AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazma hüququnda

KONSTRUKSİYA ELEMENTLƏRİNİN VƏ BƏRK CİSİMLƏRİN YÜKDAŞIMA QABİLİYYƏTİNƏ XARİCİ MÜHİTLƏRIN TƏSİRİNİN BƏZİ STATİKA VƏ DİNAMİKA MƏSƏLƏLƏRİ

İxtisas: 2002.01- Deformasiya olunan bərk cisim mexanikası

Elm sahəsi: Mexanika

İddiaçı: **Sevdimalıyev Yusif Məmmədəli oğlu**

Elmlər doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AFTOREFERATI

Bakı – 2024

Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin "Nəzəri mexanika və kontinuum mexanikası" kafedrasında tamamlanmışdır.

Elmi məsləhətçi: AMEA-nın müxbir üzvü, texnika elmlər doktoru, professor
Surxay Əkbərov Cabbar oğlu

Rəsmi opponentlər: Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Talıblı Lətif Xəlil oğlu
Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Lətifov Fuad Seyfəddin oğlu
Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Zamanov Asəf Dağbəyi oğlu
Riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor
Əhmədov Natiq Qarakişi oğlu

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Bakı Dövlət Universitetinin bazasında fəaliyyət göstərən birdəfəlik Dissertasiya Şurası___ BED 4.23___.

Dissertasiya şurasının sədri:
AMEA-nın həqiqi üzvü, fizika-riyaziyyat elmlər doktoru, professor
Məhəmməd Mehdiyev Fərman oğlu

Dissertasiya şurasının elmi katibi:
Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
Gülnar Salmanova Musa qızı

Elmi seminarın sədri:
Riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor
Ramiz İskəndərov Əziz oğlu

Azərbaycan Respublikasının Təhsil Nazirliyi
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ p.h.ş.
Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan
Baku State University l.e.p.l.
ELMİ KATİB
SCIENTIFIC SECRETARY
İmzanı təsdiq edirəm:
"27" 02 2024

GİRİŞ

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi

Keçən əsrin ortalarından başlayaraq,deformasiya olunan bərk cisimlər və konstruksiyalar mexanikasının fizikanın bir çox sahələri ilə sıx əlaqədə olan istiqamətləri yarandı və müasir dövrdə də bu istiqamətlər geniş şəkildə inkişaf edir, bunun nəticəsində bütöv mühitin deformasiyalanması və bərk cisimlərin möhkəmliyinin fiziki nəzəriyyələri yüksək inkişaf mərhələsinə çatdı. Sürüncəklik (creep) nəzəriyyəsi və nazik divarlı konstruksiya elementlərinin qabarması və dayanıqlıqlığının itirilməsi bu elm sahələrindəndir.Həmin dövrdən başlayaraq nəzəri və eksperimental tədqiqatlar N.M.Belyayev (1943), N.Xoff (1951), Y.N.Rabotnov (1957,1966), L. M. Kaçanov (1960), N. N. Malinin (1959), S. A. Şesterikov (1957,1963), A.S.Volmir (1962), İ.Q.Terequlov (1962,1966), V.İ.Rozemblyum (1954), A.M.Lokoşenko (2008), L.M.Kurşin (1961, 1963), G.V.İvanov (1961, 1963) və onların davamçıları tərəfindən aparılmışdır. Respublikamızda 1970-ci ildən başlayaraq metalların sürüncəkliyi və irsi elastiki mühitlər, eləcə də konstruksiya elementlərinin və bərk cisimlərin qabarması və yükdaşıma qabiliyyətinin təyini məsələlərinə M.F. Mehdiyev, R.Y. Əmənzadə, S.C. Əkbərov, M.X. İlyasov, A.N. Əlizadə, L.X.Talıblı, F.S.Lətifov, A.D. Zamanov, Q.Q.Əliyev, M.B.Axundov, L.F.Fətullayeva və digərlərinin tədqiqatları həsr edilmişdir.

Deformasiya olunan bərk cisimlərin dinamikasının fəza məsələləri, hidrodinamika, elastodinamika və ümumiyyətlə hidroelastiklik bütöv mühit mexanikasının ən mürəkkəb məsələlər sinfinə aiddir. Bununla belə, üçölçülü qoyuluşda sərhəd məsələsinin həllinin riyazi mürəkkəbliyi əksər hallarda müxtəlif hipotezlərin və sadələşdirici fərziyyələrin cəlb edilməsinə səbəb olur. Bu halda məsələnin qoyuluşu və həlli əhəmiyyətli dərəcədə sadələşir, amma bu sadələşmələr alınan həllərin tətbiq oblastına əhəmiyyətli məhdudiyyətlər qoyur.

Müasir dövrdə qeyri-bircins başlanğıc gərginlikli çoxlaylı içiboş sferanın və silindrin təbii vibrasiyalarının tədqiqi deformasiya olunan cisimlərin üçölçülü xəttiləşdirilmiş nəzəriyyəsi çərçivəsində

sərbəst rəqslərinin və elastik dalğaların tədqiqatları S.C.Əkbərov, A.N.Quz və digərləri tərəfindən həyata keçirilmişdir.

Fundamental tədqiqatlar sahəsində həll edilən fəza məsələsinin aktuallığı gərginlik-deformasiya vəziyyətinin demək olar ki, həmişə üçölçülü xarakter daşıması və analitik həllərin alınması ilə müəyyən edilir. Mühəndis tətbiqlərində bu cür geniş miqyaslı tədqiqatın aktuallığı bir də onunla müəyyən edilir ki, materialların möhkəmliyi və konstruksiya elementlərinin yükdaşıma və ya aparıcılıq qabiliyyətinin qiymətləndirilməsində gərginlik-deformasiya vəziyyətinə aid parametrlərin lokal oblastlarda (konstruksiya elementlərinin ölçülərinin kəskin dəyişdiyi zonalar, qeyri-müntəzəm paylanmış yüklərin tətbiq olunduğu oblastlar və digər sahələrdə) yerinə yetirilmiş eksperimentlərdən alınan qiymətlərindən istifadə olunur. Bu lokal oblastda alınan etibarlı və dolğun informasiya fəza məsələlərinin konkret nəticələri və metodlarından istifadə ilə əlaqədardır.

Tədqiqatın obyekti və predmeti

Dissertasiya işində baxılan obyektlər və onların aparıcılıq qabiliyyətinin təyin edilməsi üzrə məsələlərin qoyuluşunun praktiki əhəmiyyət daşıdığı konstruksiya elementləri olaraq çubuqlar, lövhə və örtüklər götürülür. Təklif olunan variyasiya prinsiplərinin tətbiqi ilə sürüncəklik halında dayanıqlığın ümumi məsələlərinin verilməsi, eləcə də dinamika məsələləri həllində əsas obyektlər olaraq sonlu və sonsuz həndəsi ölçülərə malik elastik və qeyri-elastiki deformasiya olunan bərk cisimlər götürülür. Daha çox xüsusi obyektlər halında məlumdur ki, həlledici tənliklər elastiklik, plastiklik və sürüncəklik nəzəriyyələrinin ümumi tənliklərinə müvafiq kinematik və statik hipotezlərin tətbiqi və variasiya prinsiplərindən istifadə etməklə əldə edilə bilər. İçi boş çoxlaylı sfera və silindrlər, çoxlaylı çubuq və örtüklərdən ibarət konstruksiya elementləri formasına və fiziki xassələrinə görə fərqli, sonlu sayda bircins və bir bütöv mühitdə müəyyən qayda ilə birləşdirilən hissə-hissə bircins və qeyri-bircins mühit təşkil edir. Müxtəlif hissələrin əlaqəsi təbii və ya süni ola bilər. Sonuncular həmişə strukturların yükdaşıma qabiliyyətini artırmaq məqsədinə xidmət edir və tez-tez mühəndislik təcrübəsində istifadə olunur. Qeyri-bircins hissələrdən, məsələn, kompozitlər və

nanostrukturlar kimi digər elastiki xüsusiyyətlərə malik olan bərk cismin birləşdirilməsi halında məsələnin həlli xeyli çətinləşir.

İşdə konstruksiyalar və deformasiya olunan bərk cisimlər mexanikasının bəzi statik və dinamik məsələləri araşdırılır, onların gərginlik-deformasiya vəziyyəti müəyyən edilir və yükdaşıma qabiliyyəti qiymətləndirilir.

Dissertasiyanın tədqiqat predmeti: **1. Statik məsələ** – sürüncəklik prosesində bərk anizotrop cisimlərin və konstruksiya elementlərinin xarici fiziki-kimyəvi meydanların təsiri, mexaniki təsirlər və materialların zədələnmələri nəzərə alınan də nəzərə alınmaqlamaterialın xarici fiziki-kimyəvi sahələrinin təsirini, mexaniki təsirləri və zədələnmə qabiliyyətini nəzərə alaraq variasiya prinsipinin qurulması. **2. Dinamik məsələ** - çoxlaylı içi boş sferik və slindrik cisimlərin daxilində sıxılan maye olduğu halda və maye olmadıqda müxtəlif sərhəd və kontakt şərtləri nəzərə alınmaqla, sərbəst rəqslər zamanı əsas dalğa dinamikası xüsusiyyətlərinin müəyyən edilməsi.

İşin məqsədi

Dissertasiya işinin məqsədi deformasiya olunan bərk cisim və konstruksiya elementlərinin bəzi statika və dinamika məsələləri sinfinin riyazi modelinin qurulması, onların ətraf xarici meydanların təsirini nəzərə almaqla yükdaşıma qabiliyyətinin təyin olunması və üçölçülü qoyuluşda dəqiq və təqribi analitik həllərinin alınmasından ibarətdir.

Tədqiqatın metodları

A.J.Vanq, V.Prager [1][1], J.L.Sanders, G.D. Mac Comb, F.R. Şlexte [2][2], K.Vaşizu [3][3] və başqalarının işlərində gərginlik və yerdəyişmələrin zamanın məlum funksiyası kimi qəbul edərək sərhəd məsələləri üçün variyasiya prinsipləri isbat edilmişdir. Səthi qüvvələrin dəyişmə sürətini, səthdə yerdəyişmələrin dəyişmə sürətini, kütlə qüvvələrinin dəyişmə sürətini və gərginlik-deformasiya sürətləri

[1]Wang A.J. Termal and creep effects in work-hardening elastic-plastic solids / W. Prager // Journal of the Aeronautical Sciences, –1954. V.21. №5, –p.343-344.

[2] Sanders J. L. A variational theorem for Creep with applications to plates and columns / H. G. McComb, F.R. Schlechte // NASA Report, –1957. –p.134.

[3] Washizy K. Variational principles in continuum mechanics // University of Washington College of Engeneering.Department of Aeronauticai Engineering, –1962.Report 62-2

arasındakı münasibətlərin həcmdə dəyişməsini bilərək, cisimdə yaranan gərginlik və yerdəyişmə sürətləri təyin edilir. Reley-Rits təqribi hesablama metodu və Runge- Kutta ədədi metodu tətbiq edilir. Bu zaman süründəklik deformasiyasının sürəti başlanğıc deformasiya sürəti kimi qəbul edilir.

Qeyri-bircins başlanğıc gərginlikli deformasiya olunan cisimlərin üçölçülü xəttiləşdirilmiş nəzəriyyəsi və elastiki dalğalar nəzəriyyəsi çərçivəsində S.C.Əkbərovun təklif etdiyi diskret- analitik metodla bütöv içiboş sfera, çoxlaylı içiboş sfera və çoxlaylı içiboş silindrin məxsusi rəqsləri tədqiq edilir.

Deformasiya olunan cisimlərin və qeyri özlü maye hidrodinamikasının üçölçülü xəttiləşdirilmiş nəzəriyyələri çərçivəsində diskret-analitik metodla qeyri bircins başlanğıc gərginlikli içiboş bütöv sferanın; qeyri-bircins başlanğıc gərginlikli daxilində sükunətdə olan qeyri özlü maye ilə birlikdə çoxlaylı içiboş sferanın; qeyri-bircins başlanğıc gərginlikli daxilində oxboyu sabit sürətli hərəkət edən qeyri özlü maye olan içiboş silindrin məxsusi rəqsləri və dalğaların yayılması; üçölçülü elastiklik nəzəriyyəsinin və elastik dalğaların yayılmasının dəqiq tənlikləri çərçivəsində başlanğıc qeyri-ideal kontakt şərtləri ilə üçlaylı içiboş sferanın məxsusi rəqsləri və dalğaların yayılması; daxilində sükunətdə olan sferik qaz qabarcıqlı özlü sıxılan maye və silindrik örtükdən ibarət hidroelastiki sistemin hidrodinamikanın xəttiləşdirilmiş tənlikləri və nazik qalınlıqlı örtüklər nəzəriyyəsinin tənlikləri ilə oxasimmetrik kiçik rəqsləri və bu sistemdə dalğaların yayılması məsələsi Furye metodu ilə tədqiq edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar:

- həndəsi xətti və qeyri-xətti formada bərk cisimlərin və konstruksiya elementlərinin yükdaşıma qabiliyyətinə təsirlərin və xarici fiziki-kimyəvi meydanların təsirini nəzərə alaraq süründəklik məsələləri üçün qurulmuş qarışıq variasiya prinsipi.
- materialların zədələnmələrini nəzərə alaraq kompozit materiallar üçün modifikasiya olunmuş qarışıq variasiya prinsipi.

- üçölçülü qoyuluşda qeyri-bircins başlanğıc gərginlikli sferanın dinamika məsələləri üçün diskret analitik metodla alınmış analitik həll.

- qeyri-bircins gərginliklidaxilində sükunətdə olan qeyri özlü maye olan içiboş çoxlaylı sferada və oxu boyu sabit sürətli qeyri özlü maye olan içiboş silindrdə elastik dalğaların yayılması məsələsinin analitik həlli;

-sıxılan qeyri özlü maye ilə doldurulmuş çoxlaylı içiboş sferanın və içiboş silindrin dinamik xarakteristikalarına başlanğıc qeyri-bircins gərginliklərin təsirinin müəyyən edilməsi məsələsinin həlli.

-qeyri-ideal kontakt şərtli çoxlaylı içiboş sferanın dinamiki xarakteristkalarının təyin olunması məsələsi

-daxilində müvazinətdə olan sferik qaz qabarcıqlı özlü sıxılan maye və örtükdən ibarət hidroelastiki sistemdə elastik dalğaların yayılmasının oxsimmetrik məsələsinin həlli.

Tədqiqatın elmi yeniliyi

İşin elmi yeniliyi aşağıdakı kimidir:

Fiziki-kimyəvi xarici mühitin təsiri altında olan deformasiya olunan elastiki-plastiki anizotrop bərk cisim və konstruksiya metallarından hazırlanmış konstruksiya elementlərinin yükdaşıma qabiliyyətini təyin etmək üçün Y. N. Robotnovun kinetik nəzəriyyəsi əsasında qarışıq variasiya prinsipi tərtib edilmiş və isbat edilmişdir.

Qeyri-bircins başlanğıc gərginlikli izotrop elastiki sferanın məxsusi rəqslərinin dinamikası məsələsi üçün hissə-hissə bircins cisimlər çərçivəsində üçölçülü xəttiləşdirilmiş tənliklərin və elastodinamika münasibətlərinin tətbiqi ilə diskret- analitik metodun tətbiqi ilə məsələnin analitik həlli alınmışdır.

Daxilində sükunətdə olan sıxılan qeyri-özlü maye yerləşən üçlaylı içiboş sferanın və daxilində oxboyu sabit sürətli sıxılan qeyri-özlü maye olan çoxlaylı içiboş silindrin daxili və xarici müntəzəm paylanmış radial sıxıcı səthi qüvvələrin təsirindən hərəkət tənliklərinin Helmholts potensialları ilə ifadə olunan həlləri alınmışdır.

Qeyri-bircins başlanğıc gərginliklərin üçlaylı içiboş qeyri-ideal kontakt şərtli sferanın dinamik reaksiyalarına təsiri məsələsinin

üçölçülü dəqiq tənliklərin və elostodinamik münasibətlərin tətbiqi ilə analitik həlli alınmışdır.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti

Dissertasiyanın nəzəri əhəmiyyətinə aşağıdakılar daxildir:

-xarici fiziki-kimyəvi meydanların və zədələnmənin üçölçülü cismə və konstruksiya elementinə təsirini nəzərə almaqla süründəklik halında yükdaşıma qabiliyyətini təyin etmək üçün verilmiş variasiya prinsipi;

- qeyri-bircins başlanğıc gərginlikli sferanın elastik cisimlərin dayanıqlığının üçölçülü xəttiləşdirilmiş nəzəriyyəsi əsasında diskret-analitik metodun tətbiqi ilə dinamika məsələsinin alınmış analitik həlli;
- daxilində qeyri-özlü sıxılan maye olan qeyri-bircins başlanğıc gərginlikli çoxlaylı içiboş sferada və çoxlaylı içiboş silindrdə elastik dalğaların yayılmasına dair məsələlərin üçölçülü xəttiləşdirilmiş nəzəriyyə əsasında alınmış analitik həlləri;
- laylar arası qeyri-ideal kontakt şərtli çoxlaylı içiboş sferanın dinamik xarakteristikalarının dəqiq üçölçülü tənliklərlə təyini;
- daxilində sferik qaz qabarcıqlı sıxılan özlü maye olan və silindrdən ibarət hidroelastiki sistemdə elastik dalğaların yayılması məsələsinin həlli;
- Yükgötürən konstruksiyalar və qurğularda texnogen fəlakət və qəzaların səbəbləri üzrə analizinin nəticələri göstərir ki, dağıdıcı olmayan nəzarət vasitələri və konstruksiyanın vəziyyətinin diaqnostikası üçün zəruri cihaz və vasitələrin olması əksər hallarda bu dağıntıların və fəlakətlərin qarşısını almağa səbəb olur. Mexanika və seysimalogiya sahəsində, praktiki işlərdə materialın yükdaşıma qabiliyyətinin itirilməsi proseslərinin riyazi modelləşdirilməsi və konstruksiyaların qalıq resursunun qiymətləndirilməsində dissertasiya işində əldə edilən nəticələrdən istifadə işin praktik əhəmiyyətini təşkil edir.

Tədqiqat nəticələrinin etibarlılığı

Alınan nəticələrin etibarlılığı qoyulan məsələlərin riyazi korrektliyi, dəqiq analitik metodlarla həllərin alınması, ədədi hesablamaların sonlu analitik və ədədi nəticələrin xüsusi hallarının ədəbiyyatlarda məlum olanlarla müqayisəsi ilə təmin edilir.Ədədi nəticələrin alınmasında PK bazasında riyazi hesablamalar üçün müasir lisenziyalı paket kimi Matlab proqramından istifadə edilir və

müvafiq qrafiklər qurulur. Əldə edilən nəticələrin doğruluğu xüsusi hallarda digər müəlliflərin məlum nəticələri ilə üst-üstə düşməsi ilə təsdiqlənir.

İşin aprobasiyası

Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıda göstərilən konfranslarda məruzə edilmiş və müzakirə edilmişdir:

- Республиканская конференция «Актуальные проблемы теоретической и прикладной математики» посвящённое 100 летию академика М. Расулова, Шеки, 2016;
- Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, 2017;
- Республиканская конференция «Актуальные проблемы математики и механики посвящённое 100 летию чл. корр. НАНА, профессора Г. Т. Ахмедова, Баку, 2017;
- XVII International Conference «Dynamical System Modelling and Stability Investigation», Ukraine, Kiev, 2017;
- International Conference Geoinformatics, Ukraine, Kiev, 2018;
- International Conference «Modern problem mechanics and mathematics» dedicated to the 90th anniversary of academician A. Kh. Mirzajanzade, Baku, 2018;
- Республиканская научная конференция «Актуальные проблемы математики и механики» посвящённое 95 летному юбилею Общенационального Лидера Азербайджана Г. А. Алиева, 2018;
8th International Conference on «Appleid Analysis and Mathematical Modeling», Istanbul Gelisim University, 2019;
- Республиканская научная конференция «Актуальные проблемы математики и механики» посвящённое 96 летному юбилею Общенационального Лидера Азербайджана Г. А. Алиева, 2019;
- 21 Ulusal Mekanik Kongresi TUMTMK, Türkiye, Nigde, 2019;
- 8th International Euroasian Conference on mathematical sciences and applications, Baku, 2019;
- Республиканская научная конференция «Актуальные проблемы математики и механики» посвящённое 97 летному

юбилею Общенационального Лидера Азербайджана Г. А. Алиева, 2020;
- 7th International Conference on Control and Optimization with industrial applications, Baku, 2020;
- Республиканская научная конференция «Актуальные проблемы математики и механики» посвящённое 98 летному юбилею Общенационального Лидера Азербайджана Г. А. Алиева, 2021;
- Республиканская научная конференция «Актуальные проблемы математики и механики» посвящённое 99 летному юбилею Общенационального Лидера Азербайджана Г. А. Алиева, 2022;
- International Conference «Modern Problem of Mathematics and Mechanics» devoled to the 110th anniversary of academician Ibrahim Ibrahimov, Baku, 2022;
- 8th International Conference on Control and Optimization with industrial applications, Baku, 2022;
- «Funksiyalar nəzəriyyəsi, funksional analiz və onların tətbiqləri» mövzusunda Respublika konfransı, Bakı, 2022;
- 21 Ulusal Mekanik Kongresi TUMTMK, Türkiye, Konya, 2023;
- Республиканская научная конференция «Дифференциальные и интегральные операторы» посвящённое 100 летному юбилею Общенационального Лидера Азербайджана Г. А. Алиева, 2023;
-İnternational scientific conference «actual problems of mechanics - 2023» to the 145 th anniversary of the birth of S.P. Timoshenko Kiev,2023
- На научных семинарах Механико-математического факультета БГУ март 2021, ноябрь 2022, февраль 2023.
- На расширенных семинарах кафедры Теоретическая механика и механика сплошной среды 2020,2021,2022, 2023.

- На научных семинарах Механико-математического факультета БГУ март 2021, ноябрь 2022, февраль 2023.
- На расширенных семинарах кафедры Теоретическая механика и механика сплошной среды 2020,2021,2022, 2023.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı

Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin Nəzəri mexanika və bütöv mühit mexanikası kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın həcmi və strukturu

Dissertasiyanın strukturu və həcmi (hər bir struktur bölmənin həcmi ayrıca göstərilməklə simvollarla). Dissertasiya işinin ümumi həcmi 421 229 işarədir (başlıq səhifəsi - 758 simvol, mündəricat - 2758 simvol, giriş - 52 735 simvol, birinci fəsil - 118 533 simvol, ikinci fəsil - 39 775 simvol, üçüncü fəsil – 66224, 4-cü fəsil – 140446 simvol). İstifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısı 204 addan ibarətdir.

DİSSERTASİYANIN MƏZMUNU

Girişdə dissertasiyada baxılan məsələlərin aktuallığı əsaslandırılır, işin məqsədi və tədqiqatın məsələsi formalaşdırılır, əldə edilən nəticələrin elmi yeniliyi, nəzəri və praktiki əhəmiyyəti göstərilir.

Birinci fəsildə sürüncəklik zamanı konstruksiya elementlərinin və bərk cisimlərin yükdaşıma qabiliyyətinə xarici meydanların və mexaniki yüklərin təsiri araşdırılır. Məsələnin riyazi modelləşdirməsi və həlli üçün riyazi analizin birbaşa metodları tətbiq olunur, üçölçülü nəzəriyyə üçün qarışıq tipli variyasiya prinsipi verilir və qeyri-bircins anizotrop elastiki-plastiki cisimdə neytron seli təsirindən kiçik və sonlu deformasiyalarda yaranan gərginlik-deformasiya vəziyyətini təyin etmək üçün Reley-Ritz metodu tətbiq edilir.

1.1-ci paraqrafda yerdəyişmə və gərginlik sürətinin asılı olmayan variyasiyalarında qeyri-bircins və kompozit cisimlər üçün şüalanma altında plastiklik nəzəriyyəsinin qarışıq tipli variyasiya prinsipi təklif olunur. Mühitin fiziki - mexaniki xarakteristikaları şüalanma dozasından asılı olduğu qəbul edilir. Variyasiya teoreminin modifikasiyası, qeyri-bircins mühitdə müxtəlif fazaların (daxiledilmələrin) aşkar göründüyü kompozit material üçün verilir. Qeyd edək ki, neytron şüalanması zamanı həcmi deformasiyanın dəyişməsi kifayət qədər ləng baş verir, bunun nəticəsində gərginlik-deformasiya vəziyyətini qiymətləndirərkən dinamik təsirləri nəzərə almamaq və şüalanmanın zaman müddətini parametr kimi qəbul etmək olar. Bu halda şüalanmanın dəyişməyən intensivliyi halında, formalaşma prosesini xarakterizə edən parametr kimi, zamanla yanaşı,

$d = n\nu t$ düsturla təyin olunan şüalanma dozası götürülə bilər, burada n (1/sm^3) selin vahid həcminə düşən neytronların sayıdır, və ν — orta axın sürətidir (d -nin ölçü vahidi neytron(1/sm^2)). Bu baxımdan, kəmiyyətlərin üzərində nöqtə şüalanma dozasına görə diferensiallanmanıı ifadə edəcək. İndi isə əgər $\dot{e}_{ij}^{(1)}$ deformasiya sürətinin axma nəzəriyyəsi tipində elastiki-plastiklik qanununa tabe olduğunu, həmçinin həm mexaniki xarakteristikaların, həm də həcmi genişlənmə θ -nın x^k koordinatlarının və d şüalanma dozasının funksiyaları olduğunu qəbul etməklə, təkrarlanan indekslərə görə cəmləmə qaydasına əsasən yaza bilərik:

$$\dot{e}_{ij}^{(1)} = \left\{C_{ijkm}\left(x^k, d\right)\sigma^{km}\right\}^{\bullet}\left(i, j, k, m = \overline{1,3}\right), \qquad (1.1)$$

$$\dot{e}_{ij}^{(2)} = \dot{\theta}\left(x^k, d\right)\delta_{ij}, \qquad (1.2)$$

Tutaq ki, üçölçülü evklid fəzasında kifayət qədər hamar S səthi ilə sərhədlənmiş V həcmli cisim verilir. Səthin müəyyən bəzi S_u hissəsində yalnız $\overline{u}_k$ yerdəyişmə vektorunun komponentləri, qalan digər S_σ hissəsində isə $\overline{T}^k$ yükləri verilmişdir və $S = S_u \cup S_\sigma$.

Belə bir funksional daxil edək:

$$J = \int_V \left\{\dot{\sigma}^{ij}\dot{e}_{ij} - \frac{1}{2}C_{ijkm}\dot{\sigma}^{ij}\dot{\sigma}^{km} - \dot{C}_{ijkm}\sigma^{km}\dot{\sigma}^{ij} - \dot{\theta}\delta_{ij}\dot{\sigma}^{ij}\right\}dV -$$

$$- \int_{S_\sigma} \dot{\overline{T}}^i \dot{u}_i dS - \int_{S_u} \dot{T}^i\left(\dot{u}_i - \dot{\overline{u}}_i\right)dS. \qquad (1.3)$$

Burada (1.3) funksionalının qurulmasında bir tərəfdən, sürüncəklik nəzəriyyəsində Sanders, McComb və Schlechtenin variyasiya prinsipi, digər tərəfdən isə onun elastikplastiklik halı üçün modifikasiyasından istifadə edilmişdir. Paraqraf 1.2-də qeyri-bircins mühitlər üçün qarışıq tipli variyasiya prinsipinin modifikasiyasından sürüncəklik prosesində sərt bağlanmış çoxlaylı qeyri-xətti elastik çubuğun həddi vəziyyəti probleminin həlli üçün alınan variyasiya metodu təqdim edilir. Həndəsi qeyri-xətti nəzəriyyə çərçivəsində,

$$\varepsilon_{ij}^{v} = f_{ij}\left(\sigma^{sn}\right) \qquad (1.4)$$

fiziki qanununa tabe olan qeyri-xətti elastik anizotrop material üçün funksionalın son formasını alırıq:

$$J=\sum_{m}\int_{V_m}\left\{\dot{\sigma}^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+\frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\nabla_j\dot{u}_k-\frac{1}{2}\left(\dot{\varepsilon}^{v}_{ij}+2\dot{p}_{ij}\right)\dot{\sigma}^{ij}\right\}dV-$$
$$-\int_{S_u}\dot{T}^i\left(\dot{u}_i-\dot{u}_i^0\right)dS-\int_{S_\sigma}\dot{T}^{i0}\dot{u}_i dS \qquad (1.5)$$

Fərz edilir ki,planda uzunluğu l və qalınlığı $2h$ olan düzbucaqlı çubuq bir-birindən ayrılmaqla oturacaq səthlərə parallel müxtəlif qalınlıqlı s sayda laylardan barətdir. Hər təbəqənin qalınlığını δ_k , sonra $\delta_1+\delta_2+...+\delta_s=2h$ ilə işarə edirik. Fiziki fərziyyəyə əsasən süründəklik sürətinin

$$\dot{p}=A_{k+1}\sigma^m,\ a_k\le z\le a_{k+1},\ [k=0,1,...(s-1)]\ . \qquad (1.6)$$

asılılıqla təsvir olunduğu nəzəriyyəni qəbul edəcəyik:

Bütövlükdə çoxlaylı çubuq üçün ani deformasiyanı vahid bərabərlik şəklində təyin edək:

$$e^v=\frac{\sigma}{E_{k+1}}\left\{1+\left(\frac{\sigma}{\sigma^0_{k+1}}\right)^n\right\} \qquad a_k\le z\le a_{k+1} \qquad (1.7)$$

Burada, $n-$ materialın qeyri-xəttilik dərəcəsidir və cüt qiymətlər (2,4,6,...) alır, E_{k+1} və $\sigma^0_{k+1}-$ müvafiq olaraq $k-$ -cı təbəqənin elastiklik modulu və mütənasiblik həddidir. (1.6) və (1.7) münasibətlərində aşağıdakı işarəmələr qəbul edilmişdir.

$$a_k=-h+\sum_{j=0}^{k}\delta_j \quad (\delta_0=0) \qquad (1.8)$$

İndi isə $T=const$ mərkəzi sıxıcı qüvvəsinin təsiri altında baxılan çubuğun süründəklik halında dayanıqlığını nəzərdən keçirək. Çubuğun en kəsik ölçülərindən birini vahid qəbul edərək və qeyri-xəttiliyi yalnız əyintinin səbəbindən yaranan qeyri-xəttiliyi nəzərə almaqla ani deformasiyanın (1.7) fiziki qanununu nəzərə almaqla funksionalı aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$J=\int_0^l\int_{-h}^h\left(\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}+\frac{1}{2}\sigma\dot{w}_{,x}^2\right)dxdz-\frac{1}{2}\int_0^l\sum_{k=0}^{s-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\dot{\sigma}^2}{E_{k+1}}\left[1+(n+1)\left(\frac{\sigma}{\sigma_{k+1}^0}\right)^n\right]dxdz-$$

$$-\int_0^l\sum_{k=0}^{s-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}A_{k+1}\dot{\sigma}\sigma^m dxdz. \tag{1.9}$$

Gərginliyin çubuğun qalınlığı boyu paylanmasının xətti olmasını və müstəvi kəsiklər hipotezinin doğru olduğunu qəbul etməklə hər iki ucdan sərt bağlanmış hal üçün sərhəd şərtlərini yazırıq.

Çubuqların qabarmasının kritik zaman müddətini təyin etmək üçün Reley-Rits metodundan istifadə etmək məqsədi ilə əyintinin və momentin koordinatlardan və zamandan asılılıq funksiyalarını seçmək lazımdır. Sərhəd şərtlərini ödəyən birinci məxsusi funksiyalar olaraq yaza bilərik:

$$w(x,t)=a(t)\sin\frac{\pi x}{l}\sin\pi(1-\frac{x}{l}),$$
$$M(x,t)=b(t)\cos\frac{\pi x}{l}\cos\pi(1-\frac{x}{l}) \tag{1.10}$$

(1.9) funksionalın stasionarlıq şərtindən aşağıdakı iki adi diferensial tənlikdən ibarət sistem alınır, əvəzləmədən sonra isə alırıq:

$$d\tau/d\eta=\left(-\frac{\pi^2\xi^2}{2}+\omega\phi_2+\omega^{n+1}\sum_{i=0}^{n}K_n^i\phi_{i+2}^v\eta^i\right)/\left(\omega^{n+1}\sum_{j=0}^{m}K_m^j\phi_{j+1}^c\eta^j\right), \tag{1.11}$$

Burada $\eta=a/h$ və $\tau=A_1E_1^m t$ -ölçüsüz asılı olmayan məchullar; $K_n^i,\varphi_2,\varphi_{i+2}^v,\varphi_{j+1}^c,\xi,\omega$- isə ölçüsüz kəmiyyətlərdir. (1.11) diferensial tənliyi üçün başlanğıc şərt verilməlidir:

$$\eta(0)=\eta^v, \tag{1.12}$$

Burada $\eta^v-\omega$ yükünün tətbiqi nəticəsində bilavasitə ani olaraq əyintinin qiymətidir.

Baxılan hal üçün $s=3$, $E_1=E_3$, $\delta_1=\delta_3$, $A_1=A_3$, $\sigma_1^0=\sigma_3^0$ və $\mu=A_2/A_1$, $a=E_2/E_1$, $\beta=\delta_2/\delta_1$, $\gamma=\sigma_1^0/\sigma_2^0$, $\lambda=E_1/\sigma_1^0$ işarələmələri qəbul etməklə, $\lambda=3\cdot10^2$, $\xi=5\cdot10^{-2}$ qiymətlərində 1-3 cədvəllərindən

η^{v} -nin qiymətləri $\alpha(\gamma=0{,}25;\beta=4),\gamma(\alpha=0{,}25;\beta=4)$ və $\beta(\alpha=0{,}5;\gamma=0{,}25)$ hallarına uyğun $\eta_0=10^{-1}$ və $\omega=3{,}11\cdot10^{-5}$ şərtlərində məlum həldən alınır. ω-nın bu qayda ilə seçilməsi çubuğun ani qabarması halını mümkünsüz edir, belə ki, $\min\omega_{kp}$ sistemin parametrlərinin qəbul edilmiş qiymətlərində $\min\omega_{kp}=7,3\cdot10^{-5}$.

Cədvəl 1.1. η^{v}-əyintinin α parametrindən asılılığı.

α	0,25	1,25	2,25	3,25
η^{v}	0,118	0,120	0,122	0,125

Cədvəl 1.2. η^{v}-əyintinin γ parametrindən asılılığı.

γ	0,25		1,25	2,25	3,25
η^{v}	0,118		0,128	0,139	0,148

Cədvəl 1.3. η^{v}-əyintinin β parametrindən asılılığı.

β	0,5	1,5	2,5	3,5
η^{v}	0,145	0,138	0,131	0,122

Şəkil 1.1-də τ_{kp} kritik zamanın α , γ , β və μ qiymətlərindən asılılıqları verilmişdir. Bircins çubuq halında $\alpha=\gamma=\beta=\mu=1$ qiymətinə uyğundur, bu halda $\eta^{v}=0{,}129$ və $\omega=3{,}11\cdot10^{-5}$, $(\omega_{kp}=6,72\cdot10^{-5})$ $\tau_{kp}=4{,}16\cdot10^{10}$.

Paraqraf 1.3.-də paylanmış yükün təsiri altında çoxlaylı nazikdivarlı örtüklərin sürüncəklik deformasiyasında qabarması məsələsi tədqiq olunur. Örtüyün nazikdivarlı olması səbəbindən normal membran gərginliyinin qalınlıq üzrə paylanmasını xətti qəbul edirik. Məsələnin Reley-Rits təqribi metodun və variyasiya metodunun birgə tətbiqi ilə həlli üçün əyinti və əyici momentin approksimasiyaedici funksiyalarını aşağıdakı şəkildə verək:

$$w=a_0(t)+a(t)\cos l\theta,\qquad M=b(t)\cos l\theta \tag{1.13}$$

Müstəvi kəsiklər qanununa əsasən tam deformasiya

$$\varepsilon=\frac{w}{R}+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}r \tag{1.14}$$

şəklindədir.

Funksionalın stasionarlıq şərtindən ölçüsüz zaman və əyinti arasında ω-ölçüsüz yük parametri olmaqla aşağıdakı diferensial tənliyi alırıq:

$$\frac{d\tau}{d\eta}=\frac{-c_1l^2+\frac{9c_2}{4}\zeta^3\varphi_2\omega+\frac{9(n+1)}{2^{n+1}}\zeta^{n+3}\omega^{n+1}\sum_{i=0}^{n}3^iC_n^ic_{i+2}\eta^i\varphi_{i+1}}{\frac{3}{2^{m+1}}\zeta^{m+2}\omega^m\sum_{i=0}^{n}3^jC_m^jc_{j+1}\eta^j\varphi_{j+1}} \qquad (1.15)$$

Alınmış diferensial tənlik əyinti üçün müvafiq başlanğıc şərtlə Koşi məsələsini təşkil edir.

Fərz edirik ki, səth boyu paylanmış sıxıcı q yükünün qiyməti q_{kr} -Eyler qüvvəsindən kiçikdir, yəni $q < q_{kr}$. Bu halda örtük q yükünün təsirindən ani elastiki deformasiya almaqla yeni hal alır. Örtüyün bu halı dayanıqlı olamlıdır, əks halda konstruksiya elementinin sürüncəklik deformasiyası yaranmadan elastiki deformasiya halında dayanıqlığı itirilir. Örtüyün kinematik mümkün olan vəziyyətləri sırasında elastiklik hüdudlarında dayanıqsız olan hal üçün

$$J=R\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h}\left\{\dot\sigma\dot\varepsilon+\frac{1}{2R^2}\sigma\left(\frac{\partial\dot w}{\partial\theta}\right)^2\right\}dr\,d\theta- \qquad (1.16)$$

$$-\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{s-1}\frac{1}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\dot\sigma^2\left[1+(n+1)\left(\frac{\sigma}{\sigma_{k+1}^0}\right)^n\right]dr\,d\theta+R\int_0^{2\pi}\dot w\,d\theta$$

funksionalı stasionar hal alır. Əyinti və əyici momentin approksimasiyaedici funksiyalarını sürüncəklik halına uyğun (1.13) modası ilə veririk, bu halda amplitudlar yükləmə parametrindən asılı olur.

$$w=a_0(q)+a(q)\cos\ell\theta,\ \ M=b(q)\cos\ell\theta \qquad (1.17)$$

Örtüyün elastiklik hüdudu daxilində qabarma nəticəsində dayanıqlığını itirməsi hadisəsi yükün kritik qiyməti aldığı halda olur və yükün qiyməti sabit götürülür. Elastiklik hüdudu daxilində gərginliyin diferensialı monoton dəyişən q yükünə görə aparılır, odur ki, qabarma ilə elastiki dayanıqlığın itirilməsinə uyğun olan funksionalın stasionarlığı şərtindən aşağıdakı diferensial tənlik alınır:

$$\frac{d\omega}{d\eta}=\frac{-\pi l^2+\frac{9\pi}{4}\zeta^3\phi_2\omega+\frac{9(n+1)}{2^{n+2}}\zeta^{n+3}\omega^{n+1}\sum_{i=0}^{n}3^i c_n^i c_{i+2}\eta^i\phi_{i+2}}{-\frac{9\pi}{4}\zeta^3\eta\phi_2+\frac{3}{2^{n+2}}\zeta^{n+3}\omega^n\sum_{i=0}^{n}3^i c_n^i c_{i+1}\eta^i\phi_{i+1}+\frac{9(n+1)}{2^{n+1}}\zeta^{n+3}\omega^n\sum_{i=0}^{n}3^i c_n^i c_{i+2}\eta^i\phi_{i+2}} \tag{1.18}$$

Fərz edək ki, üçölçülü örtüyün üz layları eyni bir materialdan hazırlanmaqla bərabər qalınlığa malikdir, $E_1/E_3, B_1=B_3, \delta_1=\delta_3, \sigma_1^0=\sigma_3^0$. Məsələnin ədədi həlli üçün xarakterik əyrilərin qurulması və həllərdən ibarət cədvəlin tərtib olunması üçün məsələnin ədədi hesablamasını aşağıdakı ölçüsüz kəmiyyətlər üçün aparaq.

$\xi=R/h, \alpha=E_1/E_2, \beta=\delta_2/\delta_1, \gamma=\sigma_1^0/\sigma_3^0, \mu=B_2/B_1$ burada $\xi=20, \beta=2, \gamma=\sigma_1^0/\sigma_3^0$, $\lambda=3$ götürülmüşdür. (1.18) tənliyi başlanğıc ölçüsüz əyintinin qiyməti $\eta_0=0{,}1$ götürülməklə Runqe-Kutta metodu ilə ədədi həll olunur. Kritik yükün qiyməti sürətin sıfıra bərabər olduğu həldə təyin edilir. Elastiki məsələnin həlli aşağıdakı kimi olur:

$$\eta(0)=0{,}1273. \tag{1.19}$$

(1.15) - (1.19) tənlikləri üçün Koşi məsələsi də ölçüsüz parametrlərin müxtəlif qiymətlərində Runqe-Kutta metodu ilə həll edilir. Ölçüsüz kritik zaman qiymətinin qabarma nəticəsində dayanıqlığının itirməsi anına uyğun qiymətləri ($m=5$) üçün aşağıdakı kimidir:

n	$\alpha=\gamma=1.75, \mu=2$	$\alpha=\gamma=\mu=1$
2	$\tau_{cr}=3.92\times10^4$	$\tau_{cr}=3.42\times10^4$
4	$\tau_{cr}=3.15\times10^3$	$\tau_{cr}=2.6\times10^3$
6	$\tau_{cr}=342$	$\tau_{cr}=300$

Paraqraf 1.4 sürüncəklik deformasiyası halında mexaniki yüklərin və xarici fiziki-kimyəvi meydanların təsirlərini nəzərə almaqla bərk cisimlərin və konstruksiyaların yükgötürmə qabiliyyətini təyin etmək üçün variyasiya prinsipinin isbatına həsr olunmuşdur. Burada fərz olunur ki, materialda ani elastiki-plastiki $\varepsilon_{ij}^{(1)}$

deformasiyası, p_{ij} - sürüncəklik deformasiyası və şüalanma nəticəsində baş verən $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ deformasiyası yaranır, tam deformasiyanın kovariant komponentləri aşağıdakı kimi olar:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} + p_{ij} \qquad (1.20)$$

Bununla belə, sürüncəklik hadisəsi materialda zədələrin əmələ gəlməsi prosesi ilə müşayiət edilir. Və Yu.N. Robotnov[4] tərəfindən zədələnmə parametrlərini struktur parametrləri olaraq sürüncəkliyin kinetik münasibətlərinə daxil etmək şərti ilə mexaniki hal tənliklərinin konsepsiyası formasında verilən ümumiləşmiş nəzəriyyə bu iki hadisəni birgə riyazi modelləşdirməyə imkan verir. Qeyri-stasionar korroziya, uzunmüddətli möhkəmlik və zamanın verilmiş anında onların strukturu dayanıqlı olan materiallarla qarşılıqlı əlaqəsi üçün aşağıdakını yazmaq olar:

$$\dot{p}_{ij} = \dot{p}_{ij}(\sigma^{\alpha\beta}, T, q_1, ..., q_N) \qquad (1.21)$$

Deformasiya prosesində materialın struktur parametrləri aşağıdakı inteqrallanmayan tənliklərə uyğun dəyişir:

$$dq_i = a_{rs}^i dp_{rs} + b_{rs}^i d\sigma_{rs} + \varphi^i dt + d^i dT, (i = 1,2,...,n) \qquad (1.22)$$

Burada $a_{rs}^i, b_{rs}^i, \varphi^i, d^i$ - $p_{ij}, \sigma^{rs}, T, t$ -nin və həmçinin $q_1, q_2, ..., q_N$ parametrlərinin funksiyalarıdır. Başqa sözlə, $\varphi^i = \varphi^i(p_{ij}, \sigma^{\alpha\beta}, T, t, q_1, q_2, ..., q_N)$ və s. Eksperimentlərin nəticəsi göstərir ki, radiasiya nəticəsində şüalanma polad və nikel ərintilərinin plastikliyini əhəmiyyətli dərəcədə azaldır, amma şüalanmanın müəyyən dozalarında (10^{22} $neytron / sm^2$) normal və mülayim tempratur artımında plastiklik zonası saxlanılır. Sürüncəklik deformasiya sürəti üçün yaza bilərik:

$$\dot{p}_{ij} = \dot{p}_{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, \sigma^{\alpha\beta}, \omega, c) \qquad (1.23)$$

korroziyanı nəzərə alınmaqla mühitin diffuziyasının kinetik tənliyi

$$\dot{c} = div(D\nabla c) - kc \qquad (1.24)$$

---

[4] Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / М. Наука, 1966. -752 с. [223-238]

zədələnmənin kinetik tənliyi

$$\dot{\omega} = \varphi(\sigma^{\alpha\beta}, \omega, c) \qquad (1.25)$$

şəklində olur. Burada $D = D(\sigma^{\alpha\beta}, \omega, c)$, $k = const$, kimyəvi reaksiyanın xarakterik sürəti, kc -aqressiv kimyəvi mühitin təsiri altında kimyəvi rabitələrin parçalanma sürətidir.

Neytron şüalanmasının yaratdığı çoxsaylı effektlər arasında həcmin genişlənməsi və cismin fiziki-mexaniki xassələrinin dəyişməsi ilə bağlı məsələlər xüsusi yer tutur. Əgər axının intensivliyi nv zamandan asılı deyilsə, onda qalınlığı h lövhənin vahid səthindən t müddətində $N = nvt \exp \mu(z - h/2)$ neytron/sm^2 saylı neytron axını keçər. Əgər bu və ya digər səbəbdən deformasiya olunan mühitdə deformasiyavə yerdəyişmə məhdudlaşdırılarsa deformasiya olunan mühitdə daxili qüvvələr və gərginliklər yaranar və deformasiya tenzorunun komponentləri tamamilə dəyişir.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)} = \left\{C_{ijkm}(x^k, d)\sigma^{km}\right\}^{\bullet} \quad (i, j, k, m = \overline{1,3}); \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)} = \dot{\theta}(x^k, d)\delta_{ij},$$

Nəhayət, tam deformasiya sürəti tenzorunun komponentləri üçün yaza bilərik:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \left\{C_{ijkm}\sigma^{km}\right\}^{\bullet} + \dot{p}_{ij} + \dot{\theta}\delta_{ij}. \qquad (1.26)$$

Qeyd edək ki, $d = 0$ olduqda $\theta = 0$ -dır. Anizotrop hal üçün dörd ranqlı C_{ijkm} tenzorunun kovariant komponentləri şüalanmamış cismin materialının fiziki-mexaniki xarakteristikalarıdır. Metal və ərintilərdə, eləcə də onlardan hazırlanmış konstruksiyalarda yüksək temperaturda şüalanma nəticəsində gərginlik vəziyyətinin növündən asılı olaraq sürüncəklik və zədələnmə prosesləri sürətlənir. Dinamik effektləri nəzərə almayaraq, V həcmli və kifayət qədər hamar qapalı S səthi ilə məhdudlaşan deformasiya olunan bərk cismin tarazlığını nəzərdən keçirək. Səthin S_u hissəsində yalnız yerdəyişmə vektorunun komponentləri, qalan S_σ hissəsində isə $\overline{T}^j$ yükü verilir. Variasiya teoremindən nazik divarlı struktur elementlərinin qabarması məsələlərinin həllində istifadə olunacağı üçün burada sonlu deformasiya münasibətləri və qeyri-xətti tarazlıq tənliklərindən istifadə olunur. Sonra neytron axınının təsiri altında sürüncəklik zamanı kimyəvi aktiv mühitdə elastiki-plastiki cismin tarazlığının

həndəsi qeyri-xətti nəzəriyyəsi[5] aşağıdakı sərhəd məsələsi vasitəsilə təsvir edilir:

$$\nabla_j\left\{\sigma^{ij}(\nabla_i u^k+\delta_i^k)\right\}=0,\quad (k=\overline{1,3}),\quad \dot{\varepsilon}_{ij}=\left\{C_{ijkm}\sigma^{km}\right\}^{\bullet}+\dot{p}_{ij}+\dot{\theta}\delta_{ij},$$

$$2\varepsilon_{ij}=\nabla_i u_j+\nabla_j u_i+\nabla_i u^k\nabla_j u_k,\quad T^i=\overline{T}^i,\quad x^k\in S_\sigma,\qquad (1.27)$$

$$u_i=\overline{u}_i,\quad x^k\in S_u,\quad \dot{c}=div(D\nabla c)-kc,\quad \dot{\omega}=\varphi(\sigma^{\alpha\beta},\omega,c).$$

Burada

$$T^k=\sigma^{ij}n_j\left(\nabla_i u^k+\delta_i^k\right),\ S=S_\sigma\cup S_u\,.$$

Bəzi variasiya prinsiplərində gərginlik və deformasiyanın dəyişmə sürətləri tenzorlarının dəyişməsinə əsaslanaraq, elastiki-plastiklik nəzəriyyəsində ani deformasiya üçün daha ümumi bir fərziyyə irəli sürülür.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)}=\left\{C_{ijkl}(x^k,d)\sigma^{kl}\right\}^{\bullet},\quad x^k\in E_3$$

Bərk cisimlərin və konstrukisya elementlərinin sürüncəkliyi zamanı deformasiya formanın dəyişməsinə, gərginliyin yenidən paylanmasına və dayanıqlığın itirilməsinə səbəb olur. Buna görə də, sürüncəklik yüksək temperaturda konstruksiyaların analizinin mühüm amillərdən biri olur.

Üçölçülü Evklid fəzasında neytron axını ilə şüalanmaya məruz qalan elastiki-plastiki anizotrop mühitdə sürüncəklik prosesini nəzərdən keçirək. Mürəkkəb gərginlik vəziyyətində deformasiyanın bütün mərhələlərində gərginlik komponentlərinin deformasiya komponentlərindən asılılıqları məlum olmalıdır. Bu asılılıqlar plastiklik və sürüncəklik nəzəriyyələrində müəyyən edilir.

Bu işdə nazik divarlı konstruksiyaları elementlərinin xarici fiziki meydanların və yüklərin təsiri altında sürüncəklik prosesində bərk cisimlərin yükdaşıma qabiliyyəti araşdırılır. Sürüncəklik üçün qarışıq tipli variasiya prinsipi plastiki cisimlərin həndəsi qeyri-xətti məsələləri üçün eyni bir funksional çərçivəsində zədələnmə, diffuziya prosesi və neytron axını ilə şüalanma nəzərə alınmaqla verilir.

---

[5] Амензаде Ю.А. Теория упругости / М. Высшая школа, 1976. – 272с. [228-231]

$$J=\int_V\{\dot{\sigma}^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+\frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\nabla_j\dot{u}_k-\frac{1}{2}C_{ijkm}\dot{\sigma}^{ij}\dot{\sigma}^{km}-\dot{C}_{ijkm}\dot{\sigma}^{km}\dot{\sigma}^{ij}-(\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)}+2\dot{p}_{ij})\dot{\sigma}^{ij}+\lambda_\omega(\frac{1}{2}\dot{\omega}^2-\dot{\omega}\varphi)+$$

$$+\lambda_c[\frac{1}{2}\dot{c}^2-\dot{c}div(D\nabla c)-kc\dot{c}]\}dV-\int_{S_\sigma}\dot{\bar{T}}^i\dot{u}_idS-\int_{S_u}\dot{T}^i(\dot{u}_i-\dot{\bar{u}}_i)dS \qquad (1.28)$$

Funksionalda variyasiya olunan aşağıdakılardır: $\dot{\sigma}^{ij},\dot{u}_i,\dot{\omega}$ və $\dot{c}$, $\lambda_\omega=\lambda_\omega(\sigma^{\alpha\beta},\varepsilon_{\alpha\beta})$ və $\lambda_c=\lambda_c(\sigma^{\alpha\beta},\varepsilon_{\alpha\beta})$ isə burada əmsallar olaraq çəki funksiyaları kimi götürülmüşdür, bu funksiyalar yaxınlaşmanı dəqiqləşdirmək üçün istifadə olunan interpolyasiya funksiyalarının növündən asılıdır. Variasiya məsələsi həllinin riyazi çətinliyini aradan qaldırmaq məqsədilə (1.24) və (1.25) kinetik tənliklərin dəqiq həlləri əvəzinə, birbaşa üsullardan istifadə etməklə onları təqribi inteqral münasibətlərlə əvəz edirik, burada axtarılan zədələnmə və aqressiv mühitdə konsentrasiya səviyyəsi aşağıdakı formada axtarılır:

$$\int_V\lambda_\omega[\dot{\omega}-\varphi(\sigma^{\alpha\beta},p_{ij},\omega)]^2dV\approx 0,\ \int_c\lambda_c[\dot{c}-div(D\nabla c)+kc]^2dV\approx 0,$$

Burada zədələnmə və aqressiv mühitin konsentrasiyasının məchul funksiyaları aşağıdakı kimi axtarılır,

$$\omega=\sum_{k=1}^{p}a_k(t)\psi_k(x_j);\quad a_k(0)=0;\ c=\sum_{k=1}^{m}c_k(t)\eta_k(x_j);\quad c_k(0)=0;$$

$$\eta_k(0)=0, d\,\eta_k(x)/dx\big|_{x=0}=0$$

və c funksiyası üçün qarışıq başlanğıc-sərhəd şərtləridir. ($D=const$ olduqda tənlik iki tərtibli xüsusi törəməli sabit əmsallı parabolik diferensial tənliyə çevrilir).

Beləliklə, bu süründəklik məsələsi məlum diferensial tənliklər sisteminə gətirilir, yəni belə tənliklər sistemi üçün məlum alqoritmlə riyazi həllərin alınması mümkün olur. Belə məsələlərin təqribi həllərinin verilməsi üçün bir çox müxtəlif birbaşa metodları və həmçinin həllin varlığı və yeganəliyinin keyfiyyət analizini və ya bu məsələ üçün qiymətləndirmə metodlarını vermək mümkündür.

(1.28) funksionalının stasionarlıq şərtindən alınan tənliklərin süründəklik prosesində sonlu deformasiyalarda neytron seli ilə şüalanan elastiki-plastiki bütöv mühitin fiziki-kimyəvi meydanlarda

zədələnmələri nəzərə alan prosesin riyazi modeli olan tənliklər və riyazi münasibətlər sisteminə ekvivalent olması isbat olunur.

(1.28) funksionalının əyrixətli koordinat sistemində variyasiyasını təyin edək, δ variyasiya operatoru kəmiyyətlərin sürətinə təsir edir, odur ki, alarıq:

$$\delta J = \int_V \{\dot{\varepsilon}_{ij}\delta\dot{\sigma}^{ij} + \dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_i\dot{u}^k\delta(\nabla_j\dot{u}_k) + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\nabla_j\dot{u}_k\delta(\nabla_i\dot{u}^k) -$$

$$-\frac{1}{2}C_{ijkm}\dot{\sigma}^{km}\delta\dot{\sigma}^{ij} - \frac{1}{2}C_{ijkm}\dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\sigma}^{km} - \dot{C}_{ijkm}\sigma^{km}\delta\dot{\sigma}^{ij} - (\dot{\varepsilon}_{ij}^{(2)} + \dot{p}_{ij})\delta\dot{\sigma}^{ij} + \lambda_m(\dot{\omega} - \varphi)\delta\dot{\omega} +$$

$$+\lambda_c[\dot{c} - div(D\nabla c) - kc]\delta\dot{c}\}dV - \int_{S_\sigma}\dot{\bar{T}}^i\delta\dot{u}_i dS - \int_{S_u}[(\dot{u}_i - \dot{\bar{u}}_i)\delta\dot{T}^i]dS. \quad (1.29)$$

Tərifə görə həcmi deformasiyanın koordinatların və şüalanma dozasının funksiyası olduğunu, sürüncəkliyin deformasiya sürətinin isə ümumi halda gərginlik, tempratur, zaman və struktur parametrlərinin funksiyaları olduğundan $\delta\dot{\theta} = 0,\quad \delta\dot{p}_{ij} = 0$ olur, sərhəd şərtlərinin ödənilməsi üçün uyğun olaraq S_σ -da $\delta\dot{T}^i = 0$ və S_u-da $\delta\dot{u}_i = 0$ bərabərlikləri qəbul olunur. C_{ijkl} tenzorunun sürətdən asılı olmamasına görə

$$\delta C_{ijkm} = 0,\quad \delta\dot{C}_{ijkm} = 0,\quad \delta\dot{\varepsilon}_{ij}^{(1)} = C_{ijkl}\delta\dot{\sigma}^{kl},$$

və həmçinin,

$$C_{ijkm}\dot{\sigma}^{km}\delta\dot{\sigma}^{ij} = C_{ijkm}\dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\sigma}^{km}$$

münasibətləri doğrudur.

Gərginlik tenzorunun simmetrikliyindən (1.29) münasibətində üçüncü və dördücü toplananların bərabərliyi alınır, Qauss-Ostraqadski düsturundan istifadə etməklə, gərginlik tenzorunun simmetrikliyini nəzərə almaqla və bir neçə riyazi çevrilməni aparmaqla funksionalın hədlərini asılı olmayan variyasiyalarla təyin edirik:

$$\delta J = \int_V \{[\varepsilon_{ij} - (\varepsilon_{ij}^{(1)} + p_{ij} + \theta\delta_{ij})]^\bullet\delta\dot{\sigma}^{ij} - \nabla_j\left[\sigma^{ij}\left(\delta_i^k + \nabla_i u^k\right)\right]^\bullet\delta\dot{u}_k +$$

$$+\lambda_\omega(\dot{\omega} - \phi)\delta\dot{\omega} + \lambda_c[\dot{c} - div(D\nabla c) - kc]\delta\dot{c}\}dV +$$

$$+\int_{S_\sigma}\left[\sigma^{ij}\left(\delta_i^k+\nabla_i u^k\right)n_j-\bar{T}^k\right]^{\bullet}\delta\dot{u}_k dS-\int_{S_u}\left(\dot{u}_k-\dot{\bar{u}}_k\right)\delta\dot{T}^k dS=0$$

(1.26) düsturunu və variyasiya hesabının əsas lemmasını nəzərə alsaq δJ -nin sıfıra bərabər olması şərtindən Eyler tənlikləri olaraq əyrixətli koordinatlar sistemində (1.21) sərhəd məsələsinin ümumi münasibətlər sistemini alarıq.

Kompozit cisimlər üçün variyasiya prinsipinin modifikasiyası

Məlumdur ki, real bərk cisimlərin və konstruksiya elementlərinin möhkəmliyi konstruksiya metalların ideal kristal qəfəsinin nəzəri möhkəmliyindən bir neçə tərtib azdır və bu isə bir qayda olaraq qəfəslərdə defektlərin olması ilə əlaqəli olan bütün molekullararası rabitələrin eyni zamanda kəsilməsinə uyğundur. qüsurlar. Konstruksiya təyinatlı əksər polimerlərin möhkəmliyi 100-150 MPa-dan çox deyil, ancaq elastikliyin Yunq modulu 3-4 GPa-dır. Molekulların kimyəvi strukturunun dizaynı hesabına polimerlərin mexaniki xassələrinin daha da yaxşılaşdırılması elmi cəhətdən perspektivli hesab edilmir, buna görə də struktur polimerlərin elastiklik-möhkəmlik xüsusiyyətlərini yaxşılaşdırmaq üçün başqa üsullar axtarılır, onlar arasında müasir dövrdə polimerlərdən nanokompozitlərə keçidi daha perspektivli hesab edilir.

Kompozit materiallar üçün kontakt sərhəd şərtinin qoyuluşunda cismin K elementindən ibarət olduğunu qəbul edirik. Bu halda k nömrəli element V_k həcmində olmaqla S_k səthi ilə əhatə olunar. Fərz edirik ki, $S_k=S_k^{(1)}\cup S_k^{(2)}$, burada $S_k^{(1)}$ - ümumi S səthi ilə heç bir ortaq nöqtəsi olmayan $V_k^{(1)}$ həcminin sərhəddidir, $S_{k\sigma}^{(2)}$ - isə cismin ümumi S səthinin hissəsi olmaqla $V_k^{(2)}$ həcminin sərhəddidir. Tutaq ki, $S_{k\sigma}^{(2)}$ sərhəddində $T^{\alpha(0)}$ qüvvəsi verilib, qalan səthdə isə $u_\alpha^{(0)}$ yerdəyişməsi verilib. Fərz edək ki, $S, S_k^{(1)}$ və $S_k^{(2)}$ kifayət qədər hamar səthlərdir.

Baxılan halda kompozit mühit nəzəriyyəsindən aşağıdakı müddəaları istifadə edirik:

- deformasiya prosesində elementlər bütün ümumi səth boyunca bir-biri ilə təmasda olurlar;

-deformasiyalar sonludur (həndəsi qeyri-xətti);
-təmas (kontakt) səthlərində tam birləşmə şərtləri ödənilir.

Bundan əlavə, müxtəlif elementlərin materiallarının fərqli və onların fiziki və mexaniki xüsusiyyətlərinin axma nəzəriyyəsi tipli elastiki-plastiki qanuna uyğun olmasını qəbul edirik. Bu halda həndəsi qeyri-xətti cisimlərdə olduğu kimi baxılan məsələdə müvazinəti aşağıdakı sərhəd məsələsi ilə təsvir edilir:

$$\nabla_j \left\{ \sigma_{(k)}^{ij} \left(\delta_i^\alpha + \nabla_i u_{(k)}^\alpha \right) \right\} = 0, \quad \left(\alpha = \overline{1,3} \right) \tag{1.30}$$

$$\dot{\varepsilon}_{i\,j(k)} = \left\{ C_{ijmn(k)} \sigma_{(k)}^{mn} \right\}^\bullet + \dot{p}_{ij(k)} + \dot{\theta}_{(k)} \delta_{ij}, \tag{1.31}$$

$$\dot{c} = div(D\nabla c) - kc, \quad \dot{\omega} = \varphi(\sigma^{\alpha\beta}, \omega, c).$$

$$2\varepsilon_{ij(k)} = \nabla_i u_{j(k)} + \nabla_j u_{i(k)} + \nabla_i u_{\alpha(k)} \nabla_j u_{(k)}^\alpha, \tag{1.32}$$

$$u_{i(k)} = \overline{u}_{i(k)}, \quad S_{ku}, \tag{1.33}$$

$$T_{(k)}^\alpha = \overline{T}_{(k)}^\alpha, \quad S_{k\sigma}, \quad \text{где} \quad T_{(k)}^\alpha = \sigma_{(k)}^{ij} n_j \left(\nabla_i u^\alpha + \delta_i^\alpha \right) \tag{1.34}$$

Ən ümumi halda, məsələnin ümumi qoyuluşuna əsasən aşağıdakılar doğrudur:

$$\overline{u}_{i(k)} = \begin{cases} u_{i(k)}^{(0)} & \forall S \in S_{ku}^{(2)}, \\ u_{i(k)}^{(00)} & \forall S \in S_{ku}^{(1)}, \end{cases} \text{ və } \overline{T}_{(k)}^\alpha = \begin{cases} T_{(k)}^{\alpha(0)} & \forall S \in S_{k\sigma}^{(2)}, \\ T_{(k)}^{\alpha(00)} & \forall S \in S_{k\sigma}^{(1)}, \end{cases}$$

Sərhəd məsələsinin (1.30) - (1.34) tənliklər və münasibətlər sisteminə $S_k^{(1)}$ səthi üzərində qoşalıq şərtləri əlavə olunmalıdır. Qonşu elementlərin tam birləşməsi halında ayırma səthi boyu yerdəyişmə kəsilməz olur, bu isə yerdəyişmə və gərginlik funksiyalarında sıçrayışın yaranmadığınI göstərir.

$$u_{i(k)}^+ = u_{i(k)}^-, \quad T_{(k)}^{i+} = T_{(k)}^{i-}. \tag{1.35}$$

Burada "+" və "-" işarələri təmas xəttinin sağına və soluna yaxınlaşarkən birləşmə nöqtələrindəki funksiyaların qiymətini göstərir.

Yenidən, aparılmış qaydalara uyğun V_k həcmli ixtiyari element seçirik. (1.28) funksionalının yazılışından istifadə edərək bu həcm üçün yaza bilərik:

$$J_k = \int_{V_k} \{\dot{\sigma}^{ij}_{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij(k)} + \frac{1}{2}\sigma^{ij}_{(k)} \nabla_i \dot{u}^{\alpha}_{(k)} \nabla_j \dot{u}_{(k)\alpha} - \frac{1}{2} C_{ijkm} \dot{\sigma}_{(k)}{}^{ij} \dot{\sigma}_{(k)}{}^{km} - \dot{C}_{ijkm} \dot{\sigma}_{(k)}{}^{km} \dot{\sigma}_{(k)}{}^{ij} -$$

$$-(\dot{\varepsilon}^{(2)}_{ij(k)} + \dot{p}_{ij(k)})\dot{\sigma}^{ij}_{(k)} + \lambda_{\omega}(\frac{1}{2}\dot{\omega}^2 - \dot{\omega}\varphi) + \lambda_c[\frac{1}{2}\dot{c}^2 - \dot{c}div(D\nabla c) - kc\dot{c}]\}dV -$$

$$-\int_{S_\sigma} \dot{\overline{T}}^{i}_{(k)} \dot{u}_{i(k)} dS - \int_{S_u} \dot{T}^{i}_{(k)} (\dot{u}_{i(k)} - \dot{\overline{u}}_{i(k)}) dS \qquad (1.36)$$

Burada S_{ku} və $S_{k\sigma}$ - $\overline{u}_{i(k)}$ yerdəyişmələrin və $\overline{T}^{i}_{(k)}$ qüvvələrin məlum və ya (1.39) və (1.40) düsturları ilə verildiyi şərtlərinə uyğun sərhəd hissələridir. .İndi isə K elementdən ibarət cismin bütöv tam həcmində funksionalın ümumiləşmiş ifadəsini yazaq. Asanlıqla görmək olar ki, bu halda (1.36)-dakı səth inteqralları bir-birini islah edir və nəhayət, funksional aşağıdakı yekun formanı alır:

$$J = \sum_{k=1}^{K} \int_{V_k} \left\{ \dot{\sigma}^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\sigma^{ij} \nabla_i \dot{u}^m \nabla_j \dot{u}_m - \frac{1}{2} C_{ijkm} \dot{\sigma}^{ij} \dot{\sigma}^{km} - \dot{C}_{ijkm} \dot{\sigma}^{km} \dot{\sigma}^{ij} - \right.$$

$$\left. -(\dot{p}_{ij} + \dot{\theta}\delta_{ij})\dot{\sigma}^{ij} + \lambda_{\omega}(\frac{1}{2}\dot{\omega}^2 - \dot{\omega}\varphi) + \lambda_c[\frac{1}{2}\dot{c}^2 - \dot{c}div(D\nabla c) - kc\dot{c}] \right\} dV -$$

$$-\int_{S_u} \dot{T}^{i} (\dot{u}_i - \dot{\overline{u}}_i) dS - \int_{S_\sigma} \dot{\overline{T}}^{\alpha} \dot{u}_{\alpha} dS.$$

İkinci fəsildə S.C. Əkbərov[6] və həmmüəlliflər tərəfindən təklif edilən diskret analitik metoddan istifadə edərək, qeyri-bircins başlanğıc gərginlikli içiboş sferanın dinamikası məsələsinin həll metodu verilmiş və bu fəsil beş paraqrafdan ibarətdir.

Paraqraf 2.1 əvvəlki dövr ərzində aparılmış mühüm tədqiqatların nəticələrinə və məsələnin vəziyyətini göstərməklə, tədqiqatın məqsədini vurğulamaqla, qeyri-bircins başlanğıc gərginliklərin çoxlaylı içiboş və bütöv sferanın dinamik reaksiyasına təsirinin əsaslandırılmasına həsr edilmişdir.

[6] Akbarov S.C. Dynamics of pre-strained bi-material elastic systems: linearized three-dimensional approach / Springer-Heidelberg. New York, 2015. P-1004 [15-19]

Paraqraf 2.2-də qeyri-bircins başlanğıc gərginlikli içiboş sferanın dinamikası məsələsinin riyazi qoyuluşu verilmişdir. Daxili radiusu b və xarici radiusu a olan içi boş sferanın daxili və xarici səthi boyu p və q intensivlikli müntəzəm paylanmış normal qüvvələrin təsiri altında olduğu hesab edilir. Məlumdur ki, baxılan halda sferanın gərginlik vəziyyəti aşağıdakı ifadələrlə təyin olunur:

$$\sigma_{rr}^{(0)} = -p\frac{a^3(r^3-b^3)}{(a^3-b^3)r^3} - q\frac{b^3(a^3-r^3)}{(a^3-b^3)r^3},\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \sigma_{\phi\phi}^{(0)} = -p\frac{a^3(2r^3+b^3)}{2(a^3-b^3)r^3} + q\frac{b^3(2r^3+a^3)}{2(a^3-b^3)r^3},$$
$$\sigma_{r\theta}^{(0)} = \sigma_{r\phi}^{(0)} = \sigma_{\theta\phi}^{(0)} = 0, \qquad (2.1)$$

Başlanğıc qeyri-bircins gərginlikli içiboş sferanın dinamikası məsələsinin riyazi modelini deformasiya olunan mühitlərin üçölçülü xəttiləşdirilmiş nəzəriyyəsinin tətbiqi ilə verək. Sferada (2.1) başlanğıc şərtləri ilə zamandan asılı dinamiki harmonik həyəcanlanmalar baş verir və bu başlanğıc gərginliklərin sferanın dinamiki xarakteristkalarına təsiri müəyyən etmək tələb olunur (məsələn, məxsusi tezlik). Başlanğıc gərginlikli cisimlərdə elastiki dalğaların üçölçülü xəttiləşdirilmiş nəzəriyyəsinə əsasən, (r,θ,ϕ) sferik koordinatlarda bu tənlikləri aşağıdakı kimi verilir.

Hərəkət tənlikləri:

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial t_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(2t_{rr} - t_{\phi\phi} - t_{\theta\theta} + t_{\phi r}ctg\phi) = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial t_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial t_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(2t_{r\phi} + t_{\theta r} + (t_{\phi\phi} - t_{\theta\theta})ctg\phi) = \rho\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2}, \qquad (2.2)$$
$$\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(2t_{r\theta} + t_{\theta r} + (t_{\phi\theta} + t_{\theta\phi})ctg\phi) = \rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}.$$

Burada

$$t_{rr} = \sigma_{rr} + \sigma_{rr}^{(0)}\frac{\partial u_r}{\partial r},\ t_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}\left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{r\partial\varphi}\right),\ t_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi} + \sigma_{rr}^{(0)}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r},$$

$$t_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)}\left(\frac{u_r}{r} + ctg\varphi\frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right),\ t_{\varphi r} = \sigma_{\varphi r} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\varphi} - \frac{u_\varphi}{r}\right),$$

$$t_{r\theta}=\sigma_{r\theta}+\sigma_{rr}^{(0)}\frac{\partial u_\theta}{\partial r},\ t_{\theta r}=\sigma_{\theta r}+\sigma_{\theta\theta}^{(0)}\left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}\right),\ t_{\varphi\theta}=\sigma_{\varphi\theta}+\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}\frac{\partial u_\theta}{r\partial\varphi},$$

$$t_{\theta\varphi}=\sigma_{\theta\varphi}+\sigma_{\theta\theta}^{(0)}\left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-ctg\varphi\frac{u_\theta}{r}\right). \qquad (2.3)$$

Elastiki münasibətlər:

$$\sigma_{rr}=\lambda\left(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{\phi\phi}\right)+2\mu\varepsilon_{rr},\ \sigma_{\theta\theta}=\lambda\left(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{\phi\phi}\right)+2\mu\varepsilon_{\theta\theta},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\lambda\left(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{\phi\phi}\right)+2\mu\varepsilon_{\phi\phi},\ \sigma_{r\theta}=2\mu\varepsilon_{r\theta},\ \sigma_{\theta\phi}=2\mu\varepsilon_{\theta\phi}, \qquad (2.4)$$

$$\sigma_{r\phi}=2\mu\varepsilon_{r\phi}.$$

Deformasiyalar və yerdəyişmələr arasındakı münasibətlər:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\ \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r}u_r,\ \varepsilon_{\phi\phi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r}u_\theta ctg\theta,$$

$$\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}\right);\ \varepsilon_{\theta\phi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi}-\frac{u_\phi}{r}ctg\theta\right); \qquad (2.5)$$

$$\varepsilon_{r\phi}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\phi}{r}\right).$$

(2.2) və (2.3) münasibətlərində $t_{rr},...,t_{\theta\phi}$ - sferik koordinat sistemində Kirxov gərginlik tenzorunun komponentləridir.

İçiboş sferanın daxili və xarici səthlərində ödənilən sərhəd şərtləri olaraq aşağıdakı bircins şərtləri qəbul edirik:

$$t_{rr}\big|_{r=a}=0,\ t_{r\theta}\big|_{r=a}=0,\ t_{rr}\big|_{r=b}=0,\ t_{r\theta}\big|_{r=b}=0,\ t_{r\phi}\big|_{r=b}=0. \qquad (2.6)$$

2.3-cü paraqraf problemin həll metodunun seçilməsinə və işlənib hazırlanmasına həsr edilmişdir. (2.1)-dəki ifadələrə görə (2.2) - (2.5)-dəki tənliklər sistemi dəyişən əmsallı tənlikdir ki, onun analitik həllinin alınması ümumi halda çox çətin və bir çox hallarda qeyri-mümkündür. Bir qayda olaraq son dövrlərə qədər (2.2) -(2.5) tənliklər sistemi müxtəlif ədədi üsullardan istifadə etməklə ədədi şəkildə həll edilirdi, lakin nəzərdən keçirilən halda dəyişən əmsallarda aşağıdakı xüsusiyyət var: bu əmsallar yalnız r koordinatından asılıdır. Əmsalların bu xüsusiyyəti bu tənlikləri həll etmək üçün Əkbərov və başqalarının işlərində işlənib istifadə edilən diskret analitik metoddan istifadə etməyə imkan verir. Paraqraf 2.4 həll oblastının diskretləşdirilməsini və klassik Lamé ayrılmasına (dekompozisiya)

daxil olan funksiyalar üçün tənliklərin alınmasına həsr olunmuşdur. Diskret analitik metoddan istifadə etmək üçün $r \in [a,b]$ intervalı müəyyən sayda altintervallara bölünür. Bunun üçün $R_1 = b$ və $R_2 = a$ işarə edərək $[R_1, R_2]$ intervalını $[R_{1k}, R_{2k}]$ altintervallarına bölürük, burada $U_{k=1}^{N}\left[R_{1k}, R_{2k}\right] = \left[R_1, R_2\right], R_{1k} = R_1 + \left(k-1\right)\left(R_2 - R_1\right)/N$ və $R_{2k} = R_1 + k(R_2 - R_1)/N.$ Hər bir $[R_{1k}, R_{2k}]$ altintervalı daxilində $\sigma_{rr}^{(0)}\left(r\right), \sigma_{\theta\theta}^{(0)}\left(r\right)$ və $\sigma_{\phi\phi}^{(0)}(r)$ funksiyaları $r_k = R_{1k} + (R_{2k} - R_{1k})/2$ -dakı $\sigma_{rr}^{(0)}\left(r_k\right), \sigma_{\theta\theta}^{(0)}\left(r_k\right)$ və $\sigma_{\phi\phi}^{(0)}(r_k)$ sabitlər kimi qəbul edilir. (2.2)-(2.5) tam tənliklər sisteminin həlli aparılan diskretləşdirilmədən sonra hər bir $[R_{1k}, R_{2k}]$ yarımintervalında ayrıca yerinə yetirilir, bu halda $\sigma_{rr}^{(0)}(r), \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r)$ və $\sigma_{\phi\phi}^{(0)}(r)$ dəyişən əmsallar və (2.2) və (2.3) tənliklər sistemindəki ilə əvəz olunur. $\sigma_{rr}^{(0)}\left(r_k\right), \sigma_{\theta\theta}^{(0)}\left(r_k\right)$ və $\sigma_{\phi\phi}^{(0)}(r_k)$ və burada $r_k = R_{1k} + (R_{2k} - R_{1k})/2$. Alt fasilələr arasındakı qoşalaşma səthlərində qüvvə və yerdəyişmə vektorları üçün kəsilməzlik şərtləri təmin edilir. Hər bir alt layın qalınlığını $h_k = (R_1 - R_2)/N$ işarə edirik və (k)-ci alt lay ilə əlaqəli kəmiyyətlər üçün əlavə k yuxarı indeksini daxil edərək , bu kəsilməzlik şərtləri aşağıdakı kimi yazırıq:

$$
\begin{gathered}
t_{rr}^{(1)}\Big|_{r=R_1} = 0,\ t_{r\theta}^{(1)}\Big|_{r=R_1} = 0,\ t_{r\varphi}^{(1)}\Big|_{r=R_1} = 0, \\
t_{rr}^{(1)}\Big|_{r=R_1+h} = t_{rr}^{(2)}\Big|_{r=R_1+h},\ t_{r\theta}^{(1)}\Big|_{r=R_1+h} = t_{r\theta}^{(2)}\Big|_{r=R_1+h},\ t_{r\varphi}^{(1)}\Big|_{r=R_1+h} = t_{r\varphi}^{(2)}\Big|_{r=R_1+h}, \\
u_r^{(1)}\Big|_{r=R_1+h} = u_r^{(2)}\Big|_{r=R_1+h},\ u_\theta^{(1)}\Big|_{r=R_1+h} = u_\theta^{(2)}\Big|_{r=R_1+h},\ u_\varphi^{(1)}\Big|_{r=R_1+h} = u_\varphi^{(2)}\Big|_{r=R_1+h}, \\
t_{rr}^{(N-1)}\Big|_{r=R_1+(N-1)h} = t_{rr}^{(N)}\Big|_{r=R_1+(N-1)h},\ t_{r\theta}^{(N-1)}\Big|_{r=R_1+h} = t_{r\theta}^{(N)}\Big|_{r=R_1+(N-1)h}, \\
t_{r\varphi}^{(N-1)}\Big|_{r=R_1+(N-1)h} = t_{r\varphi}^{(N)}\Big|_{r=R_1+(N-1)h},\ u_r^{(N-1)}\Big|_{r=R_1+(N-1)h} = u_r^{(N)}\Big|_{r=R_1+(N-1)h}, \\
u_\theta^{(N-1)}\Big|_{r=R_1+(N-1)h} = u_\theta^{(N)}\Big|_{r=R_1+(N-1)h},\ u_\varphi^{(N-1)}\Big|_{r=R_1+(N-1)h} = u_\varphi^{(N)}\Big|_{r=R_1+(N-1)h}, \\
t_{rr}^{(N)}\Big|_{r=R_2} = 0,\ t_{r\theta}^{(N)}\Big|_{r=R_2} = 0,\ t_{r\varphi}^{(N)}\Big|_{r=R_2} = 0.
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

2.5-ci paraqraf (2.1) - (2.5) tənliklər sisteminin həllinə həsr edilmişdir. Hər bir $k-$-ci alt layda (2.2) - (2.5) tənliklər sistemini həll etmək üçün

Eringen və başqalarının monoqrafiyasına uyğun olaraq Helmholtz potensiallarından istifadə etməklə aşağıdakı klassik Lame ayrılmasından istifadə edirik.

$$u_r^{(k)} = \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 (r\chi^{(k)})}{\partial r^2} - r\nabla^2 \chi^{(k)}, u_\theta^{(k)} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\chi^{(k)})}{\partial \theta \partial r}$$

$$u_\phi^{(k)} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \phi} - \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \phi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 (r\chi^{(k)})}{\partial \phi \partial r}, \qquad (2.8)$$

(2.8)-dən ifadələri (2.2) - (2.5) tənliklərinə k−cı alt qat üçün əvəz edərək və çətin riyazi çevrilmələri yerinə yetirərək, $\Phi^{(k)}, \psi^{(k)}, \chi^{(k)}$. funksiyaları üçün aşağıdakı tənlikləri əldə edirik.

$$\mu\nabla^2 \begin{Bmatrix} \psi^{(k)} \\ \chi^{(k)} \end{Bmatrix} + \sigma_{rr}^{(0)}(r_k)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix} \psi^{(k)} \\ \chi^{(k)} \end{Bmatrix}\right)\right] + \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r_k)\left[\frac{ctg\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\begin{Bmatrix} \psi^{(k)} \\ \chi^{(k)} \end{Bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\begin{Bmatrix} \psi^{(k)} \\ \chi^{(k)} \end{Bmatrix} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\begin{Bmatrix} \psi^{(k)} \\ \chi^{(k)} \end{Bmatrix}\right] = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix} \psi^{(k)} \\ \chi^{(k)} \end{Bmatrix}$$

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2 \Phi^{(k)} + \sigma_{rr}^{(0)}(r_k)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\Phi^{(k)}\right)\right] +$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r_k)\left[\frac{ctg\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\Phi^{(k)} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\Phi^{(k)} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\Phi^{(k)}\right] = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi^{(k)}, \qquad (2.9)$$

burada

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \Delta_{\theta,\varphi}, \ \Delta_{\theta,\varphi} = \frac{ctg\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

(2.10)

2.6-cı paraqrafda təbii rəqslər məsələsi üçün Lame ayrılışınaə daxil olan funksiyalarda tənliklərin analitik həlli alınmışdır.

Aşkar məlum fiziki və mexaniki təsəvvürlərə uyğun olaraq, $\psi^{(k)}, \chi^{(k)}$ və $\Phi^{(k)}$ funksiyaları aşağıdakı kimi təqdim olunur

$$\varphi^{(k)}(r,\theta,\phi,t) = F_\varphi^{(k)}(n,r)P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi e^{i\omega t},$$

$$\psi^{(k)}(r,\theta,\phi,t) = F_\psi^{(k)}(n,r)P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi e^{i\omega t}, \qquad (2.11)$$

$$\chi^{(k)}(r,\theta,\phi,t) = F_\chi^{(k)}(n,r)P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi e^{i\omega t},$$

burada $P_n^m(\cos\theta)$ - (2.11) ifadəsində m tərtibdən və n harmonikalı Lejandr qoşulma funksiyalarını ifadə edir.

Beləliklə, (2.11) ifadələrini (2.9) və (2.10) tənliklərində nəzərə almaqla, $F_{\phi}^{(k)}(n,r)$, $F_{\psi}^{(k)}(n,r)$ və $F_{\chi}^{(k)}(n,r)$ funksiyaları üçün aşağıdakı tənlikləri əldə edirik.

$$\frac{d^2F_{\psi;\chi}^{(k)}(n,r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dF_{\psi;\chi}^{(k)}(n,r)}{dr}+\left((\lambda^{(k)})^2-\frac{v_n^{(k)}(v_n^{(k)}+1)}{r^2}\right)F_{\psi;\chi}^{(k)}(n,r)=0,$$

$$\frac{d^2F_{\Phi}^{(k)}(n,r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dF_{\Phi}^{(k)}(n,r)}{dr}+\left((\gamma^{(k)})^2-\frac{\eta_n^{(k)}(\eta_n^{(k)}+1)}{r^2}\right)F_{\Phi}^{(k)}(n,r)=0, \quad (2.12)$$

burada

$$(\lambda^{(k)})^2=\rho\omega^2/(\mu+\sigma_{rr}^{(0)}(r_k)),\ v_n^{(k)}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\alpha^{(k)}n(n+1)},$$

$$(\gamma^{(k)})^2=\rho\omega^2/(\lambda+2\mu+\sigma_{rr}^{(0)}(r_k)),\ \eta_n^{(k)}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\beta^{(k)}n(n+1)}, \quad (2.13)$$

$$\alpha^{(k)}=\frac{(\mu+\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r_k))}{(\mu+\sigma_{rr}^{(0)}(r_k))}\quad \beta^{(k)}=\frac{(\lambda+2\mu+\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r_k))}{(\lambda+2\mu+\sigma_{rr}^{(0)}(r_k))}.$$

Beləliklə, (2.12) tənliyinin həlli sferik Bessel funksiyaları vasitəsilə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\begin{aligned}
F_{\psi}^{(k)}(n,r)&=C^{(k)}j_{v_n^{(k)}}(\lambda^{(k)}r)+D^{(k)}y_{v_n^{(k)}}(\lambda^{(k)}r),\\
F_{\chi}^{(k)}(n,r)&=E^{(k)}j_{v_n^{(k)}}(\lambda^{(k)}r)+G^{(k)}y_{v_n^{(k)}}(\lambda^{(k)}r),\\
F_{\Phi}^{(k)}(n,r)&=A^{(k)}j_{\eta_n^{(k)}}(\gamma^{(k)}r)+B^{(k)}y_{\eta_n^{(k)}}(\gamma^{(k)}r),
\end{aligned} \quad (2.14)$$

Burada $j_{\alpha}(cr)=\left(\frac{\pi}{2cr}\right)^{\frac{1}{2}}J_{\alpha+1/2}(cr),\ y_{\alpha}(cr)=\left(\frac{\pi}{2cr}\right)^{\frac{1}{2}}Y_{\alpha+1/2}(cr).$ (2.15)

(2.15)-də $J_{\alpha+1/2}(cr)$ və $Y_{\alpha+1/2}(cr)$ funksiyaları kəsr tərtibli birinci və ikinci növ Bessel funksiyalarıdır. (2.14)-dəki $\sigma_{rr}^{(0)}(r_k)=\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(r_k)=\sigma_{\phi\phi}^{(0)}(r_k)=0$ ifadələri klassik halda alınan uyğun $\alpha^{(k)}=\beta^{(k)}=1$ ifadələrlə üst-üstə düşür. (2.14), (2.11). (2.8), (2.5) və (2.4) əlaqələrindən istifadə etməklə yerdəyişmələr və gərginlik tenzorunun komponentləri üçün ifadələr alınır. Yaranan ifadələrin

yazılışını sadələşdirmək üçün aşağıdakı kimi müəyyən edilmiş $[0,\pi]$ intervalında iki tam ortoqonal funksiyalar dəsti daxil edilmişdir[7]:

$$X_{nm}(\theta)=P_n^m(\cos\theta),\ Y_{nm}(\theta)=n\cot\theta P_n^m(\cos\theta)-\frac{n+m}{\sin\theta}P_{n-1}^m(\cos\theta). \quad (2.16)$$

(2.16) ifadəsindən istifadə edərək, axtarılan funksiyalar üçün aşağıdakı ifadələri yazırıq:

$$u_r^{(k)}=\frac{1}{r}\left\{A^{(k)}u_{11}^{(k)}+B^{(k)}u_{12}^{(k)}+E^{(k)}u_{31}^{(k)}+G^{(k)}u_{32}^{(k)}\right\}X_{nm}(\theta)\cos m\phi e^{i\omega t},$$

$$u_\theta^{(k)}=\frac{1}{r}\{\left[A^{(k)}v_{11}^{(k)}+B^{(k)}v_{12}^{(k)}+E^{(k)}v_{31}^{(k)}+G^{(k)}v_{32}^{(k)}\right]Y_{nm}(\theta)+$$

$$+\left(C^{(k)}v_{21}^{(k)}+D^{(k)}v_{22}^{(k)}\right)\frac{m}{\sin\theta}X_{nm}(\theta)\}\cos m\phi e^{i\omega t}, \quad (2.17)$$

$$u_\phi^{(k)}=\frac{1}{r}\{\left[A^{(k)}v_{11}^{(k)}+B^{(k)}v_{12}^{(k)}+E^{(k)}v_{31}^{(k)}+G^{(k)}v_{32}^{(k)}\right]\frac{-m}{\sin\theta}X_{nm}(\theta)$$

$$+\left(-C^{(k)}v_{21}^{(k)}-D^{(k)}v_{22}^{(k)}\right)Y_{nm}(\theta)\}+\sin m\phi e^{i\omega t},$$

$$\sigma_{rr}^{(k)}=\frac{2\mu^{(k)}}{r^2}\left[A^{(k)}T_{111}^{(k)}+B^{(k)}T_{112}^{(k)}+E^{(k)}T_{131}^{(k)}+G^{(k)}T_{132}^{(k)}\right]X_{nm}(\theta)\cos m\phi e^{i\omega t},$$

$$\sigma_{r\theta}^{(k)}=\frac{2\mu^{(k)}}{r^2}\{\left[A^{(k)}T_{411}^{(k)}+B^{(k)}T_{412}^{(k)}+E^{(k)}T_{431}^{(k)}+G^{(k)}T_{432}^{(k)}\right]Y_{nm}(\theta)$$

$$+\left(-C^{(k)}T_{421}^{(k)}-D^{(k)}T_{422}^{(k)}\right)\frac{m}{\sin\theta}X_{nm}(\theta)\}\cos m\phi e^{i\omega t},$$

Burada $k=1,2,...,N.$ Burada N - həll oblastının r radial koordinatına nəzərən bölündüyü altintervalların sayıdır və bu say ədədi nəticələrin yığılmasına uyğun olaraq müəyyən edilir. Beləliklə, alınmış (2.17) ifadələrində Bessel funksiyaları iştirak edən analitik həlləri (2.6)-(2.7) sərhəd və kontakt şərtlərində nəzərə alaraq bir-biri ilə əlaqəsi olmayan iki bircins cəbri tənliklər sistemini alırıq. Birinci (ikinci) tənliklər sistemində $A^{(k)}, B^{(k)}, E^{(k)}$, $G^{(k)}$ ($C^{(k)}$ və $D^{(k)}$) iştirak edir. İki əmsallar qrupunun determinantını ayrı-ayrılıqda sıfıra bərabər etməklə, məxsusi rəqslərin tezliyini təyin etmək üçün aşağıdakı tənliklər alınır.

---

[1] Guz A.N. Dynamics of an elastic isotropic sphere of an incompressible material subjected to initial uniform volumetric loading // IAM, vol.21, No8, 1985, pp.738-746

$\det(\alpha_{q_1q_2})=0,\ q_1;q_2=1,2,...,4N$ (sferik rəqslər üçün). (2.18)

$\det(\delta_{p_1p_2})=0,\ p_1;p_2=1,2,...,2N$ (burulma rəqsləri üçün) (2.19)

$(\alpha_{q_1q_2})$ və $(\delta_{q_1q_2})$ matrislərinin komponentləri üçün ifadələr (2.17) düsturundan asanlıqla təyin edilir. Paraqraf 2.7 ədədi misalların nəticələrinə, içiboş sferanın məxsusi tezliklərinə başlanğıc gərginliklərin təsirinin təhlilinə həsr olunur. Ədədi nəticələr (2.18) (sferik rejim üçün) və (2.19) (burulma rejimi üçün) tənliklərinin həlli yolu ilə alınır və bu həll MATLAB-da tərtib etdiyimiz alqoritmdən və biseksiya metodundan istifadə edərək müvafiq PC proqramlarından istifadə etməklə ədədi olaraq alınır. Nəticələr ölçüsüz məxsusi tezliklərə aiddir, nəticələr $\Omega=\omega a/\sqrt{\mu/\rho}$ kimi işarələnmiş məxsusi tezlikləri ifadə edir və $b/a,\ p/\mu$ və q/μ əmsallarının müxtəlif qiymətləri üçün alınmışdır. Burada son iki nisbət içiboş sferada başlanğıc gərginlikləri xarakterizə edir, ədədi nəticələr isə rəqslərin harmoniyasına və hər bir harmoniyadakı alınan köklərin ardıcıllığına əsasən fərqlənirlər.

Dissertasiyanın beş paraqrafdan ibarət **üçüncü fəslində** sıxılan maye ilə doldurulmuş sferada başlanğıc qeyri-bircins gərginlik vəziyyətinin olduğu hallarda çoxlaylı içiboş sferanın məxsusi rəqslərinin tədqiqinin nəticələri öz əksini tapmışdır. Birinci paraqrafda son otuz il ərzində aparılan tədqiqatların yer aldığı əsərlərin qısa icmalı verilmişdir. İkinci paraqraf problemin formalaşdırılmasına və məsələnin riyazi qoyuluşuna həsr edilmişdir. Mərkəzi sferik $Or\theta\phi$ və dekart $Ox_1x_2x_3$ koordinat sistemləri ilə üst-üstə düşən çoxlaylı içiboş sfera götürək. Güman edilir ki, yuxarıda təsvir olunan hidroelastiki sistemin rəqsi hərəkətindən əvvəl sferanın daxili və xarici səthlərinə müvafiq olaraq intensivlikləri $\tilde{q}$ və $\tilde{p}$ olan müntəzəm paylanmış normal sıxıcı qüvvələr təsir edir. Xarici qüvvələrin təsiri nəticəsində sferada qeyri-bircins başlanğıc gərginliklər yaranır. Tədqiqat elastiki dalğalar nəzəriyyəsinin üçölçülü xəttiləşdirilmiş tənlikləri və barotrop qeyri-bircins sıxılan maye hidrodinamikasının xəttiləşdirilmiş tənlikləri ilə

təsvir edilmişdir. Qeyri-özlü maye axınının üçölçülü xəttiləşdirilmiş tənlikləri və kəsilməzlik tənliyi aşağıdakı kimi verilmişdir:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p\,, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla_n v^n = 0\,. \tag{3.1}$$

burada $\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial p}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial_\theta}\vec{e}_\theta$

$$\nabla_n v^n = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 v_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(v_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} \tag{3.2}$$

Bu dissertasiyanın əvvəlki fəslinin (2.2) - (2.5) düsturlarında qeyri-bircins başlanğıc gərginlikli elastiki cisimlərdə dalğaların yayılması üçün üçölçülü xətti tənliklər və münasibətlər verilmişdir. Tədqiq olunan məsələ üçün bu tənliklər çoxlaylı sferanın hər bir layında ayrıca ödənir. Güman edilir ki, qonşu təbəqələr arasında (bərk cisim və mayenin kontakt səthində) ideal kontakt şərti (maye ilə sfera arasındakı şərtə uyğundur) müşahidə olunur.

Maye ilə sferanın daxili layın üst səthi arasında birgəlik şərtləri:

$$v_r\big|_{r=b} = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial t}\bigg|_{r=b}, \quad v_\theta\big|_{r=b} = \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial t}\bigg|_{r=b}, \quad v_\phi\big|_{r=b} = \frac{\partial u_\phi^{(1)}}{\partial t}\bigg|_{r=b}, \quad t_{rr}^{(1)}\big|_{r=b} = -p\big|_{r=b},$$

$$t_{r\theta}^{(1)}\big|_{r=b} = 0,\ t_{r\phi}^{(1)}\big|_{r=b} = 0 \tag{3.3}$$

Sferanın xarici layının xarici səthində sərhəd şərtləri:

$$t_{rr}^{(m)}\big|_{r=a} = 0, t_{r\theta}^{(m)}\big|_{r=a} = 0,\ t_{r\phi}^{(m)}\big|_{r=a} = 0\,. \tag{3.4}$$

Sferanın layları arasında kontakt şərtləri:

$$t_{rr}^{(1)}\big|_{r=H^{(1)}} = t_{rr}^{(2)}\big|_{r=H^{(1)}},\ t_{r\theta}^{(1)}\big|_{r=H^{(1)}} = t_{r\theta}^{(2)}\big|_{r=H^{(1)}},\ t_{r\phi}^{(1)}\big|_{r=H^{(1)}} = t_{r\phi}^{(2)}\big|_{r=H^{(1)}},$$

$$u_r^{(1)}\big|_{r=H^{(1)}} = u_r^{(2)}\big|_{r=H^{(1)}},\ u_\theta^{(1)}\big|_{r=H^{(1)}} = u_\theta^{(2)}\big|_{r=H^{(1)}},\ u_\phi^{(1)}\big|_{r=H^{(1)}} = u_\phi^{(2)}\big|_{r=H^{(1)}},$$

$$t_{rr}^{(2)}\big|_{r=H^{(2)}} = t_{rr}^{(3)}\big|_{r=H^{(2)}},\ t_{r\theta}^{(2)}\big|_{r=H^{(2)}} = t_{r\theta}^{(3)}\big|_{r=H^{(2)}},\ t_{r\phi}^{(2)}\big|_{r=H^{(2)}} = t_{r\phi}^{(3)}\big|_{r=H^{(2)}} \cdots$$

$$u_\theta^{(m-1)}\big|_{r=H^{(m-1)}} = u_\theta^{(m)}\big|_{r=H^{(m-1)}}, \qquad u_\phi^{(m-1)}\big|_{r=H^{(m-1)}} = u_\phi^{(m)}\big|_{r=H^{(m-1)}},$$

$$t_{rr}^{(m)}\big|_{r=a} = 0,\ t_{r\theta}^{(m)}\big|_{r=a} = 0,\ t_{r\phi}^{(m)}\big|_{r=a} = 0, \tag{3.5}$$

burada $H^{(1)} = b + h^{(1)}, ..., H^{(m)} = b + h^{(1)} + h^{(2)} +, ..., + h^{(m)} = a$.

Bununla, elastikliyin xətti nəzəriyyəsi çərçivəsində tərtib edilmiş müvafiq statik məsələnin həllindən müəyyən edilən ilkin gərginlikləri $\sigma_{rr}^{(i)0}(r)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(i)0}(r)$ və $\sigma_{\phi\phi}^{(i)0}(r)$, nəzərə alaraq məxsusi rəqs məsələsinin tərtibini yekunlaşır. Bu statik məsələ çoxlaylı içiboş sferanın daxili və xarici səthlərində q və p intensivlikli müntəzəm paylanmış normal qüvvələrin təsir etdiyi məsələyə aid olur. Birlaylı sfera məsələsinə uyğun olaraq, aşağıdakı kəmiyyətləri yazırıq:

$$u_r^{(i),0}(r) = A^{(i)} r + \frac{B^{(i)}}{r^2}, \; u_\theta^{(i),0} = 0, \; u_\phi^{(i),0} = 0, \; \sigma_{rr}^{(i),0}(r) = A^{(i)} - 2\frac{B^{(i)}}{r^3},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i),0}(r) = \sigma_{\phi\phi}^{(i),0}(r) = A^{(i)} + \frac{B^{(i)}}{r^3}. \qquad (3.6)$$

(3.6)-dakı $A^{(i)}$ və $B^{(i)}$ naməlum sabitlər aşağıdakı sərhəd və kontakt şərtlərindən müəyyən edilir.

$$\sigma_{rr}^{(1),0}(r)\Big|_{r=b} = -\tilde{q}, \; \sigma_{rr}^{(1),0}\Big|_{r=H^{(1)}} = \sigma_{rr}^{(2),0}\Big|_{r=H^{(1)}}, \; u_r^{(1),0}\Big|_{r=H^{(1)}} = u_r^{(2),0}\Big|_{r=H^{(1)}},$$

$$\sigma_{rr}^{(2),0}\Big|_{r=H^{(2)}} = \sigma_{rr}^{(3),0}\Big|_{r=H^{(2)}}, \qquad u_r^{(2),0}\Big|_{r=H^{(2)}} = u_r^{(3),0}\Big|_{r=H^{(2)}},$$

$$\sigma_{rr}^{(m-1),0}\Big|_{r=H^{(m-1)}} = \sigma_{rr}^{(m),0}\Big|_{r=H^{(m-1)}},$$

$$u_r^{(m-1),0}\Big|_{r=H^{(m-1)}} = u_r^{(m),0}\Big|_{r=H^{(m-1)}}, \; \sigma_{rr}^{(m),0}(r)\Big|_{r=a} = -\tilde{p}. \qquad (3.7)$$

Xətti cəbri tənliklərin (3.7) həlli MATLAB proqramında məlum həll alqoritmindən istifadə etməklə fərdi kompüterdə həyata keçirilir. Üçüncü paraqrafda hidrodinamik tənlik $\Phi^{(f)}$ potensialının daxil edilməsi ilə həll edilir.

$$p(r,\theta,\phi,t) = -\frac{\rho_0}{a_0^2}\frac{\partial \Phi^{(f)}}{\partial t}, \quad v_r(r,\theta,\phi,t) = \frac{\partial \Phi^{(f)}}{\partial r}, \ldots. \qquad (3.8)$$

burada potensial $\Phi^{(f)}$ aşağıdakı tənliyi ödəyir:

$$\left(\Delta + \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi^{(f)} = 0,$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \qquad (3.9)$$

Biz $\Phi^{(f)}$ potensialı aşağıdakı sıra şəklində axtarırıq:

$$\Phi^{(f)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}\varphi_{nm}^{(f)}(r,t)\,\chi_n^m(\theta,\phi),$$

$$\chi_n^m(\theta,\phi) = P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi, \qquad (3.10)$$

burada $P_n^m(\cos\theta)$ - m sıralı və n harmoniyalı qoşma Lejandr funksiyasıdır. $\varphi_{nm}^{(f)}(r,t) = R_{nm}(r)\cos\omega t$ ifadəsindən istifadə edərək, aşağıdakı kimi diferensial tənlik həllini alırıq:

$$R_n(r) = K\sqrt{\frac{\pi}{2\Omega_a r}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\Omega_a r\right),\ \Omega_a = \frac{a\omega}{a_0} \qquad (3.11)$$

burada $J_{n+\frac{1}{2}}$ - $(n+1/2)$ tərtibli birinci növ Bessel funksiyası və K - naməlum sabitdir. (3.11) ifadəsini (3.10) və sonra (3.8) tənliklərində nəzərə alaraq mayenin təzyiqi və mayenin sürət vektorunun radial komponenti üçün alarıq:.

$$p = -\omega\rho_0 K\sqrt{\frac{\pi}{2\Omega_a r}}\cos\omega t\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\Omega_a r\right)P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi,$$

$$v_r = K\sqrt{\frac{\pi}{2\Omega_a r}}\sin\omega t\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}\left\{\frac{n}{r}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\Omega_a r\right) - \Omega_a J_{n+\frac{3}{2}}\left(\Omega_a r\right)\right\}P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi$$

(3.12)

İndi (2.2) - (2.5) tənliklər sisteminə uyğun gələn elastodinamika məsələlərinin həllini nəzərdən keçirək və qeyd edək ki, bunun üçün ikinci fəsildə verilmiş diskret analitik üsuldan istifadə edirik. Bu üsula görə $\left\{H^{(i)} \le r \le H^{(i+1)}\right\}$ sferanın hər bir i-ci layı $n^{(i)}$ sayda $\left\{H^{(i)} \le r \le R_1^{(i)}\right\}, \left\{R_1^{(i)} \le r \le R_2^{(i)}\right\}, \ldots, \left\{R_{n^{(i)}-1}^{(i)} \le r \le R_{n^{(i)}}^{(i)}\right\}$ burada $R_{n^{(i)}}^{(i)} = H^{(i+1)}$ altlaylara bölünür və onların hər birində başlanğıc gərginliklərin sabit olduğu qəbul edilir. Beləliklə, dəyişən əmsallı (2.2) və (2.3) tənliklər

sistemi hər bir $\left\{H^{(i)} \le r \le R_1^{(i)}\right\}$ altlayda ayrıca ödənilən sabit əmsallı müvafiq tənliklər sisteminə gətirilir. Sonuncunu həll etmək üçün yerdəyişmələr üçün Lamé ayrılışından istifadə edirik. Yerdəyişmə komponentləri üçün Lame düsturlarını (i_k) alt lay üçün yenidən tərtib olunmuş (2.2) və (2.3) tənliklərində nəzərə alaraq, $\Phi^{(i_k)}$, $\psi^{(i_k)}$ və $\chi^{(i_k)}$ Helmholtz potensialları üçün aşağıdakı tənlikləri alırıq. Yuxarıdakı tənlikləri həll etmək üçün funksiyaları və aşağıdakı kimi qeyd edirik:

$$\Phi^{(i_k)}(r,\theta,\varphi,t) = \cos(\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n} F_{\phi}^{(i_k)}(n,r)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \ ,$$

$$\psi^{(i_k)}(r,\theta,\varphi,t) = \cos(\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n} F_{\psi}^{(i_k)}(n,r)P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi \ , \quad (3.13)$$

$$\chi^{(i_k)}(r,\theta,\varphi,t) = \cos(\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n} F_{\chi}^{(i_k)}(n,r)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \ .$$

Helmholtz potensialları üçün tənliklərdə (3.13) ifadəsini əvəz etdikdən sonra aşağıdakı tənlikləri alırıq:

$$\frac{d^2F_{\Psi;\chi}^{(i_k)}(n,r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF_{\Psi;\chi}^{(i_k)}(n,r)}{dr} + \left((\delta^{(i_k)})^2 - \frac{\nu_n^{(i_k)}(\nu_n^{(i_k)}+1)}{r^2}\right)F_{\Psi;\chi}^{(i_k)}(n,r) = 0$$

$$\frac{d^2F_{\Phi}^{(i_k)}(n,r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF_{\Phi}^{(i_k)}(n,r)}{dr} + \left((\gamma^{(i_k)})^2 - \frac{\eta_n^{(i_k)}(\eta_n^{(i_k)}+1)}{r^2}\right)F_{\Phi}^{(i_k)}(n,r) = 0$$

(3.14)

(3.14) tənliklərinin həlli ikinci fəsildə verilmiş həllə bənzər şəkildə təyin edilir, fərq yalnız ondadır ki, k layı əvəzinə burada i_k alt layı iştirak edəcək. Həmçinin, həmin analitik həllərdə $C_n^{(i_k)}$, $D_n^{(i_k)}$, $E_n^{(i_k)}$, $G_n^{(i_k)}$, $A_n^{(i_k)}$ və $B_n^{(i_k)}$ naməlum sabitləri iştirak edəcək , və müəyyən etmək üçün yalnız (3.3) - (3.5) şərtlərindən deyil, həm də qüvvələrin davamlılığı üçün əlavə şərtlərdən (yəni, qonşu alt laylar arasındakı interfeysə təsir edən gərginliklər) və yuxarıdakı alt laylar

arasındakı yerdəyişmə vektorlarından istifadə edirik.. Nəticədə qeyd olunan yerdəyişmə və gərginliklər üçün aşağıdakı ifadələr alınır:

$$u_r^{(i_k)}(r)=\cos(\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}u_{rn}^{(i_k)}(r)X_{nm}(\theta)\cos m\phi\ ,$$

$$u_\theta^{(i_k)}(r)=\cos(\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}\left[u_{\theta 1n}^{(i_k)}(r)Y_{nm}(\theta)+u_{\theta 2n}^{(i_k)}(r)\frac{m}{\sin\theta}X_{nm}(\theta)\right]\cos m\phi$$

$$u_\phi^{(i_k)}(r)=\cos(\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}\left[u_{\phi 1n}^{(i_k)}(r)\frac{-m}{\sin\theta}X_{nm}(\theta)+u_{\phi 2n}^{(i_k)}(r)Y_{nm}(\theta)\right]\sin m\phi$$

$$\sigma_{rr}^{(i_k)}(r)=\cos(\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}\sigma_{rrn}^{(i_k)}(r)X_{nm}(\theta)\cos m\phi\ ,$$

$$\sigma_{r\theta}^{(i_k)}(r)=\cos(\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}\left[\sigma_{r\theta 1n}^{(i_k)}(r)Y_{nm}(\theta)+\sigma_{r\theta 2n}^{(i_k)}(r)\frac{m}{\sin\theta}X_{nm}(\theta)\right]\cos m\phi$$

$$\sigma_{r\phi}^{(i_k)}(r)=\cos(\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{+n}\left[\sigma_{r\phi 1n}^{(i_k)}(r)\frac{m}{\sin\theta}X_{nm}(\theta)+\sigma_{r\phi 2n}^{(i_k)}(r)Y_{nm}(\theta)\right]\sin m\phi \tag{3.15}$$

burada $X_{nm}(\theta)=P_n^m(\cos\theta)$ $Y_{nm}(\theta)=n\,\mathrm{c}tg\theta P_n^m(\cos\theta)-\dfrac{n+m}{\sin\theta}P_{n-1}^m(\cos\theta)$

Nəticədə naməlum sabitlər üçün bircins xətti cəbri tənliklər sistemi alınır. Sferik rəqs rejimi ilə əlaqəli xarakterik tənliyi aşağıdakı kimi ifadə etmək mümkündür:

$$\det\left(\alpha_{q_1q_2}\right)=0 \tag{3.16}$$

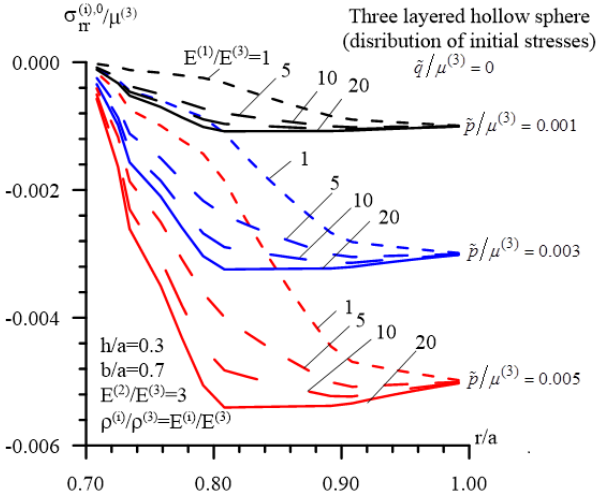
$$q_1;q_2=1,...,4k^{(1)};4k^{(1)}+1,4k^{(1)}+2,...,4k^{(1)}+4k^{(2)};...;4k^{(1)}+$$
$$+4k^{(2)}+...+4k^{(m-1)}+1,...,4k^{(1)}+4k^{(2)}+....+4k^{(m-1)}+4k^{(m)}$$

$$\det\left(\delta_{p_1p_2}\right)=0\,, \tag{3.17}$$

$$p_1;p_2=1,...,2k^{(1)};2k^{(1)}+1,2k^{(1)}+2,...,2k^{(1)}+2k^{(2)};...;2k^{(1)}+$$
$$+2k^{(2)}+...+2k^{(m-1)}+1,...,2k^{(1)}+2k^{(2)}+...+2k^{(m-1)}+2k^{(m)}$$

(3.16) və (3.17) ifadələrindəki $k^{(i)}$ -lər sferanın $i-$ ci layının alt laylarının sayını göstərir.

Üçüncü fəslin dördüncü paraqrafı ədədi nəticələrə və müzakirələrə həsr edilmişdir:
- çoxlaylı içiboş sferanın içərisində mayenin olması eyni içiboş sferanın məxsusi rəqs tezliyinə nisbətdə hidroelastiki sistemin məxsusi rəqs tezliyinin qiymətinin azalmasına səbəb olur; - bu təsirin miqyası təkcə nəzərdən keçirilən hidroelastiki sistemin mexaniki və həndəsi parametrlərindən deyil, həm də harmoniyaların sayından və köklərin sıra nömrəsindən də asılıdır; - qeyri-bircins başlanğıc gərginliklərin hidroelastiki sistemin məxsusi rəqslərinin əsas tezliyinə (tezlik tənliyinin birinci kökü) təsiri əhəmiyyətsizdir, lakin bu başlanğıc gərginliklər, ümumiyyətlə, göstərilən tezliyin azalmasına səbəb olur; - içiboş sferanın qalınlığının azalması, tam şəkildə başlanğıc gərginliklərin əsas moda tezliyi qiymətinin səbəb olur.

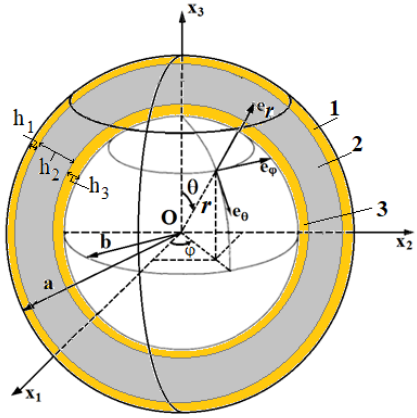


Şəkil. 3.1. Başlanğıc gərginliyin paylanması

Bu fəslin beşinci paraqrafında daxilində silindrin oxu boyu sabit sürətlə hərəkət edən sıxılan qeyri-özlü maye və içiboş sonsuz uzun silindrdən ibarət hidroelastiki sistemin məxsusi rəqslərinə başlanğıc qeyri-bircins gərginliklərin təsiri araşdırılır. Bunun üçün dəqiq üçölçülü xəttiləşdirilmiş tənliklərdən və elastiki dalğalar nəzəriyyəsinin münasibətlərindən və barotrop qeyri-bircins mayelərin

xəttiləşdirilmiş hərəkət tənliklərindən istifadə olunur. Silindirin xarici səthində sərhəd şərtləri və silindrin daxili səthindəki maye ilə silindr arasında birgəlik şərtlərinin riyazi ifadələri verilir. Bununla yanaşı, oxasimmetrik məsələnin konkret formulaları və formulə edilmiş məsələnin ümumi aspektləri nəzərdən keçirilir.

Dissertasiyanın **dördüncü fəslində** dəqiq üçölçülü tənliklərdən və elastodinamika əlaqələrindən istifadə edərək hissə-hissə bircins cismin modeli çərçivəsində üçlayı içiboş sferanın laylararası qeyri-ideal kontaktların məxsusi tezliklərə təsiri məsələsi öyrənilir. Dördüncü fəslin birinci paraqrafında son dövrlərə qədər tədqiq edilməmiş məsələ kimi kontaktların qeyri-ideallığı və ya qüsurluğu şərtləri əsaslandırılır. İkinci paraqrafda məsələnin riyazi formulə edilməsi verilir və onun həll metodları seçilir. Üçlaylı sferanın məxsusi rəqsləri elastodinamikanın dəqiq üçölçülü tənlikləri və münasibətlərinin, o cümlədən hərəkət tənlikləri, elastiklik münasibətləri və Koşi düsturlarından ibarət sistemin tətbiqi ilə təqdim olunur.



Şəkil 4.1. Üç qatlı kürənin həndəsəsi

Sferanın xarici və daxili ön səthlərində aşağıdakı sərhəd şərtləri qoyulur:

$$\sigma_{rr}^{(1)}\Big|_{r=a}=0,\ \sigma_{r\theta}^{(1)}\Big|_{r=a}=0,\ \sigma_{r\varphi}^{(1)}\Big|_{r=a}=0,\ \sigma_{rr}^{(3)}\Big|_{r=b}=0,$$
$$\sigma_{r\theta}^{(3)}\Big|_{r=b}=0,\sigma_{r\varphi}^{(3)}\Big|_{r=b}=0, \qquad (4.1)$$

Fərz olunur ki, laylararası aralıq səthdə qüvvə vektorunun kəsilməzlik şərti ödənilir, başqa sözlə aşağıdakı münasibətlər verilir:

$$\sigma_{rr}^{(1)}\Big|_{r=a-h_1}=\sigma_{rr}^{(2)}\Big|_{r=a-h_1},\sigma_{r\theta}^{(1)}\Big|_{r=a-h_1}=\sigma_{r\theta}^{(2)}\Big|_{r=a-h_1},\quad \sigma_{r\varphi}^{(1)}\Big|_{r=a-h_1}=\sigma_{r\varphi}^{(2)}\Big|_{r=a-h_1}$$

,

$$\sigma_{rr}^{(2)}\Big|_{r=a-h_1-h_2}=\sigma_{rr}^{(3)}\Big|_{r=a-h_1-h_2},\quad \sigma_{r\theta}^{(2)}\Big|_{r=a-h_1-h_2}=\sigma_{r\theta}^{(3)}\Big|_{r=a-h_1-h_2},$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(2)}\Big|_{r=a-h_1-h_2}=\sigma_{r\varphi}^{(3)}\Big|_{r=a-h_1-h_2}. \tag{4.2}$$

Laylararası səthlərdə kontakt şərti yerdəyişmələr üçün qeyri-ideal hesab olunur və bu qeyri-ideallıq aşağıdakı altı riyazi bərabərliklə riyazi modelləşdirilir:

$$u_r^{(1)}\Big|_{r=a-h_1}-u_r^{(2)}\Big|_{r=a-h_1}=\frac{F_1h_1}{\mu_1}\sigma_{rr}^{(1)},$$

$$u_\theta^{(1)}\Big|_{r=a-h_1}-u_\theta^{(2)}\Big|_{r=a-h_1}=\frac{F_2h_1}{\mu_1}\sigma_{r\theta}^{(1)},\ldots,$$

$$u_\varphi^{(2)}\Big|_{r=a-h_1-h_2}-u_\varphi^{(3)}\Big|_{r=a-h_1-h_2}=\frac{F_6h_2}{\mu_2}\sigma_{r\varphi}^{(2)} \tag{4.3}$$

Aşağıdakı işarələmələri daxil edək: 1 və 2-ci əsas laylararası keçid layında (2 və 3-cü əsas təbəqələr arasında) $h^{(12)}$ ($h^{(23)}$) - qalınlıq, $K^{(12)}$ ($K^{(23)}$) və $\mu^{(12)}$ ($\mu^{(23)}$) -1 və 2 əsas laylararası keçid layının (əsas 2 və 3 əsas laylararası) materialının həcmi elastiklik və sürüşmə modullarıdır. Real hallar üçün keçid laylarının materiallarının sərtlik xassələrinin anizotropluğu fərziyyəsindən çıxış etməli və bu fərziyyəyə uyğun olaraq yazmalıyıq:

$$F_1=\frac{h^{(12)}}{h_1}\frac{\mu_1}{E_r^{(12)}},\ F_4=\frac{h^{(23)}}{h_2}\frac{\mu_2}{E_r^{(23)}},\ F_2=F_3=\frac{h^{(12)}}{h_1}\frac{\mu_1}{\mu_{r\varphi}^{(12)}}$$

$$F_5=F_6=\frac{h^{(23)}}{h_2}\frac{\mu_2}{\mu_{r\varphi}^{(23)}} \tag{4.4}$$

(4.4) düsturu fiziki və mexaniki mahiyyətinə və mövcud düsturların ümumiləşdirilməsinə əsaslanaraq verilmişdir. Bundan əlavə, (4.4) düsturunda $E_r^{(12)}$ və $\mu_{r\varphi}^{(12)}$ ($E_r^{(23)}$ və $\mu_{r\varphi}^{(23)}$)sabitləri vasitəsilə radial və azimutal istiqamətlərdə keçid layının materialının sərtliyinin

qiymətləri göstərilir. Bununla bərabər, (4.4) düsturlarını sonlu qalınlığa malik elastiki materialda Vinkler və Pasternak modellərinin dəyişdirilmiş forması kimi də qəbul etmək olar. Elastodinamik tənliklərin həlli, dissertasiyanın son iki fəslində olduğu kimi, Helmholtz qoyuluşu vasitəsilə qurulur, burada $\phi^{(k)}(r,\varphi,\theta,t)$, $\chi^{(k)}(r,\varphi,\theta,t)$ və $\psi^{(k)}(r,\varphi,\theta,t)$ potensialları uyğun dalğa tənliklərini ödəyir və bu həllər aşağıdakı kimi seçilir:

$$\phi^{(k)}(r,\theta,\varphi,t)=\left[A^{(k)}j_n(\alpha^{(k)}r)+B^{(k)}y_n(\alpha^{(k)}r)\right]P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi e^{i\omega t}$$

$$\psi^{(k)}(r,\theta,\varphi,t)=\left[C^{(k)}j_n(\beta^{(k)}r)+D^{(k)}y_n(\beta^{(k)}r)\right]P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi e^{i\omega t}$$

$$\chi^{(k)}(r,\theta,\varphi,t)=\left[E^{(k)}j_n(\beta^{(k)}r)+F^{(k)}y_n(\beta^{(k)}r)\right]P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi e^{i\omega t}$$

Burada $\alpha^{(k)}=\omega/c_1^{(k)}$, $\beta^{(k)}=\omega/c_2^{(k)}$, $A^{(k)},...,F^{(k)}$ – məlum olmayan sabitlər, ω-sferanın harmonik rəqslərinin tezliyi, c_1^k və c_2^k-isə uyğun olaraq uzununa və eninə dalğaların sürətləridir.

Beləliklə, $A^{(k)}$, $B^{(k)}$, $E^{(k)}$ və $F^{(k)}$ məchullarına və həmçinin, ayrılıqda $C^{(k)}$ və $D^{(k)}$ ya nəzərən tənliklər sisteminin əmsallar matrisinin determinantını sıfıra bərabərləşdirərək rəqslərin sferik və burulma rejimləri üçün tezlik tənliyini alırıq ki, bu da aşağıdakı formada verilir:

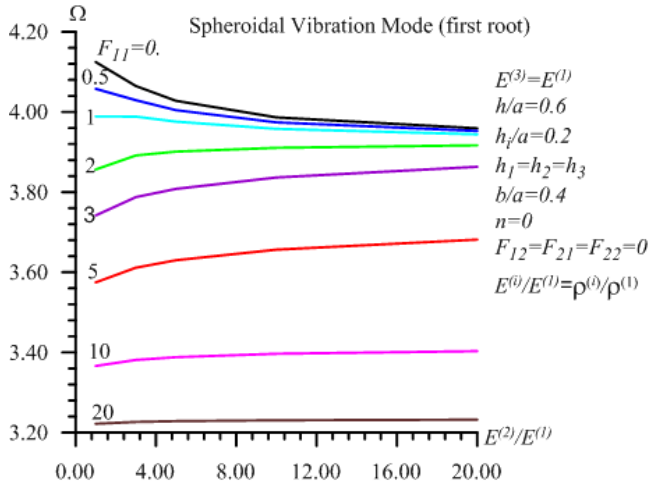
$$\det\left(\gamma_{q_1q_2}(F_1,F_2,...,F_6)\right)=0\,,\ q_1;q_2=1,2,...,12 \quad (4.5)$$

$$\det\left(\delta_{p_1p_2}(F_2,F_3,F_5,F_6)\right)=0\,,\ p_1;p_2=1,2,...,6 \quad (4.6)$$

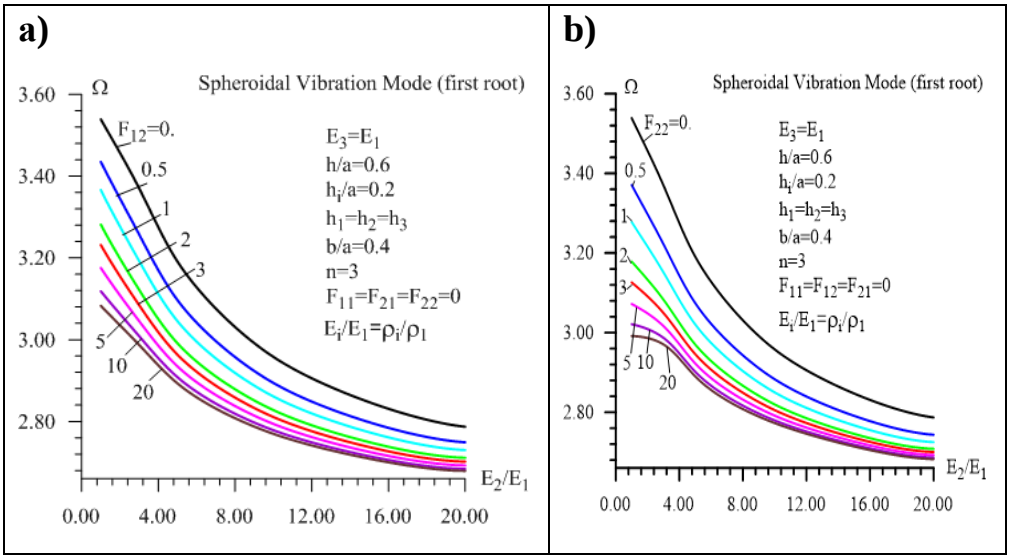
Qeyd edək ki, γ_{q1q2} и δ_{p1p2} ifadələrinin aşkar yazılışını yerdəyişmə və gərginliklərin düsturlarından və həmin düsturlara daxil edilmiş funksiyaların ifadələrindən və həmçinin, (4.1) sərhəd və (4.2) və (4.3) kontakt şərtlərindən asanlıqla müəyyən edilə bilər.

Ədədi analiz nəticəsində müəyyən edilmişdir ki, sferanın laylararası qeyri-ideal kontakt münasibətlərinin məxusi rəqslərin tezliyininin qiymətini əhəmiyyətli dərəcədə azaltması müəyyən edilir. Sfera layları materiallarının elastik modulunun sıxlığa nisbətinin qiymətlərinin seçilməsində uyğun test məsələsinin və eləcə də,

təcrübədən məlum olan mühəndis-mexaniki faktlarına əsaslanır. Qeyri-ideal kontakt şərtinin üçlaylı sferanın məxsusi tezliklərinin qiymətinə təsirinin əhəmiyyətini və əldə edilmiş nəticələrin təkcə çoxlaylı materialların dinamikasında deyil, həm də geomexanikada mümkün tətbiqlərini nəzərə alaraq, rəqslərin yüksək harmonikaları və tezlik tənliklərinin sonrakı kökləri üçün tədqiqatları davam etdirilməsinə zərurət yaranır.



Şəkil 4.2. $F_{12} = F_{21} = F_{22} = 0$ halda $E^{(2)} / E^{(1)}$ -in müxtəlif qiymətləri üçün yuxarı və orta laylararası qeyri-ideal kontakt şərtinin məxsusi sferoidal rəqsləri tezlikləri qiymətinə təsiri



Şəkil 4.3. $n=3$ harmoniyası üçün sferik formalı rəqslərin Ω tezliklərinə laylararası müxtəlif variantların qeyri-ideal kontakt şərtinin təsiri.

Dördüncü fəslin beşinci paraqrafında hidroelastiki sistemin - dalğa hərəkətinin riyazi modeli silindrik örtük və sferik qaz qabarcıqları olan sıxıla bilən özlü maye qurulmuşdur; bir-biri ilə qarşılıqlı təsirdə olan maye ilə örtüklərdə dalğa prosesləri tədqiq edilmişdir, bu qarşılıqlı əlaqə örtüyün özünün deformasiyasından çox asılıdır. İkifazalı mayedə kiçik həyəcanlanmaların yaranması ilə bağlı qəbul edilmiş fərziyyə çərçivəsində Eyler koordinatlarında xəttiləşdirilmiş Navye-Stoksun hərəkət tənliklərini və mühitin kəsilməzlik tənliyini yazırıq.

Nyuton mayesindəki təzyiq üçün xəttiləşdirilmiş tənlik aşağıdakı kimidir:

$$\frac{1}{a_f^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\nabla^2\left(p+\frac{4\mu}{3\rho_0 a_f^2}\frac{\partial p}{\partial t}\right) \qquad (4.7)$$

Nazik örtüklər üçün Kirxov-Lyav fərziyyəsinin doğruluğu qəbul edilir. Laqranj koordinat sistemində örtüyün oxasimmetrik hərəkətinə baxılır və örtük hərəkətinin məlum diferensial tənlikləri yazılır. Qeyd etmək lazımdır ki, koordinatların çevrirmə düsturuna

əsasən ilkin olaraq sükunətdə olan ikifazalı birsürətli maye-qaz mühiti ilə doldurulmuş silindrik örtükdə Eyler və Laqranj koordinatları üst-üstə düşür. Hidroelastiklik tənliklərinin qapalı riyazi sistemini əldə etmək üçün dayanıqlı dalğa prosesinin riyazi modeli olan problemin sərhəd və kontakt şərtləri tərtib edilir. Hidroelastiklik tənlikləri sisteminin p , u_r , u_x , w_r və w_x məchul funksiyaları üçün dinamik kontakt şərtləri tərtib edilir:

$$p_t = -\sigma_{rr}\Big|_{r=R-h/2} = -\left(-p - \frac{2}{3}\mu div\vec{u} + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}\right),$$

$$q = -\sigma_{rx}\Big|_{r=R-h/2} = -\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right). \qquad (4.8)$$

Bu səthdə kinematik kontakt şərtləri də təmin ediləcək:

$$u_r\Big|_{r=R-h/2} = \frac{\partial w_r}{\partial t}\Bigg|_{r=R-h/2}, \qquad u_x\Big|_{r=R-h/2} = \frac{\partial w_x}{\partial t}\Bigg|_{r=R-h/2}. \qquad (4.9$$

Özlü maye-qaz mühitinin xəttiləşdirilmiş dalğa tənliyinin (4.7) həllini aşağıdakı kimi yazırıq:

$$p = \mathrm{Re}\left\{p^*(r)e^{i(kx+\omega t)}\right\} \qquad (4.10)$$

(4.7) tənliyində sonuncu asılılığı nəzərə alaraq və sadə riyazi çevrilmələri yerinə yetirərək nəticədə təzyiqin məhdud olması şərtini nəzərə almaqla Bessel tənliyinin həlli aşağıdakı kimi alınır:

$$p^* = p_0 J_0(\lambda r) \qquad (4.11)$$

İki azalı mayenin sürət vektorunun u_r və u_x komponentləri təzyiq üçün olan moda kimi qəbul edərək hərəkətin xəttiləşdirilmiş diferensial tənliyindən aşağıdakı ifadələr alınır:

$$u_r^* = AJ_1(\beta r) - \frac{p_0\lambda\left(1 + i\dfrac{\omega\mu}{3\rho_f a_f^2}\right)}{\mu\left(\beta^2 - \lambda^2\right)} J_1(\lambda r)$$

$$u_x^* = BJ_0(\beta r) - \frac{ip_0 k\left(1 + i\dfrac{\mu\omega}{3\rho_f a_f^2}\right)}{\mu(\beta^2 - \lambda^2)} J_0(\lambda r).$$

Burada $\beta^2 = -\left(k^2 + i\dfrac{\rho_f \omega}{\mu}\right)$-kompleks ədəddir.

Alınan həllərdə örtüklərin hərəkətinin diferensial tənliklərinin həlli yolu ilə məsələnin kontakt şərtindən təyin olunan p_0 , A və B kəmiyyətləri naməlum ədədlərdir. Bundan əlavə, aşağıdakı

$$B = -\frac{i\beta}{k} A,$$

şərti də alınır.

Beləliklə, qalan üç məchuldan biri aradan qaldırılır. Ölçüsüz kəmiyyətlərə keçdikdən sonra təzyiq və maye sürəti üçün nəticədə aşağıdakı ifadələri alırıq:

$$\bar{p}^* = \bar{p}_0 J_0(\bar{\lambda}\bar{r}),$$

$$\bar{u}_r^* = J_1(\bar{\beta}\bar{r})\bar{A} - i\frac{\bar{\lambda}\bar{\omega}J_1(\bar{\lambda}\bar{r})}{\bar{K}+\bar{\lambda}}\bar{p}_0,$$

$$\bar{u}_x^* = i\frac{\bar{\beta}}{K}J_0(\bar{\beta}\bar{r})\bar{A} - i\frac{\bar{K}\bar{\omega}J_0(\bar{\lambda}\bar{r})}{\bar{K}+\bar{\lambda}}\bar{p}_0,$$

$$\bar{\beta}^2 = -\left(K^2 + i\frac{\bar{\omega}}{\bar{\mu}}\right),$$

$$\bar{\lambda} = -K^2 + \frac{\bar{\omega}^2}{\left(1 + i\dfrac{4\bar{\mu}\bar{\omega}}{3}\right) - K^2}.$$

Ölçüsüz kəmiyyətlərdə örtüyün diferensial tənliyi aşağıdakı kimi olur:

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_r}{\partial \bar{t}^2} = \bar{p}_t\left(1 - \frac{\bar{h}}{2}\right) + \frac{1}{\eta}\frac{\partial^2 \bar{w}_r}{\partial \bar{x}^2} - \bar{w}_r - \nu\frac{\partial \bar{w}_r}{\partial \bar{x}},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{t}^2} = \bar{q}\left(1 - \frac{\bar{h}}{2}\right) + \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial \bar{x}^2} + \nu\frac{\partial \bar{w}_r}{\partial \bar{x}}. \qquad (4.12)$$

Bu tənliyin həllini

$$\bar{w}_r = \bar{w}_r^* e^{i(K\bar{x} + \bar{\omega}_t \bar{t})} \qquad \bar{w}_x = \bar{w}_x^* e^{i(K\bar{x} + \bar{\omega}_t \bar{t})}$$

formada axtaracağıq. Ölçüsüz kəmiyyətlərdə tangensial və normal təzyiqlər üçün kontakt şərtləri:

$$\bar{p}_t = -\bar{\sigma}_{rr}\Big|_{\bar{r}=1-\bar{h}/2} = -\left[-\bar{p}^* - \frac{2\mu}{3}\left(\bar{u}_x^*(iK) + \frac{\bar{u}_r^*}{\bar{r}}\right) + \frac{4\bar{\mu}}{3}\frac{\partial \bar{u}_r^*}{\partial \bar{r}}\right]\Bigg| e^{i(K\bar{\chi}+\omega t)},$$

$$\bar{q} = -\bar{\sigma}_{rx}\Big|_{\bar{r}=1-\bar{h}/2} = -\bar{\mu}\left(\frac{\partial \bar{u}_x^*}{\partial \bar{r}} + (iK)\bar{u}_r^*\right)\Bigg| e^{i(K\bar{\chi}+\omega t)},$$

və ya

$$\bar{p}_t = \bar{p}_t^* e^{i(K\bar{\chi}+\omega t)},$$
$$\bar{q} = \bar{q}^* e^{i(K\bar{\chi}+\omega t)}$$

Yerdəyişmə və təzyiq düsturlarını (4.12) tənliyində nəzərə alaraq w_r^* və w_x^* həllini tapırıq:

$$\bar{w}_r^* = \bar{p}_{t-}^* \frac{1-\bar{h}/2}{\Phi} + \bar{q}^* \frac{\theta}{\Phi},$$
$$\bar{w}_x^* = \bar{p}_t^* \frac{\left(-iK\left(1-\bar{h}/2\right)v\right)}{\Phi\left(-K^2+\bar{\omega}_t^2\right)} + \bar{q}^* \frac{\left(-iv\theta K + \Phi\left(1-\bar{h}/2\right)\right)}{\Phi\left(-K^2+\bar{\omega}_t^2\right)}, \tag{4.13}$$

(4.8)-(4.9) kinematik və dinamik kontakt şərtləri iki sayda mürəkkəb xətti bircins cəbri tənlikdən ibarət sistem təşkil edir.

$$c_{11}\bar{A} + c_{12}\bar{p}_0 = 0,$$
$$c_{21}\bar{A} + c_{22}\bar{p}_0 = 0. \tag{4.14}$$

Kompleks kəmiyyətlər olan naməlum $\bar{A}$ və $\bar{p}_0$ (4.14) tənliyinin qeyri-trivial həllinə bərabər olmalıdır.

Dispersiya tənliyinin həlli sabit naməlum kompleks dalğa ədədi K-nın təyin edilməsinə gətirib çıxarır. Tənliyin K əmsalları sabit dalğa sayından və mayenin, örtüyün ölçülü fiziki, mexaniki, həndəsi, kinematik və dinamik parametrlərindən ibarətdir.

t zamanla stasionar olan və χ koordinat boyunca sönən prosesdə ω həqiqi tezliyi məlumdur və axtarılan kəmiyyət K kompleks dalğa ədədidir. Məxusi rəqslərdən fərqli olaraq, biz bu rəqsləri qərarlaşmış rəqslər adlandırırıq. K dalğa ədədinin həqiqi hissəsi fiziki mahiyyətcə koordinata görə prosesin tezliyidir. Dalğa prosesinin dispersiya tənliyinin həlli müsbət həqiqi ədəd olduğundan, $\omega > 0$. İxtiyari ω üçün $K(\omega)$ kompleks ədədi uyğun alınır.

$K_i < 0$, $K_R > 0$ и $K_i > 0$, $K_R < 0$ hallarında rəqslərin fazaları və faza dəyişməsi sürətinin yayılma istiqamətində həyəcan amplitudası sönən rəqslər rejiminə uyğun olur. $L \to 0$, $K_R \to \infty$ qısa dalğalar və , $L \to 0$, $K_R \to \infty$ -uzun dalğalar prosesin limit vəziyyətini xarakterizə edir.

Mürəkkəb cəbri tənlik olan dispersiya tənliyinin həlli fərdi kompüterdə (PC) xüsusi MATLAB proqramından istifadə etməklə ədədi üsulla əldə edilmişdir. Biz x oxunun müsbət istiqamətində yayılan dalğaları tədqiq edirik.

NƏTİCƏLƏR

1.1. Deformasiya olunan bərk cisimlərin üçölçülü nəzəriyyəsi üçün zədələnmə və diffuziya prosesini nəzərə alınmaqla, sonlu deformasiyalarda neytron axınının təsiri altında sürüncəklik zamanı qeyri-bircins anizotrop elastiki-plastiki cisimlərin gərginlik-deformasiya vəziyyətini təyin etmək üçün qarışıq variasiya tipli prinsip işlənib hazırlanmışdır. İşdə heterogen mühitdə müxtəlif aşkar faza əlavələri olduğu halda kompozit materialın vəziyyəti və nanoborucuqlu strukturlar üçün təklif edilmiş prinsipin modifikasiyasını təqdim edilir.

2.1-Başlanğıc gərginliklər sferanın mərkəzinə nəzərən simmetrik olduqda və yalnız sferik radial koordinatdan asılı olduqda qeyri-bircins başlanğıc gərginlikli içiboş sferanın dinamik məsələlərinin həlli üçün diskret-analitik üsul təklif olunmuşdur. İşlənmiş metodun mahiyyəti sferik layın hər birini müəyyən sayda müvafiq sferik altlaylara bölməklə və ayrılıqda hər bir altlayın daxilində başlanğıc gərginlikləri sabit qəbul etməklə hər bir altlayda hərəkət tənliklərinin analitik həllini tapmağa çalışmaqdan ibarətdir.

3.1 - mayenin mövcudluğunun təsiri və bircins olmayan başlanğıc gərginliklərin nəzərdən keçirilən hidroelastik sistemin məxsusi rəqslərinə təsiri üzrə ədədi nəticələr təqdim edilmiş və müzakirə edilmişdir.

4.1. Elastodinamikanın dəqiq üçölçülü tənliklər və münasibətlərindən istifadə edərək hissə-hissə biricins cismin modeli çərçivəsində üçlaylı

içiboş sferanın arasında arasında qeyri-ideal kontaktın bu sferanın məxsusi rəqslərinə təsiri öyrənilmişdir. Qeyri-ideal kontakt münasibətləri yalnız yerdəyişmələrə aid olduğu hala baxılır. Rəqslərin sferoidal və burulma rejimləri ilə bağlı ədədi nəticələr ayrıca nəzərdən keçirilmiş və müəyyən edilmişdir ki, sferanın layları arasında qeyri-ideal kontakt şərtləri məxsusi tezliklərinin qiymətlərinin əhəmiyyətli dərəcədə azalmasına səbəb olur.

4.2. Göstərilmişdir ki, texnoloji, təbii proseslərdə və canlı orqanizmlərdə hidroelastiki sistemin dinamiki xassələri deformasiya olunan örtüklərin və qaz qabarcıqlı mayelərin qarşılıqlı təsirindən asılıdır. Daxilində sferik qabarcıqları olan maye olan örtüklər üçün özlülüyün dalğaların yayılmasının dinamiki xüsusiyyətlərinə təsiri qiymətləndirilmişdir. Örtük-maye dinamiki sistemində yaranan rəqslərin forması və tezliyi müəyyən edilmişdir. MATLAB proqramından istifadə edərək rəqslərin baş verdiyi mühitdə kəmiyyətlərin məxsusi qiymətləri və funksiyalarını hesablamaq üçün fundamental iterasiya metodundan istifadə edilmişdir.

Dissertasiyanın əsas müddəaları aşağıdakı əsərlərdə öz əksini tapmışdır

1. Ю.М. Севдималиев Устойчивость нелинейной арки при ползучести, Доклады АН Азерб.ССР,1982, т.XXXVIII.с.13-17.
2. Р.Ю. Амензаде, Ю. Бавафа, Ю.М. Севдималиев Вариационный метод решения задачи предельного состояния многослойного жестко защемленного нелинейно-упругого стержня при ползучести. Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева серия: Механика предельного состояния,2011. №1(9). с.61-70.
3. Amenzadeh R.Yu., Sevdimaliyev Yu. M., Variational method of the teory of plasticity for inhomogeneous and composite body at irradiation. Mechanics of Composite Materials, 2016, Volume 52(1), p. 73-80.
4. Sevdimaliyev Y.M., Mursalzadeh Z.A.. The interaction of solids and structures with various physical fields, accompanied by a change in their physics-mechanical characteristics // «Modern problems of innovative technologies in oil and gas production and

applied mathematics» proceedings of the international conference dedicated to the 90th anniversary of academician Azad Khalil oglu Mirzajanzade, -Baku, -2018, p. 88-90.
5. Akbarov, S.D., Guliyev, H.H., Sevdimaliyev, Y.M., Yahnioglu, N. The discrete-analytical solution method for investigation dynamics of the sphere with inhomogeneous initial stresses. CMC: Computers, Material & Continua, 2018, V. 55, N. 2, pp.359-380.
6. Sevdimaliyev Y. M., Akbarov S.D., Yahnioglu N., The influence of imperfect contact conditions between layers of a hollow sandwich sphere on its natural frequencies. Mechanics of Composite Materials, Vol. 56, No.4, 2020, pp.541-554.
7. Yahnioglu N., Sevdimaliyev Y. M. The effects of an imperfect contact conditions on the higher natural frequencies of a sandwich hollow sphere under torsional vibration mode. Procedings of the 7th International Conference on Control and Optimizasion with Industrial Applications,2020, Vol.I.pp.410-413.
8. . Sevdimaliyev Y.M., Akbarov S.D., Guliyev H.H., Yahnioglu N., On the natural oscillation of an inhomogeneously pre-stressed multilayered hollow sphere filled with a compressible fluid //Appl. Comput. Math., Vol.19, No.1, 2020, p.132-146.
9. Ю..М.Севдималиев, Выпучивание многослойной тонкостенной оболочки при ползучести под действием распределенной нагрузки. News of Baku University series of Phusico-Mathematical Sciences BDU, 2021, No2, s.67-73.
10. Ю.М.Севдималиев, Применение вариационного принципа смешанного типа для определения ресурса живучести элемента конструкции при ползучести с учетом физико-химических агрессивных внешних полей //Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики, -Воронеж, -«Научно-исследовательские публикации», -2017, с.1249-1254.
11. Р.Ю. Амензаде, Ю.М. Севдималиев, Вариационный метод теории пластичности для неоднородных и композитных тел при облучении. Механика Композитных Материалов. 2016, Т. 52, №1, с. 105-114.

12. Ю.М.Севдималиев, С.Д.Акбаров, Н. Яхниоглу, Влияние несовершенных контактных условий между соями трехслойной полой сферы на ее частоту собственных колебаний. Механика Композитных Материалов, Т.56, №4, 2020, с. 791-812.
13. Y.M. Sevdimaliyev., Mixed-tupe variational principle for creep problems considering the aggressiveness of external fields. Transactions of Azerbaijan NAS, Mechanics issue , 2023, Vol.43, 7(7), pp.70-83.
14. S.D. Akbarov, Y.M. Sevdimaliyev, G.J. Valiyev. Mathematical modeling of the dynamics of a hydroelastic system – A hollow cylinder with inhomogeneous initial stresses and compressible fluid//Math Meth Appl Sci. 2021, 44, p. 7858-7872.
15. Y.M. Sevdimaliyev, G.M. Salmanova, R.S. Akbarli, N.B. Nagieva. Propagation of waves in a hydroelastic shell-viscous liquid system, in the presence of gas bubbles // Math Meth Appl Sci., 2023, 46. p.12176-12189.
16. Y.M. Sevdimalıyev, X.B. Məmmədov, İ.C. Məmmədov. Uzunmüddətli möhkəmlik və sürüncəkliyin birölçülü məsələsi // BDU Azərbaycan Xalqının ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 95-illik yubileyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri, 2018, s.91-94.
17. Y.M. Sevdimalıyev, S.C. Akbarov, H.H. Guliev. On one integral criterion of reliability of geoinformation // Geoinformatics, -Kiev, -2018, p. 1-4.
18. Y.M. Sevdimalıyev. Nazik lövhələrin sürüncəklik deformasiyasında dayanıqlığlılığı //BDU Azərbaycan Xalqının ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 95-illik yubileyinə həsr olunmuş Riyaziyyat və mexanikanın actual problemləri, -2018, s.74-77.
19. Y.M. Sevdimalıyev, S.D. Akbarov, N. Yahnioğlu. İçi boş sandviç kürenin titreşim frekanslarına levhalar arası kusurlu temas konuşullarının etkisi //Ulusal Mekanik Kongresi, -2019, s.427-436.
20. Y.M. Sevdimalıyev, A.B. Əliyev, M. Hadiyeva. İrsi elastiki çubuğun istismar resurslarının qiymətləndirilməsi // Bakı,

Riyaziyyat,Mexanika və onların tətbiqləri, Respublika konfransının materialları, - 2020, s.88-90.
21. Y.M. Sevdimalıyev, S.D. Akbarov. İçərisində maye olan və qeyri-bircins başlanğıc gərginliyə malik çoxlaylı sferanın dinamika məsələləri // BDU Azərbaycan xalqının ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 98-ci ildönümünə həsr olunmuş Riyaziyyat, Mexanika və və onların tətbiqləri, -2021, s.23-25.
22. Y.M.Севдималиев.Выпучивание многослойной тонкостенной оболочки при ползучести под действием распределенной нагрузки //BDU Azərbaycan xalqının ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 98-ci ildönümünə həsr olunmuş Riyaziyyat, Mexanika və onların tətbiqləri Respublika virtual elmi konfransı, -2021, s.182-185.
23. Y.M. Sevdimalıyev. Determination of the structural-load and solids capacity under creep taking into account external physical fields and impacts // Proceedings of the International scientific conference devoted to the 110-th anniversary of academician Ibrahim Ibrahimov, -2022, p.190-192.
24. Ю.М.Севдималиев, И.В.Алиева. Исследование натуральных колебаний многослойной сферы с разрывными кинематическими контактами //BDU Akademik İbrahim İbrahimovun anadan olmasının 110 illik yubileyinə həsr olunmuş Funksiyalar nəzəriyyəsi, funksional analiz və onların tətbiqləri Respublika elmi konfransı, -2022, c.413-416.
25. Y.M. Sevdimaliyev, G.M. Salmanova, R.S. Akberli. Mathematical analysis for a condition of the hydrodynamic characteristics // IECMSA -2019 8th International eurasian conference on mathematical sciences and applications, -Baku 2019, p189.
26. 24.Y.M. Sevdimaliyev, G.J. Veliyev. Mathematical modeling of the dynamics of a hydroelastic system-a hollow cylinder with inhomogeneous initial stresses and incompressible fluid // IECMSA -2019 8th International eurasian conference on mathematical sciences and applications, -Baku, -2019, p.190
27. Х.Б. Мамедов, Ю.М. Севдималиев, Г.М.Салманова, Э.И. Ахмедов Об одном методе исследования задачи о контактном взаимодействии тонких оболочек с упругими опорными

основаниями на контуре // BDU Əməkdar elm xadimi, professor Əmir Ş. Həbibzadənin anadan olmasının 100 –cü ildönümünə həsr olunmuş “Funksional analiz və onun və onların tətbiqləri” adlı respublika konfransının materialları, -2016, c.161-166.
28. Y.M.Sevdimaliyev, S.A. Piriyev ,E.M.Mustafayeva Scattering of the internally reinforsed pipe in a cylindrical form with active material.Transactions of Azerbaijan NAS,Mechanics issue , 2018,Vol.3, 8(7).pp.115-121
29. A.Kh.Shakhverdiev, G.M.Panakhov, E.M.Abbasov, Y.M.Sevdimaliyev Gassy fluid flow in elastic-plastic deformable medium. Transactions of Azerbaijan NAS, Mechanics issue , 2017, Vol.3, 7(7), pp.74-85.
30. Y.M.Sevdimaliyev,Y.T.Mehraliyev,A.T.Ramazanova An inverse boundary value problem for the equation of flexural vibrations of a bar with an inteqral conditions of the first kind, Journal of Mathematical Analysis,2020,Vol.11,issui 5,pp. 1-12.
31. Y.M. Sevdimaliyev, Akbarov S., Yahnioglu N., Guliyev H. The effect of inhomogeneous initial stresses on the oscillation of a multiyayered hollow sphere filled with a compressible fluid// International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, Istanbul, Turkey, 10-13 March 2019, pp.44.
32. Akbarov S.D., Yahnioglu N., Sevdimaliyev Y. M. The effects of an imperfect contact between the laers of the hollow sandwich sphere on its natural frequencies in the case where higher-order spherical harmnics. Procedings of the 8th International Conference on Control and Optimizasion with Industrial Applications,2022, -Vol. II.,pp.48-51.
33. Y.M.Sevdimalıyev., Əliyev A.B.,Mahmudzadə T.M. Elastiki silindrik örtükdə mayedəki kiçik amplitudlu dalğaların yayılması haqqında. Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi Lənkəran Dövlət Universiteti ‘Riyaziyyat Elminin inkişafının yeni mərhələsi‘mövzusunda elmi konfransının materialları, Lənkəran, 28 dekabr 2018-ci il ,s.22-23.
34. Ю.М.Севдималиев, И.В. Алиева, Исследование натуральных колебаний многослойной сферы с разрывными кинематическими контактами, “Funksiyalar nəzəriyyəsi,

funksional analiz və onların tətbiqləri” mövzusunda Respublika Elmi Konfransı, 28-29 noyabr, 2022-ci il
35. Sevdimaliyev Y. M., Yahnioglu N. , On the influence of imperfect contact conditions on the natural frequencies of a three-layer hollow sphere for torsional vibration, İnternational scientific conference «actual problems of mechanics - 2023» to the 145 th anniversary of the birth of S.P. Timoshenko, 2023
36. Sevdimaliyev Y. M., Salmanova G.M., Əliyeva İ. Vibrations of a hollow three-layer sphere with high harmonics a non -ideal contacts, BDU Azərbaycan xalqının ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 100-cü ildönümünə həsr olunmuş “Diferensial və inteqral operatorlar” adlı Respublika elmi konfransının materialları, Bakı, 2023.
37. Y.M. Sevdimalıyev, The influence of imperfect contact conditions on the natural frequencies of a three-layer hollow sphere for High-order harmonics, Appl. Comp. Math, 2023, pp. 1-15

Dissertasiyanın müdafiəsi **04 aprel 2024-cü il** tarixində saat **12^{00}-da** Bakı Dövlət Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən BED 4.23 Birdəfəlik Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ1148, Bakı şəh., akad.Z.Xəlilov küç., 23. ,III korpus, auditoriya 301.

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya işi və avtoreferatın elektron versiyaları Bakı Dövlət Universitetinin rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat 29 fevral 2024-cü il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 26.02.2024
Kağızın formatı: 60×84 1/16
Həcm: 78866
Tiraj: 30