININ ANİZOTROP LOKAL MORRİ TİPLİ FƏZALARDA TƏDQİQİ

1202.01-Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2013

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

ŞƏMSİYYƏ ƏHLİMAN qızı MURADOVA

ANİZOTROP KƏSR-MAKSİMAL OPERATOR VƏ RİSS POTENSİALININ ANİZOTROP LOKAL MORRİ TİPLİ FƏZALARDA TƏDQİQİ

1202.01-Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2013

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ШАМСИЯ АХЛИМАН кызы МУРАДОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ АНИЗОТРОПНОГО ДРОБНО-МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И ПОТЕНЦИАЛА РИССА В АНИЗОТРОПНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ

1202.01-Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2013

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu-nun** «Riyazi analiz» şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Vaqif S.Quliyev**

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Sadiq K.Abdullayev**
(Bakı Dövlət Universiteti);
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Mübariz Q.Hacıbəyov**
(Azərbaycan Milli Aviasiya Akademiyası).

Aparıcı təşkilat:
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
«Funksiyalar nəzəriyyəsi» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 27 sentyabr 2013-cü il saat 16^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 21 iyun 2013-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена в отделе «Математический анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, проф. **Вагиф С.Гулиев**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, проф. **Садиг К.Абдуллаев**
(Бакинский Государственный Университет);
кандидат физико-математических наук, доц. **Мубариз Г.Гаджибеков**
(Национальная Авиационная Академия Азербайджана).

Ведущая организация:
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет кафедра «Теория функций».

Защита диссертации состоится 27 сентября 2013 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 21 июня 2013 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы. Одно из основных достижений последних десятилетий, повлиявших на облик гармонического анализа, состоит в успешном привлечении идей и техники теории интегральных операторов типа потенциала. Эти идеи и методы применяются в теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории функций, функциональном анализе, теории вероятностей, в задачах теории приближений, гармоническом анализе на однородных группах и других разделах математики. Применение метода теории потенциала к решению многочисленных краевых задач, встречающихся в теории дифференциальных уравнений в частных производных, в задачах теории аналитических функций, а также в задачах механики имеет богатую историю и успешную практику. Различные свойства потенциалов Рисса были исследованы в работах М.Рисса, Г.Х.Харди, Дж.Е.Литтлвуда, С.Л.Соболева, И.Стейна, Г.Вейса, О.В.Бесова, П.И.Лизоркина, С.Г.Самко, В.М.Кокилашвили, А.Д.Гаджиева, Б.Рубина, С.К.Абдуллаева, В.С.Гулиева, Р.М. Рзаева и др. Изложение ряда свойств потенциалов Рисса содержатся в монографиях И.Стейна[1], С.Г.Самко[2] и Б.Рубина[3].

Исследования, представленные в диссертационной работе, посвящены проблемам ограниченности анизотропного максимального оператора, анизотропного дробно-максимального оператора и анизотропного потенциала Рисса в анизотропных локальных пространствах типа Морри.

Классические пространства Морри $M_{p,\lambda}\left(R^n\right)$ были введены Ч.Морри[4] для изучения локального поведения решений эллиптичес-

---

[1] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.:Мир, 1973, 342с.

[2] Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Изд. Ростовского ун.-та, 1984, 208 с.

[3] Rubin B., Fractional integrals and potentials. Addison Wesley Longman Limited, Essex, 1996.

[4] Morrey C.B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. A.M.S., 1938, no.43, pp.126-166.

ких уравнений с частными производными второго порядка. Пространства Морри находят большое применение в теории дифференциальных уравнений с частными производными, как в линейной, так и в нелинейной теории.

Для изучения интегральных операторов типа потенциала и сингулярных интегральных операторов на однородной группе G в смысле Фоланда-Стейна, были введены и исследованы локальные пространства типа Морри $LM_{p\theta,w}(G)$ $(\equiv \Gamma^*_{p,\theta}(G,w))$ и дополнение локального пространства типа Морри ${}^{C}LM_{p\theta,w}(G)$ $(\equiv \Gamma_{p,\theta}(G,w))$ в докторской диссертации В.С.Гулиева[5]. Здесь же найдены достаточные условия на параметры, для ограниченности интегральных операторов типа потенциала и сингулярных интегральных операторов, определенных на однородной группе G. В серии работ В.И. Буренкова, В.С. Гулиева и Г.В. Гулиева для ограниченности максимального, дробно-максимального операторов, потенциала Рисса и сингулярных интегральных операторов Кальдерона-Зигмунда были найдены необходимые и достаточные условия на параметры. Отметим, что при определении локальных пространств типа Морри $LM_{p\theta,w}$, а также дополнения локальных пространств типа Морри ${}^{C}LM_{p\theta,w}$ существенно использовалась локальная характеристика типа “Абдуллаева – Бабаева”[6,7].

В диссертации, рассматриваются задачи об ограниченности анизотропного максимального оператора M^{P}, анизотропного дробно-

---

[5] Гулиев В.С. Интегральные операторы в пространствах функций на однородных группах на областях R^n. Дис. докт.физ.-мат. Наук. Москва: Математический Институт им. В.А. Стеклова, 1994, с.1-324.

[6] Бабаев А.А. Некоторые оценки для особого интеграла. ДАН СССР, 1966г., том 170, № 5, с. 1003-1005.

[7] Абдуллаев С.К., О некоторых классах интегральных операторов в пространствах суммируемых функций. ДАН СССР, 1985, т. 283, №4, с. 777-780.

максимального оператора M_α^P и анизотропного потенциала Рисса I_α^P в анизотропных локальных пространствах типа Морри $LM_{p\theta,w,P}$, где

$$M^P f(x) = \sup_{r>0} \left|\varepsilon_P(x,r)\right|^{-1} \int_{\varepsilon_P(x,r)} |f(y)| dy,$$

$$M_\alpha^P f(x) = \sup_{r>0} \left|\varepsilon_P(x,r)\right|^{-1+\frac{\alpha}{\gamma}} \int_{\varepsilon_P(x,r)} |f(y)| dy,\ 0 \le \alpha < \gamma,$$

$$I_\alpha^P f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)}{\rho(x-y)^{\gamma-\alpha}} dy,\ 0 < \alpha < \gamma.$$

Здесь $\rho(x)$ - анизотропное расстояние. Получена оценка для L_p- нормы анизотропной максимальной функции и дробно-максимальной функции по эллипсоиду, с помощью которой эта задача сводится к задаче об ограниченности супремального оператора в весовых L_p- пространствах на полуоси на конусе неотрицательных невозрастающих функций. А также, получена оценка для L_p- нормы анизотропного потенциала Рисса по эллипсоиду, с помощью, которой эта задача сводится к задаче об ограниченности оператора Харди в весовых L_p- пространствах на полуоси на конусе неотрицательных невозрастающих функций. Это позволяет получить достаточные условия ограниченности анизотропного дробно-максимального оператора и анизотропного потенциала Рисса для всех допустимых значений параметров. В случае анизотропных локальных пространств типа Морри, при определенных соотношениях между параметрами условия достаточности совпадают с условиями необходимости.

Цель работы. Получение необходимых и достаточных условий для ограниченности анизотропного максимального оператора M^P, анизотропного дробно-максимального оператора M_α^P и анизотропного потенциала Рисса I_α^P в анизотропных локальных пространствах типа Морри $LM_{p\theta,w,P}$.

Общая методика исследований. В диссертационной работе использованы методы теории интегральных операторов, гармонического анализа, теории функциональных пространств, максимальных функций и функционального анализа.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

- получены необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропного максимального оператора в анизотропных локальных пространствах типа Морри;
- получены необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропного дробно-максимального оператора в анизотропных локальных пространствах типа Морри;
- получены необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропного максимального оператора из дополнения анизотропного локального пространства типа Морри в анизотропные локальные пространства типа Морри;
- получены необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропного потенциала Рисса в анизотропных локальных пространствах типа Морри.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, могут найти приложение в теории дифференциальных уравнений в частных производных, а также, в решении некоторых задач математической физики и механики. Результаты диссертации являются новыми в теории потенциалов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах отдела «Математический анализ» ИММ НАН Азербайджана (рук. академик НАН Азербайджана, проф. А.Д.Гаджиев), на семинарах отдела «Функциональный анализ» (рук. д.ф.-м.н., проф. Н.Ш.Искендеров), на семинарах отдела «Теория функций» (рук. д.ф.-м.н., проф. М.-Б.А.Бабаев), на семинарах отдела «Дифференциальные уравнения» (рук. д.ф.-м.н., проф. А.Алиев), на семинарах кафедры «Математический анализ» БГУ (рук. д.ф.-м.н., проф. С.К.Абдуллаев), на семинарах кафедры «Теория функций и функциональный анализ» БГУ (рук. д.ф.-м.н., проф. А.М.Ахмедов), на семинарах кафедры «Теория функций» АГПУ (рук. д.ф.-м.н., проф. Р.М.Рзаев), а также на международной конференции, посвященной 80-летию ак. Ф.Максудова (2010), на международной конференции, посвященной 100-летию ак. З.Халилова (2011), на международной конференции по математике «Integral and Differential Operators and Their Applications», посвященной 70-летнему юбилею проф. С.Самко (2011 г., Авейро, Португалия), а также на международной конференции по математике «Operators in Morrey-type Spaces and Applications», посвященной 70-летнему юбилею проф. В. Буренкова (2011 г., Киршеир, Турция).

Публикации. Полное содержание диссертации опубликовано в 9 работах автора, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, включающей 80 наименований. Объем диссертации составляет 122 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения и двух глав. Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулирована ее цель и дан краткий обзор работ, примыкающих к теме диссертации, а также краткое содержание самой работы.

В первой главе получены необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропного максимального и дробно-максималь-ного операторов в анизотропных локальных пространствах типа Морри, а также необходимые и достаточные условия ограниченности дробно-максимального оператора из дополнения анизотропного пространства типа Морри в анизотропные локальные пространства типа Морри. Во второй главе получены необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропного потенциала Рисса в анизотропных локальных пространствах типа Морри.

В первых трех параграфах даются определения основных понятий, а именно, определения анизотропного расстояния и анизотропных пространств типа Морри.

Пусть P действительная матрица размерности $n \times n$, все собственные значения которой имеют положительную вещественную часть. Пусть $A_t = t^P$ $(t > 0)$, и положим $\gamma = trP$. Тогда существует квазирасстояние ρ, согласованное с P так, что

(a) $\rho(A_t x) = t\rho(x)$, $t > 0$, для каждого $x \in R^n$;

(b) $\rho(0) = 0$, $\rho(x - y) = \rho(y - x) \geq 0$

и $\rho(x - y) \leq k(\rho(x - z) + \rho(y - z))$, где $k \geq 1$;

(c) $dx = \rho^{\gamma - 1} d\sigma(w) d\rho$, где $\rho = \rho(x)$, $w = A_{\rho^{-1}} x$

и $d\sigma(w)$ есть C^{∞} мера на эллипсоиде $\{w : \rho(w) = 1\}$.

Определение 1. Пусть $0 < p, \theta \le \infty$ и пусть w неотрицательная, измеримая на $(0, \infty)$ функция. Обозначим через $LM_{p\theta,w,P}$, $GM_{p\theta,w,P}$ анизотропные локальные пространства типа Морри, анизотропные глобальные пространства типа Морри, соответственно, пространство всех функций $f \in L_p^{loc}(R^n)$ с конечными квазинормами

$$\|f\|_{LM_{p\theta,w,P}} = \left\| w(r) \|f\|_{L_p(\varepsilon_P(0,r))} \right\|_{L_\theta(0,\infty)},$$

$$\|f\|_{GM_{p\theta,w,P}} = \sup_{x \in R^n} \|f(x + \cdot)\|_{LM_{p\theta,w,P}},$$

соответственно, где

$$\varepsilon_P(0,r) = \{y \in R^n : \rho(y) < r\}$$

анизотропный шар с центром в точке 0 и радиуса $r > 0$ (эллипсоид).

Определение 2. Пусть $0 < p, \theta \le \infty$ и пусть w неотрицательная, измеримая на $(0, \infty)$ функция. Обозначим через $WLM_{p\theta,w,P}$, $WGM_{p\theta,w,P}$ анизотропные слабые локальные пространства типа Морри, анизотропные слабые глобальные пространства типа Морри, соответственно, пространство всех функций $f \in L_p^{loc}(R^n)$ с конечными квазинормами

$$\|f\|_{WLM_{p\theta,w,P}} = \left\| w(r) \|f\|_{WL_p(\varepsilon_P(0,r))} \right\|_{L_\theta(0,\infty)},$$

$$\|f\|_{WGM_{p\theta,w,P}} = \sup_{x \in R^n} \|f(x + \cdot)\|_{WLM_{p\theta,w,P}},$$

соответственно, где

$$\|f\|_{WL_p(\varepsilon_p(0,r))} = \sup_{t>0} t \left| \{y \in \varepsilon_p(0,r) : |f(y)| > r\} \right|^{1/p}.$$

Определение 3. Пусть $0 < p, \theta \le \infty$. Обозначим через Ω_θ множество всех функций w, неотрицательных и измеримых на $(0, \infty)$, и неэквивалентных нулю, таких, что для некоторого $t > 0$

$$\|w\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty.$$

Более того, обозначим через $\Omega_{p,\theta}$ множество всех функций w, неотрицательных и измеримых на $(0,\infty)$ и неэквивалентных нулю, таких, что для некоторого $t_1, t_2 > 0$

$$\|w(\cdot)\|_{L_\theta(t_1,\infty)} < \infty, \quad \left\|w(r) r^{\gamma/p}\right\|_{L_\theta(0,t_2)} < \infty .$$

В случае анизотропных локальных пространств типа Морри, мы всегда будем предполагать, что $w \in \Omega_\theta$, а в случае анизотропных глобальных пространств типа Мори, что $w \in \Omega_{p,\theta}$. Это естественные предположения, так как, если они не выполняются, то пространства $LM_{p\theta,w,P}$ и соответственно $GM_{p\theta,w,P}$ тривиальны (т.е. состоят только из функций, эквивалентных нулю).

Отметим, что $GM_{p\theta,w,I} = GM_{p\theta,w}$, $LM_{p\theta,w,I} = LM_{p\theta,w}$ и $\|f\|_{LM_{p\infty,1,P}} = \|f\|_{GM_{p\infty,1,P}} = \|f\|_{L_p}$, здесь $I = (1,\ldots,1)$ - единичная матрица.

Также $WGM_{p\theta,w,I} = WGM_{p\theta,w}$, $WLM_{p\theta,w,I} = WLM_{p\theta,w}$ и $\|f\|_{WLM_{p\infty,1,P}} = \|f\|_{WGM_{p\infty,1,P}} = \|f\|_{WL_p}$.

Кроме того, $GM_{p\infty,r^{-\lambda/p},I} \equiv M_{p,\lambda}$ - классическое пространство Морри, $WGM_{p\infty,r^{-\lambda/p},I} \equiv WM_{p,\lambda}$ - слабое пространство Морри, $0 \le \lambda \le \gamma$.

Пусть $f \in L_1^{loc}(R^n)$. Анизотропная максимальная функция $M^P f$ определяется следующим образом

$$M^P f = \sup_{t>0} |\varepsilon_P(x,t)|^{-1} \int_{\varepsilon_P(x,t)} |f(y)| dy .$$

В 1.4 были получены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $1 < p_1 \le p_2 < \infty$, $0 < \theta_1, \theta_2 \le \infty$, $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$, $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$.

Если $p_1 \le \theta_1$, $\theta_2 \le p_2$ и для некоторой константы C для всех анизотропных шаров $\varepsilon_P \subset R^n$

$$\left\| M^P\left(\chi_{\varepsilon_P} W_{\theta_1}^{-p_1'}\right)\right\|_{L_{p_2,w_{\theta_2}}(\varepsilon_P)} \le C \left\| W_{\theta_1}^{\frac{1}{1-p_1}} \right\|_{L_{p_1}(\varepsilon_P)} , \qquad (0.1)$$

тогда оператор M^P ограниченно действует из пространства $LM_{p_1\theta_1,w_1,P}$ в пространство $LM_{p_2\theta_2,w_2,P}$, а также в случае $w_1 \in \Omega_{p_1,\theta_1}$, $w_2 \in \Omega_{p_2,\theta_2}$ из пространства $GM_{p_1\theta_1,w_1,P}$ в пространство $GM_{p_2\theta_2,w_2,P}$.

Если $p_1 \le \theta_1$ и $\theta_2 \le p_2$, тогда условие (0.1) необходимое условие ограниченности M^P из пространства $LM_{p_1\theta_1,w_1,P}$ в пространство $LM_{p_2\theta_2,w_2,P}$.

В частности, если $p_1 = \theta_1$ и $\theta_2 = p_2$, то условие (0.1) является необходимым и достаточным условием ограниченности M^P из пространства $LM_{p_1p_1,w_1,P}$ в пространство $LM_{p_2p_2,w_2,P}$.

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \theta_1, \theta_2 \le \infty$, $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$, $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$.

Если $\theta_1 \le \theta_2$ и $\theta_1 \le p$ и для некоторой константы $C > 0$, для всех $t > 0$ выполняется

$$\left\| w_2(r)\left(\frac{r}{t+r}\right)^{\gamma/p} \right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)} \le C\|w_1\|_{L_{\theta_1}(t,\infty)}, \qquad (0.2)$$

тогда оператор M^P ограниченно действует из пространства $LM_{p\theta_1,w_1,P}$ в пространство $LM_{p\theta_2,w_2,P}$, а также в случае $w_1 \in \Omega_{p,\theta_1}$, $w_2 \in \Omega_{p,\theta_2}$ из пространства $GM_{p\theta_1,w_1,P}$ в пространство $GM_{p\theta_2,w_2,P}$.

Для любого $0 < \theta_1, \theta_2 \le \infty$ условие (0.2) является необходимым условием для ограниченности оператора M^P из пространства $LM_{p\theta_1,w_1,P}$ в пространство $LM_{p\theta_2,w_2,P}$. В частности, если $\theta_1 \le \theta_2$ и $\theta_1 \le p$, тогда условие (0.2) является необходимым и достаточным условием для ограниченности оператора M^P из пространства $LM_{p\theta_1,w_1,P}$ в пространство $LM_{p\theta_2,w_2,P}$.

Пусть $f \in L_1^{loc}(R^n)$. Анизотропная дробно-максимальная функция $M_\alpha^P f$ определяется следующим образом:

$$M_\alpha^P f = \sup_{t>0} \left|\varepsilon_P(x,t)\right|^{-1+\frac{\alpha}{\gamma}} \int_{\varepsilon_P(x,t)} |f(y)| dy, \ 0 \le \alpha < \gamma .$$

В 1.5 были получены следующие результаты.

Теорема 3. Пусть $1 \le p_1 < \infty$, $1 < p_2 < \infty$, $\gamma\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)_+ \le \alpha < \frac{\gamma}{p_1}$ если $p_1 > 1$ и $\gamma\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)_+ < \alpha < \frac{\gamma}{p_1}$, если $p_1 = 1$. Пусть также $0 < \theta_1, \theta_2 \le \infty$, $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$, $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$.

Тогда оператор M_α^P ограниченно действует из пространства $LM_{p\theta_1,w_1,P}$ в пространство $LM_{p\theta_2,w_2,P}$ тогда и только тогда, когда в случае $p_1 = 1$,

(i) Если $\theta_1 \le \theta_2$ и $\theta_1 < \infty$, тогда

$$\sup_{t>0}\left(t^{\alpha - \frac{\gamma}{p_1}} \left\| w_2(r) r^{\frac{\gamma}{p_2}} \right\|_{L_{\theta_2}(0,t)} + \left\| w_2(r) r^{\alpha - \gamma\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)} \right\|_{L_{\theta_2}(t,\infty)} \right) \|w_1\|^{-1}_{L_{\theta_1}(t,\infty)} < \infty,$$

(ii) Если $\theta_2 < \theta_1 < \infty$, тогда

$$\left\| w_2(t) t^{\alpha - \gamma\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)} \left\| w_2(r) r^{\alpha - \gamma\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)} \right\|_{L_{\theta_2}(t,\infty)}^{\frac{\theta_2}{\theta_1 - \theta_2}} \|w_1\|_{L_{\theta_2}(t,\infty)}^{-\frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_2}} \right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)} < \infty$$

и

$$\left\| w_2(t) t^{\frac{\gamma}{p_2}} \left\| w_2(r) r^{\frac{\gamma}{p_2}} \right\|_{L_{\theta_2}(t,\infty)}^{\frac{\theta_2}{\theta_1 - \theta_2}} \overline{S}\left(r^{\alpha - \frac{\gamma}{p_1}} \|w_1\|^{-1}_{L_{\theta_1}(r,\infty)} \right)(r)^{\frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_2}} \right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)} < \infty ,$$

(iii) Если $\theta_1 = \infty$, тогда

$$\left\| w_2(t) t^{\frac{\gamma}{p_2}} \overline{S}\left(r^{\alpha - \frac{\gamma}{p_1}} \|w_1\|^{-1}_{L_\infty(r,\infty)} \right)(r) \right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)} < \infty .$$

Теорема 4. Пусть $1 < p_1 \le p_2 < \infty$, $1 < \theta_1 \le \theta_2 \le \infty$, $\alpha = \gamma\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$, $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$, $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$, тогда условие

$$\left\| w_2(r) \left(\frac{r}{t+r} \right)^{\frac{\gamma}{p_2}} \right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)} \le c \|w_1\|_{L_{\theta_1}(t,\infty)}$$

для всех $t > 0$, где $c > 0$ не зависит от t, является необходимым и достаточным условием ограниченности M_α^P из пространства $LM_{p_1\theta_1,w_1,P}$ в пространство $LM_{p_2\theta_2,w_2,P}$.

Во второй главе получены необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропного потенциала Рисса в анизотропных локальных пространствах типа Морри:

$$I_\alpha^P f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)}{\rho(x-y)^{\gamma-\alpha}} dy , \ 0 < \alpha < \gamma .$$

Теорема 5.

1. Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma\left(1 - \frac{1}{p}\right)_+ < \alpha < \gamma$. Тогда следующие величины эквивалентны

$$\left\| I_\alpha^P(|f|) \right\|_{WL_p(\varepsilon_P(x,r))} \approx \left\| I_\alpha^P(|f|) \right\|_{L_p(\varepsilon_P(x,r))} \approx$$

$$r^{\frac{\gamma}{p}} \overline{I}^P_{\alpha,r}(|f|)(x) + r^{\alpha - \gamma\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \|f\|_{L_1(\varepsilon_P(x,2r))} \approx$$

$$r^{\frac{\gamma}{p}} \int_r^\infty \|f\|_{L_1(\varepsilon_P(x,t))} \frac{dt}{t^{\gamma-\alpha+1}}$$

для любого шара $\varepsilon_P(x,r) \subset R^n$ и для всех $f \in L_1^{loc}(R^n)$.

2. Пусть $1 < p < \infty$, $\alpha = \gamma\left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Тогда следующие величины эквивалентны

$$\left\| I^P_{\gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}(|f|) \right\|_{WL_p(\varepsilon_P(x,r))} \approx r^{\frac{\gamma}{p}} \overline{I}^P_{\gamma\left(1-\frac{1}{p}\right),r}(|f|)(x) + \|f\|_{L_1(\varepsilon_P(x,2r))} \approx$$

$$r^{\frac{\gamma}{p}} \int_r^{\infty} \|f\|_{L_1(\varepsilon_P(x,t))} \frac{dt}{t^{\frac{\gamma}{p}+1}}$$

для любого анизотропного шара $\varepsilon_P(x,r) \subset R^n$ и для всех $f \in L_1^{loc}(R^n)$.

Пусть $\aleph(0,\infty)$ множество всех измеримых по Лебегу функций $(0,\infty)$ и $\aleph^+(0,\infty)$ его подмножество, состоящее из неотрицательных, измеримых функций на $(0,\infty)$. Обозначим через $\aleph^+(0,\infty;\downarrow)$ конус всех функций на $\aleph^+(0,\infty)$, неубывающих на $(0,\infty)$ и положим

$$A = \left\{\varphi \in \aleph^+(0,\infty;\downarrow) : \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0\right\}.$$

Пусть H оператор Харди $(Hg)(t) := \int_0^t g(r)dr$, $0 < t < \infty$.

Теорема 6. Пусть выполняется условие $\gamma\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)_+ < \alpha < \gamma$ или условие $1 < p_1 < p_2 < \infty$ и $\alpha = \gamma\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$. Более того, пусть $0 < \theta_1, \theta_2 \le \infty$, $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$ и $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$.

Тогда оператор I^P_α ограниченно действует из пространства $LM_{p_1\theta_1,w_1,P}$ в пространство $LM_{p_2\theta_2,w_2,P}$, в случае $p_1 = 1$, $0 < p_2 < \infty$ и

$\gamma\left(1-\frac{1}{p_2}\right)_+ < \alpha < \gamma$ если только H ограничен из пространства $L_{\theta_1,v_1}(0,\infty)$ в пространство $L_{\theta_2,v_2}(0,\infty)$ на конусе A так, что

$$\|Hg\|_{L_{\theta_2,v_2}(0,\infty)} \le \|g\|_{L_{\theta_1,v_1}(0,\infty)}$$

для всех функций $g \in A$, $v_1(r)$ и $v_2(r)$ определяется равенствами

$$v_1(r) = w_1\left(r^{-\frac{1}{\sigma}}\right) r^{-\frac{1}{\theta_1\sigma}-\frac{1}{\theta_1}},\;\; v_2(r) = w_2\left(r^{-\frac{1}{\sigma}}\right) r^{-\frac{\gamma}{\sigma p_2}-\frac{1}{\theta_2\sigma}-\frac{1}{\theta_2}}.$$

Более того, если $p_1 = 1$, $0 < p_2 < \infty$ и $\gamma\left(1-\frac{1}{p_2}\right)_+ < \alpha < \gamma$ и $\alpha = \gamma\left(1-\frac{1}{p_2}\right)_+$, тогда I_α^P ограниченно действует из пространства $LM_{1\theta_1,w_1,P}$ в пространство $WLM_{p_2\theta_2,w_2,P}$ тогда и только тогда, когда оператор H ограничен из пространства $L_{\theta_1,v_1}(0,\infty)$ в пространство $L_{\theta_2,v_2}(0,\infty)$ на конусе A.

Теорема 7. Пусть выполняется условие $\gamma\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)_+ < \alpha < \gamma$ или условие $1 < p_1 < p_2 < \infty$ и $\alpha = \gamma\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)$. Более того, пусть $0 < \theta_1, \theta_2 \le \infty$, $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$ и $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$. Тогда оператор I_α^P ограниченно действует из пространства $LM_{p_1\theta_1,w_1,P}$ в пространство $LM_{p_2\theta_2,w_2,P}$ в случае $p_1 = 1$ тогда и только тогда, когда

(a) Если $1 < \theta_1 \le \theta_2 < \infty$, то

$$B_1^1 := \sup_{t>0}\left(\int_t^\infty w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2\left(\alpha-\gamma\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)\right)} dr\right)^{\frac{1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(r) dr\right)^{-\frac{1}{\theta_1}} < \infty$$

и

$$B_2^1 := \sup_{t>0} \left(\int_0^t w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2 \frac{\gamma}{p_2}} dr \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty \frac{w_1^{\theta_1}(r) r^{\theta_1' \left(\alpha - \frac{\gamma}{p_1}\right)}}{\left(\int_r^\infty w_1^{\theta_1}(\rho) d\rho \right)^{\theta_1'}} dr \right)^{\frac{1}{\theta_1'}} < \infty .$$

(b) Если $0 < \theta_1 \le 1$, $1 < \theta_1 \le \theta_2 < \infty$, тогда $B_1^1 < \infty$ и

$$B_2^2 := \sup_{t>0} t^{\alpha - \frac{\gamma}{p_2}} \left(\int_0^t w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2 \frac{\gamma}{p_2}} dr \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(r) dr \right)^{-\frac{1}{\theta_1}} < \infty .$$

(c) Если $0 < \theta_1 < \infty$, $1 < \theta_1 < \theta_2 < \infty$, $\theta_2 \ne 1$, тогда

$$B_1^3 := \left(\int_0^\infty \left(\frac{\int_t^\infty w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2 \left(\alpha - \gamma \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)\right)} dr}{\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(r) dr} \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1 - \theta_2}} w_2^{\theta_2}(t) t^{\theta_2 \left(\alpha - \gamma \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)\right)} dt \right)^{\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 \theta_2}} < \infty$$

и

$$B_2^3 := \left(\int_0^\infty \left[\left(\int_0^t w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2 \frac{\gamma}{p_2}} dr \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty \frac{w_1^{\theta_1}(r) r^{\theta_1' \left(\alpha - \frac{\gamma}{p_1}\right)}}{\left(\int_r^\infty w_1^{\theta_1}(\rho) d\rho \right)^{\theta_1'}} dr \right)^{\frac{\theta_2 - 1}{\theta_2}} \right]^{\frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_1 - \theta_2}} \right. \times$$

$$\times \frac{w_1^{\theta_1}(t)\, t^{\theta_1'\left(\alpha - \frac{\gamma}{p_1}\right)}}{\left(\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(\rho)\, d\rho\right)^{\theta_1'}} dt \Bigg)^{\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1\theta_2}} < \infty$$

(d) Если $1 = \theta_2 < \theta_1 < \infty$, тогда

$$B_1^4 := \left(\int_0^\infty \left(\frac{\int_t^\infty w_2(r) r^{\alpha - \gamma\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)} dr}{\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(r)\, dr} \right)^{\frac{1}{\theta_1}} w_2(t)\, t^{\alpha - \gamma\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)} dt \right)^{\frac{\theta_1 - 1}{\theta_1}} < \infty,$$

$$B_2^4 := \left(\int_0^\infty \left(\frac{\int_t^\infty w_2(r) r^{\alpha - \gamma\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)} dr + t^{\alpha - \frac{\gamma}{p_1}} \int_0^t w_2(r) r^{\frac{\gamma}{p_2}} dr}{\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(r)\, dr} \right)^{\theta_1' - 1} \times \right.$$

$$\left. \times\, t^{\alpha - \frac{\gamma}{p_1}} \left(\int_0^t w_2(r) r^{\frac{\gamma}{p_2}} dr \right) \frac{dt}{t} \right)^{\theta_1'} < \infty$$

(e) Если $0 < \theta_2 < \theta_1 = 1$, тогда

$$B_1^5 = \left(\int_0^\infty \left(\frac{\int_t^\infty w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2\left(\alpha - \gamma\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)\right)} dr}{\int_t^\infty w_1(r)\, dr} \right)^{\frac{\theta_2}{1-\theta_2}} w_2^{\theta_2}(t)\, t^{\theta_2\left(\alpha - \gamma\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)\right)} dt \right)^{\frac{1-\theta_2}{\theta_2}} < \infty$$

и

$$B_2^5 = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2 \frac{\gamma}{p_2}} \right)^{\frac{\theta_2}{1-\theta_2}} \left(\inf_{t<s<\infty} s^{\frac{\gamma}{p_1}-\alpha} \int_s^\infty w_1(\rho) d\rho \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_2-1}} \times \right.$$

$$\left. \times w_2^{\theta_2}(t) t^{\theta_2 \frac{\gamma}{p_2}} dt \right)^{\frac{1-\theta_2}{\theta_2}} < \infty$$

(f) Если $0 < \theta_2 < \theta_1 < 1$, тогда $B_1^3 < \infty$ и

$$B_2^6 := \left(\int_0^\infty \sup_{t \le s < \infty} \frac{s^{\left(\alpha + \frac{\gamma}{p_1}\right)\frac{\theta_1\theta_2}{\theta_1-\theta_2}}}{\left(\int_s^\infty w_1(\rho) d\rho \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1-\theta_2}}} \left(\int_0^t w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2 \frac{\gamma}{p_2}} dr \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1-\theta_2}} \times \right.$$

$$\left. \times w_2^{\theta_2}(t) t^{\theta_2 \frac{\gamma}{p_2}} dt \right)^{\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1\theta_2}} < \infty$$

(g) Если $0 < \theta_1 \le 1$, $\theta_2 = \infty$ тогда

$$B^7 := ess \sup_{0<t\le s<\infty} \frac{w_2(t) t^{\frac{\gamma}{p_2}}}{s^{\frac{\gamma}{p_1}-\alpha} \left(\int_s^\infty w_1(r) dr \right)^{\frac{1}{\theta_1}}} < \infty .$$

(h) Если $0 < \theta_1 < \infty$, $\theta_2 = \infty$ тогда

$$B^8 := ess \sup_{t>0} w_2(t) t^{\frac{\gamma}{p_2}} \left(\frac{r^{\theta'\left(\alpha - \frac{\gamma}{p_1}\right)}}{\left(\int_s^\infty w_1(s) ds \right)^{\theta'-1_1}} \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{\theta_1'}} < \infty$$

(i) Если $\theta_1 = \infty$, $0 < \theta_2 < \infty$ тогда

$$B^{10} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{\gamma}{p_1} - \alpha} \frac{s^{\alpha - \frac{\gamma}{p_1} - 1} ds}{\operatorname{ess\,sup}\limits_{s<y<\infty} w_1(y)} \right)^{\theta_2} \times w_2^{\theta_2}(t) t^{\theta_2 \left(\alpha - \gamma \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) \right)} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} < \infty$$

(j) Если $\theta_1 = \theta_2 = \infty$, тогда

$$B^9 = \operatorname{ess\,sup}_{t>0} w_2(t) t^{\frac{\gamma}{p_2}} \int_t^\infty t^{\frac{\gamma}{p_1} - \alpha} \frac{s^{\alpha - \frac{\gamma}{p_1} - 1}}{\operatorname{ess\,sup}\limits_{s<y<\infty} w_1(y)} ds < \infty.$$

Более того, если $p_1 = 1$, $0 < p_2 < \infty$ и $\gamma \left(1 - \frac{1}{p_2} \right)_+ < \alpha < \gamma$ или $1 < p_2 < \infty$ и $\alpha = \gamma \left(1 - \frac{1}{p_2} \right)$, тогда оператор I_α^P ограниченно действует из пространства $LM_{1\theta_1, w_1, P}$ в пространство $WLM_{p_2\theta_2, w_2, P}$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (a)-(j).

Теорема 8.

1.Пусть $1 < p_1 < p_2 < \infty$, $\alpha = \gamma \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)$, $0 < \theta_1 < \infty$, $\theta_1 \le \theta_2 \le \infty$, $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$ и $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$. Тогда условие

$$\left\| w_2(r) \left(\frac{r}{t+r} \right)^{\frac{\gamma}{p_2}} \right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)} \le c \|w_1\|_{L_{\theta_1}(t,\infty)} \tag{0.3}$$

для всех $t > 0$, где $c > 0$ зависит от t, является необходимым и достаточным условием ограниченности оператора I_α^P из пространства $LM_{p_1\theta_1, w_1, P}$ в пространство $LM_{p_2\theta_2, w_2, P}$.

2. Пусть $1 \le p_1 < p_2 < \infty$, $\alpha = \gamma\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$, $0 < \theta_1 < \infty$, $\theta_1 \le \theta_2 \le \infty$, $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$ и $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$. Тогда условие (0.3) является необходимым и достаточным условием ограниченности оператора I_α^P из пространства $LM_{p_1\theta_1, w_1, P}$ в пространство $WLM_{p_2\theta_2, w_2, P}$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору В.С.Гулиеву, за постановку задачи, обсуждение полученных результатов и постоянное внимание к диссертационной работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. V.S.Guliyev, Sh.A. Muradova. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the anisotropic maximal operator in the local Morrey-type spaces. XII International conference of mathematics and mechanics, Baku, 2010, March 17-19, pp.134-144.
2. E.V.Guliyev, Sh.A. Muradova and A. Eroglu, Necessary and sufficient conditions for boundedness of the anisotropic maximal operator in the local Morrey-type spaces. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Tbilisi, 2010, vol.154, no.1, pp.73-96.
3. V.S.Guliyev, Sh.A. Muradova, Necessary and sufficient conditions for boundedness of the anisotropic fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces. XIII International conference of mathematics and mechanics, Baku, 2011, January 11-12, pp.130-131.
4. A.Akbulut, V.S.Guliyev, Sh.A.Muradova, Boundedness of the anisotropic fractional maximal operator from dual anisotropic Morrey-type spaces to anisotropic Morrey-type spaces. International conference in honor of professor V.I. Burenkov on the occasion of his 70th birthday to be held in Kirsehir, Turkey, from May 20 to may 27, 2011, p.8.
5. A.Akbulut, V.S.Guliyev, Sh.A.Muradova, Boundedness of the anisotropic Riesz potential in anisotropic local Morrey-type spaces.

International conference in honor of professor Stefan Samko on the occasion of his 70th birthday to be held in Aveiro, Portugal, from June 30 to July 2, 2011, p.9.
6. V.S.Guliyev, Sh.A.Muradova, Parabolic fractional maximal operator in parabolic local Morrey-type spaces. Transactons of NAS of Azerbaijan, 2011, vol. 31, pp.59-72.
7. V.S.Guliyev, Sh.A.Muradova, On the boundedness of anisotropic Riesz potential in anisotropic local Morrey-type spaces. Dokl. Akad. Nauk. Azer. Republic, 2011, vol. 67, № 2, 3-13.
8. Sh.A.Muradova. Necessary and sufficient conditions fir the boundedness of the anisotropic complementary Morrey-type spaces to anisotropic Morrey-type spaces. News of Azerbaijan Pedagogical University, 2012, no.1, pp. 20-27.
9. A.Akbulut, V.S.Guliyev, Sh.A.Muradova, Boundedness of the anisotropic Riesz potential in anisotropic local Morrey-type spaces. Complex variables and elliptic equations, 2013, vol.58, no. 2, pp.259-280.

ŞƏMSİYYƏ ƏHLİMAN qızı MURADOVA

ANİZOTROP KƏSR-MAKSİMAL OPERATOR VƏ RİSS POTENSİALININ ANİZOTROP LOKAL MORRİ TİPLİ FƏZALARDA TƏDQİQİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi anizotrop maksimal operatorun, anizotrop kəsr-maksimal operatorun və anizotrop Riss potensialının anizotrop lokal Morri tipli fəzalarda məhdudluğunun öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Disserasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakılardır:

- Anizotrop maksimal operatorun anizotrop lokal Morri tipli fəzalarda məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.
- Anizotrop kəsr-maksimal operatorun anizotrop lokal Morri tipli fəzalarda məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır.
- Anizotrop kəsr-maksimal operatorun tamamlayıcı anizotrop lokal Morri tipli fəzalardan anizotrop lokal Morri tipli fəzalara məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.
- Anizotrop Riss potensialının anizotrop lokal Morri tipli fəzalarda məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır.

SHAMSIYA AHLIMAN kizi MURADOVA

INVESTIGATION OF ANISOTROPIC FRACTIONAL MAXIMAL OPERATOR AND RIESZ POTENTIAL ON ANISOTROPIC LOCAL MORREY-TYPE SPACES

SUMMARY

The dissertation was devoted to the study of the problems of boundedness of anisotropic maximal, anisotropic fractional maximal operators and anisotropic Riesz potential on anisotropic local Morrey-type spaces.

The principal results of dissertation are as follows:

- Necessary and sufficient conditions of boundedness of anisotropic maximal operator on anisotropic local Morrey-type spaces were obtained.
- Necessary and sufficient conditions of boundedness of anisotropic fractional maximal operator on anisotropic local Morrey-type spaces were obtained.
- Necessary and sufficient conditions of boundedness of anisotropic fractional maximal operator from complementary anisotropic local Morrey-type spaces to anisotropic local Morrey-type spaces were obtained.
- Necessary and sufficient conditions of boundedness of anisotropic Riesz potential on anisotropic local Morrey-type spaces were obtained.