НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ЛАУРА ФАИК кызы ФАТУЛЛАЕВА

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ И ВЫПУЧИВАНИЯ УПРУГИХ И НЕУПРУГИХ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

2002.01 – Механика деформируемого твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук по механике

Баку - 2016

Работа выполнена в кафедрах «Вычислительная математика» и «Теоретическая механика и механика сплошной среды» **Бакинского Государственного Университета**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, проф. **Вагиф Д. Гаджиев**
(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана);
доктор технических наук, проф. **Мехралы О. Юсифов**
(Азербайджанский Государственный Педагогический Университет);
доктор физико-математических наук, проф. **Вагиф Р. Ибрагимов**
(Бакинский Государственный Университет).

Ведущая организация
Азербайджанский Университет Архитектуры и Строительства
кафедра «Высшая математика»

Защита диссертации состоится 24 июня 2016 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 23 мая 2016 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **д.м.н. Ровшан Бандалиев**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Современный уровень развития техники и технологий требует создания новых конструкционных материалов, обладающих повышенными эксплуатационными свойствами, и разработки методов комплексной оценки и прогнозирования их временного ресурса. В последние годы наметились новые пути повышения свойств конструкционных материалов за счет целенаправленного формирования структуры. Одно из важнейших проявлений ускорения научно-технического прогресса, связано в значительной степени с повышением эффективности использования традиционных материалов: металлов и их сплавов, а также с необходимостью создания новых прогрессивных материалов, к которым в первую очередь относятся композиционные материалы. Реализация этой задачи возможна, в частности, на основе применения математического моделирования структурно неоднородных анизотропных материалов, т. е. материалов, представляющих собой неоднородные среды с размерами неоднородностей значительно меньшими характерных размеров образца или изделия, свойства которых различны в разных направлениях.

Проблемы устойчивости и выпучивания многослойных стержней и колец являются весьма важными в связи с широким распространением в технике и строительстве сжатых элементов конструкций. Существенно возрастает их доля в конструкциях автомобилей, летательных аппаратов, различных строительных сооружениях (каркасы высотных домов) и т.д. Ввиду большого распространения стержневых и кольцевых сжатых конструкций особое значение приобретает развитие методов расчета тонкостенных многослойных стержней и колец. Это обусловлено, в частности, стремлением к экономии материала при одновременном уменьшении веса конструкции и изысканием дополнительных прочностных ресурсов. Последнее, в частности, можно добиться за счет использования композитных материалов, которым присуще свойство кусочной неоднородностью по толщине.

Все возрастающее значение задач устойчивости и выпучивания сжатых и сжато-изогнотых стержневых и кольцевых элементов конструкций связано с необходимостью использования несущих способностей при проектировании современных конструкций и машин. Опыт проектирование конструкций показывает, что значительная их часть является тонкостенной конструкцией типа оболочки и стержня. Поэтому здесь весьма актуальной является проблема достоверной оценки несущих способностей таких стержней и колец. Анализ нагрузок, действующих на конструкции со стороны, и особенностей конструкции приводит к необходимости учета геометрической нелинейности в теории, описывающей поведение конструкции, в частности, в технической теории оболочек и стержней.

Опыт создания оптимальных конструкций, накопленный в различных отраслях машиностроения, авиастроения, судостроения и т.д., приводит все к большему расширению использования конструкционных материалов. Это, в свою очередь, приводит к необходимости более полного учета особенностей материалов и конструкций с целью рационального конструктирования и проведения надежного расчета. К особенностям конструкционных материалов относится неоднородность, реология, возможность осуществления больших деформаций, т.е. физической нелинейности.

Известно, что для создания физической и математической модели поведения той или иной конструкции необходимо учитывать условия ее эксплуатации. Внешняя среда является деформирующей. Поэтому конструкции, работающие в такой среде, могут быть подвержены нагрузкам. Уравнения состояния материалов, из которых изготовлены конструкции, достаточно хорошо описываются соотношениями теории нелинейной упругости и вязко-упругости. При этом для ряда важных задач, таких как устойчивость и выпучивание, необходимо учитывать физическую и геометрическую нелинейности. При решении конкретных задач возникают большие трудности математического характера. Это обстоятельство связано с тем, что теоретические исследования в этой области приводят к интегрированию нелинейных краевых задач. Получение здесь аналитических решений весьма затруднительно, а порою невозможно. Поэтому возникает необходимость в разработке и применении к таким важным в прикладном аспекте задачам эффективных приближенных, в частности вариационных методов. Применение данного метода объясняется не только тем, что он является одним из эффективных приближенных методов решения нелинейных уравнений, но и тем, что позволяет получать непротиворечивые приближенные теории тонкостенных конструкций типа оболочек и стержней.

Именно проблема - определения эффективных методов решения задачи устойчивости, стала одной из фундаментальных задач механики деформируемого твердого тела и привлекает внимание большого числа исследователей. Таким образом, описание выпучивания неоднородных по толщине упругих, нелинейно-упругих, вязко-упругих тонкостенных элементов конструкций, расчет их устойчивости с учетом физической и геометрической нелинейности, с применением вариационного метода представляется актуальным.

Цель работы. Цель диссертационной работы заключается в исследовании задач выпучивания и потери устойчивости прямолинейного, нелинейно-упругого многослойного стержня с различными по толщине слоями из различных материалов при шарнирно опертом, комбинированном и жестком защемлении торцов, нелинейного поведения многослойной нелинейно-упругой цилиндрической оболочки, нелинейного поведения неоднородных вязко-упругих оболочек, формулирования и доказательства смешанного вариационного принципа нелинейной наследственной механики твердых тел.

Научная новизна. Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Предложено обобщение вариационных принципов для случая, когда мгновенная деформация упруго-пластическая и подчиняется уравнениям типа теории течения; дана модификация вариационного принципа для гетерогенных сред.

2. Проведено комплексное исследование устойчивости трехслойного стержня с искривленной внутренней структурой при различных видах закреплений.

3. Разработан вариационный подход к определению критических нагрузок для многослойных стержней при многомодовой потере устойчивости.

4. Исследовано предельное состояние и вычислена критическая сила Шенли нелинейно-упругого многослойного стержня при различных видах закреплений.

5. Численно решена задача выпучивания нелинейно-упругого эксцентрического кольца.

6. Проведено исследование нелинейного поведения многослойной нелинейно-упругой цилиндрической оболочки.

7. Предложено решение задачи определения предельного состояния многослойной упругой и нелинейно-упругой длинной цилиндрической оболочки под действием неравномерного внешнего давления; разработаны численные методики вычисления критической

силы длинной цилиндрической оболочки и расчёта зависимости критической силы от параметров, характеризующих оболочки.

8. Для трехслойного кольца при его симметричной структуре относительно срединной поверхности численно исследовано влияние различных геометрически нелинейных теорий на критическое время устойчивости.

9. Исследована устойчивость многослойной, разностенной, линейно вязко-упругой цилиндрической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного бокового давления.

10. Разработано исследование потери устойчивости многослойного линейно вязко-упругого кольца, составленного из различных материалов и находящегося под действием неравномерно распределенного внешнего давления заданной интенсивности.

11. Решена задача устойчивости многослойных вязко-упругих стержней при различных краевых условиях и выявлено влияние краевых условий на критическое время устойчивости.

Общая методика исследований. Объектом исследования является предельное состояние многослойных стержней и колец, которые являются основными элементами конструкций. Поставленные в диссертационной работе задачи решаются вариационным методом смешанного типа в сочетании с методом Релея-Ритца. В вычислительной части работы использовались численные методы, как Рунге-Кутта для решения дифференциальных уравнений, методы итераций и деления отрезка пополам для решения алгебраических уравнений, метод Симпсона для вычисления интегралов. Обоснованность и достоверность результатов расчётов и теоретических выводов, сформулированных в диссертационной работе, обеспечиваются строгой математической постановкой задач, применением математически обоснованных методов решения, переходами к известным частным случаям, сравнениями полученных решений с известными экспериментальными данными.

Теоретическая и практическая ценность. Научная и практическая ценность работы состоит в создании теоретических основ задач выпучивания и устойчивости при моделировании конструкций. На практике используются различные по свойствам материалы. Однако элементы конструкций, изготовленные из однородных материалов, редко обладают свойствами, соответствующими требованиям конкретного применения. Опыты и вычисления показали, что комбинируя материалы, т.е. создавая и используя неоднородность, зачастую можно добиться благоприятного сочетания свойств, что дает возможность эффективного использования конструкции. Для этих конструкций роль расчетов на устойчивость и выпучивание в общем цикле расчетов на прочность существенно возросла, ибо разрушение конструкции, прежде всего, связано либо с потерей её общей устойчивости или устойчивости отдельных её тонкостенных элементов. Ввиду большого распространения стержневых и кольцевых сжатых конструкций, особое значение приобретает развитие методов расчета тонкостенных многослойных стержней и колец, которые широко используются в современной технике. Существенно возрастает их доля в конструкциях автомобилей, летательных аппаратов, станков, различных строительных сооружениях (каркасы высотных зданий) и атомных реакторов. Результаты диссертационной работы могут быть использованы при достоверной оценке несущей способности таких элементов конструкций. Предлагаемые алгоритмы оценки могут быть использованы при инженерных расчетах с применением современных математических пакетов, содержащих математические операции с созданием дополнительных программных надстроек для численной реализации поставленных задач.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались на научно–технических конференциях:

- The 1st International Conference on Control and Optimization with industrial applications (COIA-2005), Baku, Azerb., 22-25 may, 2005;
- Международная конференция «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», пос. 100-летию С.М.Никольского, Москва, 23-29 мая 2005;
- Научная конференция «Теоретические и прикладные задачи операторных уравнений», пос. 75-летию члена-корр. НАНА Я.Дж.Мамедова, Баку, февраль, 2006;
- Международная научная конференция, Рига, 29 май – 2 июнь 2006, The International Conference «Problems of cybernetics and informatics», Baku, October 24-26 2006;
- Международная научная конференция, пос. 90-летию академика НАНА М.Л.Расулова, Баку, 2006;
- The conference “Deformation and Fracture of Composites”, the University of Sheffield, Gr.Britain, april 11-13, 2007;

- XIII Международный симпозиум “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г.Горшкова, Москва, 12-17 февраль 2007;
- Международная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики», Новосибирск, Россия, 20-25 августа 2007;
- The 9th International Conference, Vilnius, Lithuania, may 16-18, 2007;
- The 38th Annual Iranian mathematics Conference, University of Zanjan, 3-6 September 2007;
- IV-я Евразийская научно-практическая конференция «Прочность неоднородных структур», Москва, 8-10 апреля 2008;
- XV International Conference “Mechanics of Composite Materials”, Riga, Latvia, мау 26-30, 2008;
- Международная научная конференция, посвященная 90-летнему юбилею БГУ, Баку, 2009;
- The III Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, Almaty, 2009;
- II Международная Конференция «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела», Казань, Россия, 8-11 декабря 2009;
- The 16th International conference “Mechanics of Composite materials”, Riga, Latvia, мау 24-28 2010;
- The 10th International Conference, Vilnius, Lithuania, may 2010;
- International Conference “Continuum Mechanics and related problems of analysis”, Tbilisi, September 9-14 2011;
- Традиционная научная конференция “Актуальные проблемы математики и механики”, Баку, 28-29 апреля 2011;
- Научная конференция, посвященная 50-летнему юбилею кафедры “Вычислительная математика” БГУ, Баку, 15-16 ноября 2012;
- на научных семинарах кафедры “Теоретическая механика и механика сплошной среды” БГУ, кафедры “Вычислительная математика” БГУ, на общеинститутском семинаре Института Математики и Механики НАНА.

Публикации. Основные положения диссертации изложены в 58 печатных работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, основных выводов и списка литературы, состоящей из 185 наименований, содержит 29 рисунков, 20 таблиц. Объем диссертации 287 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении определены цель и актуальность диссертационной работы, дается краткий обзор работ по теме рассматриваемых задач.

Первая глава посвящается получению обобщения вариационных принципов для случая, когда мгновенная деформация упруго-пластическая и подчиняется уравнениям типа теории течения.

В разделе 1.1 получается вариационный принцип смешанного типа для однородных сред. Рассмотрим в трехмерном Эвклидовом пространстве тело и предположим, что под действием нагрузок в нем возникает мгновенная упруго – пластическая деформация ε_{ij}^{M} и деформация ползучести p_{ij}, так, что полная деформация ε_{ij}^{Φ} имеет вид

$$\varepsilon_{ij}^{\Phi} = \varepsilon_{ij}^{M} + \dot{p}_{ij},$$

или в скоростях

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\Phi} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{M} + \dot{p}_{ij}. \qquad (1)$$

Здесь и далее точка над символами означает дифференцирование по физическому времени t .

При этом мгновенная деформация подчиняется уравнениям типа теории течения. Физический закон для такой среды запишем в форме

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{M} = H_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl}, \qquad (2)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^{M}$ - ковариантный тензор скоростей деформаций, $\dot{\sigma}^{kl}$ - контравариантный тензор скоростей напряжений. Причем механические характеристики $H_{ijkl} = H_{klij}$ не зависят от скоростей деформаций и напряжений. Условимся считать, что деформация ползучести описывается соотношениями нелинейной теории вязко-упругости. Тогда, с учетом анизотропии, имеем

$$p_{ij} = \int_0^t F'_{ij}\left[t-\tau, \sigma^{kl}(\tau)\right]d\tau \qquad (i, j = 1, 2, 3). \qquad (3)$$

Здесь F_{ij}- функция ползучести, а штрих означает частное дифференцирование по параметру $t-\tau$,

$$F'_{ij}\left[t-\tau,\sigma^{kl}(\tau)\right]=\frac{\partial}{\partial(t-\tau)}F_{ij}\left[t-\tau,\sigma^{kl}(\tau)\right]=-\frac{\partial}{\partial\tau}F_{ij}\left[t-\tau,\sigma^{kl}(\tau)\right].$$

Отметим, что соотношение (3) является достаточно хорошей аппроксимацией уравнения состояния для широкого класса материалов (металлы и их сплавы, композиты и полимеры), свойства которых невозможно описать в рамках классических моделей теории упругости, пластичности и вязкой жидкости.

Взяв в уравнении (3) производную по t, находим:

$$\dot{p}_{ij}=\int_0^t F''_{ij}\left[t-\tau,\sigma^{kl}(\tau)\right]d\tau+F'_{ij}\left[0,\sigma^{kl}(t)\right]. \tag{4}$$

Подставляя (2) и (4) в равенство (1), будем иметь:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\Phi}=H_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl}+\int_0^t F''_{ij}\left[t-\tau,\sigma^{kl}(\tau)\right]d\tau+F'_{ij}\left[0,\sigma^{kl}(t)\right]. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь равновесие (предполагается, что динамическими эффектами можно пренебречь) выбранной среды объема V, ограниченного достаточно гладкой поверхностью S. Положим, что на части поверхности S_u заданы ковариантные компоненты вектора смещения $u_i^{(0)}$, а на оставшейся части S_σ - контравариантные составляющие вектора поверхностных сил $T^{i(0)}$, определяемые зависимостями

$$T^i=\sigma^{kj}n_j\left(\delta_k^i+\nabla_k u^i\right), \tag{6}$$

в которых, n_j - нормаль к поверхности недеформируемого тела, ∇_k - оператор ковариантного дифференцирования, u^i - контравариантные составляющие вектора перемещения, δ_k^i - тензор Кронекера.

Пользуясь точными выражениями для компонент тензора деформации, равновесие среды описывается следующей нелинейной краевой задачей:

$$\nabla_j\left[\sigma^{ij}\left(\nabla_i u^k+\delta_i^k\right)\right]=0\,, \tag{7}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\Phi}=H_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl}+\int_0^t F''_{ij}\left[t-\tau,\sigma^{kl}(\tau)\right]d\tau+F'_{ij}\left[0,\sigma^{kl}(t)\right], \tag{8}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k\right), \tag{9}$$

$$T^k = T^{k(0)} \text{ на } S_\sigma,\ u_k = u_k^{(0)} \text{ на } S_u, \tag{10}$$

причем $S = S_u \cup S_\sigma$.

Докажем утверждение, что рассматриваемую краевую задачу можно сформулировать с помощью вариационной теоремы следующим образом: стационарное значение функционала,

$$\delta R = 0$$

которое представлено в виде

$$R = \int_V \left\{ \dot{\sigma}^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i \dot{u}^k \nabla_j \dot{u}_k - \frac{1}{2}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^M + 2\dot{p}_{ij}\right)\dot{\sigma}^{ij} \right\} dV - \\ - \int_{S_u} \left(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}\right)\dot{T}^i dS - \int_{S_\sigma} \dot{T}^{i(0)}\dot{u}_i dS, \tag{11}$$

при выполнении равенств (8) и (9) в качестве уравнений Эйлера приводит к нелинейным уравнениям равновесия (7) и нелинейным граничным условиям (6).

Найдем вариацию этого функционала в предположении, что функциональные аргументы $\dot{\sigma}^{ij}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}$ варьируются независимо. Будем также учитывать, что оператор варьирования δ действует на скорости величин, но не на сами величины. Тогда из (11) получим:

$$\delta R = \int_V \Big\{ \dot{\varepsilon}_{ij}\delta\dot{\sigma}^{ij} + \dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i \dot{u}^k \delta\left(\nabla_j \dot{u}_k\right) + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_j \dot{u}_k \delta\left(\nabla_i \dot{u}^k\right) - \\ - \frac{1}{2}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}^M \dot{\sigma}^{ij} - \frac{1}{2}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^M + 2\dot{p}_{ij}\right)\delta\dot{\sigma}^{ij} \Big\} dV - \\ - \int_{S_\sigma} \dot{T}^{i(0)}\delta\dot{u}_i dS - \int_{S_u} \left[\left(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}\right)\delta\dot{T}^i\right] dS. \tag{12}$$

Здесь учитывался тот факт, что по определению $\delta\dot{p}_{ij} = 0$, а для выполнения граничных условий принимаются равенства

$$\delta\dot{T}^i = 0 \quad \text{на} \quad S_\sigma$$

и

$$\delta\dot{u}_i = 0 \quad \text{на} \quad S_u.$$

Поскольку тензор H_{ijkl} не зависит от скоростей, то

$$\delta\dot{\varepsilon}_{ij}^{M} = H_{ijkl}\delta\dot{\sigma}^{kl} .$$

Умножая последнее равенство на $\dot{\sigma}^{ij}$ и замечая, что $H_{ijkl}\dot{\sigma}^{ij} = \dot{\varepsilon}_{kl}^{M}$, находим:

$$\dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}^{M} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{M}\delta\dot{\sigma}^{ij} . \tag{13}$$

Отдельно рассмотрим четвертое слагаемое в выражении (12). Из симметрии тензора напряжений имеем:

$$\frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_j\dot{u}_k\delta\left(\nabla_i\dot{u}^k\right) = \frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}_k\delta\left(\nabla_j\dot{u}^k\right),$$

или, в силу очевидных соображений

$$\frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i\left(g_{kr}\dot{u}^r\right)\delta\left(\nabla_j g^{kr}\dot{u}_m\right) = \frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i\left(\dot{u}^k\right)\delta\left(\nabla_j\dot{u}_k\right),$$

где g_{kr} и g^{kr} соответственно ковариантный и контравариантный метрические тензоры. Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_j\dot{u}_k\delta\left(\nabla_i\dot{u}^k\right) = \frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\delta\left(\nabla_j\dot{u}_k\right).$$

Таким образом, установлен факт равенства третьего и четвертого слагаемых в (12). Это обстоятельство и формула (13) позволяют переписать (12) следующим образом:

$$\delta R = \int_V \left\{\dot{\varepsilon}_{ij}\delta\dot{\sigma}^{ij} + \dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\delta\left(\nabla_j\dot{u}_k\right) - \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{M} + \dot{p}_{ij}\right)\delta\dot{\sigma}^{ij}\right\}dV -$$

$$- \int_{S_\sigma} \dot{T}^{i(0)}\delta\dot{u}_i dS - \int_{S_u} \left[\left(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}\right)\delta\dot{T}^i\right]dS. \tag{14}$$

По формуле (9)

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\nabla_i\dot{u}_j + \nabla_j\dot{u}_i + \nabla_i u^k\nabla_j\dot{u}_k + \nabla_j u_k\nabla_i\dot{u}^k\right\},$$

а ее вариация записывается как

$$\delta\,\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\delta\,\nabla_i\dot{u}_j + \delta\,\nabla_j\dot{u}_i + \nabla_i u^k\delta\,\nabla_j\dot{u}_k + \nabla_j u_k\delta\,\nabla_i\dot{u}^k\right\}.$$

Тогда второе слагаемое в (12) запишем в форме

$$\dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\dot{\sigma}^{ij}\delta\nabla_i\dot{u}_j + \dot{\sigma}^{ij}\delta\nabla_j\dot{u}_i + \dot{\sigma}^{ij}\nabla_i u^k\delta\nabla_j\dot{u}_k + \dot{\sigma}^{ij}\nabla_j u_k\delta\nabla_i\dot{u}^k\right\}.$$

После ряда преобразований, характерных для тензорного анализа, этому равенству придадим следующий вид:

$$\dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\sigma}^{ij}\left\{\delta_i^k + \nabla_i u^k\right\}\delta\nabla_j \dot{u}_k .$$

Теперь вариационное уравнение запишется посредством равенства

$$\delta R = \int_V \left\{\dot{\varepsilon}_{ij}\delta\dot{\sigma}^{ij} + \dot{\sigma}^{ij}\left[\delta_i^k + \nabla_i u^k\right]\delta\nabla_j \dot{u}_k + \right.$$
$$\left. + \sigma^{ij}\nabla_i \dot{u}^k \delta\left(\nabla_j \dot{u}_k\right) - \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^M + \dot{p}_{ij}\right)\delta\dot{\sigma}^{ij}\right\} dV -$$
$$- \int_{S_\sigma} \dot{T}^{i(0)}\delta\dot{u}_i dS - \int_{S_u}\left[\left(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}\right)\delta\dot{T}^i\right] dS. \qquad (15)$$

Преобразуя по формуле Гаусса-Остроградского второй интеграл в выражении (15), получим:

$$\int_V \dot{\sigma}^{ij}\left[\delta_i^k + \nabla_i u^k\right]\delta\nabla_j \dot{u}_k dV = \int_S \left\{\dot{\sigma}^{ij}\left(\nabla_i u^k + \delta_i^k\right) n_j \delta\dot{u}_k\right\} dS -$$
$$- \int_V \left\{\nabla_j\left[\dot{\sigma}^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right]\delta\dot{u}_k\right\} dV. \qquad (16)$$

Таким же образом вычислим третий интеграл, для которого запишем:

$$\int_V \sigma^{ij}\nabla_j \dot{u}_k \delta\left(\nabla_j \dot{u}_k\right) dV = \int_S \sigma^{ij} n_j \nabla_i \dot{u}^k \delta\dot{u}_k\, dS - \int_V \nabla_j\left(\sigma^{ij}\nabla_i \dot{u}^k\right)\delta\dot{u}_k dV. \qquad (17)$$

Так как $\delta\dot{u}_k = 0$ на S_u, то поверхностные интегралы в (16) и (17) отличны от нуля только на поверхности S_σ и таким образом

$$\int_S \left\{\dot{\sigma}^{ij}\left(\nabla_i u^k + \delta_i^k\right) n_j \delta\dot{u}_k\right\} dS = \int_{S_\sigma} \left\{\dot{\sigma}^{ij}\left(\nabla_i u^k + \delta_i^k\right) n_j \delta\dot{u}_k\right\} dS, \qquad (18)$$

$$\int_S \sigma^{ij} n_j \nabla_i \dot{u}^k \delta\dot{u}_k\, dS = \int_{S_\sigma} \sigma^{ij} n_j \nabla_i \dot{u}^k \delta\dot{u}_k\, dS. \qquad (19)$$

Вследствие подстановки выражений (16), (17) в (15), и собирая члены при одинаковых независимых вариациях, найдем:

$$\delta R = \int\limits_V \left\{\left[\dot{\varepsilon}_{ij} - \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^M + \dot{p}_{ij}\right)\right]\delta\dot{\sigma}^{ij}\right\}dV - \int\limits_V \left\{\nabla_j\left[\dot{\sigma}^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \nabla_j\left(\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\right)\right\}\delta\dot{u}_k dV + \int\limits_{S_\sigma}\left\{\left[\dot{\sigma}^{ij}\left(\nabla_i u^k + \delta_i^k\right) + \sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\right]n_j - \dot{T}^{k(0)}\delta\dot{u}_k\right\}dS -$$

$$- \int\limits_{S_u}\left(\dot{u}_k - \dot{u}_k^{(0)}\right)\delta\dot{T}^k dS.$$

Заметив, что

$$\nabla_j\left[\dot{\sigma}^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right] + \nabla_j\left(\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\right) = \left\{\nabla_j\left[\sigma^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right]\right\}^\bullet,$$

а

$$\dot{\sigma}^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right) + \sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k = \left\{\sigma^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right\}^\bullet,$$

выражение δR перепишем следующим образом:

$$\delta R = \int\limits_V \left[\varepsilon_{ij} - \left(\varepsilon_{ij}^M + p_{ij}\right)\right]^\bullet \delta\dot{\sigma}^{ij} dV - \int\limits_V \left\{\nabla_j\left[\sigma^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right]\right\}^\bullet \delta\dot{u}_k dV +$$

$$+ \int\limits_{S_\sigma}\left\{\sigma^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)n_j - T^{k(0)}\right\}^\bullet \delta\dot{u}_k dS - \int\limits_{S_u}\left(\dot{u}_k - \dot{u}_k^{(0)}\right)\delta\dot{T}^k dS = 0.$$

Учитывая основную лемму вариационного исчисления и формулу (6), из условия обращения в нуль вариации δR, получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^M - p_{ij}\right)^\bullet = 0,$$

$$\left\{\nabla_j\left[\sigma^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right]\right\}^\bullet = 0, \qquad (20)$$

$$\left(\dot{T}^{k(0)} = T\right)^\bullet \text{ на } S_\sigma, \quad \left(\dot{u}_k = \dot{u}_k^{(0)}\right)^\bullet \text{ на } S_u.$$

За начальные условия системы (20) примем напряженно-деформированное состояние тела при $t = 0$. Это состояние, как это следует из равенства (5), является упруго - пластическим, удовлетворяет закону (2) и краевым условиям (10). Тогда, после интегрирования, получим:

$$\nabla_j\left[\sigma^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right] = 0,$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^\Phi = \dot{\varepsilon}_{ij}^M + \dot{p}_{ij}, \qquad (21)$$

$$T^i = T^{i(0)} \text{ на } S_\sigma, \; u_i = u_i^{(0)} \text{ на } S_u .$$

Как видно из полученной в результате интегрирования системы (20), первое уравнение является уравнением равновесия, а последние два равенства соответствуют краевым условиям (10). В совокупности указанное позволяет констатировать, что для функций, описывающих равновесие нелинейно-наследственного тела при мгновенной упруго - пластической деформации, подчиняющейся уравнениям типа теории течения, функционал (11) стационарен и выделяет истинные поля напряжений и перемещений из всех статически возможных. Это и доказывает сформулированное выше утверждение.

Если мгновенная деформация нелинейно-упругая, то

$$\varepsilon_{ij}^M = \varphi_{ij}\left(\sigma^{kl}, g^{km}\right),$$

или в скоростях

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^M = \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \sigma^{kl}} \dot{\sigma}^{kl} = A_{ijkl} \dot{\sigma}^{kl} .$$

Следовательно, в этом случае постановка краевых задач в скоростях будет такой же, как и выше, с той лишь разницей, что вместо H_{ijkl} фигурируют величины другой физической природы A_{ijkl}.

Таким образом, приходим к весьма важному выводу, что различные по существу задачи в вариационной постановке (11) математически идентичны.

Раздел 1.2 посвящен вариационному принципу для гетерогенных сред. Пусть рассматриваемое тело занимает в трехмерном эвклидовом пространстве с криволинейными координатами x^γ область V, ограниченную замкнутой поверхностью S. При постановке контактной краевой задачи, которую будем обсуждать в дальнейшем, предполагаем, что тело состоит из K элементов. Элемент с номером k занимает объем V_k с поверхностью S_k. Принимаем, что $S_k = S_k^{(1)} + S_k^{(2)}$, где $S_k^{(1)}$ граница объема V_k, не имеющая общих точек с S, а $S_k^{(2)}$ является частью общей границы тела. Очевидно, что для объемов, которые не имеют общих точек с границей S, имеет место $S_k = S_k^{(1)}$.

На поверхности $S_{k\sigma}^{(2)}$ заданы усилия $T^{\alpha(0)}$, а на оставшейся - перемещения $u_{\alpha}^{(0)}$. Дополнительно потребуем, чтобы поверхности $S_k^{(1)}$ и $S_k^{(2)}$ были достаточно гладкими. В основу используемой здесь теории гетерогенных сред становятся следующие предпосылки:

- в процессе деформации элементы контактируют друг с другом вдоль всей их общей поверхности;
- деформации конечны.

Далее будем исходить из того, что на поверхностях контакта выполняются условия либо полного сцепления, либо напряженной посадки.

Для k -го элемента обозначим через $\sigma_{(k)}^{ij}$ и $\varepsilon_{ij(k)}$ соответственно тензор напряжений и деформаций, $u_{i(k)}$ - вектор перемещения, $n_{i(k)}$ - единичную нормаль к поверхности. Для того чтобы учесть, что материалы разных элементов различны, а их физико-математические свойства описываются соотношениями нелинейной теории вязко – упругости, соотношение (1) удобно записать в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{ij(k)}^{\Phi} = \dot{\varepsilon}_{ij(k)}^{M} + \dot{p}_{ij(k)},$$

где, следуя (5), имеем:

$$\dot{\varepsilon}_{ij(k)}^{M} = H_{ijml(k)}\dot{\sigma}_{(k)}^{ml}\left(x^{\gamma},t\right),$$

$$\dot{p}_{ij(k)} = \int_0^t F_{ij(k)}\left[t-\tau,\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}\left(x^{\gamma},\tau\right)\right]d\tau + F'_{ij(k)}\left[0,\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}\left(x^{\gamma},t\right)\right].$$

Рассмотрим равновесие мысленно выбранного объема, прилагая к части границы $S_k^{(1)}$ силы $T_{(k)}^{\alpha(00)}$, действующие на него со стороны других, контактирующих с ним, объемов, либо считая известными перемещения $u_{i(k)}^{(00)}$. Тогда для геометрически нелинейной теории оно описывается следующей краевой задачей:

$$\nabla_j\left\{\sigma_{(k)}^{ij}\left(\delta_i^{\alpha} + \nabla_i u_{(k)}^{\alpha}\right)\right\} = 0,$$

$$\varepsilon_{ij(k)}^{\Phi} = \varepsilon_{ij(k)} + p_{ij(k)},$$

$$2\varepsilon_{ij(k)} = \left\{\nabla_i u_{j(k)} + \nabla_j u_{i(k)} + \nabla_i u_{(k)}^{\alpha}\nabla_j u_{\alpha(k)}\right\},$$

для $\forall x^k \in V_k$ и

$$u_{i(k)} = \overline{u}_{i(k)}^{(0)} \quad \text{на } S_{ku},$$

$$T_{(k)}^{\alpha(0)} = \overline{T}_{(k)}^{\alpha} \quad \text{на } S_{k\sigma}.$$

Здесь весьма важно подчеркнуть, что в самом общем случае, согласно общей постановке задачи,

$$\overline{u}_{i(k)} = \begin{cases} u_{i(k)}^{(0)} & \forall s \in S_{ku}^{(2)}, \\ u_{i(k)}^{(00)} & \forall s \in S_{ku}^{(1)}, \end{cases} \tag{22}$$

$$\overline{T}_{(k)}^{\alpha} = \begin{cases} T_{(k)}^{\alpha(0)} & \forall s \in S_{k\sigma}^{(2)}, \\ T_{(k)}^{\alpha(00)} & \forall s \in S_{k\sigma}^{(1)}. \end{cases} \tag{23}$$

К перечисленным уравнениям должны быть добавлены условия сопряжения на $S_{(k)}^{(1)}$. Установим два рода контактных условий:

а) условие полного сцепления между соседними элементами, когда

$$T_{(k)}^{i+} = T_{(k)}^{i-}; \qquad u_{i(k)}^{+} = u_{i(k)}^{-}, \tag{24}$$

где знаками «+» и «-» обозначены значения функций в точках сопряжения при переходе к ним справа и слева от линии контакта;

б) наличие заданной функции скачка смещения $f_{n(k)}(S)$, нормального к поверхности границы,

$$u_{n(k)}^{+} - u_{n(k)}^{-} = f_{n(k)}(S) \tag{25}$$

и отсутствие сил трения (посадка) на этой поверхности,

$$T_{(k)}^{\tau} = 0. \tag{26}$$

Как и выше, для дальнейших целей, выделим произвольный элемент объемом V_k. Следуя (11), выпишем следующий функционал для этого объема:

$$R_k = \int\limits_{V_k} \left\{ \dot{\sigma}^{ij}_{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij(k)} + \frac{1}{2} \sigma^{ij}_{(k)} \nabla_i \dot{u}^m_{(k)} \nabla_j \dot{u}_{m(k)} - \frac{1}{2} \left(\dot{\varepsilon}^M_{ij(k)} + 2 \dot{p}_{ij(k)} \right) \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV -$$

$$- \int\limits_{S_{ku}} \dot{T}^i \left(\dot{u}_{i(k)} - \bar{u}_{i(k)} \right) dS - \int\limits_{S_{k\sigma}} \dot{\bar{T}}^\alpha_{(k)} \dot{u}_{\alpha(k)} dS. \qquad (27)$$

Здесь, S_{ku} и $S_{k\sigma}$ участки границы, где считаются известными либо заданными перемещения $\bar{u}_{i(k)}$ и усилия $\bar{T}^\alpha_{(k)}$ (см. формулы (22) и (23)). Отметим, что в (27) $\dot{\sigma}^{ij}_{(k)}$, $\dot{u}_{i(k)}$ - независимые функциональные аргументы. Теперь перейдем к построению функционала для всего объема в целом, когда тело составлено из K элементов. Это обобщение, в случае многокомпонентности, как будет установлено ниже, отнюдь не является тривиальным. В этом случае функционал (27) необходимо модифицировать таким образом, чтобы были учтены условия сопряжения а) или б) между соседними элементами. С этой целью, вначале, просуммируем функционал (27) по всем его компонентам. В дальнейшем, без ущерба для изложения и компактности записи, индекс k у фигурирующих под интегралами величин будем опускать. Тогда, следуя выше изложенному, запишем:

$$R = \sum_k^K R_k = \sum_{k=1}^K \int\limits_{V_k} \left\{ \dot{\sigma}^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^m \nabla_j \dot{u}_m - \frac{1}{2} \left(\dot{\varepsilon}_{ij} + 2 \dot{p}_{ij} \right) \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV -$$

$$- \sum_{k=1}^K \int\limits_{S_{ku}} \dot{T}^i \left(\dot{u}_i - \dot{\bar{u}}_i \right) dS - \sum_{k=1}^K \int\limits_{S_{k\sigma}} \dot{\bar{T}}^\alpha \dot{u}_\alpha dS. \qquad (28)$$

Далее следует учесть контактные условия. Положим, что на некотором числе контактных поверхностей осуществляются условия типа а), а на оставшихся - условия б). Совершенно очевидно, что поверхностные интегралы в (28) для участков сопряжения с условиями типа а) в силу (24) взаимно сократятся. Докажем, что в выражении (28) останутся лишь поверхностные интегралы по границам, где заданы условия типа б) и по общей поверхности всего объема тела. Для этого в функционале (28) выделим стоящий под знаком суммы второй поверхностный интеграл

$$\sum_{k=1}^{K} \int_{S_{k\sigma}} \dot{\bar{T}}^{\alpha} \dot{u}_{\alpha} dS ,$$

который, если разбить область интегрирования и учесть равенство (23), можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{K} \int_{S_{k\sigma}} \dot{\bar{T}}^{\alpha} \dot{u}_{\alpha} dS = \sum_{k=1}^{K} \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} \dot{u}_{\alpha} dS + \sum_{k=1}^{K} \int_{S_{k\sigma}^{(2)}} \dot{T}^{\alpha(0)} \dot{u}_{\alpha} dS . \tag{29}$$

Принимая во внимание тот факт, что полная поверхность всего тела есть

$$S = \sum_{k=1}^{K} S_k^{(2)} ,$$

второй интеграл в правой части (29) перепишем как

$$\int_{S_{\sigma}} \dot{T}^{\alpha(0)} \dot{u}_{\alpha} dS . \tag{30}$$

Преобразуем первый интеграл, фигурирующий в правой части (29). Имеем:

$$\sum_{k=1}^{K} \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} \dot{u}_{\alpha} dS = \sum_{k=1}^{K_1} \left\{ \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha^{+}(00)} \dot{u}_{\alpha}^{+} dS + \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha^{-}(00)} \dot{u}_{\alpha}^{-} dS \right\},$$

где $K_1 \left(K_1 < K \right)$ - общее число внутренних контактных поверхностей.

Выбирая одну и ту же нормаль и опуская знак «+» у вектора напряжения, согласно сделанным предположениям б) правую часть предыдущего равенства запишем в виде

$$\sum_{k=1}^{K_1} \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} \left(\dot{u}_{\alpha}^{+} - \dot{u}_{\alpha}^{-} \right) dS = \sum_{k=1}^{K_1} \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} n_{\alpha} f_{(n)} dS . \tag{31}$$

Учитывая (30) и (31), вместо (29) получим следующее равенство

$$\sum_{k=1}^{K} \int_{S_{k\sigma}} \dot{\bar{T}}^{\alpha} \dot{u}_{\alpha} dS = \int_{S_{\sigma}} \dot{T}^{\alpha(0)} \dot{u}_{\alpha} dS + \sum_{k=1}^{K_1} \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} n_{\alpha} f_{(n)} dS . \tag{32}$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum_{k=1}^{K} \int_{S_{ku}} \dot{T}^i \left(\dot{u}_i - \dot{\bar{u}}_i\right) dS = \int_{S_u} \dot{T}^i \left(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)}\right) dS \,. \tag{33}$$

Если теперь подставить (32) и (33) в (28), получим окончательное выражение функционала:

$$R = \sum_{k=1}^{K} \int_{V_k} \left\{ \dot{\sigma}^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^m \nabla_j \dot{u}_m - \frac{1}{2} \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^M + 2 \dot{p}_{ij} \right) \dot{\sigma}^{ij} \right\} dV -$$

$$- \int_{S_\sigma} \dot{T}^{\alpha(0)} \dot{u}_\alpha dS - \int_{S_u} \dot{T}^i \left(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(0)} \right) dS - \sum_{k=1}^{K_1} \int_{S_{k\sigma}^{(1)}} \dot{T}^{\alpha(00)} n_\alpha f_{(n)} dS. \tag{34}$$

Из вида (34) вытекает справедливость сформулированного выше утверждения. Таким образом, полученный функционал описывает поведение всего многокомпонентного тела. Отметим, что здесь суммирование производится по тем граничным поверхностям, где реализуются условия типа б). Запись (34) хороша в том отношении, что в ней выделен член, который исчезает, если потребовать, чтобы $f_{(n)} = 0$, т.е., чтобы был реализован случай полного сцепления.

В разделе 1.3 изложена сущность предложенных вариационных методов.

Вторая глава посвящена исследованию устойчивости многослойного композитного нелинейно - упругого стержня при различных способах его закреплений.

В разделе 2.1 рассматривается устойчивость трехслойного упругого стержня с искривленной внутренней структурой при шарнирном опирании. Введем в рассмотрение прямоугольный в плане стержень длиной l и толщиной $2h$. Предположим, что он составлен из трех различных по толщине слоев, причем модули упругости крайних слоев одинаковы, т.е. $E_1 = E_3 = E$, а E_2 - модуль упругости среднего слоя. Толщину первого слоя обозначим через $\delta_1(x)$, а толщину искривленного волокна – через $\Delta = const$. Тогда, очевидно, что толщина правого крайнего слоя определяется следующим равенством:

$$\delta_2(x) = 2h - \Delta - \delta_1(x) \,. \tag{35}$$

Условия контакта между слоями пакета заключатся в их жестком сцеплении. Из этого следует равенства на них перемещений, напряжений и отсутствие взаимного давления слоев. В дальнейших рассуждениях будем использовать гипотезу плоских сечений Кирхгофа-Лява, при которой сформулированные выше условия выполняются автоматически. При сделанных предположениях стержень является монолитным и может рассматриваться как обычный. Зададим декартовую систему координат с началом в точке $z=0$ и направим ось x вдоль длины стержня. Тогда уравнение состояния для пакета в целом запишем в виде одного равенства:

$$e^{v}=\frac{\sigma}{E_{k+1}}, \qquad a_k \le z \le a_{k+1} \quad (k=0,1,2), \tag{36}$$

где σ - напряжение. В (36), для краткости записи, введены следующие обозначения

$$a_0=-h,\quad a_1=-h+\delta_1(x),\quad a_2=-h+\delta_1(x)+\Delta,\quad a_3=h.$$

Значение a_3 непосредственно следует из равенства (35).

Рассмотрим теперь устойчивость описанного выше стержня, шарнирно опертого по торцам и центрально сжатого силой T. Решение соответствующей задачи осуществим посредством вариационного метода смешанного типа, в котором независимыми варьируемыми величинами являются скорости напряжений и перемещений. Учитывая гипотезу плоских сечений, принимая, что ширина стержня равна единице и задаваясь нелинейностью только прогиба w, применяемый функционал запишем в форме:

$$R=-\int_0^l w_{,x}\dot{w}_{,x}dx+\int_0^l \dot{M}\dot{w}_{,xx}dx-\frac{T}{2}\int_0^l \dot{w}_{,x}^2dx-\frac{1}{2}\int_0^l\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\dot{\sigma}^2dxdz. \tag{37}$$

Здесь M - момент, а запятая означает частное дифференцирование по координате x. Под точкой понимается дифференцирование по T, т.е. $\dot{T}=1$. Отметим, что вариационный подход для решения рассматриваемой задачи имеет то преимущество, что позволяет обойти математические трудности, возникающие при использовании классических методов математической физики.

Тогда в развернутом виде последний интеграл в (37) перепишем следующим образом:

$$-\frac{1}{2}\int_0^l \sum_{k=0}^{2}\frac{1}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\dot{\sigma}^2 dxdz = -\frac{1}{2}\int_0^l \left\{\frac{1}{E}\int_{-h}^{-h+\delta_1(x)}\dot{\sigma}^2 dz + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{E_2}\int_{-h+\delta_1(x)}^{-h+\delta_1(x)+\Delta}\dot{\sigma}^2 dz + \frac{1}{E}\int_{-h+\delta_1(x)+\Delta}^{h}\dot{\sigma}^2 dz\right\}dx = -\frac{1}{2E}\int_0^l \int_{-h}^{-h+\delta_1(x)}\dot{\sigma}^2 dzdx - \qquad (38)$$

$$-\frac{1}{2E_2}\int_0^l \int_{-h+\delta_1(x)}^{-h+\delta_1(x)+\Delta}\dot{\sigma}^2 dzdx - \frac{1}{2E}\int_0^l \int_{-h+\delta_1(x)+\Delta}^{h}\dot{\sigma}^2 dzdx.$$

При использовании вариационного метода для решения задач устойчивости и выпучивания тонкостенных элементов конструкций одним из центральных вопросов является выбор аппроксимирующих функций для закона распределения напряжений по толщине. Примем, что напряжение σ по толщине стержня изменяется по линейному закону

$$\sigma = \sigma_* + z\sigma_{**}\,. \qquad (39)$$

Учитывая, что величина z меняется в пределах всей толщины стержня, усилие N и момент M определяются через σ посредством известных формул теории тонких стержней

$$N = \int_{-h}^{h}\sigma\, dz; \qquad M = \int_{-h}^{h}\sigma\, zdz\,. \qquad (40)$$

Подставляя значение (39) в равенстве (40), находим:

$$N = \int_{-h}^{h}\{\sigma_* + z\sigma_{**}\}dz = \sigma_*\int_{-h}^{h}dz = 2h\sigma_*\,.$$

Аналогично

$$M = \frac{2}{3}h^3\sigma_{**}\,.$$

В силу последних соотношений, из (39) имеем:

$$\sigma = \frac{N}{2h} + \frac{3z}{2h^3}M\,.$$

При решении задачи устойчивости будем считать $N = -T \equiv const$ и поэтому предыдущее выражение запишем как

$$\sigma = -\frac{T}{2h} + \frac{3z}{2h^3} M,$$

или в скоростях по T

$$\dot{\sigma} = -\frac{1}{2h} + \frac{3z}{2h^3} \dot{M} \ . \tag{41}$$

Согласно выражению (41), равенство (38), после соответствующего интегрирования по z и ряда довольно громоздких преобразований, можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\int_0^l \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \dot{\sigma}^2 dx dz = \\ & = -\frac{1}{8h^2}\int_0^l \Phi_0 dx + \frac{3}{8h^4}\int_0^l \Phi_1 \dot{M} dx - \frac{3}{8h^6}\int_0^l \Phi_2 \dot{M}^2 dx. \end{aligned} \tag{42}$$

Здесь

$$\Phi_0 = \frac{2h}{E} + \frac{\Delta}{E} + \frac{\Delta}{E_2},$$

$$\Phi_1 = -\frac{\Delta^2}{E_2} + \frac{2h\Delta}{E_2} - \frac{2\delta_1(x)\Delta}{E_2} + \frac{\Delta^2}{E} - \frac{2h\Delta}{E} + \frac{2\delta_1(x)\Delta}{E}, \tag{43}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \frac{3h^2\Delta}{E_2} - \frac{6h\delta_1(x)\Delta}{E_2} + \frac{3\delta_1^2(x)\Delta}{E_2} - \frac{3h\Delta^2}{E_2} + \frac{3\delta_1(x)\Delta^2}{E_2} + \frac{\Delta^3}{E_2} + \frac{2h^3}{E} - \\ & -\frac{3h^2\Delta}{E} + \frac{6h\delta_1(x)\Delta}{E} - \frac{3\delta_1^2(x)\Delta}{E} + \frac{3h\Delta^2}{E} - \frac{3\delta_1(x)\Delta^2}{E} - \frac{\Delta^3}{E} \ . \end{aligned}$$

Отметим, что Φ_0 является функцией x. Этот факт легко усматривается наличием связи (35). Теперь остается только ввести выражение (42) в (37). Отсюда получаем

$$\begin{aligned} R = & -\int_0^l w_{,x}\dot{w}_{,x} dx + \int_0^l \dot{M}\dot{w}_{,xx} dx - \frac{T}{2}\int_0^l \dot{w}_{,x}^2 dx - \\ & -\frac{1}{8h^2}\int_0^l \Phi_0 dx + \frac{3}{8h^4}\int_0^l \Phi_1 \dot{M} dx - \frac{3}{8h^6}\int_0^l \Phi_2 \dot{M}^2 dx. \end{aligned} \tag{44}$$

Для дальнейшего использования метода Релея-Ритца необходимо задать аппроксимирующие функции, описывающие формы изгиба и момента. Здесь, в качестве первых собственных функций, удовлетворяющих краевым условиям шарнирного опирания,

$$w(0)=w(l)=0; \quad M(0)=M(l)=0,$$

примем

$$w(x,T)=a(T)\sin\frac{\pi x}{l}, \quad M(x,T)=m(T)\sin\frac{\pi x}{l} \tag{45}$$

или в скоростях по T

$$\dot{w}=\dot{a}\sin\frac{\pi x}{l}, \quad \dot{M}=\dot{m}\sin\frac{\pi x}{l}, \tag{46}$$

где $\dot{a}$ и $\dot{m}$ независимые варьируемые функциональные аргументы. Учитывая (45) и (46) в (44), получим выражение для функционала. Равенства нулю

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{a}}=0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial R}{\partial \dot{m}}=0$$

приводят к следующей системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{m}=-a-T\dot{a} \quad \text{или} \quad m=-aT,$$

$$-\frac{\pi^2}{2l}\dot{a}+\frac{3}{8h^4}\int_0^l \Phi_1\sin\frac{\pi x}{l}dx-\frac{3}{4h^6}\dot{m}\int_0^l \Phi_2\sin^2\frac{\pi x}{l}dx=0.$$

Путем подстановки, полученную систему удается свести к одному уравнению

$$\frac{dT}{da}=\left[-\frac{\pi^2}{2l}+\frac{3}{4h^6}T\int_0^l \Phi_2\sin^2\frac{\pi x}{l}dx\right]\times$$
$$\times\left[-\frac{3}{8h^4}\int_0^l \Phi_1\sin\frac{\pi x}{l}dx-\frac{3}{4h^6}a\int_0^l \Phi_2\sin^2\frac{\pi x}{l}dx\right]^{-1}. \tag{47}$$

Введя следующие безразмерные величины

$$\tau=\frac{T}{Eh}, \quad y=\frac{a}{h}, \quad \xi=\frac{h}{l}, \quad \beta_1(x)=\frac{\delta_1(x)}{\Delta}, \quad \beta_2(x)=\frac{\delta_2(x)}{\Delta},$$

$$\varphi_1=\frac{3}{8}\frac{EF_1}{h^3}, \quad \varphi_2=\frac{3}{4}\frac{EF_2}{h^4}, \quad \alpha=\frac{E}{E_2},$$

в которых, в свою очередь

$$F_1 = \int_0^l \Phi_1 \sin\frac{\pi x}{l}dx = \frac{4h^2}{E}\int_0^l \frac{-\beta_1(x)+\beta_2(x)+\alpha\beta_1(x)-\alpha\beta_2(x)}{\left(1+\beta_1(x)+\beta_2(x)\right)^2}\sin\frac{\pi x}{l}dx\,,$$

$$F_2 = \int_0^l \Phi_2 \sin^2\frac{\pi x}{l}dx = \frac{8h^3}{E}\int_0^l \Big[\frac{1}{4}\beta_1^3(x)+\frac{1}{4}\beta_2^3(x)+\frac{3}{4}\beta_1(x)+\frac{3}{4}\beta_2(x)+$$

$$+3\beta_1(x)\beta_2(x)+\frac{3}{4}\beta_1(x)\beta_2^2(x)+\frac{3}{4}\beta_1^2(x)\beta_2(x)+$$

$$+\frac{1}{4}\alpha+\frac{3}{4}\beta_1^2(x)\alpha+\frac{3}{4}\beta_2^2(x)\alpha-\frac{3}{2}\beta_1(x)\beta_2(x)\alpha\Big]\times$$

$$\times\left[1+\beta_1(x)+\beta_2(x)\right]^{-3}\cdot\sin^2\frac{\pi x}{l}dx,$$

(47) можно переписать в виде

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{-\dfrac{\pi^2}{2}\xi+\varphi_2\tau}{\varphi_1-\varphi_2 y}\,. \qquad (48)$$

В уравнении (48) переход к безразмерному дифференцированию осуществлялся по правилу

$$\frac{d}{dT} = \frac{1}{hE}\frac{d}{d\tau}\,.$$

Из (48) величина критической силы устойчивости, определяемая из условия $d\tau/dy = 0$, запишется посредством формулы

$$\tau_{кр} = \frac{\pi^2}{2}\xi\varphi_2^{-1}\,. \qquad (49)$$

Для конкретизации функцию $\delta_1(x)$ примем её в виде:

$$\delta_1(x) = \delta_{10} + \delta_{11}\sin\frac{k\pi x}{l}\,,$$

тогда

$$\beta_1(x) = \frac{\delta_{10}}{\Delta}+\frac{\delta_{11}}{\Delta}\sin\frac{k\pi x}{l}\,,$$

$$\beta_2(x) = \frac{2h}{\Delta}-\frac{\delta_{10}}{\Delta}-\frac{\delta_{11}}{\Delta}\sin\frac{k\pi x}{l}-1\,,$$

где k - параметр искривления, характеризующий форму волокна, а $\frac{\delta_{11}}{\Delta}$ - её безразмерная амплитуда.

В принятых здесь обозначениях, соответствующая формула принимает вид:

$$\tau_{кр}=\frac{2}{3}\pi^2\xi^2\frac{(\beta+0{,}5)^3}{\beta^3+1{,}5\beta^2+0{,}75\beta+0{,}125\alpha}.$$

Для однородного стержня, когда $\alpha=1$, автоматически получаем значение критической силы Эйлера

$$\tau_{кр}=\frac{2}{3}\pi^2\xi^2.$$

Численный анализ приводит следующие выводы, что при фиксированных k и α увеличение амплитуды искривления δ_{11}/Δ увеличивает значение $\tau_{кр}$, при заданных δ_{11}/Δ и α увеличение параметра k приводит к увеличению критической силы, при заданных k и δ_{11}/Δ наблюдается снижение значения $\tau_{кр}$ при возрастании α.

В разделе 2.2, аналогичным образом, исследована устойчивость трехслойного упругого стержня с искривленной внутренней структурой при жестком защемлении обоих концов и комбинированном защемлении, т.е. один конец стержня жестко защемлен, а другой шарнирно опиран.

Раздел 2.3 посвящен определению критических нагрузок для многослойных стержней при шарнирном опирании. В качестве собственных функций для n-ой моды, удовлетворяющих краевым условиям, примем

$$w(x,T)=\sum_{i=1}^{n}a_i(T)\sin\frac{i\pi x}{l};\qquad M(x,T)=\sum_{i=1}^{n}m_i(T)\sin\frac{i\pi x}{l}.$$

В разделах 2.4 и 2.5, соответственно, рассматриваются решения задачи предельного состояния нелинейно-упругого многослойного стержня при жестком защемлении и комбинированном закреплении. Здесь основное внимание уделяется на влияние степени нелинейности на критическую силу.

В разделе 2.6 вычислена критическая сила Шенли нелинейно-упругого многослойного стержня при шарнирном опирании.

В третьей главе исследовано нелинейное поведение многослойной нелинейно-упругой цилиндрической оболочки. Здесь основной интерес представляет анализ выпучивания разностенных колец, материал которых обладает свойство нелинейных упругостей.

Раздел 3.1 посвящен численному решению задачи выпучивания нелинейно-упругого эксцентрического кольца. Рассмотрим эксцентричное кольцо радиуса R и толщины $2h(\theta)$, изготовленного из нелинейно-упругого материала и подверженного равномерному внешнему давлению q. Здесь, для описания свойств материала кольца будем использовать уравнение нелинейной теории упругости. Запишем уравнение состояния для пакета в целом в виде одного равенства

$$e^{\Phi} = \frac{\sigma}{E}\left\{1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma^0}\right)^n\right\}, \tag{50}$$

где σ - напряжение, E и σ^0 соответственно модуль упругости и предел пропорциональности материала, а n - показатель нелинейности, принимающий четные значения (2, 4, 6, …).

Для рассматриваемого случая выражение функционала запишется следующим образом:

$$\mathrm{K} = R\int\limits_{-h(\theta)}^{h(\theta)}\int\limits_{0}^{2\pi}\left\{\dot{\sigma}\dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2R^2}\left[\left(\frac{\partial\dot{w}}{\partial\theta} - \dot{v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\dot{v}}{\partial\theta} + \dot{w}\right)^2\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\dot{\sigma}\,\dot{e}^{\Phi}\right\}dzd\theta + R\int\limits_{0}^{2\pi}\dot{w}d\theta, \tag{51}$$

где ε деформация, v и w - касательное перемещение и прогиб. Под точкой здесь и в дальнейшем понимается дифференцирование по q ($\dot{q} = 1$). Учитывая выражение (50), функционал (51) принимает следующий вид:

$$\mathrm{K} = R\int\limits_{-h(\theta)}^{h(\theta)}\int\limits_{0}^{2\pi}\left\{\dot{\sigma}\dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2R^2}\left[\left(\frac{\partial\dot{w}}{\partial\theta} - \dot{v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\dot{v}}{\partial\theta} + \dot{w}\right)^2\right] - \right.$$

$$-\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-h(\theta)}^{h(\theta)}\frac{\dot{\sigma}^2}{E}\left\{1+(n+1)\left(\frac{\sigma}{\sigma^0}\right)^n\right\}dzd\theta+R\int_0^{2\pi}\dot{w}d\theta\ . \tag{52}$$

Разностенность кольца будем аппроксимировать выражением

$$h(\theta)=h_0(1+\lambda\sin\theta).$$

Из физических соображений следует, что $\lambda\in[0,1)$. Вследствие гипотезы плоских сечений имеем выражение $\varepsilon=\varepsilon_0-\kappa z$. Здесь ε_0 и изменение кривизны κ определяются по формулам

$$\varepsilon_0=\frac{1}{R}\left(w+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{2R^2}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}-v\right)^2\right\}, \tag{53}$$

$$\kappa=\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\frac{\partial v}{\partial\theta}\right). \tag{54}$$

В силу тонкостенности, распределение напряжений по толщине примем линейным

$$\sigma=\sigma_0+\frac{z}{2h_0}\sigma_1\,. \tag{55}$$

Заметим, что аппроксимация (55) нуждается в уточнении с целью определения таких λ, при которых она удовлетворительна и существует необходимость ее представления в виде

$$\sigma=\sigma_0+\frac{z}{2h(\theta)}\sigma_1\,. \tag{56}$$

Далее положим

$$\begin{gathered}\sigma_0=a(q)+b(q)\sin l\theta,\ \sigma_1=c(q)\cos l\theta,\\ w=w_0(q)+A(q)\cos l\theta,\ v=B(q)\sin l\theta,\end{gathered} \tag{57}$$

причем

$$a(0)=b(0)=c(0)=0,\ \ w_0(0)=w_{00}\,,\ A(0)=A_0\,,\ B(0)=B_0\,. \tag{58}$$

После дифференцирования соотношений (53), (54), (56) и (57), запишем

$$\dot{\varepsilon}=\frac{1}{R}\left(\dot{w}+\frac{\partial\dot{v}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right)\left(\frac{\partial\dot{v}}{\partial\theta}+\dot{w}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}-v\right)\left(\frac{\partial\dot{w}}{\partial\theta}-\dot{v}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial\theta^2}-\frac{\partial\dot{v}}{\partial\theta}\right)z, \tag{59}$$

$$\dot{\sigma}=\dot{\sigma}_0+\frac{z}{2h(\theta)}\dot{\sigma}_1, \tag{60}$$

где

$$\begin{aligned}&\dot{\sigma}_0=\dot{a}(q)+\dot{b}(q)\sin l\theta, \qquad \dot{\sigma}_1=\dot{c}(q)\cos l\theta,\\&\dot{w}=\dot{w}_0(q)+\dot{A}(q)\cos l\theta, \qquad \dot{v}=\dot{B}(q)\sin l\theta.\end{aligned} \tag{61}$$

Здесь $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$, $\dot{B}$, $\dot{A}$ и $\dot{w}$ - варьируемые величины.

Следующий ход вычислений состоит в том, что соотношения (56) и (59)-(61) подставляются в (52) и функционал K находится как функция a, b, c, B, A, w и производных этих величин по q. Сначала посмотрим случай, когда $n=2$. Варьируя K по $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$, $\dot{B}$, $\dot{A}$ и $\dot{w}$, получаем систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений. Проинтегрировав полученную систему с учетом начальных условий (58), приходим к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}&2h_0a\left(1+\frac{w_0}{R}\right)+Rq=0,\\&2\left(l^2+1\right)aB+4laA+\frac{l}{3}h_0c\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\right)=0,\\&2\left(l^2+1\right)aA+4laB+\frac{l^2}{3}h_0c\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\right)=0,\end{aligned} \tag{62}$$

$$2w_0+\frac{{w_0}^2}{R}+\left(l^2+1\right)\frac{\left(A^2+B^2\right)}{2R}+2l\frac{AB}{R}-\frac{2Ra}{E}-\frac{3}{4}\frac{R}{E\sigma_0^2}\left[\frac{4}{3}a^3+\right.$$

$$\left.+4ab^2+\frac{1}{3}ac^2\right]=2w_{00}+\frac{{w_{00}}^2}{R}+\left(l^2+1\right)\frac{\left({A_0}^2+{B_0}^2\right)}{2R}+2l\frac{A_0B_0}{R},$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\left[\frac{lh_0}{3R}\left(lA+B\right)\right]-\frac{Rc}{6E}-\frac{3}{2}\frac{R}{E\sigma_0^2}\left[\frac{1}{3}a^2c+\frac{1}{12}cb^2+\frac{1}{80}c^3\right]=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\right)\left[\frac{lh_0}{3R}\left(lA_0+B_0\right)\right],$$

$b = 0$.

Таким же образом можно получить систему уравнений для случая, когда напряжение представляется зависимостью (55).

Считая, что $\frac{w_0}{R} << 1$, из первого уравнения системы (62) сразу можно определить

$$a = -\frac{qR}{2h_0}. \tag{63}$$

Из второго и третьего уравнений системы (62) имеем $B = -\frac{A}{2}$. Тогда

$$c = -\frac{6a}{lh_0\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\right)}(lA + B).$$

Введя обозначения $\frac{lA+B}{h_0} = \eta$, последнее равенство перепишем в виде

$$c = -\frac{6a}{l\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\right)}\eta. \tag{64}$$

Подставляя (63) и (64) в последнее уравнение системы (62) и введя следующие безразмерные величины: $\tau = \frac{q}{E}$; $\xi = \frac{h_0}{R}$; $\gamma = \frac{E}{\sigma^0}$, после несложных преобразований, будем иметь алгебраическое выражение для критической силы:

$$\tau = \left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\right)^2\left(1-\frac{\eta_0}{\eta}\right) - \frac{l^4\gamma^2\xi^4}{3}\tau^3 - \frac{9l^2\eta^2\gamma^2\xi^4}{20\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\right)^2}\tau^3. \tag{65}$$

Соответствующая формула, когда напряжение представляется зависимостью (55), запишется следующим образом:

$$\tau_* = \left(1+\frac{3}{2}\lambda^2\right)\left(1-\frac{\eta_0}{\eta}\right) - \frac{l^4\gamma^2\xi^4}{3}\tau_*^3 - \frac{9l^2\eta^2\gamma^2\xi^4}{20\left(1+\frac{3}{2}\lambda^2\right)^2}\tau_*^3. \tag{66}$$

Аналогично можно получить разрешающие уравнения для случаях $n = 4$ и $n = 6$.

Уравнения (65) и (66) решаются методом деления отрезка пополам при определенных значениях параметров.

Величина давления при упругости определяется из уравнений (65), (66), когда $\gamma = 0$:

$$\tau = \left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\right)^2 \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta}\right).$$

Значение критического давления определяется из последней формулы при $\eta \to \infty$ и равно

$$\tau_{кр} = \left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\right)^2.$$

Численные эксперименты показывают, что необходимость представления напряжения зависимостью (56) приводит к довольно значительному уменьшению значений критической силы. С ростом параметра λ значение критической силы возрастает и с увеличением параметра γ значение критической силы уменьшается, а максимальное значение давления получается при случае линейной упругости, когда $\eta \to \infty$. Здесь получен весьма важный результат $\tau_{кр(n=2)} > \tau_{кр(n=4)} > \tau_{кр(n=6)}$.

В разделе 3.2 аналогичным образом исследовано выпучивание нелинейно-упругого эксцентрического кольца с учетом частичной и полной геометрической нелинейностей.

Раздел 3.3 посвящен исследованию выпучивания многослойной нелинейно-упругой цилиндрической оболочки и выяснилось, что подбором неоднородности, при одних и тех же геометрических параметрах кольца, можно уменьшить максимальное напряжение и тем самым, в определенном смысле, оптимизировать конструкцию.

В разделе 3.4 рассматривается задача предельного состояния многослойного эксцентричного кольца, изготовленного из нелинейно-упругого материала и подверженного равномерному внешнему давлению.

В разделе 3.5 исследована задача потери устойчивости длинной линейно-упругой оболочки при неравномерном сжатии. Принимается, что оболочка сжата неравномерно распределенной радиальной нагрузкой, которая изменяется по величине и направлению согласно закону

$$q = q_0\left(1 + \lambda \sin^2 \varphi\right), \tag{67}$$

здесь λ - параметр неравномерности ($\lambda > 0$), а q_0 - управляющий параметр нагружения.

В пренебрежении влиянием закреплений торцов исходная задача сводится к анализу потери несущей способности кольца единичной ширины, выделенной из этой оболочки. При этом используются разные геометрически нелинейные теории. Обозначим через v и w, соответственно, перемещение в касательном направлении и прогиб. В основе используемой здесь геометрически нелинейной теории ставятся следующие предположения:

а) в процессе выпучивания учитывается одновременно нелинейность по v и w;

б) пренебрегая касательным перемещением, ограничиваемся нелинейностью только прогиба;

в) при $v \approx 0$ считается справедливым выполнение неравенства $w/R << 1$;

г) процесс устойчивости происходит в плоскости кольца;

д) в силу тонкостенности окружное напряжение σ меняется по толщине по линейному закону.

Здесь под скоростью понимается дифференцирование по монотонно возрастающему параметру q_0, так что

$$\dot{q} = 1 + \lambda \sin^2 \varphi .$$

Вследствие гипотезы плоских сечений запишем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + kz .$$

Учитывая допущения а), б) и в) величину ε_0 и кривизну k определим соответственно по формулам нелинейной теории тонких оболочек

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{R}\left(w + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{2R^2}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - v\right)^2\right\}, \\ \kappa &= -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right), \end{aligned} \tag{68}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2}\left\{ w^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right\}, \ \kappa = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \tag{69}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2, \ \kappa = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right). \tag{70}$$

Тогда выражения функционалов для теорий а), б) и в) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_a = R\int_{-h}^{h}\int_{0}^{2\pi}\left\{ \dot{\sigma}\dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2R^2}\left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} - \dot{v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial \varphi} + \dot{w} \right)^2 \right] \right\} d\varphi dz - \\ -\frac{R}{2}\int_{-h}^{h}\int_{0}^{2\pi}\frac{\dot{\sigma}^2}{E} d\varphi dz + R\int_{0}^{2\pi}\dot{q}\dot{w}d\varphi, \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_{б} = R\int_{-h}^{h}\int_{0}^{2\pi}\left\{ \dot{\sigma}\dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2R^2}\left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} \right)^2 + \dot{w}^2 \right] \right\} d\varphi dz - \\ -\frac{R}{2}\int_{-h}^{h}\int_{0}^{2\pi}\frac{\dot{\sigma}^2}{E} d\varphi dz + R\int_{0}^{2\pi}\dot{q}\dot{w}d\varphi, \end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_{в} = R\int_{-h}^{h}\int_{0}^{2\pi}\left\{ \dot{\sigma}\dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2R^2}\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} d\varphi dz - \\ -\frac{R}{2}\int_{-h}^{h}\int_{0}^{2\pi}\frac{\dot{\sigma}^2}{E} d\varphi dz + R\int_{0}^{2\pi}\dot{q}\dot{w}d\varphi, \end{aligned} \tag{73}$$

Для получения окончательного вида функционала, воспользуемся методом Релея-Ритца. С этой целью, в качестве аппроксимирующих функций положим

$$w = w_0(q) + w_1(q)\cos 2\varphi, \quad v = v_0(q)\sin 2\varphi, \quad M = m(q)\cos 2\varphi \tag{74}$$

Следуя допущению д), в дальнейших рассуждениях примем

$$\sigma = -\frac{qR}{2h} + \frac{3z}{2h^3}M \qquad \text{или} \qquad \dot{\sigma} = -\frac{\dot{q}R}{2h} + \frac{3z}{2h^3}\dot{M}. \tag{75}$$

Аналогичным образом производим дальнейший ход вычислений и получаем аналитические выражения для функционалов. Далее, решение можно вести из условия стационарности $\delta K = 0$ при дополнительном требовании $\frac{dq_0}{dw} = 0$. Тогда формулы для критической силы q_0^v для случаев а), б) и в) имеют вид:

$$q_{0(a)}^v = \frac{32}{3(2+\lambda)} \frac{h^3}{R^3} E\,,\ q_{0(б)}^v = \frac{128}{15(2+\lambda)} \frac{h^3}{R^3} E\,,\ q_{0(в)}^v = \frac{16}{3(2+\lambda)} \frac{h^3}{R^3} E\,. \quad (76)$$

Отсюда видно, что параметр λ входит в формулы (76) одинаковым образом. При $\lambda = 0$ получаются известные формулы для критической гидростатической нагрузки.

Анализируя формулу (76) можно сделать следующий вывод, что влияние разных теорий на значение критической силы q_0^v весьма существенно:

$$q_{0(a)}^v > q_{0(б)}^v > q_{0(в)}^v\,.$$

В разделе 3.6 исследовано выпучивание нелинейно-упругой длинной цилиндрической оболочки под действием неравномерного внешнего давления. Выявлено, что критическая сила существенно зависит от параметра неравномерности - λ.

Раздел 3.7 посвящен устойчивости многослойного упругого кольца под действием не гидростатической сжимающей нагрузки. Здесь рассмотрен случай, когда распределенная по поверхности сжимающая нагрузка имеет общий вид:

$$q = q_0 f(\varphi)\,, \quad (77)$$

где $f(\varphi)$ - задаваемая достаточно гладкая функция.

В разделе 3.8 исследовано выпучивание длинной многослойной нелинейно-упругой оболочки, составленной из разных материалов и подверженной действию внешнего давления. Передаваемая нагрузка не является гидростатической, она существенно изменяется по величине и направлению.

В четвертой главе дается развитие вариационного принципа на случай линейно вязко-упругой неоднородной по толщине элементов. Это обобщение посвящено некоторому развитию линейной теории наследственности для неоднородных по толщине и многослойных элементов конструкций.

В разделе 4.1 исследована устойчивость многослойного линейно вязко-упругого кольца, составленного из различных материалов и находящегося под действием равномерно распределенного внешнего давления заданной интенсивности. Зададим полярную систему координат (z,φ) и введем в рассмотрение кольцо радиуса R и толщины $2h$. Предположим, что оно составлено из s чередующихся соединенных между собой по всем окружностям, разных по толщине концентрических слоев с разными значениями модуля упругости E_{k+1} и функциями ползучести $D_{k+1}\{(t-\tau)\sigma(\tau)\}$ $[k=0,1,\ldots(s-1)]$. Далее будем их считать линейными относительно напряжения σ:

$$D_{k+1}\{(t-\tau)\sigma(\tau)\}=F'_{k+1}(t-\tau)\sigma(\tau),$$

где $F'_{k+1}(t-\tau)$ - разностное ядро ползучести, а штрих означает дифференцирование по параметру $(t-\tau)$. Толщину каждого слоя обозначим через δ_k. Таким образом, $\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_s=2h$ есть полная толщина кольца.

Выпишем физическое соотношение для пакета в целом в виде одного равенства

$$\varepsilon^{\Phi}=\frac{\sigma}{E_{k+1}}+\int_0^t F'_{k+1}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau\,, \qquad a_k\le z\le a_{k+1}\,, \tag{78}$$

где

$$a_k=-h+\sum_{i=0}^{s}\delta_i \qquad (\delta_0=0). \tag{79}$$

Для дальнейших целей конкретизируем функцию $F'_{k+1}(t-\tau)$, задав её в экспоненциальном виде:

$$F'_{k+1}(t-\tau)=\frac{A_{k+1}}{E_{k+1}}e^{-\alpha(t-\tau)}. \tag{80}$$

Здесь A_{k+1} – коэффициенты ползучести материалов слоев, а показатель α принимается одинаковым для всего пакета.

Рассмотрим теперь устойчивость выбранного кольца, сжатого равномерно распределенной по внешней поверхности сжимающей нагрузкой $q=const$. В основе геометрически нелинейной теории рассмотрим два случая:

а) в процессе деформирования учитывается одновременно нелинейность и по прогибу w и по касательному перемещению v (полная нелинейность);

б) пренебрегая касательным перемещением, ограничимся нелинейностью только прогиба.

Вследствие гипотезы плоских сечений запишем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + kz \, .$$

Величину ε_0 и кривизну k определим по формулам нелинейной теории тонких оболочек (формулы (68) и (69)).

Выражения функционалов даны в формулах (71) и (72). Под точкой здесь и далее будем понимать дифференцирование по физическому времени t. Из (80) имеем:

$$F''(t-\tau) = -\alpha \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} e^{-\alpha(t-\tau)}$$

и для $\dot{\varepsilon}^{\Phi}$ запишем

$$\dot{\varepsilon}^{\Phi} = \frac{1}{E_{k+1}} \left\{ \dot{\sigma} + A_{k+1} \left[\sigma - \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \right] \right\} . \tag{81}$$

Учитывая в (71) и (72) зависимость (81), получим выражения функционалов для случаев а) и б). Чтобы получить окончательный вид функционалов, воспользуемся методом Релея-Ритца. С этой целью, в качестве аппроксимирующих функций положим

$$w = w_0(t) + w_1(t)\cos l\varphi \, , \quad v = v_0(t)\sin l\varphi \, , \quad M = m(t)\cos l\varphi \tag{82}$$

где величина l принимает четные значения (2,4,6) и характеризует число волн в окружном направлении, а $\dot{w}_0$, $\dot{w}_1$, $\dot{v}_0$ и $\dot{m}$ - независимые варьируемые параметры. В дальнейших рассуждениях примем

$$\sigma = -\frac{qR}{2h} + \frac{3z}{2h^3} M \qquad \text{или} \qquad \dot{\sigma} = \frac{3z}{2h^3} \dot{M} \, . \tag{83}$$

Последующий ход вычислений заключается в том, что соотношения (82), (83) и их производные подставляются в выражение функционала (случай а)), затем, после интегрирования по z и φ, находим его как функцию w_0, w_1, v_0, m и их производных по t. После соответствующих выкладок, получим выражение для функционала. Условие стационарности построенного функционала ($\delta \mathrm{K} = 0$) приводит к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Комбинируя эти уравнения, можно записать

$$
\begin{aligned}
&\dot{w}_1\left(-\frac{l^2-1}{R}+\frac{9\left(l^2-1\right)R^2}{4l^2h^6}\eta_2 q\right)+\frac{9\left(l^2-1\right)R^2}{4l^2h^6}\gamma_2 q w_1-\\
&-\alpha\frac{9\left(l^2-1\right)R^2}{4l^2h^6}\gamma_2 q\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}w_1(\tau)d\tau=0.
\end{aligned}
\tag{84}
$$

В (84), для краткости записи, введены следующие обозначения

$$
\eta_2=\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}z^2dz\,,\qquad \gamma_2=\sum_{k=0}^{s-1}\frac{A_{k+1}}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}z^2dz\,.
$$

Уравнение (84) необходимо дополнить начальным условием

$$
w_1(0)=w_1^0\,.
$$

Величина w_1^0 представляет собой значение прогиба немедленно после приложения нагрузки q. Рассмотрение вопроса об устойчивости при вязко-упругости имеет смысл только тогда, когда действующая нагрузка меньше критической. Так как мгновенная деформация линейно упругая, то для определения w_1^0 и $q_{кр}$ естественно применить вариационный принцип, задавшись тем же предположительным распределением напряжения, перемещений и момента, что и при анализе вязко-упругости, то есть, представив w, v, M и σ формулами (82) и (83). Оставляя в основном прежние обозначения, соответствующий функционал в этом случае принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{K}=R\int_{-h}^{h}\int_0^{2\pi}\left\{\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}+\frac{\sigma}{2R^2}\left[\left(\frac{\partial\dot{w}}{\partial\varphi}-\dot{v}\right)^2+\left(\frac{\partial\dot{v}}{\partial\varphi}+\dot{w}\right)^2\right]\right\}d\varphi dz-\\
&-\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\dot{\sigma}^2\,dz\,d\varphi+R\int_0^{2\pi}\dot{w}\,d\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Однако здесь под точкой следует понимать дифференцирование по q. Вычисляя этот функционал и варьируя его по $\dot{w}_0$, $\dot{w}_1$, $\dot{v}_0$ и $\dot{m}$, окончательно приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно $\dot{w}_1$

$$\dot{w}_1 = w_1 \left\{ \frac{3R^2\left(l^2-1\right)}{2l^2h^4}\eta_2 \right\} \left\{ \frac{2h^2\left(l^2-1\right)}{3R} - \frac{3R^2\left(l^2-1\right)}{2l^2h^4} q\eta_2 \right\}^{-1}. \tag{85}$$

Для определения критической нагрузки надо приравнять нулю знаменатель уравнения (85). Отсюда

$$q_{кр} = \frac{4l^2h^6}{9R^3}\eta_2^{-1}, \tag{86}$$

а величина мгновенного прогиба находится по формуле, которую легко установить из интегрирования уравнения (85) методом разделения переменных:

$$w_1^0 = w_1^{\vee} \frac{1}{1 - \dfrac{9R^3 q}{4l^2h^6}\eta_2}. \tag{87}$$

Здесь величина $w_1^{\vee}$ - задаваемая амплитуда начального несовершенства кольца.

Введем следующие безразмерные соотношения, позволяющие значительно сократить последующие записи

$$y = \frac{w_1}{h}, \qquad \omega = \frac{q}{q_{кр}} = \frac{\omega_1}{l^2},$$

где

$$\omega_1 = q\left\{ \frac{4h^6}{9R^3}\eta_2^{-1} \right\}^{-1},$$

а $q_{кр}$ определяется по формуле (86).

Такое обезразмеривание ω преследует цель записать далее задачу в виде, явным образом зависящим от l. Что касается ω, то, как уже отмечалось выше, для неё имеем неравенство $\omega < 1$, откуда следует, что $\omega_1 < l^2$. Теперь, уравнение (84) и начальное условие (87) будут выглядеть следующим образом:

$$\dot{y} - \frac{\omega_1}{l^2 - \omega_1}\frac{\gamma_2}{\eta_2}\left\{ y - \alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} y(\tau)\, d\tau \right\} = 0, \tag{88}$$

$$y_0 = y^{\vee} \frac{1}{1 - \dfrac{\omega_1}{l^2}}, \tag{89}$$

где $y^{\vee} = \dfrac{w_1^{\vee}}{h}$. После несложных вычислений получим:

$$y(t) = y_0 \left\{ \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} + \frac{\alpha}{\lambda} \right\}, \tag{90}$$

здесь

$$\beta = \frac{\omega_1}{l^2 - \omega_1} \frac{\gamma_2}{\eta_2}, \quad -\lambda = \beta - \alpha .$$

Согласно формуле (90) следует, что в зависимости от знака λ возможны различные варианты решения. Если $\lambda \le 0$, то осуществляется неограниченный рост прогиба во времени. При $\lambda < 0$ он имеет экспоненциальный характер, а для $\lambda = 0$ - линейный, причем

$$y = y_0 (1 + \alpha t),$$

в чем можно легко убедиться, применив к (88) правило Лопиталя. Если же $\lambda > 0$, то наблюдается ограниченный рост прогиба. Его предельное значение определяется величиной $y_* = y_0 \dfrac{\alpha}{\lambda}$, где, по определению, $\alpha / \lambda > 1$.

Аналогичным образом, исследуя случай б), находим уравнение (90), однако β в этом случае определяется из равенства

$$\beta = \frac{\omega_1}{\dfrac{5l^4}{4(l^2+1)} - \omega_1} \frac{\gamma_2}{\eta_2} .$$

Чисто визуальная идентичность полученного решения (90) для случаев а) и б) вполне объяснима проведенным обезразмериванием, так как в обоих случаях критическая сила выбирается из решения соответствующей линейно-упругой задачи. Поэтому здесь вопрос необходимо формулировать следующим образом: задавать такие значения ω, которые соответствуют одному и тому же значению q. Очевидно, что тогда численное значение мгновенных прогибов будут различными.

Принимая $\omega_1 = 3$, что соответствует случаю простой геометрической нелинейности, из предыдущих рассуждений имеем следующую цепочку равенств:

$$3q_{кр}^{(1)} = \omega_2 q_{кр}^{(2)} = \omega_3 q_{кр}^{(3)},$$

в которой

$$q_{кр}^{(1)} = \frac{l^2 h^6}{9R^3}\eta_2^{-1}, \quad q_{кр}^{(2)} = \frac{16 l^2 h^6}{45 R^3}\eta_2^{-1}, \quad q_{кр}^{(3)} = \frac{4 l^2 h^6}{9R^3}\eta_2^{-1}.$$

Здесь верхние и нижние индексы соответствуют различным теориям нелинейности, а именно: (1) - простая нелинейность, (2) – нелинейность только прогиба, (3) – полная нелинейность. Отсюда имеем: $\omega_2 \approx 0{,}94$, $\omega_3 \approx 0{,}75$.

Полученное выше решение (90) в принципе применимы для любых значений t. Однако очень большие прогибы в кольцах, являющихся элементами конструкций, недопустимы сами по себе. Поэтому весьма разумно ограничить время эксплуатации кольца условием достижения прогибом некоторой величины, фиксированной из тех или иных физически обоснованных соображений и тем самым определить критическое время устойчивости $t_{кр}$. Примем $\tilde{y} = 1$, что соответствует безразмерному прогибу, равному половине толщины. Согласно отмеченному, запишем

$$1 = y_0 \left\{ \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) e^{-\lambda t_{кр}} + \frac{\alpha}{\lambda} \right\},$$

откуда находим

$$t_{кр} = -\frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{\lambda - \alpha\, y_0}{\lambda\, y_0 \left(1 - \dfrac{\alpha}{\lambda}\right)} \right|. \tag{91}$$

Для численного анализа ограничимся случаем $\lambda < 0$. Проведенный расчет позволяет заключить, что учет полной нелинейности приводит к существенному увеличению критического времени.

В разделе 4.2 исследуется устойчивость многослойной, разностенной, линейно вязко-упругой цилиндрической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного бокового давления. Исследование подобно предыдущему параграфу.

Раздел 4.3 посвящен исследованию потери устойчивости многослойного линейно вязко-упругого кольца, составленного из различных материалов и находящегося под действием неравномерно распределенного внешнего давления заданной интенсивности. Исследование подобно предыдущим параграфам

В разделе 4.4 исследуется предельное состояние сжатых вязко-упругих многослойных стержней, реологическое поведение которых записывается посредством линейных соотношений наследственной теории упругости. Здесь преследуется цель выявить влияние краевых условий, соответствующих жесткому и комбинированному защемлениям на критическое время устойчивости.

В заключительной части диссертации приводятся основные выводы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1) Обобщен вариационный принцип для случая, когда мгновенная деформация упруго-пластическая и подчиняется уравнениям типа теории течения; дана модификация вариационного принципа для гетерогенных сред;
2) преимущество вариационного подхода к решению поставленной задачи состоит в необходимости решения нелинейных задач;
3) приведенные численные анализы необходимы для экономии материала при одновременном уменьшении веса конструкции, а также для изыскания дополнительных прочностных ресурсов, такие конструкции обладают антикоррозийными свойствами;
4) полученные результаты позволяют утверждать, что подбором неоднородности, при одних и тех же геометрических параметрах эксцентрического кольца, можно увеличить или уменьшить критическую силу и, тем самым, в определенном смысле оптимизировать конструкцию;
5) достоверность полученных результатов обеспечивается изначальными непротиворечивыми допущениями, корректностью поставленных задач, применением обоснованных математических методов, сравнением в частных случаях с известными решениями, физически обоснованными выводами и применением апробированных методов решения;

6) путем комбинирования свойств материалов слоев, их толщин и числа слоев в пакете можно добиться более эффективного и полного использования несущей способности кольца;
7) учет полной нелинейности приводит к существенному увеличению критического времени, откуда следует, что при прочих равных условиях это приводит к возможности более рационально использовать несущую способность кольца;
8) конструированием неоднородности можно увеличить (уменьшить) критическое время устойчивости и, тем самым, в определенном смысле оптимизировать конструкцию;
9) критическое время для двухслойного кольца больше, чем для трехслойного кольца и для однородного случая, откуда следует, что при прочих равных условиях это приводит к возможности более рационально использовать несущую способность кольца;
10) путем комбинирования свойств материала слоев и их толщины можно добиться более эффективного и полного использования несущей способности стержня;
11) конструированием неоднородности можно увеличить или уменьшить критическую силу устойчивости и, тем самым, в определенном смысле оптимизировать конструкцию;
12) полученные результаты можно использовать при моделировании конструкций, т.е. можно увеличить (уменьшить) значение давления.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Аббасова Т.Т., Амензаде Р.Ю., Фатуллаева Л.Ф. Предельное состояние длинной цилиндрической упругой оболочки при ползучести // Bakı Universitetinin Xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2005, №2, s. 82-92.
2. Ализаде А.Н., Амензаде Р.Ю., Фатуллаева Л.Ф. Предельное состояние кусочно неоднородного по толщине нелинейно-упругого кольца / Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием. Ростов-на-Дону, Азов, 13-16 октябрь 2003, с. 31-33.
3. Амензаде Р.Ю., Ахундов М.Б., Фатуллаева Л.Ф. Устойчивость трехслойного упругого стержня с искривленной внутренней структурой // Вестник Чувашского Государственного

Педагогического Университета им. И.Я.Яковлева. Серия Механика предельного состояния, 2007, № 3, с. 11-18.

4. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т., Фатуллаева Л.Ф. Выпучивание длинной цилиндрической оболочки из нелинейно-упругого материала // Журнал «Механика оболочек и пластин», 2002, Нижний Новгород, с. 87-93.
5. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т., Фатуллаева Л.Ф. Выпучивание нелинейно-упругой длинной цилиндрической оболочки под действием неравномерного внешнего давления / «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела». II Международная Конференция. Казань, Россия, 8-11 декабря 2009 г, с. 31-33.
6. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т., Фатуллаева Л.Ф. Предельное время сжатого многослойного вязко-упругого кольца // Вестник Чувашского Государственного Педагогического Университета им. И.Я. Яковлева. Серия «Механика предельного состояния», 2008, № 2, с. 5-15.
7. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т., Фатуллаева Л.Ф. Предельное состояние двухслойного нелинейно-упругого стержня / "İnformasiya texnologiyaları və tətbiqi proqramlar" mövzusunda gənc tədqiqatçılar və tələbələrin II Respublika konfransının materialları. May 2002, Bakı, s. 52-55.
8. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т., Фатуллаева Л.Ф. Предельное состояние жестко-защемленного нелинейно-упругого многослойного стержня / Тезисы Международной научной конференции, 29 май – 2 июнь 2006, Рига, с. 15.
9. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т., Фатуллаева Л.Ф. Прочность многослойной нелинейно-упругой цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления / IV Евразийская научно-практическая конференция «Прочность неоднородных структур», 8-10 апреля 2008 г. Москва, МИСиС.
10. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т., Фатуллаева Л.Ф. Сплющивание разностенной длинной многослойной вязкоупругой цилиндрической оболочки // Журнал «Механика композитных материалов». 2011, т. 47, № 2, с. 1—18.
11. Амензаде Р.Ю., Курмышова С.Р., Фатуллаева Л.Ф. Устойчивость многослойного жестко защемленного линейно вязко-упругого стержня / XIII Международный симпозиум "Динамические и

технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г.Горшкова. Москва, 12-17 февраль 2007.
12. Амензаде Р.Ю., Мехтиева Г.Ю., Фатуллаева Л.Ф. Вариационный метод нелинейной наследственной механики твердых тел // Вестник Чувашского Государственного Педагогического Университета им. И.Я. Яковлева. Серия «Механика предельного состояния», 2010, № 2 (8), с.42-53.
13. Амензаде Р.Ю., Мехтиева Г.Ю., Фатуллаева Л.Ф. Предельное состояние упругого кольца при неравномерном сжатии / BDU-nun 90 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq Elmi Konfrans. Bakı, 2009, səh. 53-55.
14. Амензаде Р.Ю., Мустафаева Э.М.: Фатуллаева Л.Ф. Вариационный подход к определению критических нагрузок для многослойных стержней // Журнал «Механика-машиностроение». Изд. Азербайджанского Технического Университета, Баку, 2010, № 1, с. 9-11.
15. Амензаде Р.Ю., Фатуллаева Л.Ф. Об одном приближенном методе решения задачи устойчивости многослойных стержней // Bakı Universitetinin Xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2000, № 1, s. 170-176.
16. Амензаде Р.Ю., Фатуллаева Л.Ф. Устойчивость упругого кольца при меняющемся по нелинейному закону напряжении / BDU-nun “Hesablama riyaziyyatı” kafedrasının 50 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konfransın materialları, Bakı, 15-16 noyabr 2012-ci il, s. 54-57.
17. Ахмедов Н.К., Фатуллаева Л.Ф. Численное решение задачи выпучивания эксцентрического кольца // Журнал «Машиноведение». Изд. Азербайджанского Технического Университета, Баку, 2013, № 1, с. 8-10.
18. Киясбейли Е.Т., Курмышова С.Р., Фатуллаева Л.Ф. Об устойчивости многослойных вязко-упругих стержней при различных краевых условиях // Bakı Universitetinin Xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2007, № 3, s. 80-89.
19. Киясбейли Э.Т., Фатуллаева Л.Ф. Предельное состояние упругой пологой арки / Тезисы X Международной конференции по математике и механике посвященной 45-летию Института Математики и Механики. Баку, 2004, с. 90.
20. Фатуллаева Л.Ф. Выпучивание длинной цилиндрической оболочки / В книге “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического

образования”. Посвящена 80-летию члена-корреспондента РАН, профессора Л.Д.Кудрявцева. Москва, физматлит, 2003, с. 233-234.
21. Фатуллаева Л.Ф. Выпучивание нелинейно-упругого кольца / Тезисы научной конференции, посвященной 70-летию профессора Г.К.Намазова. Баку, 2002, с. 125-126.
22. Фатуллаева Л.Ф. Выпучивание нелинейно-упругого эксцентрического кольца // Вестник Чувашского Государственного Педагогического Университета им. И.Я.Яковлева. Серия Механика предельного состояния, 2007, № 3, с. 142-150.
23. Фатуллаева Л.Ф. Выпучивание упругой оболочки при ползучести / Международная конференция «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», пос. 100-летию С.М.Никольского. Москва, 23-29 мая 2005, с.236.
24. Фатуллаева Л.Ф. Задача выпучивания нелинейно-упругого эксцентрического кольца // Журнал «Механика - машиностроение». Изд. Бакинского Университета, Баку, 2006, № 2, с. 30-32.
25. Фатуллаева Л.Ф. Критическая сила Шенли нелинейно-упругого многослойного стержня // “Pedaqoji Universitet Xəbərləri” jurnalı, 2013, № 3, s. 38-42.
26. Фатуллаева Л.Ф. Предельное состояние вязко-упругого кольца под действием неравномерно распределенного внешнего давления // Bakı Universitetinin Xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2012, № 2, s. 63-69.
27. Фатуллаева Л.Ф. Предельное состояние нелинейно-упругого многослойного стержня при комбинированном закреплении // Bakı Universitetinin Xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2006, № 3, s. 95-103.
28. Фатуллаева Л.Ф. Предельное состояние нелинейно-упругого кольца / International Conference “Tools for Mathematical Modelling”, Saint-Petersburg, 23-28 june 2003, p.234.
29. Фатуллаева Л.Ф. Приближенный метод решения краевых задач теории тонких оболочек / Aspirantların və gənc tədqiqatçıların VIII Respublika elmi konfransının materiallarının tezisləri. Bakı, 30 aprel – 1 may 2002, s.4.
30. Фатуллаева Л.Ф. Прощелкивание неоднородной по толщине нелинейно-упругой пологой арки // Владикавказский математический журнал, 2005, т.7, вып.2, с.86-89.

31. Фатуллаева Л.Ф. Решение предельного состояния многослойных вязко-упругих стержней / Меж. конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики», 20-25 августа 2007, Новосибирск, Россия, с. 1.
32. Фатуллаева Л.Ф. Устойчивость нелинейно-упругого кольца под действием неравномерного внешнего давления // Naxçıvan Dövlət Universitetinin "Elmi əsərlər" jurnalı, 2013, № 2(56), s. 67-71.
33. Фатуллаева Л.Ф. Устойчивость трехслойного стержня с искривленной внутренней структурой при различных видах закреплений // Bakı Universitetinin Xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2009, № 2, s. 67-73.
34. Фатуллаева Л.Ф. Устойчивость упругого кольца при нелинейном напряжении // "Pedaqoji Universitet Xəbərləri" jurnalı, 2014, № 1.
35. Фатуллаева Л.Ф. Критическое время вязко-упругой оболочки под действием неравномерного внешнего давления. "Mexanikanın klassik və müasir problemləri" adlı Respublika elmi konfransının materialları. 22 may 2014-cü il, səh. 278-282.
36. Фатуллаева Л.Ф. Численное решение задачи выпучивания / Aspirantların və gənc tədqiqatçıların IX Respublika elmi konfransının materiallarının tezisləri. Bakı, 11-12 iyun 2003, s.7.
37. Фатуллаева Л.Ф., Гусейнов Ф.С. Об одном решении задачи выпучивания нелинейного упругого эксцентрического кольца / Transactionses of The International Conference «Problems of cybernetics and informatics». October 24-26, 2006, Baku, vol. I, p. 64-66.
38. Фатуллаева Л.Ф., Гусейнов Ф.С. Численное решение задачи выпучивания эксцентрического кольца / Akad. M.L.Rəsulovun 90 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq Konfransın materialları. Bakı, 2006, s. 170-175.
39. Amenzadeh R.Yu., Fatullayeva L.F. On one approximate method for solving a problem of stability of multilayer rod / The Third International Conference "Differential equations and applications". Abstracts, Saint-Petersburg State Technical University, june 12-17, 2000.
40. Amenzadeh R.Yu., Kiyasbeyli E.T., Fatullayeva L.F. Nonlinear behaviour of a multilayer nonlinear elastic cylindrical shell / Abstracts of the 9th International Conference, Vilnius, Lithuania, may 16-18, 2007, p. 381-382.

41. Amenzadeh R.Yu., Kiyasbeyli E.T., Fatullayeva L.F. Nonlinear behaviour of a multilayer nonlinear elastic cylindrical shell // “Modern Building Materials, Structures and Techniques”. Book of papers, Vilnius Gediminas Technical University, 2007, p. 93-96.
42. Amenzadeh R.Yu., Kiyasbeyli E.T., Fatullayeva L.F. Stability of the multilayer elastic ring under the action of not hydrostatic compressing loading // “Modern Building Materials, Structures and Techniques”. Book of papers, Vilnius Gediminas Technical University, 2010, p.849-852.
43. Amenzadeh R.Yu., Kiyasbeyli E.T., Fatullayeva L.F. The limiting state of a rigidly fixed nonlinearly elastic multilayer rod // Journal «Mechanics of Composite Materials». New York, 2006, vol. 42, № 3, p. 243-252.
44. Amenzadeh R.Yu., Kiyasbeyli E.T., Fatullayeva L.F. Stability of the multilayer elastic ring under the action of not hydrostatic compressing loading / Abstracts of the 10th International Conference, Vilnius, Lithuania, may 2010.
45. Amenzadeh R.Yu., Mehtiyeva G.Yu., Fatullayeva L.F. Limiting state of a multilayered nonlinearly elastic long cylindrical shell under the action of nonuniform external pressure // Journal “Mechanics of Composite Materials”, 2010, vol. 46, № 6, p. 649-658.
46. Fatullayeva L.F. Bulging of a nonlinear-elastic eccentric ring / The conference “Deformation and Fracture of Composites”, the University of Sheffield, Gr.Britain, april 11-13 2007, p. 93.
47. Fatullayeva L.F. Limiting condition of a multiplayer non-linear elastic rod at combined pinch / The 1st International Conference on Control and Optimization with industrial applications (COIA-2005), Baku, Azerb., 22-25 may 2005, p.39-40.
48. Fatullayeva L.F. Limiting condition of the medium multilayered non-linear elastic long cylindrical medium under action of the non-uniform external pressure / 16th International conference “Mechanics of Composite materials”. Riga, Latvia, may 24-28 2010.
49. Fatullayeva L.F. Long cylindrical shell warping of non-linear elastic material / General guide & abstracts of Third Joint seminar on Applied mathematics. Baku State University & Zanjan University. 6-8 september 2002, p. 45.
50. Fatullayeva L.F. On one approximate method of solution of bucking problem of nonlinear elastic ring nonuniform by width // Proceedings of IMM of NASA, 2003, v. XIX (XXVII), Baku, p. 233-238.

51. Fatullayeva L.F. The limiting state of a multilayer nonlinearly elastic eccentric ring // Journal «Mechanics of Composite Materials». New York, 2007, vol. 43, № 6, p. 513-520.
52. Fatullayeva L.F. The limiting state of a multilayer nonlinearly elastic eccentric ring / XV International Conference “Mechanics of Composite Materials”. Riga, Latvia, may 26-30 2008, p. 85.
53. Kiyasbeyli E.T., Fatullayeva L.F. Stability on Shanley of a nonlinear-elastic multilayer rod / Extended Abstracts of the 38th Annual Iranian mathematics Conference, University of Zanjan, 3-6 September 2007, p. 439-441.
54. Kiyasbeyli E.T., Fatullayeva L.F. The stability of the elastic ring at non-uniform compression / Abs. of the III Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries. Almaty, 2009, vol. 2, p. 160.
55. Mehtiyeva G.Yu., Kiyasbeyli E.T., Fatullayeva L.F. The buckling of a long multilayer viscoelastic shell under the action of nonuniform external pressure / International Conference “Continuum Mechanics and related problems of analysis”. Tbilisi, september 9-14 2011, p. 75.
56. Abbasova T.T., Fətullayeva L.F. Elastik halqanın kritik vəziyyəti / Тезисы научной конференции «Теоретические и прикладные задачи операторных уравнений», пос. 75-летию члена-корр. НАНА Я.Дж.Мамедова. Баку, февраль 2006, с. 134.
57. Fətullayeva L.F. Qalınlığı boyu qeyri-bircins, qeyri-xətti elastiki çubuğun qabarıqlığı məsələsinin həlli // Bakı Universitetinin Xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2002, №3, s.142-147.
58. Fətullayeva L.F., Mustafayeva E.M. Özlü-elastik çubuq üçün böhran zamanın təyini / “Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri” adlı ənənəvi elmi konfransın materialları. Bakı, 28-29 aprel 2011-ci il, s. 93-95.

LAURA FAİQ qızı FƏTULLAYEVA

KONSTRUKSİYALARDA OLAN ELASTİKİ, QEYRİ-ELASTİKİ, ÇOXLAYLI, NAZİKDİVARLI ELEMENTLƏRİN DAYANIQLIQ VƏ QABARMA MƏSƏLƏLƏRİNİN VARİYASİYA ÜSULU İLƏ HƏLLİ

XÜLASƏ

Elementləri nazikdivarlı çubuqlar və halqalar olan konstruksiya elementlərinin qabarma və dayanıqlıq məsələləri deformasiya olunan bərk cisim mexanikasının aktual problemlərindən biridir. Dissertasiya işində çoxlaylı, elastiki, qeyri-xətti elastiki, özülü-elastiki və qalınlığı boyu qeyri-bircins çubuq və halqaların qabarma və dayanıqlıq məsələləri tədqiq olunmuş, konstruksiya elementlərinin fiziki–mexaniki, həndəsi parametrlərinin böhran qüvvəsinə və zamanına təsiri öyrənilmişdir.

Bu zaman qəbul olunmuşdur ki, düzbucaqlı formada olan çubuğun və halqanın layları həm qalınlığına, həm də hazırlandığı materiala görə bir-birindən fərqlənirlər. Çubuğun hər iki ucu ya oynaqlı, ya da bərk bağlanmışdır. Bundan başqa, çubuğun bir ucunun oynaqlı, digər ucunun isə bərk bağlanma halına da baxılmışdır. Çubuğun bağlanma üsullarına uyğun sərhəd şərtləri daxilində böhran qüvvəsi üçün ifadələr alınmış və böhran qüvvəsinə çubuğun uclarının bağlanma üsullarının təsiri araşdırılmışdır.

Dissertasiyada xaricdən təsir edən, qeyri-müntəzəm təzyiq altında silindrik örtüyün son həddinin təyini məsələsi ətraflı tədqiq olunmuş və qeyri-müntəzəmlik əmsalının böhran qüvvəsinə təsiri ədədi olaraq öyrənilmişdir. Xətti özülü-elastiki, silindrik örtüklərin divarlarının qalınlıqları müxtəlif olduqda dayanıqlıq məsələsi həll olunmuş və böhran zamanın qalınlıq əmsalından asılılığı analiz olunmuşdur.

Dissertasiya işində qoyulan məsələlər Reley-Rits üsulu ilə birlikdə qarışıq tipli variyasiya üsulu vasitəsilə həll olunur. İşin əsas elmi yeniliyi ondan ibarətdir ki, ani deformasiya elastiki-plastiki olduqda və axın nəzəriyyəsinin tənliklərini ödədikdə variyasiya prinsipinin ümumiləşmiş forması alınmış, heterogen mühitlər üçün variyasiya üsulunun modifikasiyası verilmiş, variyasiya prinsipinin baxılan məsələlərin həllinə tətbiqi əsaslandırılmışdır. Konstruksiya elementlərinin böhran qüvvə və zamanını ədədi olaraq təyin etməkdən ötrü hesablama üsullarının metodikası işlənib hazırlanmışdır.

LAURA FAIG kizi FATULLAYEVA

THE SOLUTION OF THE PROBLEMS BULGING AND STABILITY OF THE ELASTIC, NON-ELASTIC, MULTILAYER, THIN-WALLED ELEMENTS OF THE KONSTRUCTIONS BY THE VARIATION METHOD

ABSTRACT

The problems bulging and stability of the thin-walled rods and rings, which are elements of the construction, are one of the pressing problems of the mechanics of deformable solids. In the dissertation work have been investigated the problems bulging and stability of the multilayer, elastic, non-linear elastic, viscous-elastic, non-uniform thickness rods and rings and studied the influence of the physical-mechanical, geometric parameters of the construction elements on the critical force and the time. In this case, it is recognized that the layers of the rectangular form rod and the ring are different from each other the thickness and also according the constituent material. Both ends of the rod closed or swivel or solid. In addition, here considered the case, when one end of the rod closed swivel, the other end closed solid. Here obtained the expressions of the critical force for the boundary conditions, which given suitable the methods of the connecting of the rod and investigated the influence of the closure methods on the critical force. In the dissertation work have been investigated in detail the problem definition of the limiting state of the cylindrical shell, which is under the external actions and the irregular pressure, numerically studied the influence of the irregularity coefficient on the critical force. Here solved the stability problem of the linear viscous-elastic cylindrical shells with different thickness of the wall and was analyzed the dependence of the critical time on the thickness coefficient. The considered problems in the work were solved through the mixed variation method with Rayleigh-Ritz method. The scientific novelty of the work lies in the fact that here was obtained the generalized form of the variation principle for the case the instantaneous deformation is elastic-plastic and satisfies equations of the flow theory, was given modification of the variation method for heterogeneous environments, was grounded the application of the variation principle to the solution of the considered problem. Here have been developed computational methods for the numerical determine of the critical force and time of the construction elements.

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

LAURA FAİQ QIZI FƏTULLAYEVA

KONSTRUKSİYALARDA OLAN ELASTİKİ, QEYRİ-ELASTİKİ, ÇOXLAYLI, NAZİKDİVARLI ELEMENTLƏRİN DAYANIQLIQ VƏ QABARMA MƏSƏLƏLƏRİNİN VARİYASİYA ÜSULU İLƏ HƏLLİ

2002.01-Deformasiya olunan bərk cisim mexanikası

Mexanika üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2016