

**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ  
BAKİ DÖVLƏT UNİVERSİTETİ**

---

*Əlyazması hüququnda*

**Günəl Akif qızı Gülməmmədova**

**ƏHALİNİN PUL VƏ MATERİALLAR YİĞİMİ  
MODELLƏRİNİN ANALİZİNDƏ RİYAZİ  
İNSTRUMENTARİLƏR**

İxtisas: 5302.01 – Ekonometriya

iqtisad üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi  
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

**A V T O R E F E R A T I**

Bakı – 2013

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ  
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

---

*На правах рукописи*

**Гюнель Акиф кызы Гюльмамедова**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИНСТРУМЕНТАРИИ В АНАЛИЗЕ  
ДЕНЕЖНЫХ И МАТЕРИАЛЬНЫХ НАКОПЛЕНИЙ**

Специальность: 5302.01 – «Эконометрия»

**A B T O P E F E R A T**

диссертации на соискание ученой степени  
доктора философии по экономике

Баку – 2013

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математической экономики» Бакинского Государственного Университета

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор **Э.Г. Оруджев**

**Официальные оппоненты:** доктор экономических наук, профессор **Н.Ф. Тагиев**

доктор философии по экономике,  
**Н.М. Бахышов**

**Ведущая организация:** **Отдел «Моделирования социально-экономических процессов» Института Кибернетики НАНА**

Защита состоит «28» января 2014 г. в 11<sup>00</sup> часов на заседании Диссертационного Совета FD 02.016 по присуждению ученой степени доктора философии при Бакинском Государственном Университете.

**Адрес:** AZ1148, Баку, ул 3.Халилова, 23

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Бакинского Государственного Университета

Автореферат разослан « 25 » декабря 2013 г.

**Ученый секретарь**  
диссертационного совета **FD 02.016**,  
доктор математических наук,  
профессор

**Н.Г. Ахмедов**

**MATHEMATICAL TOOLS IN ANALYSIS OF  
MODELS OF MONEY AND MATERIAL ACCUMULATIONS**

**SUMMARY**

In dissertation there are investigated distributions of the money income of the population among various groups of economically active population and there are studied the mixed problem for the equations of money and material accumulations at various assumptions concerning distribution parameters applicable to the Azerbaijani social economy. There are received the following important scientific results with practical applications:

- econometric models for the income of the population of Azerbaijan are constructed and checked the adequacy of such models to statistical data;

- uneven incomes of the population are analyzed, index Gini is calculated, Lorentz's curve is constructed, the analysis of expenses of certain groups of the population is carried out, data processing in a MS Excel package is carried out;

-  $\beta$ -coefficients, particular coefficients of elasticity and correlation on causing factors are calculated, the analysis of dynamics of poverty level is carried out;

- the new adequate mathematic-econometric technique of the analysis of money and material accumulations of the population is created;

- existence of solutions of the mixed problems for the equations of money and material accumulations in spaces of finite and infinite accumulations is proved;

- obvious representation of solutions of the mixed problems of money and material accumulations are constructed and the interpretations of the received results for the financial, social and economic analysis and forecasting of the studied social and economic phenomena are given.

**Актуальность темы исследования.** В показателях уровня жизни в значительной мере отражается эффективность деятельности государства в области социальной политики. Одним из основных показателей уровня жизни являются денежные доходы населения. В экономически развитых странах политика в области доходов населения является главнейшим элементом регулирования процессов социально-экономического развития. Без решения проблем в области политики доходов населения невозможно решить основополагающую проблему будущего страны - народосбережения.

Государству, для проведения успешной политики в области денежных доходов населения, необходимо иметь систему управления и регулирования, в которой поведение денежных доходов населения увязывалось бы с поведением макроэкономических показателей. В свою очередь, система управления и регулирования денежных доходов населения должна базироваться на системе измерения и прогнозирования этих доходов, основанной на соответствующей методологии, моделях и средствах, в которых учитывается поведение макроэкономических показателей.

Важным направлением решения этих проблем является разработка методологических подходов, моделей, математических методов и инструментальных средств решения задач прогноза показателей распределения населения по уровню денежных доходов, их дифференциации и поляризации. Решение проблем взаимосвязи этих прогнозных показателей с показателями макроэкономики обосновывает возможность управления денежными доходами населения на уровне макроэкономических показателей и, следовательно, определяет их важность для оценки перспектив социально-экономического развития страны. Из сказанного вытекает, что тема диссертации является своевременной и актуальной.

**Степень разработанности проблемы.** Методы моделирования распределения доходов населения разрабатывались и использовались в многочисленных работах ученых-математиков, экономистов.

Число исследований, посвященных изучению прогнозных показателей распределения и дифференциации доходов населения и опирающихся на современные методы количественного анализа, неоправданно мало. На сегодняшний день представлены лишь единичные попытки математико-статистических исследований, всесторонне и комплексно рассматривающие, применительно к азербайджанской социальной экономике, проблемы прогноза и эволюции факторов, определяющих влияние внешней среды, в том числе и динамики макропоказателей, на показатели распределения и дифференциации денежных доходов населения.

Актуальность и недостаточная разработанность проблемы предопределили цели и задачи диссертационной работы.

**Цель и задачи исследования.** Целью исследования является: разработка теоретико – методологических, математико-статистических подходов, математико-компьютерной и эконометрических моделей и методов прогноза распределения населения; определение влияния основных макроэкономических факторов на динамику процессов формирования и механизмов регулирования прогнозных показателей распределения денежных и материальных накоплений населения применительно к азербайджанской экономике и оценке перспектив развития этих процессов.

Для достижения этой цели были сформулированы следующие задачи:

1. Разработать математико-статистический, эконометрический и компьютерный подход решения проблем прогноза параметров распределения населения по уровню денежных доходов, денежных и материальных накоплений включающий систему математических моделей в виде смешанных задач для дифференциальных уравнений параболического типа с нелокальными краевыми условиями.

2. Проанализировать статистические расчёты и провести анализ доходов и расходов определенных групп населения Азербайджана по данным Государственного Комитета по статистике, построить эконометрические модели зависимости между расходом на питание и доходом ансамбля семей по

**GÜNEL AKİF qızı GÜLMƏMMƏDOVA**

## **ƏHALİNİN PUL VƏ MATERIALLAR YIĞIMI MODELLƏRİNİN ANALİZİNDƏ RİYAZİ İNSTRUMENTƏRİLƏR**

### **XÜLASƏ**

Dissertasiya işində Azərbaycan sosial iqtisadiyyatına nümunədə müxtəlif iqtisadi aktiv əhali qruplarının pul gəlirlərinin paylanması tədqiq edilmişdir, aylanma parametrlərinə nəzərən müxtəlif şərtlərlə əhalinin pul və materiallar yığımları tənlikləri üçün qarışıq məsələlər öyrənilmişdir. Praktiki əhəmiyyətli aşağıdakı mühüm elmi nəticələr alınmışdır:

- Azərbaycan Respublikasının əhalisinin gəlirlərinin ekonometrik modelləri qurulmuş, bu modellərin statistik verilənlərinə nəzərən adekvatlığı yoxlanılmışdır;

- Əhalinin pul gəlirlərinin qeyri-bərabər paylanması təhlil edilmiş, Cini indeksi hesablanmış, Lorents əyrisi qurulmuş, müəyyən qrup əhalinin xərclərinin thlii aparılmış, MS Excel proqram paketində verilənlərin emalı həyata keçirilmişdir;

- B-əmsallar, xüsusi elastiklik əmsalları və korrelyasiya əmsalları səbəbiyyət faktorlarına nəzərən hesablanmış, yoxsulluq səviyyəsinin dinamikasının təhlili aparılmış;

- əhalinin pul və materiallar yığımının analizi üçün yeni riyazi-ekonometrik yanaşma üsulu yaradılmışdır;

- sonlu və sonsuz yığım fəzalarında pul və materiallar yığımları tənliyi üçün qoyulmuş qarışıq məsələlərin həllinin varlığı isbat edilmişdir;

- pul və materiallar yığımları üçün qoyulmuş sərhəd məsələlərin həllinin aşkar göstərilişi verilmiş, alınan nəticələrin maliyyə, sosial-iqtisadi analizdə və öyrənilən sosial-iqtisadi proseslərin proqnozlaşdırılmasında interpretasiyaları verilmişdir.

3. Гюльмамедова Г.А. Сравнительный анализ денежных и материальных накоплений // Актуальные проблемы экономики, Киев, 2012, № 12(138), с. 322-327.

4. Гюльмамедова Г.А. Статистические расчеты и анализ доходов и расходов определенных групп населения Азербайджана // *Beynəlxalq hüquq və inteqrasiya problemləri elmi-analitik və praktiki jurnal*, Bakı, 2013, № 2, s.156-171.

5. Оруджев Э.Г., Гюльмамедова Г.А. Анализ неравномерности распределения доходов и расходов определенной группы населения Азербайджана // *Beynəlxalq hüquq və inteqrasiya problemləri elmi-analitik və praktiki jurnal*, Bakı, 2013, № 3, s. 104-116.

6. Оруджев Э.Г., Гюльмамедова Г.А. Классическое решение одной смешанной задачи для уравнений денежных накоплений/ Тезисы второй международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», Минск, 2009, с.159-161.

7. Оруджев Э.Г., Гюльмамедова Г.А. О первой смешанной задаче на полубесконечном пространстве накоплений/ Материалы международной научной конференции, посвященные 90-летию Бакинского Государственного Университета, Баку, 2009, с. 112-114.

8. Оруджев Э.Г., Гюльмамедова Г.А. О решении одной задачи денежных и материальных накоплений / Материалы XIII международной научной конференции им. Акад. М. Кравчука, Киев, 2010, с.305-306.

9. Оруджев Э.Г., Гюльмамедова Г.А. О смешанных задачах для уравнения денежных и материальных накоплений// Доклады НАН Азербайджана, 2011, T.LXVII, № 2. Баку, Изд. «ЭЛМ», с. 14-19.

10. Оруджев Э.Г., Гюльмамедова Г.А. О смешанных задачах на конечном пространстве накоплений // Актуальные проблемы экономики, 2011, № 11(125), с. 431-441.

11. Оруджев Э.Г., Гюльмамедова Г.А. О существовании и единственности решений некоторых смешанных задач для уравнения денежных накоплений// Вестник Бакинского Университета, 2009, № 4, с. 10-18.

12. Оруджев Э.Г., Гюльмамедова Г.А. Эконометрический анализ объема вкладов с помощью модели авторегрессии (AR) в Excel // *Journal of Contemporary Applied Mathematics*, 2013, vol 3, p.13-20.

количеству членов. Вычислить –  $\beta$ -коэффициенты, частный коэффициент эластичности и корреляции по обуславливающим факторам и дать соответствующие экономические выводы для изменений этих коэффициентов.

3. Провести экономико-статистический анализ неравномерности распределения доходов и расходов определенных слоев населения Азербайджана, располагая выборкой по статистическим данным социальных показателей доходов и расходов.

4. По данным Государственного Комитета по статистике Азербайджана изучить и решить задачи сбережений населения. Найти прогнозные значения движения изучаемых показателей во времени, на основе построенных новых моделей.

5. Доказать существование и единственность решения смешанных задач на конечных и бесконечных отрезках для модельных денежных уравнений накопления, уравнений денежных и материальных накоплений населения, получить явное представление решений этих смешанных задач, показать эффективность применения спектральных методов дифференциальных уравнений при решении социально-экономических модельных задач, при оценке прогнозных характеристик изучаемых социально-экономических показателей в будущем.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Различные вопросы, связанные с изучением денежных и материальных накоплений населения интенсивно изучались впоследствии вплоть до настоящего времени. Теоретической основой исследований, выполненных в диссертации, послужили положения экономической теории измерения доходов населения, представленные в работах исследователей по проблемам измерения прогнозных показателей распределения и дифференциации денежных доходов населения. Методологической базой экономико-математического анализа и моделирования процессов распределения доходов и расходов населения, денежных и материальных накоплений в диссертации явились результаты исследований и разработок ученых. В общеэкономическом контексте проблемы влияния конечного потребления домашних хозяйств на процессы и темпы

воспроизводства ВВП в той или иной форме прослеживаются в трудах крупнейших западных экономистов - теоретиков: Кейнса Д.М., Самуэльсона П.А., Леонтьева В.В. и др. Методам расчета показателей распределения населения по уровню доходов и дифференциации доходов посвящены работы: Римашевской Н.М. и Рабкиной Н.Е., Шевякова А.Ю. и Кируты А.Я., Жеребина В.М. и Романова А.Н., Волковой Г.И. и Миграновой Л.А., Чернавского Д.С., Попкова Ю.С., Рахимова А.Х., Ерофеенко В.Т., Козловской И.С., Оруджева Э.Г. и Гайфутдиновой А.Р., Ефимовой М.Р. и Бычковой С.Г. и др. Определенное развитие получил инструментарий вычисления распределения населения по доходу, связанный с исследованиями и опубликованными в методологических положениях по статистике научных работах Соколина В.Л., Фроловой Е.Б. и Великановой Т.Б.

Различные модификации экономических теоретических моделей, которые фокусируются на проблемах распределения денежных доходов населения, представлены в работах: Калечки М., Аткисон Дж. и Браун Дж.А.К., Лерман Р.И. и Йитчаки Ш., Ланге О., Райцина В.Я., Деева Г.И., Ершова Э. Б. и Майера В.Ф., Суворова А.В. и др.

**Методы исследования в диссертации.** В представленной диссертации иллюстрируется возможность применения некоторых эконометрико-математических, спектральных методов для решения моделей социально-экономических процессов, использующих модели регрессии и уравнения с частными производными и учитывающие случайные факторы, характерные для таких явлений. Это позволяет провести качественный финансово-экономический анализ и прогнозировать развитие изучаемого процесса в будущем. Так, что для успешной работы на финансовых рынках и социально-экономического анализа, аналитикам, кроме опыта, необходимо обладать соответствующими математическими и статистико-эконометрическими знаниями, чтобы принимать обоснованные решения на минимальном уровне риска. Опасность принять решение, которое повлечёт финансовые потери в будущем, требует статистического анализа, эконометрических рассуждений, достаточно серьёзных математических обоснований такого решения. Поэтому

центрами в нулях  $\Delta_1(\lambda)$  и  $\Delta_2(\tau)$ , суммы по  $\nu$  и по  $k$  распространены на все полюсы этих функций.

В **заключении** диссертационной работы сформулированы выводы, наиболее значимые из которых следующие:

1. В Азербайджанской Республике совокупные доходы, получаемые всем населением, придерживаются для разных слоев в определенных промежутках. Даны оценки границ интервала;
2. Предложены соответствующие рекомендации для прогнозной оценки параметров распределения доходов и расходов изучаемой группы населения. Даны рекомендации касательно того, что социальная политика государства в области выравнивания доходов должна быть дополнена мощными инструментами, позволяющими не только уменьшить разрыв между самыми богатыми и самыми бедными, но и поднять среднедушевой доход самых бедных. Для этой цели следует продолжить разработку комплекса государственных программ, внедрение которых помогут сократить количество бедных и уменьшить разрывы между этими слоями населения.
3. Создана новая адекватная математико-эконометрическая методика анализа денежных и материальных накоплений населения.
4. Доказано существование решений смешанных задач для уравнений денежных и материальных накоплений в пространствах конечного и бесконечного накопления.
5. Построены явные представления решений смешанных задач денежных и материальных накоплений и даны интерпретации полученных результатов для финансового, социально-экономического анализа и прогнозирования изучаемых социально-экономических явлений.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих научных работах:

1. Гюльмамедова Г.А. Исследование уравнений денежных накоплений с нелокальными краевыми условиями / Bakı Dövlət Universitetinin 90 illik yubileyinə həsr olunmuş “Riyaziyyatın tətbiqi problemləri” elmi konfransının materialları, Bakı, 2009, s.78-83.
2. Гюльмамедова Г.А. О решении одной смешанной задачи для уравнения денежных накоплений/ “Riyaziyyatın tətbiqi problemləri” elmi konfransının materialları, Bakı, 2010, s. 41-43.

$\frac{b}{2}Y''(y) - c_2Y'(y) - \lambda^2 X(y) = h_2(y), \quad L_V^2(Y) = 0, \nu = \overline{1, 2};$  где

$h_1(x), h_2(y)$  - непрерывно дифференцируемые функции и задачей Коши

$$\frac{2}{b} \frac{\partial Z(x, y, t, \lambda, \tau)}{\partial t} - (\lambda^2 + \tau^2)Z(x, y, t, \lambda, \tau) = f(x, y, t),$$

$$Z(x, y, 0, \lambda, \tau) = \varphi(x, y).$$

**Теорема 3.** Предположим, что выполняется одно из условий

$$1) \alpha_{11}\beta_{21} - \beta_{11}\alpha_{21} \neq 0, \gamma_{11}\delta_{21} - \delta_{11}\gamma_{21} \neq 0;$$

$$2) \alpha_{11}\beta_{21} - \beta_{11}\alpha_{21} = 0, \gamma_{11}\delta_{21} - \delta_{11}\gamma_{21} = 0,$$

$$\beta_{11}\alpha_{20} - \alpha_{11}\beta_{20} \neq 0, \delta_{11}\gamma_{20} - \gamma_{11}\delta_{20} \neq 0;$$

$$3) \alpha_{11} = \beta_{11} = \alpha_{21} = \beta_{21} = 0, \alpha_{10}\beta_{20} - \beta_{10}\alpha_{20} \neq 0,$$

$$\gamma_{11} = \delta_{11} = \gamma_{21} = \delta_{21} = 0, \gamma_{10}\delta_{20} - \delta_{10}\gamma_{20} \neq 0$$

и функции  $f'_x(x, y, t), f'_y(x, y, t)$  обращаются в нуль на концах  $[0, a], [0, b]$  соответственно, функция  $\varphi(x, y)$  имеет непрерывные производные по  $x$  и  $y$  до 4-го порядка, причем производные по  $x$  и  $y$  до 3-го порядка, обращаются в нуль на концах интервала  $[0, a]$  и  $[0, b]$  соответственно, кроме того, решение задачи Коши ограничено на собственных значениях спектральных задач. Тогда смешанная задача (13)-(15) имеет единственное классическое решение, представимое формулой

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{\nu, c_\nu} \int_0^a \lambda d\lambda \int_0^b G_1(x, \xi, \lambda) d\xi \sum_{k, \tilde{c}_k} \int_0^b \tau d\tau \int_0^b G_2(y, \eta, \tau) Z(t, \xi, \eta, \lambda, \tau) d\eta,$$

$$\text{где } G_1(x, \xi, \lambda) = \frac{\Delta_1(x, \xi, \lambda)}{\Delta_1(\lambda)} \quad \text{и} \quad G_2(y, \eta, \tau) = \frac{\Delta_2(y, \eta, \tau)}{\Delta_2(\tau)}$$

функции Грина вышенаписанных спектральных задач,  $c_\nu, \nu = 1, 2, \dots, \tilde{c}_k, k = 1, 2, \dots$  достаточно малые окружности с

проблематика данного исследования является очень актуальной и для исследователей, и для финансовых аналитиков, социологов, экономистов. Для современного Азербайджана данная проблематика особо актуальна, поскольку здесь в условиях бурной конкуренции поставленные задачи имеют непосредственное влияние на качество социально-экономического анализа. Учитывая, что в диссертации целью является изучение математико-эконометрических моделей денежных и материальных накоплений населения, доказательство существования решений, нахождение представления для решений, исследование её поведения при различных управляющих воздействиях, что позволит проводить качественный социально-финансовый анализ спектра накоплений общества и предсказать развитие исследуемого процесса, что подтверждает особую значимость изучаемых в диссертации задач в экономико-финансовом анализе, так, что можно увидеть особую актуальность данного исследования для финансовых аналитиков и социологов. Стремление развития прогностики в социально-экономических сферах потребует новых подходящих эффективных математико-нормативных методов в прогнозировании, затронутых в диссертации направлений исследования.

Построением и изучением моделей денежных накоплений населения исследователи занимаются сравнительно недавно. Толчком к этому послужило исследование Чернавского Д.С., Попкова Ю.С., Рахимова А.Х., в котором построена математическая модель спектра накоплений общества, исследовано её поведение при различных управляющих воздействиях, результаты которого применимы к модели спектра накоплений в годы застоя. Изучению таких задач, затем была посвящена книга Ерофеевко В.Т. и Козловской И.С., где была построена математическая модель денежных накоплений совокупности семей, а также поставлены различные смешанные, краевые задачи для уравнений модели, задачи Коши на конечных и бесконечных пространствах накоплений, смешанные задачи с нелокальными краевыми условиями, решения которых позволяют определить плотность распределения семей по накоплениям в любой момент времени. Дело в том, что в

рассмотренных задачах динамика денежных накоплений отдельных семей подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению, содержащего стохастического составляющего типа Марковского процесса с переходной функцией вероятностей и плотность совокупности семей удовлетворяет параболическому уравнению типа Колмогорова-Чепмена с весовыми интегральными условиями, а такие задачи ввиду отсутствия привлечения спектральных методов не были изучены.

Наличие интегральных условий с определенными весами в краевых условиях показывает оригинальность изучаемых в диссертации смешанных задач для денежных и материальных накоплений. До сих пор не найдены аналитические решения и были описаны численные методы для решения подобных задач в частных случаях, не допускающие аналитического решения. Поставленные в диссертации задачи охватывают все ранее изученные случаи и имеют особую значимость и с математических точек зрения, что является мощнейшим эффективным инструментом для социально-экономического прогнозирования и изучения финансовых рынков.

В диссертации использовались методы экономического анализа, теории вероятностей и математической статистики, эконометрики, привлечены к исследованию методы решения уравнений с частными производными, методы спектральной теории дифференциальных операторов, методы теории и функций и функционального анализа, методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений, методы теории интерполяции и экстраполяции, статистические и аналитические методы прогнозирования, методологии финансовой теории, методы финансовой математики и методы компьютерного моделирования.

#### **Информационная база исследования.**

Информационную базу диссертации составили пространственные переменные, временные данные Госстатком Азербайджана, материалы статистических обследований, действующие законодательные акты Азербайджана в части образования и функционирования фондов оплаты труда, выплат трансфертов населению, кредитной и финансовой системы.

$$\frac{2}{b} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} - \frac{2c_1}{b} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}, \quad (13)$$

$$\frac{2c_2}{b} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} + f(x, y, t)$$

$$\left. \begin{aligned} L_V^1(u) &= \sum_{k=0}^1 [\alpha_{vk} u_x^{(k)}(0, y, t) + \beta_{vk} u_x^{(k)}(a, y, t)] = 0, \\ L_V^2(u) &= \sum_{k=0}^1 [\gamma_{vk} u_x^{(k)}(x, 0, t) + \delta_{vk} u_x^{(k)}(x, b, t)] = 0, \\ & \quad \nu = \overline{1, 2} \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (15)$$

где  $b, c_1, c_2 > 0; \alpha_{vk}, \beta_{vk}, \gamma_{vk}, \delta_{vk}$  - постоянные числа, такие, что  $L_V^1(u), \nu = \overline{1, 2}$  и  $L_V^2(u), \nu = \overline{1, 2}$  линейно независимы; переменные  $x$  и  $y$  означают, соответственно денежные и материальные накопления семьи в момент времени  $t$ ;  $\varphi(x, y)$  достаточно гладкая функция. Уравнение (13) описывает плотность распределения семей по денежным и материальным накоплениям на основе вероятностного подхода. Требуется исследование проблемы существования и единственности. Здесь при заданной функции  $f(x, y, t) \in C^2(\overline{D})$  изучается решение  $u(x, y, t)$  из класса  $C_{x,y,t}^{2,2,1}(D) \cap C(\overline{D})$  и находится аналитическое представление решений, позволяющие сделать анализ, прогнозирование социально-финансовых задач.

Свяжем смешанную задачу (13)-(15) со следующими одномерными спектральными задачами :

$$\frac{b}{2} X''(x) - c_1 X'(x) - \lambda^2 X(x) = h_1(x), \quad L_V^1(X) = 0, \nu = \overline{1, 2};$$



важными аналитическими инструментами при решении финансовых модельных задач, при оценке характеристик изучаемого процесса в будущем и создаются огромные возможности в области принятия правильных инвестиционных решений, получения качественных и надежных прогнозов.

Предположим, что  $c(x,t) = c(x)$ ,  $c'(x)$ ,  $c''(x)$  ограниченные функции из  $L_1[0, \infty]$ , а  $b(x,t) = b > 0$  - постоянное число.

Применяя преобразование Лапласа к задаче (7)-(9) приходим к следующей спектральной задаче со спектральным параметром  $\lambda$ :

$$\frac{b}{2} \frac{d^2 y(x, \lambda)}{dx^2} - c(x) \frac{dy(x, \lambda)}{dx} - \lambda y(x, \lambda) = -[\varphi(x) + \tilde{f}(x, \lambda)], \quad (10)$$

$$\left( \tilde{f}(x, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(x, t) dt \right)$$

$$\left. \frac{dy(x, \lambda)}{dx} \right|_{x=0} + hy(x, \lambda) \Big|_{x=0} = 0 \quad (11)$$

**Теорема 2.** Если функции  $c(x), \varphi(x)$  - имеют ограниченные суммируемые производные до второго порядка для  $x \in [0; \infty)$ ,  $f(x, t)$  имеет ограниченные суммируемые производные по  $x$  и  $t$  до второго порядка при  $x \in [0; \infty)$ ,  $t \in [0, T]$ , то существует решение задачи (7)-(9), представимое в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\lambda t} d\lambda \int_0^{\infty} K(x, \xi, \lambda) \left[ \varphi(\xi) + \int_0^t e^{-\lambda \zeta} f(\xi, \zeta) d\zeta \right] d\xi, \quad (12)$$

где  $a \geq M$ ,  $K(x, \xi, \lambda)$  - ядро резольвенты оператора, порожденного задачей (10)-(11).

Теперь рассмотрим в области  $D = (0 < t < \infty) \times [0, a] \times [0, b]$  смешанную задачу

Информационными источниками послужили нормативные документы Азербайджанской Республики, научные публикации, данные Интернет-сети.

**Научная новизна исследования.** В диссертации осуществлено решение важных научных задач разработки методологических и практических подходов, модельных аппаратов и математико-статистических и инструментальных средств для аналитического решения задач распределения населения по уровню денежных доходов, распределения населения по денежным и материальным накоплениям. На основе этих исследований получены прогнозные значения для распределения доходов определенных слоев населения. Научная новизна результатов исследований заключается в следующем:

1. Проанализированы статистические расчёты и проведен анализ доходов и расходов определенных групп населения Азербайджана по данным Государственного Комитета по статистике, построены эконометрические модели зависимости между расходом на питание и доходом ансамбля семей по количеству членов, вычислены  $\beta$ -коэффициенты, частный коэффициент эластичности и корреляции по обуславливающим факторам и даны соответствующие экономические выводы для изменений этих коэффициентов.

2. В результате исследования выявлено, что в Азербайджанской Республике совокупные доходы, получаемые всем населением, придерживаются для разных слоев в определенных промежутках. Оценены

Для занятого экономически активного населения подсчитан индекс Джини, построены кривая Лоренца и прямая абсолютного равенства, которые позволяют явно проследить степень расслоения общества.

3. Проведен математико-статистический анализ денежных сбережений населения Азербайджана, построены эконометрические модели AR(1) и AR(2), получены условия стационарности и не стационарности соответствующих процесс;

4. Создана новая адекватная методика анализа к новым объектам;

5. Доказано существование решений смешанных задач для уравнений денежных и материальных накоплений в

пространствах конечного и бесконечного накопления, получены аналитические представления решений, выраженных через построенные задачи Коши и спектральные задачи. Получены достаточные условия для корректности рассмотренной задачи.

6. Даны интерпретации полученных результатов для финансового, социально-экономического анализа и прогнозирования изучаемых социально-экономических явлений.

**Результаты диссертационных исследований могут быть применены** в социально-экономическом анализе благосостояния населения, в прогнозировании, в области принятия инвестиционных решений, в задачах управления, в финансовых рынках, страховании и т.д.

**Апробация работы.** Результаты исследований докладывались и обсуждались на: научных семинарах кафедры «Математическая экономика» Бакинского Государственного Университета; на научной конференции «Прикладные проблемы математики», посвященной 90-летию БГУ, на научной конференции «Прикладные проблемы математики», проведенной в БГУ в 2010 г. «Прикладные проблемы математики», проведенной в БГУ в 2010 г.; на международной научной конференции посвященной 90-летию БГУ в 2009 г., на второй международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», Минск в 2009 г.; на XIII международной научной конференции им. Акад. М. Кравчука, Киев, 2010.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах, список которых приводится в конце автореферата.

**Структура работы.** Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, включающего 117 наименований. Объем диссертации составляет 155 страниц.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во «Введении» обосновывается актуальность темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

удовлетворяет параболическому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(c(x,t) + F(x,t))u] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b(x,t)u) + f(x,t), \quad \text{где}$$

$f(x,t)$  - число клиентов, которые попадут из других совокупностей клиентов за отрезок единичной длины пространства накоплений за единичный интервал времени в окрестности  $x$  и  $t$ .

Рассмотрим совокупность клиентов сберегательного банка на полубесконечном пространстве накоплений  $N^t = (0 \leq x < \infty)$ . Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  известна плотность распределения клиентов по накоплениям  $\varphi(x)$ . Далее, пусть комбинированным способом в точке  $x = 0$  плотность клиентов поддерживается на уровне равном нулю, то есть задано граничное условие  $u'_x(0,t) + hu(0,t) = 0$ ,  $h$  - фиксированное положительное число.

Поставим смешанную задачу на полуоси:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (cu) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (bu) = f(x,t) \quad \text{в } D_1 = (0 \leq t < \infty) \times (0 \leq x < \infty), \quad (7)$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (8)$$

$$u'_x(0,t) + hu(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

Учитывая, что с помощью типовой задачи (7)-(9) осуществляется анализ, прогнозирование, поиск и выбор некоторых (оптимальных) решений в различных областях экономики и финансов, а также управления, эта смешанная задача требует отдельных исследований математических особенностей для финансовых исследователей и аналитиков.

Здесь определяется решение  $u(x,t) \in C^2(D_1) \cap C(D_1)$  уравнения (7), удовлетворяющее условиям (8),(9), что позволяет определить плотность распределения клиентов сберегательного банка (в том числе и конкретных семей) по пространству денежных накоплений в любой момент времени и спрогнозировать финансовые состояния клиентов в будущем, тем самым показывается, что спектральные методы являются

где  $Y_1(x, \lambda)$ ,  $Y_2(x, \lambda)$  - фундаментальные решения соответствующего однородного уравнения для построенных спектральных задач,  $\lambda$  - спектральный параметр,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1^{(1)}(Y_1) & L_1^{(1)}(Y_2) \\ L_2^{(1)}(Y_1) & L_2^{(1)}(Y_2) \end{vmatrix}$$

$$\Delta(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} g(x, \xi, \lambda) & Y_1(x, \lambda) & Y_2(x, \lambda) \\ L_1^{(1)}(g)_x & L_1^{(1)}(Y_1) & L_1^{(1)}(Y_2) \\ L_2^{(1)}(g)_x & L_2^{(1)}(Y_1) & L_2^{(1)}(Y_2) \end{vmatrix},$$

$$g(x, \xi, \lambda) = \pm \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k(x, \lambda) W_{2k}(x, \lambda)}{W(\xi, \lambda)}, \text{ знак "+" при}$$

$x > \xi$ , знак "-" при  $x < \xi$ ;  $W(\xi, \lambda)$  - определитель Вронского от  $Y_1(\xi, \lambda), Y_2(\xi, \lambda)$ ;  $W_{2k}(\xi, \lambda)$  - алгебраическое дополнение элемента  $(2, k), k = 1, 2$  определителя  $W(\xi, \lambda)$ ;  $c_V$  - простой замкнутый контур, окружающий только один полюс  $\lambda_V$  подинтегральной функции, и сумма по  $V$  распространена на все полюсы.

Теперь предположим, что динамика денежных накоплений отдельного клиента сберегательного банка подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению  $dx = F(x, t)dt + dX$ , где  $F(x, t)$  - неслучайная функция,  $X$  - Марковский процесс с переходной функцией плотности вероятностей  $\rho(y, s; x, t)$ , которая определяется функциями

$$c(y, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (x-y) \rho(y, t; x, t + \Delta t) dx \quad (\text{математическое}$$

$$\text{ожидание), } b(y, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (x-y)^2 \rho(y, t; x, t + \Delta t) dx > 0$$

(дисперсия),  $c(y, t), b(y, t) \in C^2(-\infty < y, t < \infty)$ , означающими общее количество денег, которое клиент к моменту времени  $t$  находит их случайных источников, тогда плотность совокупности клиентов в пространстве накоплений

В первом параграфе первой главы, который называется «Статистический анализ доходов и расходов населения» даются понятия дохода и расхода, затем изучаются статистические расчеты и анализируются денежные доходы и расходы определенных слоев населения Азербайджана. Анализируются статистические расчеты и проводится анализ доходов и расходов определенных групп населения Азербайджана по статистическим данным за определенный промежуток времени, построены эконометрические модели зависимости между расходом на питание и доходом ансамбля семей по количеству членов. Вычисляются –  $\beta$ -коэффициенты, частный коэффициент эластичности и корреляции по обуславливающим факторам и их экономические интерпретации. Показывается, что проведенный статистический и эконометрический анализ для определенных групп населения позволяет сделать следующие выводы: в Азербайджанской Республике совокупные доходы, получаемые всем населением, придерживаются для разных слоев в определенных промежутках, не ожидаются резкие колебания, выходящие за пределы ожидаемых промежутков и сохраняется соответствие между расчетными и статистически прогнозируемыми значениями.

Во втором параграфе анализируются неравномерное распределение доходов и расходов выбранных для исследования определенных групп населения Азербайджана. Проводится экономико-статистический анализ неравномерности распределения доходов и расходов определенного слоя населения Азербайджана по статистическим данным социальных показателей доходов и расходов. Вычисляется индекс Джини, строится кривая Лоренца и кривая абсолютного равенства, где наглядно изображается степень расслоения общества. Осуществляется компьютерная обработка данных в пакете MS Excel. Выписываются соответствующие результаты расчетов. Предлагаются соответствующие рекомендации для анализа динамики уровня бедности и даны рекомендации для прогнозной оценки параметров распределения доходов и расходов изучаемой группы населения.

По расчетам, произведенным в MS Excel на основе формулы Джини из параграфа видно, что индекс Джини равен 0,30532 и кривая Лоренца изображена на рис.1.

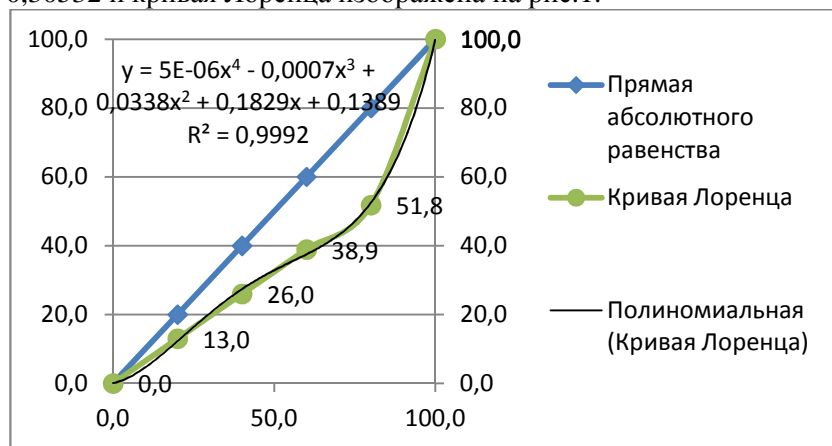


Рис.1 Кривая Лоренца для Азербайджана

В данном исследовании получен интересный факт. Оказывается, 20% экономически активного населения получает 13%, 40%-26%, 60% -38,9% , 80% -51,8% совокупного дохода. Иными словами, если округлить, получаем, что 4/5 части населения получают всего 1/2 дохода.

Если провести такое же исследование, но для данных среднедушевого среднемесячного дохода населения обнаруживается, что индекс Джини совсем не соответствует тем показателям, которые рассчитаны Государственным статистическим комитетом, Мировым Банком и т.д. Индекс Джини примет значение равное 0,13152. Этот показатель характерен для таких развитых стран, как Дания, Швеция и т.д. Индекс Джини и кривая Лоренца показывают степень расслоения общества, уровень дифференциации доходов для всего населения. Индекс Джини не показывает уровень дохода и качество жизни.

В третьем параграфе этой главы проводится статистический анализ объема накоплений населения Азербайджана и строятся эконометрические модели авторегрессии AR(1), AR(2). Здесь по Государственным

где  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, i = \overline{1,2}, j = \overline{0,1}, \psi_1(t), \psi_2(t)$  выражаются через

$$l, b, c, N_0(t), \frac{dN_0(t)}{dt}, \frac{dK_0(t)}{dt}, \int_0^l x^\alpha f(x, t) dx, \alpha = 0,1. \quad \text{Пусть}$$

условия (4) независимы. Обозначим через  $v(x, t)$  функцию, удовлетворяющую этим условиям. Отыскивая функцию  $v(x, t)$  в виде  $v(x, t) = v_0(t) + v_1(t)x$ , подставляя её в выражение (4), легко находятся функции  $v_0(t), v_1(t)$ .

В задаче (1),(2),(4) сделаем замену  $u(x, t) = W(x, t) + v(x, t)$ , где  $W$  – новая неизвестная функция. Тогда для  $W$  получим:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -b \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - c \frac{\partial W}{\partial x} + \tilde{f}(x, t), L_1^{(1)}(W) = 0, L_2^{(1)}(W) = 0, W(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), (5)$$

где 
$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) + \left[ \frac{1}{2} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right] v(x, t),$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - v(x, 0).$$

**Теорема 1.** Предположим, что выполняется одно из условий:

- 1)  $\alpha_{11}\beta_{21} - \beta_{11}\alpha_{21} \neq 0$ ;
- 2)  $\alpha_{11}\beta_{21} - \beta_{11}\alpha_{21} = 0, \beta_{11}\alpha_{20} - \alpha_{11}\beta_{20} \neq 0$ ;
- 3)  $\alpha_{11} = \beta_{11} = \alpha_{21} = \beta_{21} = 0, \alpha_{10}\beta_{20} - \beta_{10}\alpha_{20} \neq 0$  и

функции  $\tilde{f}(x, t), \tilde{f}_x(x, t)$  обращаются в нуль на концах отрезка  $[0, l]$ . Тогда задача (5) имеет классическое решение, представимое в виде

$$W(x, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{\nu \in \mathbb{C}} \int_0^l \lambda \lambda \int_0^l \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \left[ \tilde{\varphi}(\xi) e^{\frac{b}{2}\lambda^2 t} + \frac{2}{b} \int_0^t e^{\frac{b}{2}\lambda^2(t-\tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\tau \right] d\xi, (6)$$

функцию плотности семей на пространстве накоплений в начальный момент времени;  $N_0$  - число семей с денежными накоплениями в пределах отрезка  $[0, l]$  в момент времени  $t$ ,  $K_0(t)$  – сумма денег, накопленных в семьях на отрезке  $[0, l]$  в момент времени  $t$ .

При заданных функциях  $f(x, t) \in C^2(\bar{D})$ ,  $D = (0 < t < \infty) \times (0 < x < l)$ ,  $N_0(t)$ ,  $K_0(t) \in C^1(t \geq 0)$ ,  $\varphi(x) \in C(0 \leq x \leq l)$  исследуется принадлежность функции  $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ , которая удовлетворяет уравнению (1)

в области  $D$ , начальному условию (2) и нелокальным условиям (3)  $(u \in C_{x,t}^{2,1}(D)$ , если  $u(x, t)$ ,  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \in C(D)$ ) и находится выражение для решения этой задачи, определяются условия корректной постановки задачи (1)-(3).

Изменим формулировку краевых условий (3). Для этого сначала записывая:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u(x, t) dx = \int_0^l \left[ f(x, t) + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dx = \frac{dN_0(t)}{dt},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l x u(x, t) dx = \int_0^l x \left[ f(x, t) + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dx = \frac{dK_0(t)}{dt},$$

интегрируя по частям и произведя соответствующие обозначения вместо нелокальных краевых условий (3) получим следующие условия

$$\left. \begin{aligned} L_1^{(1)}(u) &= \alpha_{10} u(0, t) + \alpha_{11} u'_x(0, t) + \beta_{10} u(l, t) + \beta_{11} u'_x(l, t) = \psi_1(t) \\ L_2^{(1)}(u) &= \alpha_{20} u(0, t) + \alpha_{21} u'_x(0, t) + \beta_{20} u(l, t) + \beta_{21} u'_x(l, t) = \psi_2(t) \end{aligned} \right\}, (4)$$

статистическим данным Азербайджана за период с 1994 по 2011 годы изучаются и решаются специфические задачи сбережений населения, представляющие научный и практический интерес, а также даются прогнозные значения движения изучаемых показателей во времени, демонстрируются приемы компьютерной реализации соответствующих моделей в среде Excel. Основными результатами этого параграфа являются построение нижеуказанных двух моделей:

1) модель динамики вкладов населения AR(1):

$$Y(t) = 34,4207 + 1,3143 * Y(t-1).$$

2) модель динамики вкладов населения AR(2):

$$Y(t) = 30,874 + 1,51 Y(t-1) - 0,258 Y(t-2).$$

Здесь также найдено достаточное условие на характеристические корни соответствующих моделей, которые позволяют получить стационарные и нестационарные процессы и последние могут привести динамику движения изучаемых процессов к неустойчивому состоянию во времени.

Вторая глава посвящена проблеме доказательства существования решения достаточно общих смешанных задач для уравнения денежных и материальных накоплений, построению явных решений и интерпретации полученных результатов для финансового и социально-экономического анализа. Одной из отличительных характеристик этих задач является то, что искомые функции с определенными весами в виде интеграла входят в краевые условия. Основной целью данной главы являются получение представления для явных решений, доказательство существования решений изучаемых смешанных задач и вопросы корректности, применение полученных решений для выбора эффективного инструмента прогнозирования, выявления особой значимости предложенного математического аппарата при социально- финансово-экономическом анализе.

В первых трех параграфах изучаются модельные смешанные задачи для уравнения параболического типа, описывающие плотность распределения семей по денежным накоплениям. Здесь сначала описывается модельная постановка смешанной задачи для уравнения параболического типа, описывающее плотность распределения семей по денежным

накоплениям. Проводится анализ вероятностных свойств случайных процессов, их числовых характеристик применительно для вывода уравнений денежных накоплений с помощью стохастического анализа. Здесь основное внимание уделено Марковским и Винеровским процессам и их свойствам, непосредственно являющимся базовым аппаратом для вывода уравнения данного исследования. Также анализируются уравнения Колмогорова-Маркова-Чепмена, которые удовлетворяют плотности переходных вероятностей из одного состояния в другое. Далее изучаются основные характеристики для исследования выведенных ранее уравнений денежных накоплений совокупности семей.

В §2.4 излагается краткий обзор основных положений и утверждений из теории функций и функционального анализа, и спектральной теории дифференциальных уравнений, которые необходимы для понимания проведенных вычислительных процедур при решении модельных задач для денежного и материального накопления. Приводятся многочисленные примеры и методы их решения.

§2.5-§2.6 посвящены исследованию модельных уравнений денежного накопления с весовыми интегральными условиями как в конечных пространствах накоплений, так и в бесконечных пространствах накоплений. С помощью вычетного метода М.Л. Расулова получают решения весьма общих смешанных задач для уравнения денежных накоплений с регулярными двухточечными краевыми условиями, а также интегральными краевыми условиями на конечном пространстве накоплений, и с помощью метода интегрального преобразования Лапласа находят представление решений рассматриваемых уравнений. Находятся достаточные условия на данные смешанных задач, при которых поставленные задачи являются корректными. Для достижения цели на первом этапе методами интегральных преобразований построятся соответствующие спектральные задачи и задачи Коши. Изучаются спектры, собственные функции, получают представления решений этих задач и разложение по собственным и присоединенным функциям спектральных задач. На втором этапе находятся

решения смешанных задач для уравнения денежных накоплений через решение спектральных задач и задачи Коши.

§2.7-§2.8 посвящены изучению смешанных задач на конечном пространстве денежных и материальных накоплений. Здесь получают аналитическое представление решений двумерных смешанных задач с разделяющимися краевыми условиями, доказываются существование решений смешанных задач и изучаются вопросы корректности поставленных смешанных задач.

В том случае, когда явно выписать корни характеристического определителя, которые являются собственными числами (спектр состоит из собственных чисел) не удастся, необходимо прибегнуть к численному нахождению этих корней, к чему посвящен девятый параграф. Здесь проводятся численные расчеты нахождения этих корней и сравнительный анализ методом спектральных преобразований смешанных задач для моделей денежных и материальных накоплений и выдаются рекомендации для инвестиционного анализа.

Обобщая изложенные в главе 2 задачи и методы их изучения, сформулируем основные результаты этой главы. Для этой цели рассмотрим смешанную задачу с нелокальными граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \\ 0 < t < \infty, 0 < x < l \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

$$L_1(u) = \int_0^l u(x,t) dx = N_0(t), \quad L_2(u) = \int_0^l x u(x,t) dx = K_0(t) \quad (3)$$

где  $u(x,t)$  – плотность распределения семей по накоплениям;  $f(x,t)$  – число клиентов, которые попадут из других совокупностей клиентов за отрезок единичной длины пространства накоплений за единичный интервал времени в окрестности  $x$  и  $t$ ;  $b, c$  – постоянные;  $\varphi(x)$  – показывает