AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

RAFİQ AĞACAN OĞLU TEYMUROV

İSTİLİKKEÇİRMƏ TƏNLİYİ ÜÇÜN MƏNBƏLƏRİN HƏRƏKƏTİNİN OPTİMAL İDARƏ EDİLMƏSİ

1211.01 – Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2013

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Qeyri-harmonik analiz" şöbəsində** yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Bilal T.Bilalov**

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Nizaməddin Ş.İsgəndərov**
(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu);
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Hamlet F.Quliyev**
(Bakı Dövlət Universiteti).

Aparıcı təşkilat:
Azərbaycan Texniki Universiteti
«Riyaziyyat» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 22 fevral 2013-cü il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 21 yanvar 2013-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

РАФИГ АГАДЖАН оглы ТЕЙМУРОВ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1211.01 - Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку - 2013

Работа выполнена в отделе «Негармонический анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, проф. **Билал Т.Билалов**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, проф. **Низамеддин Ш.Искендеров**
(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана);
доктор физико-математических наук, проф. **Гамлет Ф.Гулиев**
(Бакинский Государственный Университет).

Ведущая организация:
Азербайджанский Технический Университет
кафедра «Математика».

Защита диссертации состоится 22 февраля 2013 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 21 января 2013 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В современном обществе для новейшей техники, имеющие дело с высокими энергиями, космическими скоростями, быстротекающими процессами, дорогостоящими установками и экспериментами, характерна потребность наиболее рационального использования ресурсов, выбора наилучшей возможной программы действий. Все это определило те проблемы, которые составили предмет теории оптимального управления. Проблемы управления реальными процессами в механике, технологии, экономике и других практических областях приводят к сложным задачам оптимального управления.

В последнее время проблемы оптимального управления систем, состояния которых описываются дифференциальными уравнениями, приобрели большое значение с теоретической и практической точек зрения. Теория оптимального управления в случае, когда математическая модель системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, с достаточной полнотой изложена в работах Л.С.Понтрягина, В.Г.Болтянского, Е.Ф.Мищенко, Р.В.Гамкрелидзе, В.И.Благодатских, В.М. Алексеева, В.М. Тихомирова, С.В. Фомина, А.Д.Иоффе, Р.Габасова, Ф.М.Кириллова, Э.Б.Ли, Л. Маркуса. Классические результаты теории оптимального управления распределенными системами содержатся в монографиях А.Г.Бутковского, А.И. Егорова , Ж.-Л. Лионса , Т.К.Сиразетдинова, Ф.П.Васильева , К.А.Лурье. , а также в работах В.А.Якубовича, В.И.Плотникова, А.В.Фурсиков, С.Я.Серовайского, А.Д.Искендерова, Г.Ф.Кулиева, Р.К.Тагиева, К.Р.Айда-заде, К.М.Мансимова, Б.Т.Билалова и Л.А.Муравья. и др. Созданная теория оптимального управления систем с распределенными параметрами находит свое применение к решению неклассических задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. К

неклассическим можно отнести задачи, для которых не доказано существование решения (сингулярные задачи), задачи, имеющие неединственное решение, задачи с неполными данными и др.

К неклассическим задачам также относятся задачи оптимального управления подвижными источниками для систем, описываемые дифференциальными уравнениями обыкновенных и в частных производных при начальных и граничных условиях. Изучение таких систем представляет практический интерес.

Впервые теоретическая постановка задачи оптимального управления подвижных источников для систем с распределенными параметрами была дана в работах А.Г.Бутковского и Л.М.Пустыльникова. В этих же работах были приведены многочисленные примеры систем с подвижными источниками различной физической природы и выявлены основные особенности систем с подвижным управлением, которые затрудняют или делают невозможным их исследования уже известными методами. Одной из основных особенностей систем оптимального управления подвижных источников является их нелинейность относительно управления, определяющего закон движения источника. Это особенно наглядно видно, если сформулировать задачу управления в терминах проблемы моментов. Проблема моментов становится нелинейной. Таким образом, метод моментов, который широко используется для отыскания оптимальных управлений в линейных системах с распределенными и сосредоточенными параметрами, становится непригодным для систем с управлением подвижных источников.

Кроме того в указанных практических примерах были рассмотрены только системы с распределенными параметрами. А во многих динамических системах приходится учитывать вспомогательные элементы, без которых невозможно управлять процессом. Эти элементы обычно имеют сосредоточенные параметры. Поведение таких систем описывается совокупностью дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных при начальных и граничных условиях.

В силу указанных выше особенностей, можно сделать вывод о том, что для возможности полноценного исследования систем с управлением подвижных источников недостаточно имеющихся методов. Возникает необходимость в разработке новых методов. Так как подвижные источники находят широкое применение на практике, разработка методов их исследования является актуальной задачей.

В настоящее время, ввиду сложности решения задачи оптимального управления подвижными источниками, состояние которых описываются дифференциальными уравнениями с частными производными и системами обыкновенными дифференциальными уравнениями, изучены недостаточно. Изложению теории таких задач, а также различных методов их решения посвящены ряд статей и монографий. Отметим в этом направлении работы Ж.Л.Лионса, А.Г.Бутковского, Л.М.Пустыльникова, В.А.Кубышкина , В.И Финягина и т.д.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию задачи оптимального управления подвижными источниками для систем, описываемые уравнением теплопроводности и системами обыкновенных дифференциальных уравнений, а также описываемые только уравнением теплопроводности. Изучены вопросы корректности и доказаны теоремы существования и единственности решения рассматриваемых задач. Получены достаточные условия дифференцируемости по Фреше целевого функционала и выражение для его градиента, установлены необходимые условия оптимальности в виде точечного и интегрального принципов максимума. Построены вычислительные алгоритмы для отыскания оптимальных управлений, доставляющих минимум функционалам. Приведена численная реализация ряда исследуемых задач и анализ численных расчетов.

Цель работы. Исследование задачи оптимального управления подвижными источниками для систем, состояние которых описываются совместно уравнениями теплопроводности и системами обыкновенных дифференциальных уравнений, а также состояние которых описываются только уравнением теплопроводности .

Научная новизна. В работе получены следующие основные результаты:

- изучены вопросы корректности задачи оптимального управления подвижными источниками;
- доказаны теоремы существования и единственности решения рассматриваемых задач;
- получены достаточные условия дифференцируемости по Фреше целевого функционала и выражение для его градиента;
- установлены необходимые условия оптимальности в виде точечного и интегрального принципов максимума;
- построены вычислительные алгоритмы для отыскания оптимальных управлений, доставляющих минимум функционалам,
- приведена численная реализация ряда исследуемых задач и анализ численных расчетов.

Методы исследования. В работе используются методы теории оптимального управления системами с сосредоточенными и распределенными параметрами, теории функционального анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории дифференциальных уравнений в частных производных и теории вычислительной математики.

Теоретическая и практическая ценность. **.** Результаты работы носят как теоретический, так и практический характер. Их можно использовать в теории оптимального управления. Предложенные в работе подходы могут применяться при решении конкретных задач, возникающих в математических моделях реальных процессов.

Апробации работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах «Негармонический анализ» (рук. д.ф.-м.н., проф.Б.Т.Билалов), «Математический анализ» (рук. д.ф.-м.н., проф. Р.М.Рзаев), «Функциональный анализ» (рук. д.ф.-м.н., проф.Н.Ш.Искендеров), на X Международной научной конференции , посвщ..45-летию ИММ НАНА (Баку, 2004 г.), Республиканской Научной Конференции «Прикладные задачи математики и новые информационные технологии» (Сумгаит, 2007 г.), на XI Международной научной конференции , посвщ..50-летию ИММ НАНА (Баку, 2009г.), на 4-ом Конгрессе Математиков Тюркского Общества Мира (г. Баку, 2011 г.), на IV Международной конференции имени академика И.И.Ляшко «Вычислительная и прикладная математика» (г.Киев, 2011г.), на XVI Республиканской научной конференции докторантов и молодых исследователей (г.Баку, 2011г.), на Третьей Международной конференции «Математическая физика и ее приложение» (г.Самара, 2012), на Международной конференции «Моделирование, управление и устойчивость» (Крым, г.Севастополь, 2012г.), на IV Международной конференции «Проблемы Кибернетики и Информатики»(PCI'2012) (г.Баку, 2012г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 18 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 70 наименований. Обьем диссертации 118 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения и трех глав. Во введении обосновывается актуальность темы диссертации,

сформулированы цели и задачи, требующие решения, показана научная новизна и практическая ценность исследований и дается краткий обзор работ, связанных с темой данной диссертации.

В **Главе I,** состоящая из пяти разделов, рассматривается вариационный метод решения задачи оптимального управления подвижных источников для систем, состояние которых описываются совокупностью уравнениями теплопроводности и системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

В 1.1 первой главе рассматривается следующая задача. Пусть состояние управляемого процесса описывается функциями $u(x,t)$ и $s(t)$. Будем предполагать, что внутри области $\Omega=\{(x,t): 0<x<l,\ 0<t\le T\}$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет следующему параболическому уравнению

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\sum_{k=1}^{n}p_k(t)\delta(x-s_k(t)), \qquad (1)$$

с граничными и начальным условиями

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\ \ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0,\ \ 0<t\le T, \qquad (2)$$

$$u(x,o)=\varphi(x),\ 0\le x\le l, \qquad (3)$$

где $a>0$ заданное число; $\varphi(x)\in L_2(0,l)$ -заданная функция; $\delta(\cdot)$ - функция Дирака; $p(t)=(p_1(t),p_2(t),...,p_n(t))\in L_2^n(0,T)$ - управляющая функция. Также будем предполагать, что функции $s_k(t)\in C[0,T], k=\overline{1,n}$, являются решением следующей задачи Коши

$$\frac{ds_k(t)}{dt}=f_k(s(t),\vartheta(t),t),\ 0<t\le T,\ s_k(o)=s_{k0},\ k=\overline{1,n}, \qquad (4)$$

где s_{k0} - заданное число; $\vartheta=\vartheta(t)=(\vartheta_1(t),\vartheta_2(t),...,\vartheta_r(t))\in L_2^r(0,T)$ - управляющая функция; функции $f_k(s(t),\vartheta(t),t)$ ($k=\overline{1,n}$) считаются известными и непрерывными вместе со своими частными производными по переменным s, ϑ при $(s,\vartheta,t)\in E^n\times E^r\times[o,T]$.

Пару функций $\overline{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t))$ будем называть управлением. Для краткости обозначим $H = L_2^n(0,T) \times L_2^r(0,T)$ - гильбертово пространство пар $\overline{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t))$ со скалярным произведением $< \overline{\vartheta}^1, \overline{\vartheta}^2 >_H = \int_0^T [p^1(t)p^2(t) + \vartheta^1(t)\vartheta^2(t)]dt$, и с нормой

$\|\overline{\vartheta}\|_H = \sqrt{(< \overline{\vartheta}, \overline{\vartheta} >_H)} = \sqrt{(\|p\|_{L_2}^2 + \|\vartheta\|_{L_2}^2)}$, где $\overline{\vartheta}^k = (p^k, \vartheta^k), k = 1,2.$

Положим

$$V = \{(p, \vartheta) \in H : 0 \le p_i \le A_i, |\vartheta_j| \le B_j, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,r}\},$$

и рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} J(\overline{\vartheta}) = \int_0^l [u(x,T) - y(x)]^2 dx + \alpha_1 \sum_{k=1}^n \int_0^T [p_k(t) - \widetilde{p}_k(t)]^2 dt + \\ + \alpha_2 \sum_{m=1}^r \int_0^T [\vartheta_m(t) - \widetilde{\vartheta}_m(t)]^2 dt, \end{aligned} \tag{5}$$

где $A_i > 0, i = \overline{1,n}$, $B_j > 0, j = \overline{1,r}$ - заданные числа; $\overline{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t)) \in H$; $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0, \alpha_1 + \alpha_2 > 0 -$ заданные параметры; $y(x) \in L_2(0,l)$, $\widetilde{p}(t) = (\widetilde{p}_1(t), \widetilde{p}_2(t), ..., \widetilde{p}_n(t)) \in L_2^n(0,T)$, $\widetilde{\vartheta}(t) = (\widetilde{\vartheta}_1(t), \widetilde{\vartheta}_2(t), ..., \widetilde{\vartheta}_r(t) \in L_2^r(0,T))$, $\omega = (\widetilde{p}(t), \widetilde{\vartheta}(t)) \in H$ - заданные функции.

Требуется найти такое управление $\overline{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t))$ из множества V и функции $u(x,t)$ и $s(t)$, чтобы функционал (5) принимал наименьшее возможное значение при ограничениях (1)-(4).

Задачу о нахождении функции $(u(x,t;\overline{\vartheta}), s(t;\vartheta))$ из условий (1)-(4) при заданном управлении $\overline{\vartheta} \in V$ назовем редуцированной задачей.

Определение 1. *Под обобщенным решением редуцированной задачи (1)-(4), соответствующей управлению* $\overline{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t)) \in H$, *понимается функция* $(u(x,t;\overline{\vartheta}), s(t;\vartheta))$ *из* $\left(V_2^{1,0}(\Omega), C[0,T]\right)$, *где функция* $u(x,t;\overline{\vartheta})$ *удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int_0^l \int_0^T \left[-u\eta_t + a^2 u_x \eta_x\right] dx dt = \int_0^l \varphi(x)\eta(x,0)dx + \sum_{k=1}^n \int_0^T p_k(t)\eta(s_k(t),t)dt,$$

для $\forall \eta = \eta(x,t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$ *и* $\eta(x,T) = 0$, *а функция* $s_k(t) = s_k(t;\vartheta)$ *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$s_k(t) = \int_0^t f_k(s(\tau), \vartheta(\tau), \tau)d\tau + s_{k0}, \quad 0 \le t \le T, k = \overline{1,n}.$$

Предполагается, что решение задачи (1)-(4) существует и единственно.

Приводится пример, который показывает, что решение задачи (1)-(5) при $\alpha = 0$, вообще говоря, неединственно и неустойчиво.

В 1.2 первой главы доказывается теорема существования и единственности решения задачи (1)-(5). При $\alpha_i > 0, i = \overline{1,2}$, имеет место

Теорема 1. *Существует плотное подмножество* K *пространства* H *такое, что для любого* $\omega \in K$ *при* $\alpha_i > 0, i = \overline{1,2}$, *задача (1)-(5) имеет единственное решение.*

В 1.3 первой главы с помощью функции Лагранжа найдено выражение для первой вариации функционала (5). Положим

$$L(u,p,\vartheta,\psi,q)=J(\overline{\vartheta})+$$
$$+\int_0^l\int_0^T\left[a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sum_{k=1}^n p_k(t)\delta(x-s_k(t))-\frac{\partial u}{\partial t}\right]\psi(x,t)dxdt+$$
$$+\sum_{k=1}^n\int_0^T q_k(t)\left[-f_k(s(t),\vartheta(t),t)+\frac{ds_k(t)}{dt}\right]dt,$$

где $\psi(x,t)$ и $q(t)$ множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (1) и (4). Будем предполагать, что функции $u(x,t),\psi(x,t)$ являются достаточно гладкими на $\overline{\Omega}=\{(x,t):0\le x\le l,\quad 0\le t\le T\}$, а функции $s(t),q(t)$ на $[0,T]$.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия, принятые в постановке задачи (1)-(5). Тогда функционал $J(\overline{\vartheta})=J(p,\vartheta)$ дифференцируем по Фреше и для первой вариации верна формула

$$\delta L=\sum_{k=1}^n\left\{\int_0^T[\psi(s_k(t),t)+2\alpha_1(p_k(t)-\widetilde{p}_k(t))]\delta p_k(t)dt+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^r\int_0^T\left[-\frac{\partial f_k(s(t),\vartheta(t),t)}{\partial\vartheta_m}\cdot q_k(t)+2\alpha_2(\vartheta_m(t)-\widetilde{\vartheta}_m(t))\right]\delta\vartheta_m(t)dt\right\}.$$

В 1.4 первой главы найдены достаточные условия дифференцируемости по Фреше функционала (5) и получено выражение для его градиента.

Пусть $\psi=\psi(x,t)$ является обобщенным решением из $V_2^{1,0}(\Omega)$ следующей сопряженной к (1)-(3) краевой задачи

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=0,\ \ (x,t)\in\Omega, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}=0,\ \ \frac{\partial\psi(l,t)}{\partial x}=0,\ \ t\in[0,T), \tag{7}$$

$$\psi(x,T)=2[u(x,T)-y(x)],\ \ x\in[0,\ell], \tag{8}$$

где $u(x,T)-$ значение при $t=T$ решение редуцированной задачи (1)-(4), и пусть $q_k(t)\in C[0,T],k=\overline{1,n}$ является решением следующей сопряженной к (4) задачи Коши

$$\frac{dq_k(t)}{dt}=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial s_k}q_i(t)+\frac{\partial\psi(s_k(t),t)}{\partial x}p_k(t),$$
$$0\le t<T,\ q_k(T)=0,\ k=\overline{1,n}. \tag{9}$$

Вводим функцию Гамильтона-Понтрягина задачи (1)-(6):

$$H(t,s,\psi,q,\overline{\vartheta})=-\left\{\sum_{k=1}^n\left[-f_k(s(t),\vartheta(t),t)q_k(t)+\psi(s_k(t),t)p_k(t)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\alpha_1\left(p_k(t)-\widetilde{p}_k(t)\right)^2\right]+\alpha_2\sum_{m=1}^r\left(\vartheta_m(t)-\widetilde{\vartheta}_m(t)\right)^2\right\},$$

где $\psi(s_k(t),t)\in V_2^{1,0}(\Omega)$ - значение при $x=s_k(t)$ решение сопряженной задачи (6)-(8) .

Предполагается выполнение следующих условий:

1) функции $f_k(s,\vartheta,t),k=\overline{1,n}$, непрерывны по совокупности своих аргументов вместе со своими частными производными по переменным s,ϑ при $(s,\vartheta,t)\in E^n\times E^r\times[0,T]$;

2) функции $f_k(s,\vartheta,t),\ \ f_{ks}=\dfrac{\partial f_k(s,\vartheta,t)}{\partial s},\ \ f_{k\vartheta}=\dfrac{\partial f_k(s,\vartheta,t)}{\partial\vartheta},k=\overline{1,n},$ удовлетворяют условию Липшица по s и ϑ, т.е.

$$\left|f_k(s+\Delta s,\vartheta+\Delta\vartheta,t)-f_k(s,\vartheta,t)\right|\le L(|\Delta s|+|\Delta\vartheta|),$$

$$\left|f_{ks}(s+\Delta s,\vartheta+\Delta\vartheta,t)-f_{ks}(s,\vartheta,t)\right|\le L(|\Delta s|+|\Delta\vartheta|),$$

$$\left|f_{k\vartheta}(s+\Delta s,\vartheta+\Delta\vartheta,t)-f_{k\vartheta}(s,\vartheta,t)\right|\le L(|\Delta s|+|\Delta\vartheta|),$$

при всех $(s_k+\Delta s_k, \vartheta+\Delta\vartheta, t)$, $(s_k, \vartheta, t) \in E^n \times E^r \times [0,T]$, где $L = const \geq 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1)-2). Тогда, если* $(\psi(x,t), q(t))$ *- решение из* $\left(V_2^{1,0}(\Omega), C[0,T]\right)$ *сопряженной задачи (6)-(9), то функционал (5) дифференцируем по Фреше на множестве* V *и для его градиента справедливо выражение*

$$J'(\overline{\vartheta}) = -\frac{\partial H}{\partial \overline{\vartheta}} \equiv \left(-\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}\right), \tag{10}$$

где

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, ..., \frac{\partial H}{\partial p_n}\right), \quad \frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \left(\frac{\partial H}{\partial \vartheta_1}, \frac{\partial H}{\partial \vartheta_2}, ..., \frac{\partial H}{\partial \vartheta_r}\right),$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = -\psi(s_k(t),t) - 2\alpha_1(p_k(t) - \widetilde{p}_k(t)), k = \overline{1,n},$$

$$\frac{\partial H}{\partial \vartheta_m} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k(s(t),\vartheta(t),t)}{\partial \vartheta_m} q_k(t) - 2\alpha_2(\vartheta_m(t) - \widetilde{\vartheta}_m(t)), m = \overline{1,r}.$$

Установлен принцип максимума.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия 1)-2). Тогда для оптимальности управления* $\overline{\vartheta}^* = (p^*, \vartheta^*) \in V$ *необходимо выполнение условия*

$$H(t, s^*, \psi^*, q^*, \overline{\vartheta}^*) = \max_{\overline{\vartheta} \in V} H(t, s^*, \psi^*, q^*, \overline{\vartheta}), \forall (x,t) \in \Omega, \tag{11}$$

где функции s^*, ψ^*, q^* *- соответственно решения задачи (4),(6)-(8) и (9) при* $\overline{\vartheta} = \overline{\vartheta}^* \in V$

Необходимые условия оптимальности (11), а также выражение градиента (10) известным образом ставится в основу вычислительных методов определения минимума функционала (5) на множестве V при условиях (1)-(4).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда для оптимальности управления* $\overline{\vartheta}^* = (p^*, \vartheta^*) \in V$ *необходимо выполнение условия*

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{n} \Big[\left(\psi^*(s_k^*(t),t) + 2\alpha_1(p_k^*(t) - \widetilde{p}_k(t)), p_k(t) - p_k^*(t)\right) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{r} \left(-\frac{\partial f_k(s^*(t), \vartheta^*(t), t)}{\partial \vartheta_m} q_k^*(t) + 2\alpha_2(\vartheta_m^*(t) - \widetilde{\vartheta}_m(t)), \vartheta_m(t) - \vartheta_m^*(t)\right)\Big] dt \geq 0,$$

для $\forall \overline{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t)) \in V$ *, где функции* ψ^*, q_k^* *- соответственно решения задачи (6)-(8) и (9) при* $\overline{\vartheta} = \overline{\vartheta}^*$.

В 1.5 второй главы рассматривается частные случаи в зависимости от вида функционала и функций $f_k(s(t), \vartheta(t), t)$.

В **Главе II** , состоящая из пяти разделов, рассматривается вариационный метод решения задачи оптимального управления подвижных источников для систем, состояние которых описываются уравнением теплопроводности.

В 2.1 второй главы рассматривается следующая задача. Пусть состояние управляемого процесса описывается функцией $u(x,t)$. Будем предполагать, что внутри области $\Omega = \{(x,t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет следующему параболическому уравнению

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^{n} p_k(t) \delta(x - s_k(t)), \tag{12}$$

с граничными и начальным условиями

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \ 0 < t \leq T, \tag{13}$$

$$u(x,o) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{14}$$

где $a>0$ заданное число; $\varphi(x)\in L_2(0,l)$ -заданная функция; $\delta(\cdot)$ - функция Дирака; $p(t)=(p_1(t),p_2(t),...,p_n(t))\in L_2^n(0,T)$, $s(t)=(s_1(t),s_2(t),...,s_n(t))\in L_2^n(0,T)$ - управляющие функции.

Пару функций $\vartheta=(p(t),s(t))$ будем называть управлением. Для краткости обозначим $H=L_2^n(0,T)\times L_2^n(0,T)$ - гильбертово пространство пар $\vartheta=(p(t),s(t))$ со скалярным произведением $<\vartheta^1,\vartheta^2>_H=\int_0^T[p^1(t)p^2(t)+s^1(t)s^2(t)]dt$, и с нормой

$$\|\vartheta\|_H=\sqrt{(<\vartheta,\vartheta>_H)}=\sqrt{(\|p\|_{L_2}^2+\|s\|_{L_2}^2)}, \text{ где } \vartheta^k=(p^k,s^k), k=1,2.$$

Положим

$$V=\{(p,\vartheta)\in H: 0\le p_i\le A_i, 0\le s_i\le B_i<l, i=\overline{1,n}\},$$

и введем в рассмотрение функционал

и

$$J(\vartheta)=\int_0^l\int_0^T[u(x,t)-\tilde{u}(x,t)]^2dxdt+\sum_{k=1}^n\Big\{\alpha_1\int_0^T[p_k(t)-\tilde{p}_k(t)]^2dt+$$
$$+\alpha_2\int_0^T[s_k(t)-\tilde{s}_k(t)]^2dt\Big\}, \qquad (15)$$

где $A_i>0, B_i>0, i=\overline{1,n}$ - заданные числа; $\alpha_1,\alpha_2\ge 0, \alpha_1+\alpha_2>0$ – заданные параметры; $\vartheta=(p(t),s(t))\in H$; $\tilde{u}(x,t)\in L_2(\Omega)$, $\omega=(\tilde{p}(t),\tilde{\vartheta}(t))\in H$, $\tilde{p}(t)=(\tilde{p}_1(t),\tilde{p}_2(t),...,\tilde{p}_n(t))\in L_2^n(0,T)$, $\tilde{s}(t)=(\tilde{s}_1(t),\tilde{s}_2(t),...,\tilde{s}_n(t))\in L_2^n(0,T))$ - заданные функции.

Требуется найти такое управление $\vartheta=(p(t),s(t))$ из множества V и функцию $u(x,t)$, чтобы функционал (15) принимал наименьшее возможное значение при ограничениях (12)-(14).

Задачу о нахождении функции $u(x,t)=u(x,t;\vartheta)$ из условий (12)-(14) при заданном управлении $\vartheta\in V$ назовем редуцированной задачей.

Решение задачи (12)-(14) при заданном управлении $\vartheta=(p(t),s(t))\in V$ понимается в обобщенном смысле, аналогично случаю (1)-(4). Предполагается, что решение задачи (12)-(14) существует и единственно.

В 2.2 второй главы доказывается теорема существования и единственности решения задачи (12)-(15). При $\alpha_i>0, i=\overline{1,2}$, имеет место

Теорема 6. *Существует плотное подмножество K пространства H такое, что для любого $\omega\in K$ при $\alpha_i>0, i=\overline{1,2}$, задача (12)-(15) имеет единственное решение.*

В 2.3 второй главы с помощью функции Лагранжа найдено выражение для первой вариации функционала (15). Положим

$$L(u,p,s,\psi)=J(\vartheta)+$$
$$+\int_0^l\int_0^T\left[a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\sum_{k=1}^n p_k(t)\delta(x-s_k(t))-\frac{\partial u}{\partial t}\right]\psi(x,t)dxdt,$$

где $\psi(x,t)$ - множитель Лагранжа, соответствующий ограничению (12). Будем предполагать, что функции $u(x,t),\psi(x,t)$ являются достаточно гладкими на $\overline{\Omega}=\{(x,t): 0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$.

Теорема 7 . *Пусть выполнены все условия, принятые в постановке задачи (12)-(15). Тогда функционал $J(\vartheta)=J(p,s)$ дифференцируем по Фреше и для первой вариации верна формула*

$$\delta L=\sum_{k=1}^n\Big\{\int_0^T[\psi(s_k(t),t)+2\alpha_1(p_k(t)-\tilde{p}_k(t))]\delta p_k(t)dt+$$
$$+\int_0^T\left[\frac{\partial\psi(s_k(t),t)}{\partial x}p_k(t)+2\alpha_2(s_k(t)-\tilde{s}_k(t))\right]\delta s_k(t)dt\Big\}.$$

В 2.4 второй главы найдены достаточные условия дифференцируемости по Фреше функционала (15) и получено выражение для его градиента, установлены необходимые условия оптимальности в виде точечного и интегрального принципов максимума.

Пусть $\psi = \psi(x,t)$ - решение из $V_2^{1,0}(\Omega)$ сопряженной к (12)-(14) задачи

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = -2[u(x,t) - \tilde{u}(x,t)],\ (x,t) \in \Omega, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \psi(0,t)}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial \psi(l,t)}{\partial x} = 0,\ t \in [0,T), \tag{17}$$

$$\psi(x,T) = 0,\ x \in [0,\ell]. \tag{18}$$

Вводится функция Гамильтона-Понтрягина задачи (12)-(15):

$$H(t,\psi,\vartheta) = -\sum_{k=1}^{n} \left[\psi(s_k(t),t) p_k(t) + \alpha_1 \left(p_k(t) - \tilde{p}_k(t) \right)^2 + \alpha_2 \left(s_k(t) - \tilde{s}_k(t) \right)^2 \right],$$

где $\psi(s_k(t),t) \in V_2^{1,0}(\Omega)$ - значение при $x = s_k(t)$ решение сопряженной задачи (16)-(18).

Теорема 8. *Если $\psi(x,t)$ - решение сопряженной задачи (16)-(18), то функционал (15) дифференцируем по Фреше на множестве V и для его градиента справедливо выражение*

$$J'(\vartheta) = \left(\frac{\partial J(\vartheta)}{\partial p}, \frac{\partial J(\vartheta)}{\partial s} \right) = \left(-\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial s} \right), \tag{19}$$

где

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right),\quad \frac{\partial H}{\partial s} = \left(\frac{\partial H}{\partial s_1}, \frac{\partial H}{\partial s_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial s_n} \right),$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = -\psi(s_k(t),t) - 2\alpha_1 \left(p_k(t) - \tilde{p}_k(t) \right),$$

$$\frac{\partial H}{\partial s_k} = -\frac{\partial \psi(s_k(t),t)}{\partial x} p_k(t) - 2\alpha_2 \left(s_k(t) - \tilde{s}_k(t) \right), k = \overline{1,n}.$$

Установлен принцип максимума.

Теорема 9. *Пусть $\psi^*(x,t)$ – решения задачи (16)-(18) при $\vartheta = \vartheta^* \in V$. Тогда для оптимальности управления $\vartheta^* = (p^*(t), s^*(t)) \in V$ необходимо выполнение условия*

$$H(t,\psi^*,\vartheta^*) = \max_{\vartheta \in V} H(t,\psi^*,\vartheta),\ \ \forall (x,t) \in \Omega. \tag{20}$$

Необходимые условия оптимальности (20), а также выражение градиента (19) известным образом ставится в основу вычислительных методов определения минимума функционала (15) на множестве V при условиях (12)-(14).

Теорема 10. *Для оптимальности управления $\vartheta^* = (p^*(t), s^*(t)) \in V$ необходимо выполнение условия*

$$< J'(\vartheta^*), \vartheta - \vartheta^* >_H = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \Big\{ \left[\psi^*(s_k^*(t),t) + 2\alpha_1 \left(p_k^*(t) - \tilde{p}_k(t) \right) \right] \left(p_k(t) - p_k^*(t) \right) +$$

$$+ \left[\frac{\partial \psi^*(s_k^*(t),t)}{\partial x} p_k^*(t) + 2\alpha_2 \left(s_k^*(t) - \tilde{s}_k(t) \right) \right] \left(s_k(t) - s_k^*(t) \right) \Big\} dt \geq 0,\ \forall \vartheta \in V,$$

для $\forall \vartheta = (p(t), s(t)) \in V$. Здесь $\psi^*(x,t)$ является решением сопряженной задачи (16)-(18) при $\vartheta = \vartheta^* = (p^*(t), s^*(t))$.

В 2.5 второй главы рассматриваются частные случаи в зависимости от вида функционала.

В **Главе III** , состоящая из двух разделов, рассматривается численные решения задачи оптимального управления подвижными источниками, разрешимость которых исследована в первой и второй главах. Численная реализация проведена с использованием конечно-разностных методов. Приведены в виде таблицы численные результаты расчетов и сделана сравнительный анализ полученных результатов.

В заключение, выражаю глубокую благодарность научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Б.Т.Билалову за постоянное внимание к работе и сделанные ценные замечания.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Теймуров Р.А. Оптимальное управление движением источников в распределенных системах. //X Международная конференция по математике и механике, посвященной 45-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана (г.Баку, 5-7 май 2004). Институт Математики и Механики НАН Азербайджана,2004. -С.150.
2. Рзаев Т.Г., Талыбов Э.Г., Теймуров Р.А. Идентификация процесса осушки и оптимальное управление распределением нагрузок между технологическими линиями в установках осушки газа. //РАН, «Автоматика и телемеханика», М.:Наука, №11, 2005. -С.179-186.
3. Теймуров Р.А., Джалалов М.Д. Об одной задаче оптимального управления подвижными источниками в распределенных системах. //Научные и педагогические известия Университета Одлар Йурду, сер. математика, техника и естественные науки, 2005, №14. -С.162-166.
4. Теймуров Р.А. Оптимальное управление движением источников в распределенных системах. //Республиканская Научная Конференция «Прикладные задачи математики и

новые информационные технологии» (Сумгаит,26-27 ноября 2007). Сумгаитский Государственный Университет,2007. -С.74.
5. Теймуров Р.А. Оптимальное управление подвижными источниками в распределенных системах. // XI Международная конференция по математике и механике, посвященной 50-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана (г.Баку, 6-8 май 2009). Институт Математики и Механики НАН Азербайджана,2009. -С.290.
6. Teymurov R.A. On existence and uniqueness of solution of moving sources optimal control problem. //Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Azerbaijan, 2009, vol. XXXI(XXXIX), pp.219-224.
7. Bilalov B.T., Teymurov R.A. Necessary conditions of optimality in a distributed parameters system. // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Azerbaijan, 2010, vol. XXXII(XL), pp.91-100.
8. Теймуров Р.А. Необходимые условия оптимальности для систем с подвижными источниками. //Международная конференция «Спектральная теория и ее приложения», посвященной 80-летнему юбилею академика Ф.Г.Магсудова (г.Баку, 17-19 май 2010г.). Институт Математики и Механики НАН Азербайджана ,2010. -С.326-328.
9. Teymurov R.A. Optimal control of a class of distributed parameter systems with moving sources. // The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS), Baku, Azerbaijan, 5-7 july, 2011,pp.402.
10. Теймуров Р.А. Задача управления подвижными источниками для параболического уравнения. // IV Международная конференция имени академика И.И.Ляшко «Вычислительная и прикладная математика». (Киев, 9-10 сентября 2011г.). Киевский Национальный Университет им. Т.Шевченко,2012. –С.134-136.
11. Билалов Б.Т., Теймуров Р.А. Оптимальное управление подвижных источников для параболического уравнения. // Доклады НАН Азербайджана. T.LXVII, №3, 2011. -С.3-8.

12. Teymurov R.A. Paylanmış parametrli sistemlərdə hərəkət edən mənbələrin optimal idarə edilməsi məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi. //Doktorantların və gənc tədqiqatçıların XVI RESPUBLİKA ELMİ KONFRANSI (Bakı, 21-22 dekabr 2011-ci il).-AMİ, 2011. -S.16-18.
13. Теймуров Р.А. Задача оптимального управления подвижными источниками для уравнений теплопроводности. //Известия Высших Учебных Заведений. Северо-Кавказский Регион. Естественные науки. 2012, № 4. -С.17-20.
14. Теймуров Р.А. Оптимальное управление процессами, описываемыми сингулярным уравнением теплопроводности. //Третья Международная конференция «Математическая физика и ее приложение» (г.Самара, Россия, 27 августа - 02 сентября 2012). Самарский Государственный Технический Университет,2012. –С.291-292.
15. Teymurov R.A. О задаче оптимального управления подвижными источниками для процессов теплопроводности. //Международная конференция «Моделирование, управление и устойчивость» (Крым, Севастополь, 10-14 сентября 2012). Таврический Национальный Университет им.В.И.Вернадского,2012. С.101-103.
16. Teymurov R.A. The problem of optimal control of moving sources for systems with distributed parameters. // IV Международная конференции «Проблемы кибернетики и информатики» (PCI'2012) (г.Баку, 12-14 сентября 2012г.). Институт Информационных Технологий НАН Азербайджана, 2012. -С.44-46.
17. Теймуров Р.А. Необходимые условия оптимальности в задачах управления с подвижными источниками. //Доклады НАН Азербайджанской Республики. Т.LXVIII, №4, 2012. -С.10-15.
18. Teymurov R.A. Study of one class problems of optimal control by moving sources in systems with the distributed parameters. //Transaction of Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Azerbaijan, 2012 г.,vol.XXXIIII(XL), pp.52-61.

RAFİQ AĞACAN oğlu TEYMUROV

İSTİLİKKEÇİRMƏ TƏNLİYİ ÜÇÜN MƏNBƏLƏRİN HƏRƏKƏTİNİN OPTİMAL İDARƏ EDİLMƏSİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi vəziyyəti istilikkeçirmə tənliyi və adi diferensial tənliklər sistemi ilə, eləcə də vəziyyəti yalnız istilikkeçirmə tənliyi ilə təsvir olunan idarəetmə sistemlərində hərəkət edən mənbələrin optimal idarə edilməsi məsələlərinin həllinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiya işində alınan əsas nəticələr aşağıdakılardır:

- hərəkət edən mənbələrin optimal idarə edilməsi məsələlərinin həllinin korrektliyi tədqiq edilmişdir;
- baxılan optimal idarəetmə məsələlərinin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir;
- məqsəd funksionalının Freşe mənada diferensiallanması üçün kafi şərtlər və onun qradiyenti üçün düsturlar alınmışdır;
- optimallıq üçün nöqtəvi və maksimum prinsipi şəklində zəruri şərtlər təyin edilmişdir;
- hərəkət edən mənbələrin optimal idarə edilməsi məsələlərinin ədədi həll alqoritmləri qurulmuşdur;
- tədqiq olunan məsələlərin ədədi həlləri tapılmış və onların müqayisəli analizi aparılmışdır.

RAFİG AGACAN oqlu TEYMUROV

OPTIMAL CONTROL OF MOVING SOURCES FOR HEAT EQUATION

SUMMARY

Dissertational work is devoted by the solution of a problem of optimal control of moving sources for the systems which condition are described by the heat equations and systems of the ordinary differential equations, also which condition are described only by the heat equation. The following results are obtained:

- questions of a correctness of the problem of optimal control of the moving sources are studied;
- theorem on existence and uniqueness of the solution the problems of considering optimal control ;
- sufficient conditions of Frechet differentiability of purpose functional and an expression for its gradient is obtained;
- necessary conditions of optimality in the form of point wise and integral maximum principles is established ;
- numerical solution algorithms the problems of optimal control of the moving sources are builted;
- numerical solution of the investigation problems are obtained and their comparative analysis have been carried.