НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ТАРЛАН ЗАФАР оглы ГАРАЕВ

ДЕФЕКТНЫЕ БАЗИСЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

1211.01-Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2013

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

TƏRLAN ZƏFƏR OĞLU QARAYEV

DEFEKT BAZİSLƏR VƏ ONLARIN TƏTBİQLƏRİ

1211.01-Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2013

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

TƏRLAN ZƏFƏR oğlu QARAYEV

DEFEKT BAZİSLƏR VƏ ONLARIN TƏTBİQLƏRİ

1211.01-Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2013

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ТАРЛАН ЗАФАР оглы ГАРАЕВ

ДЕФЕКТНЫЕ БАЗИСЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

1211.01-Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2013

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Qeyri-harmonik analiz"** şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Bilal T.Bilalov**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Sabir S.Mirzəyev**

(Bakı Dövlət Universiteti);

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Əbdürrəhim F.Quliyev**

(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu).

Aparıcı təşkilat:

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

«Riyazi analiz» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 27 sentyabr 2013-cü il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 14 iyun 2013-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111

Dissertasiya Şurasının

elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена в отделе «Негармонический анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, проф. **Билал Т.Билалов**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф. **Сабир С.Мирзоев**

(Бакинский Государственный Университет);

кандидат физико-математических наук, доц. **Абдуррагим Ф.Гулиев**

(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана).

Ведущая организация:

Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

кафедра «Математический анализ».

Защита диссертации состоится 27 сентября 2013 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 14 июня 2013 года.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета

Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Многие задачи математической физики и механики приводят к спектральным задачам, содержащие спектральный параметр в граничных условиях. Такие задачи, в основном, являются несамосопряженными. Поэтому теория подобных задач недостаточно хорошо изучена. Исследование в этом направлении имеет глубокую историю. Видимо она начинается с фундаментальных результатов G.D. Birkhoff и Я.Д. Тамаркина. В этих работах, в основном, получена полнота корневых векторов соответствующих задач, в индуцированных ими пространствах функций. Им получены разложения функций по корневым элементам из области определения соответствующего дифференциального выражения. В таких ситуациях установление базисности или же минимальности корневых элементов в надлежащих пространствах не всегда удается и, вообще говоря, эти вопросы являются очень трудными. Следует отметить, что как обычно асимптотики корневых элементов обыкновенных дифференциальных операторов с дискретным спектром в главных частях содержат возмущенные системы экспонент

$$\left\{e^{i\lambda_n t}\right\}_{n\in Z}, \tag{1}$$

(Z – целые числа) синусов

$$\left\{\sin \lambda_n t\right\}_{n\in N}, \tag{2}$$

(N – натуральные числа) и косинусов

$$1\cup\left\{\cos \lambda_n t\right\}_{n\in N}, \tag{3}$$

где $\left\{\lambda_n\right\}\subset C$ (C – комплексная плоскость). По этой причине изучение базисных свойств (полнота, минимальность, базисность) систем (1)-(3) в различных пространствах функций представляет особый научный интерес. Они являются возмущениями относительно индекса (n) соответствующих классических систем экспонент

$\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$, синусов $\left\{\sin nt\right\}_{n\in N}$ и косинусов $1\cup\left\{\cos nt\right\}_{n\in N}$. Видимо к подобным вопросам впервые обратили внимание известные математики Р.Пэли, Н.Винер и Н.Левинсон. Р.Пэли и Н.Винер рассматривали систему экспонент (1) в $L_2\left(-\pi,\pi\right)$ и показали, что при выполнении условия $\sup_n\left|\lambda_n-n\right|<\frac{1}{\pi^2}$ она образует базис Рисса в $L_2\left(-\pi,\pi\right)$. Там же они поставили вопрос об улучшении константы $\frac{1}{\pi^2}$ в этом неравенстве. Этот вопрос в $L_2\left(-\pi,\pi\right)$ окончательно решен М.И.Кадецем. Аналогичный вопрос в пространстве $L_p\left(-\pi,\pi\right), 1<p<+\infty$, имеет серезные трудности и окончательно не решен. Изучение аппроксимативных свойств систем функций более общего вида в лебеговых пространствах представляет особый научный интерес с точки зрения приложений в различных областях математики. Яркими примерами тому являются классические системы экспонент, синусов, косинусов и их приложения. Аппроксимативные свойства этих систем в различных функциональных пространствах хорошо изучены и им посвящены обширная библиография. Связи между базисными свойствами этих систем известны и их нетрудно установить. В общем виде системы синусов и косинусов можно представить в видах

$$\sin nt=\sum_{k=1}^{1}a_k^s\left(t\right)e^{i\alpha_k\left(t\right)n},\ n\in N;\ \cos nt=\sum_{k=1}^{1}a_k^c\left(t\right)e^{i\alpha_k\left(t\right)n},\ n\in Z_+,$$

($Z_+=\left\{0\right\}\cup N$) где

$$\alpha_1\left(t\right)\equiv t,\qquad \alpha_2\left(t\right)\equiv -t,\qquad a_1^s\left(t\right)\equiv -a_2^s\left(t\right)\equiv\frac{1}{2i},\qquad a_1^c\left(t\right)\equiv a_2^c\left(t\right)\equiv\frac{1}{2},$$

$\forall t\in\left[0,\pi\right]$.

Нетрудно заметить, что множество значений функций $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ заполняют весь отрезок $[-\pi,\pi]$, на котором рассматриваются базисные свойства системы экспонент $\{e^{\mathrm{int}}\}_{n\in Z}$. Рассматривая обобщение этого случая приходим к системе вида

$$f_n(t)\equiv\sum_{k=1}^{r}a_k(t)x_n(\beta_k(t)),\ \ t\in[a,b],\ n\in N.$$

Будем устанавливать некоторые связи между базисными свойствами систем $\{x_n\}_{n\in N}$ и $\{f_n\}_{n\in N}$, рассматриваемых в различных банаховых пространствах. Так же будем рассматривать двойной случай этих вопросов. Эти и другие аппроксимативные свойства систем тесно связаны с вопросами продолжения базисов на широкий интервал. Подобные вопросы ранее были рассмотрены в монографиях С. Качмаж , Г. Штейнгауза и Б.Т. Билалов, С.Г. Велиева . Вторая глава диссертационной работы посвящена этому вопросу. Поэтому тема диссертационной работы является актуальной.

Приведем краткий обзор касающихся вопросов. Задачи со спектральным параметром в граничных условиях относительно обыкновенных дифференциальных операторов в общем случае можно представить в виде

$$L(x,\lambda)u\equiv\frac{d^m}{dx^m}u+\sum_{i=1}^{m}a_i(x,\lambda)\frac{d^{m-i}}{dx^{m-i}}u=0,$$

$$U_k(\lambda,u)=0,\ k=\overline{0,n},$$

где U_k- граничные операторы. С точки зрения идеи линеаризации, задачи со спектральным параметром в граничных условиях и операторные пучки родственны. В этом смысле нельзя не отметить фундаментальный результат М.В.Келдыша. Он заметил, что в случае пучка корневые элементы настолько много, что они образуют n-кратный базис или n-кратно полны в соответствующем пространстве.

К числу подобных работ можно отнести работы М.Г.Гасымова и А.М.Магеррамова, М.Б.Оразова и А.А.Шкаликова, А.А.Шкаликова, М.Г. Джавадова, М.Г.Крейна и Г.К.Лангера и др. В этих работах доказана базисность или же полнота некоторой части корневых элементов, т.е. система из корневых элементов имеет бесконечный дефект. Такой же эффект возникает при рассмотрении задач со спектральным параметром в граничных условиях. В связи с приложением при решении многих задач математической физики последнее время интерес к подобным задачам сильно возрос. Разрывные задачи со спектральным параметром в граничных условиях рассмотрены еще А.Аткинсоном. Следует отметить также работы авторов J.Walter, Schneider A., Fulton C.T., Hilton D.B., Roussakovskiy E.M. и др. Следующий этап связан с работами Е.И.Моисеева и Ю.К.Капустина , Ю.К.Капустина, P.A. Binding, Т.Б. Касумова и З.Алиева. . Во всех этих работах рассматривались случаи, когда спектральный параметр входит в граничные условия либо полиномиально, либо рационально. А эти случаи порождают конечные дефекты.

Что касается систем (1)-(3) в случае, когда λ_n имеет вид $\lambda_n = n + \alpha\, sign\, n$, где $\alpha \in R$, окончательный результат о базисности системы (1) в $L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < +\infty$, принадлежит А.М.Седлецкому. Относительно систем (2), (3) подобные результаты получены Е.И.Моисеевым. Аналогичные результаты относительно комплексного параметра $\alpha \in C$ получены в работах Г.Г.Девдариани и Б.Т.Билалова. Некоторые L_p-аналоги теоремы "$1\backslash 4$-Кадеца" получены в работах Б.Т.Билалова. К подобным числам работ можно отнести результаты авторов He X., Volkmer H., Miklos Horvath , Lyubarskii Y.I., Kristian Seip, Young R.M. и др.

Цель работы. Нахождение условий для базисности систем с конечным, а также бесконечным дефектом в банаховых пространствах и некоторых L_p-аналогов теоремы "$1\backslash 4$-Кадеца".

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

- найдено критерий для базисности систем с конечным дефектом в банаховом пространстве;

-найден достаточное условие для базисности систем с бесконечным дефектом в банаховом пространстве;

-на языке мультипликаторов найден L_p-аналог теоремы $"1\backslash 4-$Кадеца" относительно возмущенной системы экспонент;

-на языке мультипликаторов найден L_p-аналог теоремы $"1\backslash 4-$Кадеца" относительно возмущенной системы синусов;

-аналогичный результат получен относительно возмущенной системы косинусов;

-установлены связи между базисными свойствами систем типа синусов и косинусов в весовых пространствах Лебега.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы функционального анализа, теории функций комплексного переменного и теории близких базисов.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертационной работе, носят теоретический характер. Их можно использовать в теории аппроксимации, при обосновании метода Фурье для решения некоторых уравнений математической физики и механики, при решении спектральных задач, содержащих спектральный параметр в граничных условиях, а также при изучении спектральных свойств операторных пучков.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались: на семинарах отделов «Дифференциальные уравнения» (рук. д.ф.-м.н., проф. А.Б.Алиев), «Функциональный анализ» (рук. д.ф.-м.н., проф. Н.Ш.Искендеров) и «Негармонический анализ» ИММ НАНА (рук. д.ф.-м.н., проф. Б.Т.Билалов), на международной научной конференции, (Нахичеван, 2007), на межд. конф., посвящ. 70 летию акад. А.Д.Гаджиева (Баку, 2007), на межд. конф., посвящ. 50 летию ИММ НАН (Баку, 2009), на межд. конф., посвящ. 100 летию акад. З.И.Халилова (Баку, 2011).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы из 69 наименований. Объем диссертации 117 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения и двух глав. Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулирована её цель и дан краткий обзор работ, касающихся вопросов.

В первой главе рассматриваются дефектные системы в банаховом пространстве. Рассматриваются так же случаи конечного и бесконечного дефекта, найден критерий для базисности систем с конечным дефектом в банаховом пространстве, так же найдено достаточное условие для базисности систем с бесконечным дефектом в банаховом пространстве.

В 1.1 приводятся необходимые понятия и сведения, основные понятия и факты из теории базисов и близких базисов.

1.2 посвящен получению необходимых и достаточных условий для полноты, минимальности и базисности систем в банаховом пространстве, которые получаются от исходной системы путем изменения конечного числа элементов.

Пусть $\mathscr{X}$ – банахово пространство, $\mathscr{X}^*$ – его сопряженное. Для $x \in \mathscr{X}$ и $x^* \in \mathscr{X}^*$ через $\langle x, x^* \rangle$ будем обозначать значение функционала x^* на элементе x.

Пусть $J_m = \{n_1, ..., n_m\}$ некоторый набор различных натуральных чисел и $N_m = N \setminus J_m$. Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть* $\{x_n\}_{n \in N} \subset \mathscr{X}$ *минимальная система, а* $\{x_n^*\}_{n \in N} \subset \mathscr{X}^*$ *ее сопряженная. Если для некоторой системы* $\{u_k\}_{k=1}^m \subset \mathscr{X}$ *выполняется условие* $\Delta_m = \det A_m \neq 0$*, где*

$$A_m = \left\| \left\langle u_k, x_{n_j}^* \right\rangle \right\|_{k,j=1}^m ,$$

то система $\{u_k\}_{k=1}^m \cup \{x_n\}_{n \in N_m}$ *также является минимальной.*

Так же имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть система* $\{x_n\}_{n \in N}$ *базис пространства* $\mathscr{X}$ *и* $\{u_k\}_{k=1}^m$ *некоторая система векторов из* $\mathscr{X}$. *Тогда для базисности системы* $\{u_k\}_{k=1}^m \cup \{x_n\}_{n \in N_m}$ *в пространстве* $\mathscr{X}$ *необходимо и достаточно выполнения условия* $\Delta_m \neq 0$. *При* $\Delta_m = 0$ *система* $\{u_k\}_{k=1}^m \cup \{x_n\}_{n \in N_m}$ *не полна и не минимальна.*

Полученные результаты применяются к пространствам вида $\mathscr{X} = \mathscr{X}_0 \oplus C^m$, где $\mathscr{X}_0$ – некоторое банахово пространство, а $C^m - m$ копия комплексной плоскости C.

Пусть $K_{\tilde{\Phi}}$ пространство коэффициентов системы $\widetilde{\Phi}$. Справедлива

Теорема 3. *Пусть* $B = B_1 \oplus B_2$, *систем а* $\widetilde{\Phi} \equiv \Phi \cup \Psi$ *образует базис в* B, *а* E *базис в* B_1 , *причем* $K_E = K_{\widetilde{\Phi}}$. *Пусть* $\widetilde{E} \equiv \{\widetilde{e}_n\}_{n \in N}$, $\widetilde{e}_n = \begin{pmatrix} e_n \\ 0 \end{pmatrix}$, $\forall n \in N$, *имеет разложение*

$$\widetilde{E} = A\Phi + B\Psi,$$

где $A, B \in \mathscr{L}\left(K_{\widetilde{\Phi}}\right)$, *причем* A *обратим. Тогда* $\widetilde{E} \cup \Psi$ *тоже образует базис в* B.

Эта теорема является аналогом замены конечного числа элементов базиса, сохранив свойство базисности. Используя этот результат доказывается аналог теоремы о выделении подбазиса на случай бесконечного дефекта. А именно, справедлива

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия Теоремы 3 и* $\Phi \cup \Psi$ *образует базис в* B. *Тогда система* $\mathrm{Pr}_{B_2} \Psi$ *образует базис в* B_2.

Пусть B некоторое банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и B^r r-мерное пространство с нормой $\|\cdot\|_r$. Обозначим через $\hat{B} = B \oplus B^r$ их прямую сумму и определим норму в $\hat{B}$ через $\|\hat{u}\|_{\hat{B}} = \|\mathrm{Pr}_B \hat{u}\|_B + \|\mathrm{Pr}_B \hat{u}\|_r$, где $\mathrm{Pr}_M : \hat{B} \to M$ ($M = B$ или B^r) оператор проектирования на соответствующее подпространство, порожденный разложением $\hat{B} = B \oplus B^r$. Пусть задан некоторый базис $\{\hat{u}_n\}_{n \in N}$ в $\hat{B}$. Вопрос состоит в том, что можно ли из системы $\{\mathrm{Pr}_B \hat{u}_n\}_{n \in N}$ выбирать базис в B? **В 1.4** приведен иной подход к изучению рассматриваемого вопроса и дан критерий выделения базиса. Для ясности обозначим $\hat{u} = \begin{pmatrix} u \\ u^r \end{pmatrix}$, где $u = \Pr_B \hat{u}$, $u^r = \Pr_{B^r} \hat{u}$ соответствующие координаты. Возьмем в B^r произвольный базис $\{u_n^r\}_{n=1}^r$ и обозначим $\hat{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ u_n^r \end{pmatrix}$, $n = \overline{1,r}$. Пусть $\{\hat{u}_n^*\}_{n\in N}$ биортогональная к $\{\hat{u}_n\}_{n\in N}$ система. Разложим элементы $\hat{e}_n, n = \overline{1,r}$, по базису $\{\hat{u}_n\}_{n\in N}$: $\hat{e}_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\hat{u}_k$, $n = \overline{1,r}$, где $a_{nk} = \hat{u}_k^*(\hat{e}_n)$, $n = \overline{1,r}$, $k = \overline{1,\infty}$. Пусть $N^r \equiv \{i_k \in N,\ k = \overline{1,r} : i_1 < i_2 < \ldots < i_r\}$ – любой набор (N – натуральный ряд). Рассмотрим матрицу A^r порядка $r \times r$:

$$A^r \equiv (a_{nk})_{n=\overline{1,r};\, k\in N^r},$$

и обозначим $\Delta_r \equiv \det A^r$. Имеет место следующая

Теорема 5. *Если* $\Delta_r \neq 0$, *то система*

$$\{\hat{e}_n\}_{n=1}^r \cup \{\hat{u}_n\}_{n\in N\setminus N^r},$$

образует базис в $\hat{B}$.

Так же доказывается обратная теорема

Теорема 6. *Если* $\Delta_r = 0$, *то система* $\{\Pr_B \hat{u}_n\}_{n\notin N^r}$ *не образует базис в* B, *точнее не полна и неминимальна в* B.

Объединяя полученные результаты приходим к следующей теореме.

Теорема 7. *Пусть* $\{\hat{u}_n\}_{n\in N}$ *базис в* $\hat{B}$ *и* $\{\hat{u}_n^*\}_{n\in N}$ *соответствующая биортогональная система;* $\{e_n\}_{n=1}^{r}$ *любой базис* $\hat{B}$ *и* $\hat{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ e_n \end{pmatrix}$. *Возьмем произвольный набор* $N^r \equiv \{i_k \in N, k=\overline{1,r} : i_1 < i_2 < \ldots < i_r\}$, *и пусть* $\Delta_r = \det\left(a_{ni_k}\right)_{n,k=\overline{1,r}}$, *где* $a_{nk} = \hat{u}_k^*(\hat{e}_n)$. *Для того чтобы система* $\{\Pr \hat{u}_n\}_{n\notin N^r}$ *образовывала базис в* B *необходимо и достаточно выполнение условия* $\Delta_r \neq 0$.

В 1.5 рассматривается случай, когда система образует безусловный базис в расширенном банаховом пространстве. При определенных предположениях указывается способ выделения базиса подпространства из базиса всего пространства.

В главе II получены некоторые L_p-аналоги теоремы "$1\backslash 4$-Кадеца", так же на языке мультипликаторов найдены L_p-аналог теоремы "$1\backslash 4$-Кадеца" относительно возмущенной системы синусов и аналогичный результат получен относительно возмущенной системы косинусов.

В 2.1. приведено некоторое сведение о мультипликаторах. Пусть X, Y некоторые B-пространства на одном и том же поле K и $\bar{x} \equiv \{x_n\}_{n\in N} \subset X$, $\bar{y} \equiv \{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ некоторые невырожденные системы. Им соответствуют B-пространства коэффициентов $\mathscr{K}_{\bar{x}}$ и $\mathscr{K}_{\bar{y}}$. Пусть $\bar{\mu} \equiv \{\mu_n\}_{n\in N} \subset K$ некоторая последовательность. Под $\bar{\mu}\bar{\lambda}$ понимаем покомпонентное умножение, т.е. $\bar{\mu}\bar{\lambda} \equiv \{\mu_n \lambda_n\}_{n\in N}$. Оператор $T_{\bar{\mu}} : \mathscr{K}_{\bar{x}} \to \mathscr{K}_{\bar{y}}$, определенный выражением $T_{\bar{\mu}}\bar{\lambda} = \bar{\mu}\bar{\lambda}$ назовем мультипликатором типа $(\mathscr{K}_{\bar{x}}; \mathscr{K}_{\bar{y}})$, если $T_{\bar{\mu}} \in L(\mathscr{K}_{\bar{x}}; \mathscr{K}_{\bar{y}})$. Норму $\|T_{\bar{\mu}}\|$ назовем нормой мультипликатора $(\mathscr{K}_{\bar{x}}; \mathscr{K}_{\bar{y}})$. Примем

Определение 8. *Последовательность* $\{a_n\}_{n\in N}\subset K$ *назовем последовательностью ограниченной вариации, если*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{k+1}-a_k\right|<+\infty,$$

где $\left|\cdot\right|$ *– соответствующая норма в* K.

Класс всех последовательностей ограниченной вариацией обозначим через VK. Пусть $\{a_n\}_{n\in N}\in VK$.

Возмущения системы экспонент. Пусть $\bar{x}\equiv\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ образует базис в X и $\{x_n^*\}_{n\in N}\subset X^*$ сопряженная к ней система. Рассмотрим систему $\{y_k\}_{k\in N}$, где

$$y_k=x_k+a_k z_k,\ \forall k\in N,\ \bar{a}\in VK,\ \ \bar{z}\equiv\{z_k\}_{k\in N}\subset X.$$

Рассмотрим операторы $T_n: X\to X$, $\forall n\in N$, определенные выражением

$$T_n x=\sum_{k=1}^{n}x_k^*(x)y_k,\ \forall x\in X,\ \forall n\in N.$$

Предположим, что $\exists M>0$:

$$\left\|\sum_{1}^{m}x_k^*(x)z_k\right\|_X\le M\|x\|_X,\ \forall x\in X,\ \forall m\in N. \tag{5}$$

$\inf\{M$ *: удовлетворяющих* $(5)\}$ *обозначим через* $b_{\bar{x}^*}(\bar{z})$ *и назовем* $\bar{x}^*$*-нормой системы* $\bar{z}$.

Верна следующая

Теорема 9. *Пусть* $\bar{x}$ *образует базис в* X *и* $b_{\bar{x}^*}(\bar{z})-\bar{x}^*$*-норма системы* $\bar{z}$*. Тогда при*

$$\forall \bar{a} \in VK: \ \|\bar{a}\|_{VK} < \frac{1}{2b_{\bar{x}^*}(\bar{z})},$$

система $\{y_k = x_k + a_k z_k\}_{k\in N}$ *тоже образует базис в* $\overline{X}$*, изоморфный к* $\bar{x}$*.*

В 2.2 приводится один аналог известной теоремы «$1\backslash 4-$Кадеца» относительно базисности возмущенной системы экспонент в пространстве L_p.

Пусть $f \in L_1$. Через $\{f_n\}_{n\in Z}$ будем обозначать коэффициенты Фурье функции f по системе $\{e^{\mathrm{int}}\}_{n\in Z}$:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\mathrm{int}}dt, \ \forall n \in Z.$$

Будем говорить, что $\{\delta_n\}_{n\in Z} \subset C$ есть мультипликатор типа (p,q), если для $\forall f \in L_p$, последовательность $\{\delta_n f_n\}_{n\in Z}$ является коэффициентами Фурье некоторой функции $g(t)$ из L_q, т.е. $g_n = \delta_n f_n$, $\forall n \in Z$.

Нам понадобятся мультипликаторы типа (p,p), $1 < p < +\infty$. Известно, что $(2{,}2) \equiv l_\infty$. Имеет место следующее утверждение, касающееся мультипликаторам.

Утверждение 10. *Если*

$$\{\delta_n\}_{n\in Z} \in (p,q), \ 1 \le p,q \le +\infty,$$

то $\exists \delta_{pq} > 0$ *:*

$$\left\| \sum \delta_n f_n e^{\mathrm{int}} \right\|_q \le \delta_{pq} \left\| \sum f_n e^{\mathrm{int}} \right\|_p , \tag{6}$$

для любой конечной суммы Σ*, где* $\|\cdot\|_p$ *– обычная норма в* L_p.

$\inf \{ \delta_{pq}$ *: удовлетворяющих неравенству* $(6) \}$ *назовем нормой мультипликатора* $\{\delta_n\}_{n\in Z}$ *и обозначим как* $\| \{\delta_n\} \|$.

Рассмотрим систему

$$\left\{ e^{i\lambda_n t} \right\}_{n\in Z} , \tag{7}$$

где $\lambda_n = n + \delta_n$, $\forall n \in Z$. Справедлива

Теорема 11. *Пусть* $\{\delta_n\}_{n\in Z} \in (p, p)$*,* $1 < p < +\infty$. *Тогда* $\exists \delta_p > 0$ *такое, что при* $\| \{\delta_n\} \| < \delta_p$*, система (7) образует базис в* L_p*, изоморфный к* $\left\{ e^{\mathrm{int}} \right\}_{n\in Z}$.

Используя результаты Хиршмана, из этой теоремы непосредственно получаем конкретные случаи.

В 2.3 рассматриваются некоторые аппроксимативные вопросы систем функций в весовых лебеговых пространствах как продолжение базиса, неминимальность базиса в подинтервале, связи между полнотой и минимальностью систем типа синусов и косинусов. Отметим, что некоторые аспекты безвесового случая этих вопросов рассмотрены в монографии Б.Т.Билалов и С.Г.Велиева .

Пусть $[a,b]$– некоторый сегмент действительной оси R . Под $L_{p;\rho}(a,b), 1 \le p < +\infty$, как обычно, будем понимать весовое лебегово пространство суммируемых с p-ой степенью модуля функций на (a,b) с обычной нормой

$$\|f\|_p \equiv \left(\int_a^b |f(t)|^p \rho(t)dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Известно, что $\left(L_{p;\rho}(a,b)\right)^*$ изометрически изоморфно $L_{q;\rho}(a,b)$ где $q: \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1-$сопряженный к p число. Иначе говоря

$$\forall l \in L^*_{p;\rho}(a,b), \exists! f \in L_{q;\rho}(a,b):$$

$$l(x)=\int_a^b x(t)\overline{f(t)}\,\rho(t)dt, \forall x \in L_{p;\rho}(a,b).$$

Будем предполагать, что относительно функций $a_k(t); \beta_k(t)$, $k=\overline{1,r}$, выполнены следующие основные предположения.

α *)* $\beta_k(t), k=\overline{1,r}$ *–кусочно-гладкие, монотонные функции на* (a,b)*; причем*

$\beta_k\{(a,b)\} \subset [c,d]$, $k=\overline{1,r}$*, и* $\beta_k\{(a,b)\} \cap \beta_i\{(a,b)\} = \{\varnothing\}$ *при* $k \neq i$

(*под обозначением* $f\{I\}$ *будем понимать образ множества* I *, т.е.* $f\{I\} \equiv \{y: y=f(t)\ , \forall t \in I\}$*).*

β *)* $\beta'_k(t)$ *и* $a_k(t), k=\overline{1,r}$ *–измеримые функции на* (a,b) *и имеет место*

$$\sup_{(a,b)} vrai\left\{\left|a_k(t)\right|^{\pm 1}; \left|\beta_k'(t)\right|^{\pm 1}\right\} < +\infty,\ k=\overline{1,r},$$

где под $\left[f(t)\right]'$ *понимаем производное* f *по* t.

Рассмотрим систему

$$f_n(t) \equiv \sum_{k=1}^{r} a_k(t) x_n(\beta_k(t)),\ t \in [a,b],\ n \in N.$$

Доказана

Теорема 12. *Пусть выполнены условия* α), β). *Тогда: 1) из полноты системы* $\{x_n\}_{n\in N}$ *в* $L_{p;\rho}(c,d)$ *следует полнота системы* $\{f_n\}_{n\in N}$ *в* $L_{p;\rho}(a,b)$*; 2) из минимальности* $\{f_n\}_{n\in N}$ *в* $L_{p;\rho}(a,b)$ *следует минимальность* $\{x_n\}_{n\in N}$ *в* $L_{p;\rho}(c,d)$, $p \geq 1$.

Справедлива также следующая

Теорема 13. *Пусть выполнены условия* α), β). *Тогда если* $\{x_n\}_{n\in N}$ *образует базис в* $L_{p;\rho}(c,d)$, $p \geq 1$ *и* $I_\beta^c[(c,d)]$ *содержит нетривиальный интервал (т.е.* $mes\, I_\beta^c[(c,d)] > 0$*), то* $\{f_n\}_{n\in N}$ *неминимальна в* $L_{p;\rho}(a,b)$.

Неожиданным результатом является следующий факт.

Теорема 14. *Пусть выполнены условия* α), β). и $r > 1$. *Тогда если* $\{x_n\}_{n\in N}$ *образует базис в* $L_{p;\rho}(c,d)$, *то система* $\{f_n\}_{n\in N}$ *неминимальна в* $L_{p;\rho}(a,b)$, $1 < p < +\infty$.

В 2.4 аналогичные утверждения доказываются относительно следующих систем функций

$$f_n^{\pm}(t) \equiv \sum_{k=1}^{r} \left[b_k^{(1)}(t) x_n^{+}(\omega_k(t)) \pm b_k^{(2)}(t) x_n^{-}(-\omega_k(t)) \right].$$

Непосредственное применение этих теорем позволяет получить следующее

Следствие 15. *Пусть* $a, b \in C -$ *произвольные ненулевые комплексные числа. Тогда каждая из систем* $\{s_n^-\}_{n \in N}$, $1 \cup \{s_n^+\}_{n \in N}$ *полна в* $L_p\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $p > 1$*; но хотя бы одна из них неминимальна в нем, где*

$$s_n^- = a \sin nt + b \sin n\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \; s_n^+ = a \cos nt + b \cos n\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю проф. Б.Т. Билалову за постановки задач и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Касумов Т.Б., Гараев Т.З. Критерии базисности дефектных систем в банаховых пространствах. Тезисы XII Международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летию со дня рождения действительного члена НАНА, заслуженного деятеля науки, профессора А.Д.Гаджиева. Баку, 2007, стр.87
2. Qasymov T.B., Garaev T.Z. On defective bases from the root elements of differential operators containing a spectral parameter in the boundary conditions. Trans. of NAS of Az., vol. XXVII, №1, 2007, pp. 51-54.

3. Qasymov T.B., Garayev T.Z. On necessary and sufficient conditions for obtaining the bases of Banach spaces. Proc. of IMM of NAS of Az. v.XXVI, 2007, pp.93-98.
4. Касумов Т.Б., Гараев Т.З. Об инвариантности базисных свойств систем в банаховых пространствах. Тезисы международного симпозиума «Современные проблемы математики, механики и информатики», Нахчыван, 2007, стр.52
5. Гараев Т.З. Об L_p аналоге «$1\backslash 4-$Кадеца». Тезисы межд. конф. по математике и механике, посв.50 летию ИММ НАН Аз., Баку, 2009, стр.98
6. Garayev T.Z. On the basicity of exponents in L_p. Proc. of IMM of NAS of Az., v.XXXI, 2009, pp.53-56.
7. Garayev T.Z. "Kadets ($1\backslash 4$) -theorem" and multipliers of type (p, p). Trans. of NAS of Az., vol. XXX, №4, 2010, pp. 55-60.
8. Мурадов Т.Р., Гараев Т.З. О мультипликаторах и P-аналоге теоремы «$\frac{1}{4}-$Кадеца». Естественные и технические науки, №4, 2010, стр. 16-23.
9. Гараев Т.З. Об одном P-аналоге теоремы «$1\backslash 4-$Кадеца». Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию акад. З.И.Халилова, Баку, 2011, с.89
10. Ismailov M.I. Garayev T.Z. Some Generalizations of Riesz-Fisher Theorem. Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 5, 2011, no. 37, 1803 – 1812.
11. Bilalov B.T., Garaev T.Z. On basis properties of function systems in Lebesgue spaces. American Journal of Mathematics and Statistics, Vol.2, No.6, November 2012.

TƏRLAN ZƏFƏR oğlu QARAYEV

DEFEKT BAZİSLƏR VƏ ONLARIN TƏTBİQLƏRİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi ümumilikdə Banax fəzalarında sonlu, eləcə də sonsuz defektə malik sistemlərin bazisliyi üçün şərtlərin və "$1\backslash 4-$-Kadets " teoreminin müəyyən L_p-analoqlarının tapılmasına həsr olunmuşdur.

Dissertasiyada alınan əsas nəticələr aşağıdakılardır:

- Banax fəzasında sonlu defektə malik sistemin bazisliyi üçün kriteriya tapılmışdır;

- Banax fəzasında sonsuz defektə malik sistemin bazisliyi üçün kafi şərtlər tapılmışdır;

-multiplikatorlar dilində həyəcanlanmış eksponent sistemə nəzərən "$1\backslash 4-$-Kadets" teoreminin L_p-analoqu tapılmışdır;

- multiplikatorlar dilində həyəcanlanmış sinus sistemlərinə nəzərən "$1\backslash 4-$-Kadets" teoreminin L_p-analoqu tapılmışdır ;

- həyəcanlanmış kosinus sistemlərinə nəzərən analoji nəticə alınmışdır;

-sinus-kosinus tipli sistemlərin çəkili Lebeq fəzalarında bazislik xassələri arasında əlaqələr verilmişdir.

TARLAN ZAFAR oglu GARAYEV

DEFECT BASES AND THEIR APPLICATIONS

SUMMARY

This thesis is devoted to finding conditions for basicity of systems with finite and infinite defects and definite L_p- analogues of "$1\backslash 4 -$ Kadets " theorem in Banach spaces .

The following results are obtained:

- the criterion for basicity of system with finite defect is obtained;

- a sufficient condition for basicity of system with infinite defect is obtained in Banach spaces;

- in the term of multiplicator the L_p- analogues of the theorem"$1\backslash 4 -$ Kadets " with respect to the perturbed system of exponents are obtained;

- in the term of multiplicator the L_p- analogues of the theorem" $1\backslash 4 -$ Kadets " with respect to the perturbed system of sines is found;

- the similar result is obtained for the perturbed cosines systems;

- the relationship between the basis properties of sines and cosines type systems in weighted Lebesgue space are obtained.