

**AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI**  
**RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU**

*Əlyazması hüququnda*

**NATİQ SƏMƏNDƏR oğlu RZAYEV**

**DARTILMA-SIXILMAYA MÜXTƏLİF MÜQAVİMƏT**  
**GÖSTƏRƏN TİR VƏ DÜZBUCAQLI LÖVHƏLƏRİN**  
**DAYANIQLIĞI VƏ ENİNƏ RƏQSLƏRİ**

2002.01-Deformasiya olunan bərk cism mexanikası

mexanika üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi  
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

**A V T O R E F E R A T I**

Bakı-2017

**İş AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Elastiklik və plastiklik nəzəriyyəsi" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.**

**Elmi rəhbər:**

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

**Vaqif Hacıyev**

**Rəsmi opponentlər:**

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor  
(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu)  
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent  
(Bakı Dövlət Universiteti)

**Cəfər Ağalarov**

**Yusif Sevdimaliyev**

**Aparıcı təşkilat:**

**Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti**  
"Mexanika" kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 07 iyul 2017-ci il tarixində saat 16<sup>00</sup>-da Azərbaycan MEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim olunan dissertasiyaların müdafiəsini keçirən D.01.111 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya ilə Azərbaycan MEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı ş., B.Vahabzadə küç., 9.

Avtoreferat 06 iyun 2017-ci il tarixində buraxılıb.

**D.01.111 Dissertasiya**  
**Şurasının elmi katibi**

**dos. Tamilla Həsənova**

## İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

**Mövzunun aktuallığı.** Müasir dövrdə tikinti komplekslərinin inşasında, maşınqayırmada, magistral dəmir yolu xətlərinin çəkilişində və bir çox digər sahələrdə müxtəlif materiallardan hazırlanmış tirlər, lövhələr və örtüklərdən geniş istifadə olunur. Onlar istismar zamanı müxtəlif növ xarici qüvvələrin təsirinə məruz qalırlar.

Hal-hazırda mühəndis tədqiqatçılar qarşısında qoyulan ən vacib məsələlərdən biri konstruksiyaların möhkəmliyə, dayanıqlığa və tezlik-amplituda xarakteristikalarına hesabatını apardıqda, istifadə olunan konstruksiya elementlərinin materialının xassəsini düzgün qiymətləndirilməli və təmasda olduqları mühitin təsiri nəzərə alınmalı, effektiv və aprobeşiyadan çıxmış riyazi həll metodlarından istifadə olunmalıdır.

Son zamanlar aparılan nəzəri və eksperimental tədqiqatlar göstərirki, bir çox materialların fiziki mexaniki xassələri klassik elastiklik və plastiklik nəzəriyyəsinin qanunlarına tabe olmur və gərginlik deformasiya arasındakı əlaqələr yükləmənin növündən asılı olur. Bunlara misal olaraq çuqunun bəzi növlərini, polimer, kompozit və bir sıra digər materialları göstərmək olar.

Yuxarıda qeyd olunanları nəzərə aldıqda məsələnin həlli və alınan nəticələrin təhlili bir sıra çətinliklər yaradır, nəzərə almadıqda isə ciddi səhvlərə yol verilə bilər. Beləliklə hesab etmək olar ki, dartılma-sıxılmaya müxtəlif müqavimət göstərən materiallardan hazırlanmış konstruksiya elementlərinin dayanıqlıq və rəqsi hərəkət məsələlərinin həll metodikasının qurulması vacib məsələlərdən biridir. Qeyd olunanları nəzərə alsaq dissertasiya işinin aktuallığı şübhə doğurmur.

**İşin məqsədi.** Müxtəlif modullu materiallardan hazırlanmış tirlər, düzbucaqlı lövhələr və silindrik örtüyün dayanıqlığı və rəqsi hərəkət məsələlərinin xarici mühitin müqaviməti (Fussa-Vinkler, Pasternak, Carnet) nəzərə alınmaqla dayanıqlıq və rəqsi hərəkət tənliklərinin alınması və həllidir.

### İşin elmi yeniliyi.

- Müxtəlif modullu elastik tirlərin xalis əyilmədə dayanıqlıq məsələləri həll edilmişdir.
- İlk dəfə dartılma- sıxılmaya müxtəlif müqavimət göstərən elastik plastik tirin xalis əyilmədə müstəvi formada dayanıqlığını itirməsi məsələsi həll edilmişdir.

- İki sabitlə xarakterizə olunan əsas üzərində yerləşmiş uzun lövhənin eninə sürüşmə effekti nəzərə alınmaqla dayanıqlıq məsələsi həll edilmişdir.
- Özlü elastik əsasın müqaviməti nəzərə alınmaqla silindrik örtüyün dinamik dayanıqlıq məsələsi qoyulmuş və həll edilmişdir.
- İlk dəfə qeyri bircins əsas üzərində yerləşmiş elastik-plastik tirin dayanıqlıq məsələsi həll edilmişdir.
- Təkrar elastikliyə malik nazik divarlı tirlərin əyilmədə dayanıqlıq məsələsi həll edilmişdir.
- İlk dəfə əsasların müqaviməti nəzərə alınmaqla, qeyri bircins, əsasların müqaviməti nəzərə alınmaqla, sabit və dəyişən en kəsikli, müxtəlif modullu tirlərin sərbəst və məcburi rəqsləri məsələləri həll edilmişdir.
- Qeyri bircins özlü elastik əsas üzərində yerləşmiş müxtəlif modullu düzbucaqlı lövhənin sərbəst rəqsləri məsələsi həll edilmişdir.

**Tədqiqat üsulu.** Mexaniki xassələri yükləmənin növündən asılı olan materiallardan hazırlanmış bir sıra konstruksiya elementləri üçün xarici mühitin müqaviməti nəzərə alınmaqla əsasən dəyişənlərinə ayırma və Bubnov Qalerkinin ortoqonallaşdırma metodlarından istifadə edərək dayanıqlıq və rəqsi hərəkət məsələlərinin həll metodikası qurulmuşdur.

**Nəticələrin həqiqiliyi.** Qoyulmuş məsələlərin korrekliyi və onların həlli zamanı istifadə olunmuş effektiv həll metodları və ədədi hesablamaların nəticələrinin xüsusi hallarda məlum həllərlə üst-üstə düşməsi və sərhəd şərtlərinin ödənilməsindədir.

**Praktiki əhəmiyyəti.** Həll edilən bütün məsələlərdə xarakterik parametrlərin təyini üçün konkret ifadələr alınmış, nəticələr cədvəllər və qrafiklər şəklində verilmişdir. Alınan nəticələr müxtəlif modullu tirlər, lövhələr və silindrik örtüklərin, xarici mühitin müqaviməti nəzərə alınmaqla möhkəmliyə, dayanıqlığa və tezlik-amplituda xarakteristikalarına hesabatlarında istifadə oluna bilər.

**İşin aprobasiyası.** İşin əsas nəticələri "Heydər Əliyev və Azərbaycan təhsili" respublika elmi konfransında (Bakı, 2013), "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 55 illiyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2014),- professor Əmir Həbibzadənin 100 illik yubleyinə həsr olunmuş elmi konfransda (Bakı, 2016), AMEA-nın RMI-nın "Dalğa dinamikası" və "Elastiklik və plastiklik nəzəriyyəsi" şöbələrinin seminarında (2017) məruzə edilmişdir.

**Nəşrlər.** Dissertasiya işinin tam məzmunu müəllifin 9 elmi işində dərc edilmişdir, əsərlərin siyahısı avtoreferatın sonunda verilmişdir.

**Dissertasiyanın strukturu və həcmi.** Dissertasiya işi giriş, iki fəsil, nəticədən, 29 şəkil, 12 cədvəl və 110 adda istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiyanın ümumi həcmi 134 səhifədir.

## DİSSERTASIYANIN MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, iki fəsil, əsas nəticələr və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Girişdə işin aktuallığı, məqsədi, praktiki əhəmiyyəti, həqiqiliyi, həll metodları, istifadə olunan əsaslar haqqında məlumatlar və dissertasiya işi ilə sıx əlaqəli olan nəzəri və eksperimental işlərin qısa icmalına həsr olunmuşdur.

**Birinci fəsildə** dartılma-sıxılmaya müxtəlif müqavimət göstərən tirlərin, düzbucaqlı lövhənin və silindrik örtüyün dayanıqlığı məsələlərinə həsr edilmişdir.

Birinci yarımfəsildə dartılma-sıxılmaya müxtəlif müqavimət göstərən materiallar, xarici mühitin reaksiyalarının riyazi modelləri və dissertasiya işində istifadə olunan həll metodları haqqında məlumat verilmişdir.

İkinci yarımfəsildə müxtəlif modullu elastik materialdan hazırlanmış tirin xalis əyilmədə, S.P.Timoşenkonun fərziyyəsini qəbul edərək dayanıqlıq məsələsi həll edilir.

Məsələnin həllində fərz olunur ki, en kəsiyi bir simmetriya oxuna malik tir elə bərkidilib ki, son kəsiklər  $x$  oxu ətrafında sərbəst dönə bilər,  $z$  oxu ətrafında isə fırlana bilməz. Yəni aşağıdakı sərhəd şərtləri ödənməlidir:

$$z = 0; \text{ olduqda } W = 0; W' = 0; \quad (1)$$

Məsələnin həlli aşağıdakı sistem tənliyinin həllinə gətirilir:

$$B_0 \frac{d^2 W}{dz^2} = \psi M; \quad C_0 \frac{d\psi}{dz} = -\frac{dW}{dz} M \quad (2)$$

Burada  $\psi$  – en kəsiyin  $z$  oxu ətrafında dönmə bucağı,  $B_0$  – əyilmədə,  $C_0$  – burulmada elastiki sərtlilklərdir (dartılma-sıxılmaya müxtəlif müqavimət göstərən tirlər üçün).

Nəticədə aşağıdakı əlaqəni almaq mümkündür:

$$M_k = M_k^0 \sqrt{K_1 \cdot K_2} \quad (3)$$

Burada  $M_k^0$  - klassik nəzəriyyəyə uyğun kritik momentdir,  $K_1$  və  $K_2$  – müxtəlif modullu materiallar üçün xarakterik parametrlərdir. En kəsiyi düzbucaqlı olan tirlər üçün təyin edilmişdir. Nəticələr aşağıdakı cədvəldə göstərilmişdir.

Cədvəl 1.

$n = 0,8$			
$\rho$	$K_1$	$K_2$	$\sqrt{K_1 K_2}$
0,1	2,80	1,13	1,778
0,2	2,79	1,15	1,791
0,3	2,77	1,16	1,792
0,4	2,74	1,17	1,790
0,5	2,67	1,18	1,774
0,6	2,58	1,20	1,759
0,7	2,45	1,21	1,721
0,8	2,28	1,22	1,667
0,9	2,07	1,23	1,595

Üçüncü yarımfəsildə ilk dəfə eninə sürüşməni və iki sabitlə xarakterizə olunan əsas nəzərə almaqla dartılma- sıxılmaya müxtəlif müqavimət göstərən uzun lövhələrin dayanıqlığı məsələləri öyrənilir. Burada fərz edirik ki, lövhə iki sabitlə xarakterizə olunan əsas üzərində yerləşir. Əsasın müqaviməti ilə əyinti arasındakı əlaqə Pasternak modeli ilə qəbul olunur.

$$q = K_1 W - K_2 \frac{d^2 W}{dx^2} \quad (4)$$

Burada  $W$  – əyinti,  $K_1$ ,  $K_2$  – əsasın xassələrini xarakterizə edir.

Göstərmək olar ki, qoyulmuş məsələ aşağıdakı sistem tənliyinin həllinə gətirilir:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dx} - \bar{P} \frac{d^2 W}{dx^2} - \bar{K}_1 W + \bar{K}_2 \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \\ \frac{h^2}{8C_1} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{d^3 W}{dx^3} - (C_1 - C_2)^{-1} \varphi = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Burada aşağıdakı əvəzləmələr qəbul olunmuşdur.

$$\bar{P} = \frac{12P}{h^3}; \bar{K}_1 = \frac{12}{h^3} K_1; \bar{K}_2 = \frac{12}{h^3} K_2; \alpha = (C_1 - C_2)^{-1} \frac{8C_1}{h^2};$$

$\varphi(x)$  – naməlum funksiyadır və eninə sürüşməni xarakterizə edir.

Məsələnin həlli şərnirlə bərkidilmiş hal üçün qurulur. Belə olan halda  $W$  və  $\varphi$  – funksiyalarını aşağıdakı kimi götürmək olar:

$$W = W_0 \sin \frac{n\pi}{a}; \quad \varphi = \varphi_0 \cos \frac{n\pi}{a} x \quad (6)$$

(6) aşağıdakı sərhəd şərtlərini ödəyir:

$$x = 0; \quad x = a; \quad W = 0; \quad \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d^2W}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^2W}{dx^2} = 0$$

(5) və (6) ifadələrindən istifadə edərək aşağıdakı tənliyi almaq olar:

$$P_k = \frac{\frac{h^2}{12}(C_1 - C_2) \left(\frac{n\pi}{a}\right)^3}{(C_1 - C_2) \frac{h^2}{8C_1} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + 1} + \frac{K_1}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} + K_2 \quad (7)$$

Dördüncü yarım fəsildə özlü elastik əsas üzərində yerləşən en kəsiyi dairəvi olan müxtəlif modullu silindrik örtüyün dinamikı dayanıqlığı öyrənilir.

Fərz edək ki, radiusu  $R$  qalınlığı  $h$  olan en kəsiyi dairəvi olan müxtəlif modullu silindrik örtük səthinə təsir edən  $T$  qüvvəsinə məruz qalır və oxa simmetrik formada dayanıqlığını itirir. Hərəkət tənliyi özlü elastik xarici əsasın riyazi modeli nəzərə alınmaqla aşağıdakı kimi yazılır (fərz edirik ki, örtüyün bir ucu tərpənməz, digər ucu isə verilmiş sürətlə dəyişir):

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = h\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{T_2}{R} - T_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_1 W + K_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = h\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (8)$$

Burada  $u$  – uzununa,  $W$  – eninə yerdəyişmə,  $T_1$  və  $T_2$  – uyğun olaraq oxboyu və eninə istiqamətdə daxili qüvvələr,  $M$  – oxboyu əyici moment,  $\rho$  – sıxlıqdır.

Məsələnin həlli  $t \rightarrow \infty$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$  şərti daxilində qurulur və nəticədə

kritik qüvvənin qiyməti təyin olunur. Xüsusi hallarda, xarici mühitin müqaviməti nəzərə alınmadıqda xarakterik parametrlər arasında asılıq alınır.

Beşinci yarımfəsildə dartılma-sıxılmaya müxtəlif müqavimət göstərən elastik-plastik tirin müstəvi formada dayanıqlığı məsələsi həll edilmişdir. Boyuna qüvvənin olmaması şərtindən istifadə etməklə əyici momentin ifadəsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$E^+ \iint_{S_1^+} (e_0 - y \wp_0) ds + \sigma_s^+ \iint_{S_2^+} ds + E^- \iint_{S_3^-} (e_0 - y \wp_0) ds + \sigma_s^- \iint_{S_4^-} ds = 0 \quad (9)$$

$$M = E^+ \iint_{S_1^+} y(e_0 - y \wp_0) ds + \sigma_s^+ \iint_{S_2^+} y ds + E^- \iint_{S_3^-} y(e_0 - y \wp_0) ds + \sigma_s^- \iint_{S_4^-} y ds \quad (10)$$

$\sigma_s^+$ ,  $\sigma_s^-$  – axıcılıq hədləridir,  $e_0$  – mərkəz xəttin deformasiyası,  $\wp_0$  – əyrilikdir.

(9) və (10) ifadələrindən istifadə edərək aşağıdakı tənlik alınır:

$$\frac{M}{E^+} = - \frac{\varepsilon_s^+ \iint_{S_2^+} ds + \alpha \varepsilon_s^- \iint_{S_4^-} ds}{\iint_{S_1^+} (y_0 - y) ds + \alpha \iint_{S_3^-} (y_0 - y) ds} \cdot \left( \iint_{S_1^+} y(y_0 - y) ds + \alpha \iint_{S_3^-} y(y_0 - y) ds \right) + \alpha \left( \varepsilon_s^+ \iint_{S_2^+} y ds + \varepsilon_s^- \iint_{S_4^-} y ds \right) \quad (11)$$

$y_0$  – neytral oxun, tirin en kəsiyindən olan sərhədidir.

Yuxarıdakı ifadələrdən istifadə edərək en kəsiyi düzbucaqlı tir üçün momentin və sərtliyin ifadəsini aşağıdakı kimi alırız:

$$M = \frac{E^- a h^3}{3} \left[ \alpha (1 + \rho_0^3) + 1 - \rho_0^3 \right] \quad (12)$$

$$B^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n} (1 + \rho_0) + 1 - \rho_0 \right] \quad (13)$$

(12) və (13) ifadəsində  $\rho_1 = \frac{\eta_1}{h}$ ;  $\rho_2 = \frac{\eta_2}{h}$ ;  $\bar{\rho}_0 = \frac{\eta_0}{h}$  kimi işarə

edilmişdir.  $\eta_0$  – neytral oxun,  $\eta_1$  – isə sıxılma zonasına elastik-plastik deformasiyanın sərhədidir.



Altıncı yarım fəsildə qeyri-bircins əsas üzərində yerləşən elastik-plastik tirin dayanıqlığı məsələsi həll edilmişdir. Məsələdə fərz olunur ki, xətti möhkəmlənən elastik-plastik materialdan hazırlanmış en kəsiyi iki simmetriya oxuna malik tir qeyri bircins Fussa-Vinkler modeli ilə xarakterizə olunan əsas üzərində yerləşir və  $P$  qüvvəsi ilə mərkəzi sıxılmaya məruz qalır. Material xətti möhkəmlənən elastik-plastikdir. Gərginlik və deformasiya intensivlikləri arasındakı əlaqəni aşağıdakı kimi yazırıq:

$$\sigma_u = \lambda \sigma_s + E(1 - \lambda) \varepsilon_u; \quad \lambda = 1 - \frac{E'}{E} \quad (14)$$

Burada  $\sigma_u$ ,  $\varepsilon_u$  – uyğun olaraq gərginlik və deformasiyanın intensivlikləri,  $\sigma_s$  – axıcılıq həddi,  $\varepsilon_0$  – isə ona uyğun deformasiyanın qiyməti,  $E$  – elastiklik,  $E'$  – isə toxunan moduludur.

Əsasın reaksiyası  $q$  əyinti  $W$  ilə aşağıdakı kimi (Fussa-Vinkler) qəbul olunur:

$$q = K_0(1 + \varepsilon \varphi(x))W \quad (15)$$

(15) ifadəsində  $K_0$  – Vinkler əmsalı,  $\varphi(x)$  – kəsilməz funksiya,  $\varepsilon \in [0, 1]$ .

Məsələnin həlli Karman-İlyuşinin konsepsiyasına nəzərən qurulur, yəni dayanıqlığın itməsində xarici qüvvənin dəyişməz qaldığı fərz olunur ( $\delta P = 0$ ). Hesab olunur ki, dayanıqlıq itdikdə tirdə boşalma effekti mümkündür.

Sadə çevirmələrdən sonra moment ifadəsini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$M = EJK \varphi \quad (16)$$

$$(16)\text{-da } K = \frac{1}{J} \left\{ \int_{y_0}^{h/2} y^2 b(y) dy + (1 - \lambda) \int_{-h/2}^{y_0} y^2 b(y) dy - \frac{[S_2 + (1 - \lambda)S_3]^2}{S_0 + (1 - \lambda)S_1} \right\};$$

$$S_0 = \int_{y_0}^{h/2} b(y) dy; \quad S_1 = \int_{-h/2}^{y_0} b(y) dy; \quad S_2 = \int_{y_0}^{h/2} y b(y) dy; \quad S_3 = \int_{-h/2}^{y_0} y b(y) dy \text{ kimi}$$

işarələmələr aparılmışdır.

Dayanıqlıq tənliyini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \bar{P} \frac{d^2 W}{dx^2} + \bar{K}(1 + \varepsilon \varphi(x))W = 0 \quad (17)$$

$$\text{Burada } \bar{P} = P(EJK)^{-1}; \bar{K} = K_0(EJK)^{-1}$$

(17) tənliyindən kritik qüvvəni Bubnov Qalerkinin metodundan istifadə etməklə təyin edirik:

$$P_k = \frac{EJK \int_0^l \frac{d^4 \theta_1}{dx^4} \cdot \theta_1(x) dx}{\int_0^l \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} \cdot \theta_1(x) dx} + K_0 \frac{\int_0^l (1 + \varepsilon \varphi(x)) \theta_1^2(x) dx}{\int_0^l \left( \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} \right) \theta_1(x) dx} \quad (18)$$

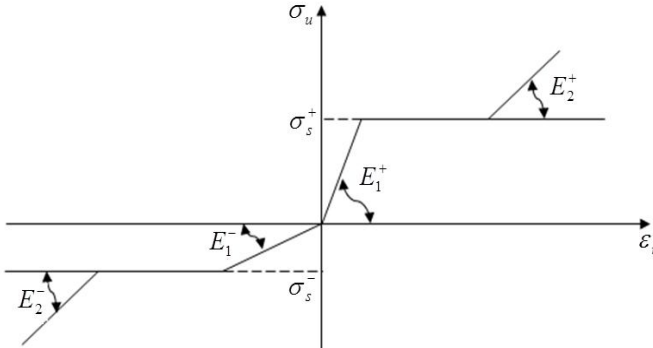
Ədədi hesabı və təhlili xarakterik funksiyaların aşağıdakı qiymətlərində aparılmışdır.

$$b(y) = \text{const}; \theta_1 = \frac{\sin m \pi x}{l}; \varphi(x) = 1 + \mu \bar{x};$$

$$\varphi(x) = 1 + \mu e^{\bar{x}}; \bar{x} = x \cdot l^{-1}$$

Yeddinci yarımfəsildə təkrar elastikliyə malik nazik divarlı tirlərin dayanıqlığı məsələsi tədiqiq edilmişdir.

Baxdığımız məsələdə isə hesab olunur ki, tirin en kəsiyinin ölçüləri müxtəlif tərtibli olub uzunluğundan çox kiçikdirlər. (Ədəbiyyatda belə tirlər nazik divarlı tirlər adlanır). Buna görə də əvvəlki qəbul olunmuş S.P. Timoşenkonun hipotezi burada yaramır və məsələnin həlli nazik divarlı tirlər nəzəriyyəsinə görə öyrənilməlidir. Qeyd etmək lazımdır ki, məsələnin həlli materialın xassəsi (gərginlik deformasiya arasındakı əlaqə) şəkil 1-də olduğu məsələnin həlli mürəkkəbləşir və analizi çətinləşir.



Şəkil 1. Gərginlik deformasiya diaqramı

Burada  $\sigma_s^+$  və  $\sigma_s^-$  – uyğun olaraq dartılma- sıxılmada axıcılıq hədləri,  $E_1^+$ ,  $E_2^+$  və  $E_1^-$ ,  $E_2^-$  – ilk və təkrar elastiklik modullarıdır.

Fərz edək ki, en kəsiyi bir simmetriya oxuna malik tir, uclarına təsir edən əyici momentlərin təsirindən xalis əyilməyə məruz qalır və əyilmə tirin simmetriya müstəvisində baş verir. En kəsiyi düzbucaqlı, materialı elastik, dartılma sıxılmaya müxtəlif müqavimət göstərən tir üçün aşağıdakı tənliklər alınmışdır:

$$\begin{cases} \rho_0(1 - \rho_0) - \frac{1}{2}(1 - \rho_0^2) + \alpha_1 \left[ \rho_0 \left( \rho_0(\rho_0 + 1) - \frac{1}{2}(\rho_0^2 - 1) \right) \right] = 0 \\ 3 \left[ (1 - \rho_0^2) - \frac{1}{3}(1 - \rho_0^3) \right] + \alpha_1 \left[ \frac{\rho_0}{2}(\rho_0^2 - 1) - \frac{1}{3}(1 + \rho_0^3) \right] = \bar{M} \rho_0^{-1} \end{cases} \quad (19)$$

$$(19) \text{ ifadəsində } \alpha_1 = \frac{E_1^+}{E_1^-}; \quad \rho_0 = y_0 \cdot h^{-1}; \quad \bar{M} = \frac{3}{2ah^3 E_1^+}$$

**Dissertasiyanın ikinci fəslində** dartılma-sıxılmaya müxtəlif müqavimət göstərən tirlərin və düzbucaqlı lövhələrin eninə rəqsləri məsələləri tədqiq edilir.

Birinci yarım fəsilə müxtəlif modullu tirlərin eninə rəqsləri məsələsi həll edilmişdir. İşdə fərz edirik ki, en kəsiyi iki simmetriya oxuna malik tir, iki sabitlə xarakterizə olunan Pasternak tipli əsas üzərində yerləşir. Yəni rəqs zamanı əsasın reaksiyası  $q$  əyinti  $W$  – ilə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$q = K_1 W - K_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (20)$$

Burada  $K_1$  və  $K_2$  – əsasın xarakteristikalarıdır və eksperiment yolu ilə təyin olunur.

Koordinat sistemi aşağıdakı kimi seçilir.  $x$  – oxu mərkəzi xətt boyu yönəlmiş,  $y$  – oxu isə ona perpendikulyardır.

Tir rəqs zamanı dartılma-sıxılmaya müxtəlif müqavimət göstərdiyinə görə neytral oxun sərhəddi orta xəttin üzərinə düşmədiyinə görə  $e_0$  deformasiyası əmələ gəlir.

Hərəkət tənliyini çıxarmaq üçün neytral oxda gərginliyin sıfır olması şərtindən istifadə edərək əyici momentin ifadəsi təyin edilir və (20) ifadəsi nəzərə alınmaqla hərəkət tənliyi aşağıdakı kimi yazılır:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ f(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] + \bar{K}_1 W - \bar{K}_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \bar{\rho} \psi(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (21)$$

Burada aşağıdakı işarələmələr qəbul olunmuşdur:

$$K = \frac{1}{J_0} \left[ \frac{\left( \int_{S_1} b(y) y dy + \alpha \int_{S_2} b(y) y dy \right)}{\int_{S_1} b(y) dy + \alpha \int_{S_2} b(y) dy} - \left( \int_{S_1} y^2 b(y) dy + \alpha \int_{S_2} y^2 b(y) dy \right) \right];$$

$$\bar{K}_1 = K_1 (KM)^{-1}; \bar{K}_2 = K_2 (KM_0)^{-1}; \bar{\rho} = \rho_0 (KM_0)^{-1} \quad (22)$$

$M_0$  – dartılma sıxılmaya eyni müqavimət göstərən tir üçün əyici momentin qiyməti,  $S_1$  və  $S_2$  – tirin dartılan və sıxılan oblastların en kəsiyinin sahəsidir.

Əgər tir uzunluq boyu qeyri-bircinsdirsə və sıxlıq uzunluq boyu dəyişirsə hərəkət tənliyi aşağıdakı şəkildə düşür:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2f'(x) \cdot f^{-1}(x) \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (f''(x) - \bar{K}_2) f^{-1}(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \\ + \bar{K}_1 \cdot f^{-1}(x) W + \bar{\rho} \psi(x) f^{-1}(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

(23) tənliyinin həlli aşağıdakı kimi qurulur.

Birinci mərhələdə dəyişənlərinə ayırma, ikinci mərhələdə isə Bubnov Qalerkinin ortoqonallaşdırma metodundan istifadə olunur. Bu halda ölçüsüz tezliyin qiymətini aşağıdakı kimi yazırıq:

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\int_0^1 \frac{1}{f(x)} \theta_1^2 dx}{\int_0^1 \frac{\psi(x)}{f(x)} \theta_1^2(x) dx} \quad (24)$$

Ən sadə hal üçün hesabatın nəticələri cədvəllər və əlaqə əyriləri ilə verilmişdir.

$$\begin{aligned} \psi(\bar{x}) = 1 + \mu \bar{x}; \quad f(\bar{x}) = 1 + \varepsilon \bar{x}; \\ \bar{\omega}^2 = \frac{q_1}{q_1 + \mu q_2}; \quad q_1 = \int_0^1 \frac{\sin^2 \pi \bar{x}}{1 + \varepsilon \bar{x}} dx; \quad q_2 = \int_0^1 \frac{\bar{x} \sin^2 \pi \bar{x}}{1 + \varepsilon \bar{x}} dx \end{aligned}$$

$$\psi(\bar{x}) = 1 + \mu e^{\bar{x}}; f(x) = 1 + \varepsilon e^{\bar{x}};$$

$$\bar{\omega}^2 = \frac{b_1}{b_1 + \mu b_2}; b_1 = \int_0^1 \frac{\sin^2 \pi \bar{x}}{1 + \varepsilon e^{\bar{x}}} dx; b_2 = \int_0^1 \frac{e^{\bar{x}} \sin^2 \pi \bar{x}}{1 + \varepsilon e^{\bar{x}}} dx$$

Cədvəl 2.

$\mu = 0,5$			
$\varepsilon$	$q_1$	$q_2$	$\bar{\omega}^2$
0	0,5	0,25	0,8
0,25	0,445	0,219	0,802
0,50	0,402	0,196	0,804
0,75	0,367	0,177	0,805

Cədvəl 3.

$\mu = 0,5$			
$\varepsilon$	$b_1$	$b_2$	$\bar{\omega}^2$
0	0,5	0,838	0,544
0,25	0,353	0,587	0,546
0,50	0,274	0,452	0,548
0,75	0,224	0,368	0,549

İkinci yarımfəsildə dəyişən en kəsikli tirin sərbəst rəqsləri məsələsi tədqiq edilir. Fərz edirik ki, tir en kəsiyi dəyişəndir və iki simmetriya oxuna malikdir.

Əsas Pasternak modeli ilə xarakterizə olunur. Bu halda hərəkət tənliyi aşağıdakı kimi yazılır:

$$E^+ J_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ K(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] + K_1 W - K_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \rho_0 h(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (25)$$

Əsas qeyri-bircins özlü elastik olduqda tənlik aşağıdakı kimi yazılır:

$$E^+ J_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ K(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] + K_1(x) W - K_2(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \rho_0 h(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (26)$$

Hər tərəfli hesabat və alınan nəticələrin təhlili xarakterik funksiyaların xətti qanunla dəyişdiyi hal üçün aparılıb. Nəticələr əsasən aşağıdakı sabitlərdən asılı olur:

$$n_1 = \frac{1+0,5\mu}{1+1,5\varepsilon}; \quad n_2 = \frac{1+0,5\varepsilon}{1+1,5\varepsilon} \quad (27)$$

Üçüncü yarımfəsildə özlü elastik əsas üzərində yerləşən müxtəlif modullu tirin məcburi rəqsləri məsələsi həll edilir. Əsasın reaksiyası

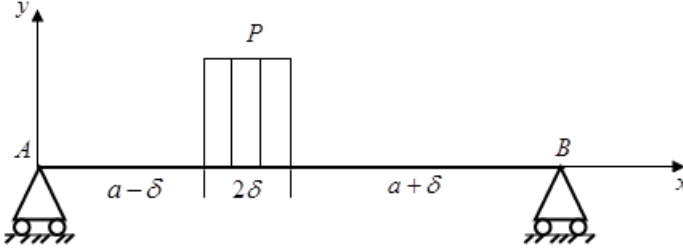
$$q(x,t) = C_1 W + C_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (28)$$

riyazi modeli ilə xarakterizə olunur.

Burada  $C_1$  və  $C_2$  – əsasın xassələrini xarakterizə edir və eksperiment yolu ilə təyin olunur.

Məsələnin həllini birinci mərhələdə  $W = V(x)e^{i\omega t}$  şəklində axtarıyıq. İkinci mərhələdə isə Bubnov Qalerkinin ortoqonallaşdırma üsulundan istifadə olunur. Xarakterik funksiyaların konkret qiymətlərində hesablatlar aparılır və nəticələr cədvəllər və əlaqə ayrılırları ilə verilir.

Dördüncü yarımfəsildə isə qeyri bircins özlü elastik əsas üzərində yerləşən müxtəlif modullu tirinlərin məcburi rəqsləri tədqiq edilir.



Şəkil 2. Tirin üzərində yükün hərəkət sxemi

Fərz olunur ki, tir uzunluq və qalınlıq boyunca kəsilməz qeyri bircinsdir. Bir sıra şərtlər daxilində məsələnin həlli əyintiyə nəzərən aşağıdakı tənliyin həllinə gətirilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ f_1(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] + \bar{K}_1(x) W + [K_2(x) + m^2 \psi_1(x)] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \\ = (E^+ J_0 K)^{-1} P(x,t) \end{aligned} \quad (29)$$

Burada

$$\bar{K}_1(x) = K_1(x) (E^+ J_0 K)^{-1}; \quad \bar{K}_2(x) = K_1(x) (E^+ J_0 K)^{-1};$$

$$\rho = \frac{\rho_0 h}{2} \int_{-h}^{+h} \psi_2(z) dz ; \quad m^2 = \bar{\rho} (E^+ J_0 K)^{-1}$$

kimi işarə edilmişdir.

$E^+ J_0$  – dartılma-sıxılmaya eyni müqavimət göstərən tirin əyilmədə sərtliyidir. Fərz olunur ki,  $P(x, t)$  aşağıdakı kimi paylanır:

$$a - \delta \leq x \text{-də} \quad P(x, t) = 0$$

$$a + \delta < x \text{-də} \quad P(x, t) = 0$$

$$a - \delta \leq a + \delta \text{-da } P(x, t) = \frac{P_0}{2\delta} \quad (30)$$

Məsələnin həlli Bubnov Qalerkinin ortoqonallaşdırma metodundan istifadə etməklə həll edilir və birinci yaxınlaşmada aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\beta^2 = \frac{\int_0^l \left[ A_1(x) \frac{d^4 \theta_1}{dx^4} + A_2(x) \frac{d^3 \theta_1}{dx^3} + A_3(x) \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} + \bar{K}_1(x) \theta_1 \right] \theta_1 dx}{\int_0^l \left[ \bar{K}_2(x) \theta_1 + m_0^2 \psi_1(x) \right] \theta_1^2(x) dx} \quad (31)$$

$$\text{Hesabat } \theta_1(x) = \sin \alpha_n x ; \quad \alpha_n = \frac{m\pi}{l} ; \quad f_1(x) = 1 + \mu_1 \bar{x} ;$$

$$K_2 = 0 ; \quad \psi_1(x) = 1 + \mu_2 \bar{x} ; \quad K_1 = 1 + c\bar{x} ; \quad f_2(z) = e^{\alpha_1 n} ; \quad \psi_2(z) = e^{\alpha_2 n} ;$$

$$\bar{x} = x \cdot l^{-1} ;$$

$(\eta = z \cdot h^{-1})$ ;  $\mu_1 \in [0,1]$ ;  $\mu_2 \in [0,1]$ ;  $\alpha_1 \in [0,1]$ ;  $\alpha_2 \in [0,1]$  qiymətlərində aparırıq. Bir qiymətləri (31) ifadəsində yerinə yazsaq

$$\beta^2 = \frac{(1 + 0,5\mu_1)\alpha_n^4 + K_1(1 + 0,5c)}{m_0^2(1 + 0,5\mu_2)} \quad (32)$$

ifadəsini alımr. Hesabatın nəticələri cədvəl və şəkildə göstərilmişdir.

Cədvəl 4

$\mu_1 = 0,3$	
$\mu_2$	$\bar{\beta}^2 = \frac{1,15}{1 + 0,5\mu_2}$
0	1,15

0,2	1,04
0,4	0,95
0,6	0,88
0,8	0,82
1,0	0,76

Beşinci yarımfəsil qeyri-bircins özlü elastik əsas üzərində yerləşən düzbucaqlı lövhənin sərbəst rəqsi hərəkətlərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

Fərz olunur ki, Kirhov-Levi hipotezi dartılma-sıxılmaya müxtəlif müqavimət göstərən lövhə üçün qəbul edilə bilər. Hərəkət tənliyini çıxarmaq üçün lövhənin müstəvi boyu qüvvələrin təsir etməməsi şərtindən istifadə edərək, orta səthin kritik deformasiyalarını əyilmə və burulmadakı əyrilikləri ilə ifadə edərək və onların ifadələrini momentlərin ifadələrində nəzərə alsaq aşağıdakı ifadələri almaq olar:

$$M_1 = E^* \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right),$$

$$M_2 = E^* \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \quad H = G^* \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \quad (33)$$

Əsasın reaksiyası  $q$  – əyinti ilə aşağıdakı kimi qəbul olunur:

$$q = K_1(x, y)W + K_2(x, y) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (34)$$

$$\text{Burada } E^* = \frac{\mu E^+}{1 - \nu_0^2} (1 + \alpha); \quad G^* = G_0^+ (1 + \beta); \quad \mu = \frac{q_1^2}{q_2} - q_3;$$

$$q_1 = \int_{h_1} dz + \alpha \int_{h_2} dz; \quad q_2 = \int_{h_1} z dz + \alpha \int_{h_2} z dz; \quad q_3 = \int_{h_1} z^2 dz + \alpha \int_{h_2} z^2 dz;$$

$$\alpha = \frac{E^-}{E^+}; \quad \beta = \frac{G^+}{G^-}; \quad \nu_0 = \frac{\nu^+ + \nu^-}{2} \text{ kimi işarə edilmişdir. } \quad h_1 \text{ və}$$

$h_2$  – qalınlıq boyu dartılan və sıxılan layların uzunluğudur.

Hərəkət tənliyini qeyri bircins özlü elastik əsas olan hallar üçün aşağıdakı kimi yazırıq:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_2}{\partial y^2} + K_1(x, y)W + [K_2(x, y) + P_0 \varphi(x, y)] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (35)$$

Birinci mərhələdə həlli



$$W(x, y, t) = V(x, y)e^{i\omega t} \quad (36)$$

şəkildə axtarıq. Burada  $V(x, y)$  – funksiyası sərhəd şərtlərini ödəməlidir.

İkinci mərhələdə  $V(x, y)$  – nəzərə alınan tənliyin həlli Bubnov-Qalerkin metodu ilə qurulur. Birinci yaxınlaşmadan alırıq:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^a \int_0^b \left[ E^* \left( \frac{d^4 \varphi_1}{dx^4} \psi_1(y) + \left( 2\nu_0 + \frac{G^*}{E^*} \right) \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_1}{dy^2} + \frac{d^4 \psi_1}{dy^4} \varphi_1(x) \right) \varphi_1(x) \psi_j(y) \right] dx dy}{\int_0^a \int_0^b [K_2(x, y) + \rho_0 \psi(x, y)] \varphi_1^2(x) \psi_1^2(y) dx dy} + \frac{\int_0^a \int_0^b K_1(x, y) \varphi_1^2(x) \psi_1^2(x) dx dy}{\int_0^a \int_0^b [K_2(x, y) + \rho_0 \psi(x, y)] \varphi_1^2(x) \psi_1^2(y) dx dy} \quad (37)$$

Fərz edəki, lövhə istənilən qədər uzundur ( $a \gg b$ ) və rəqsi hərəkət silindrik formada baş verir. Belə olan halda  $\psi_1(y) = 1$  qəbul olunmalıdır. Əsas  $x$  oxu boyunca qeyri bircins olduqda (37) ifadəsi aşağıdakı şəkildə düşür:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^a E^* \left[ \frac{d^4 \varphi_1}{dx^4} + K_1(x) \varphi_1(x) \right] \varphi_1(x) dx}{\int_0^a (K_2(x) + \rho_0 \psi(x)) \varphi_1^2(x) dx} \quad (38)$$

Lövhə Vinkler əsas üzərində yerləşdikdə (38) ifadəsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^a E^* \left[ \frac{d^4 \varphi_1}{dx^4} + K_1(x) \varphi_1(x) \right] \varphi_1(x) dx}{\rho_0 \int_0^a \varphi_1^2(x) dx} \quad (39)$$

(38) ifadəsini (39) ifadəsinə bölsək və xarakterik funksiyaların  $K_2(x) = K_2^0(1 + \varepsilon \bar{x})$ ,  $\varphi_1(x) = \sin \pi \bar{x}$ ,  $\psi(x) = \rho_0(1 + \mu \bar{x})$  qiymətlərini yerinə yazsaq aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\bar{\omega}_1^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{1}{K_2^0 \rho_0^{-1} (1 + 0,5\varepsilon) + (1 + 0,5\mu)} \quad (40)$$

Hesabatın nəticələri aşağıdakı cədvəldə verilmişdir.

Cədvəl 5.

$\mu$	$\bar{\omega}_1^2$
0	1
0,25	0,888
0,5	0,8
0,75	0,727
1,0	0,666

**Dissertasiya işinə dair əsas nəticələr aşağıdakı işlərdə nəşr edilmişdir:**

1. N.S. Rzayev. Mexaniki xassələri, yüklənmənin növündən asılı olan tirlərin dayanıqlığı və rəqsi hərəkətləri haqqında. Heydər Əliyev və Azərbaycan Təhsili Respublika Elmi konfransının materialları. Bakı-2013. Səh. 392-394.

2. V.C. Hacıyev, N.S.Rzayev. Oscillations of a nonhomo-geneous different modulus beam with a load moving on it situated on nonhomogeneous viscoelastic foundation. Transaction of NAS of Azerbaijan, 2013, vol. XXXIII, №4, pp . 133-138.

3. Г.М.Гасымов., Н.С.Рзаев. Поперечное колебание стержня лежащего на неоднородно вязко упругом основании. AzTU. Elmi əsərlər. Cild 1, №3, Bakı-2013. S. 41-45.

4. V.C.Hacıyev, N.S.Rzayev. Lateral oscillations of a beam made of multi-modulus material lying on inhomogeneous visco-elastic foundation. Transaction of NAS of Azerbaijan, 2014, vol. XXXIV, №1, pp.125-130.

5. В.Д.Гаджиев, .М.Шамиев, Н.С.Рзаев. К устойчивости и колебание элементов конструкций изготовленных из разномодульных

материалов. Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 55 illiyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransın materialları. 15-16 may 2014, səh.112-114.

6. Н.С.Рзаев. К устойчивости упруго пластического стержня лежащей на неоднородно упругом основании. Memarlıq və İnşaat Universiteti. Nəzəri və tətbiqi mexanika jurnalı. Bakı -2014, səh.132-137.

7. Н.А.Шукурова, Г.Р.Мирзоева, Н.С.Рзаев. Устойчивость разномодульной полосы на двух константном основании с учетом поперечных сдвигом. Əməkdar elm xadimi, professor Əmir Nəbibzadənin 100 illik yubleyinə həsr olunmuş elmi konfransının materialları. Bakı 2016, s. 218-219.

8. Н.С.Рзаев. Об устойчивости плоской формы изгиба балок, изготовленных из материала разно-сопротивляющихся и сжатию. AzTU. Elmi əsərlər. cild 1, №3 Bakı-2016, s.172-176.

9. Н.С.Рзаев. Свободное колебание неоднородного разномодульного стержня, лежащего на двухконстантов основании. Строительная механика инженерных конструкций сооружений. Москва. 2016, №6, с.38-43.

## **НАТИК САМАНДАР оглу РЗАЕВ**

### **УСТОЙЧИВОСТЬ И ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БРУСЬЕВ И ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН РАЗНО- СОПРАТИВЛЯЮЩИХСЯ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ**

#### **АННОТАЦИЯ**

Диссертационная работа посвящена устойчивости и колебаний разномодульных брусьев, прямоугольных пластин и цилиндрической оболочки с учетом влияния внешнего сопротивления. В работе получены следующие результаты:

Решены задачи плоской формы потери устойчивости при чистом изгибе упругих (в постановки Л.С.Тимошенко ) и упруго пластических стержней.

Впервые с учетом поперечного сдвига и сопротивления двухконстантного основания (Пастернак) решения задач устойчивости длинной разномодульной пластинки.

Решены задачи динамической устойчивости цилиндрической оболочки, круговой оболочки лежащей на вязко упругом основании.

Впервые в постановке Кармана-Ильюшина решена задача устойчивости упругопластического стержня с учетом неоднородного упругого сопротивления (Фусса-Винклер).

Впервые рассмотрены задачи устойчивости упруго пластического стержня обладающего вторичной упругостью.

Впервые решены задачи собственной и вынужденной колебаний разномодульных брусьев постоянного и переменного сечения с учетом сопротивления двухконстантного и неоднородного основания.

**NATIG SAMANDAR oglu RZAEV**

**STABILITY AND TRANSVERSE VIBRATIONS OF BEAMS  
AND RECTANGULAR PLATES DIFFERENTLY RESISTING  
TO TENSION AND COMPRESSION**

**SUMMARY**

The dissertation work is devoted to stability and vibrations of rectangular plates and cylindrical shell differently resisting to tension and compression taking into account the influence of resistance of external medium. In the work the following main results were found:

The problem of solvability of differently resisting elastic beams under pure bending, is solved.

For the first time the problem of loss of stability in the plane form of differently resisting beam under bending is solved.

Stability of a long plate lying on a foundation characterized by two constants is solved with regard to transverse shear effect.

The problem of dynamic stability of a cylindrical plate is solved with regard to resistance of viscous-elastic foundation.

For the first time, the problem of solvability of an elasto-plastic beam lying on a homogeneous foundation, is solved.

The problem of solvability of repeated elasticity thin shell beams under bending is solved.

For the first time, the problem of free and forced vibrations of different modulus beams with variable cross section is solved with regard to resistance of foundations and inhomogeneous foundations.

The problem of free vibrations of a different modulus rectangular plate lying on inhomogeneous viscous-elastic foundation, is solved.