НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

РОВШАН АЛИФАГА оглы БАНДАЛИЕВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В БАНАХОВОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1202.01-Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук по математике

Баку – 2014

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

RÖVŞƏN ƏLİFAĞA OĞLU BƏNDƏLİYEV

BANAX FUNKSİONAL FƏZALARINDA HARMONİK ANALİZİN İNTEQRAL OPERATORLARI VƏ BƏZİ TƏTBİQLƏRİ

1202.01-Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2014

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

RÖVŞƏN ƏLİFAĞA OĞLU BƏNDƏLİYEV

BANAX FUNKSİONAL FƏZALARINDA HARMONİK ANALİZİN İNTEQRAL OPERATORLARI VƏ BƏZİ TƏTBİQLƏRİ

1202.01-Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2014

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

РОВШАН АЛИФАГА оглы БАНДАЛИЕВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В БАНАХОВОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1202.01-Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук по математике

Баку – 2014

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Riyazi analiz"** şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi məsləhətçi:
AMEA-nın müxbir üzvü, prof. **Vaqif S. Quliyev**

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **İdris İ. Şarapudinov**
(REA-nın Dağıstan elmi mərkəzi);
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Sadiq K.Abdullayev**
(Bakı Dövlət Universiteti);
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Malik S. Cəbrayılov**
(Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti).

Aparıcı təşkilat:
Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti
«Ali riyaziyyat» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 12 dekabr 2014-cü il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 2014-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена в отделе **"Математический анализ" Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный консультант:

член-корр. НАН Азербайджана, проф. **Вагиф С. Гулиев**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф. **Идрис И.Шарапудинов**
(Дагестанский научный центр РАН);
доктор физико-математических наук, проф. **Садиг К. Абдуллаев**
(Бакинский Государственный Университет);
доктор физико-математических наук, проф. **Малик С.Джабраилов**
(Азербайджанский Государственный Педагогический Университет).

Ведущая организация:

Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет

кафедра «Высшая математика».

Защита диссертации состоится 12 декабря 2014 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан ** 2014 года

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена получению критерий ограниченности и компактности оператора типа Харди в банаховом функциональном пространстве (БФП) и приложения этих результатов в весовых функциональных пространствах Орлича-Мусилака. При этом получены результаты об ограниченности одномерного оператора Харди в пространстве Лебега с переменным показателем, которое не является БФП. Известно, что исследование этих операторов была связана с различными задачами функционального анализа, теория дифференциальных и интегральных уравнений, теория интерполяции, гармонического анализа, теория вероятностей и т.д. Систематическое изучение оператора Харди в одномерном случае берет свое начало из классических работ Харди и достаточно хорошо отражена в монографии Харди, Литтлвуда, Полиа. В дальнейшем изучение оператора Харди были продолжены в монографиях V. Lakshmikantham и S. Leela, D. S. Mitrinovic, A. W. Marshall и I. Olkin, W. Walter, G. Duvaut и J. L. Lions, A. A. Мартынюка и Р. Гутовского, R. P. Agarwal, P. S. Bullen, E. F. Beckenbach, V. M. Kokilashvili и M. Krbec, G. V. Milovanovic, B. Opic и A. Kufner, B. G. Pachpatte, J. Schroder, D. Bainov и P. Simeonov, M. J. Cloud и B. C. Drachman и других. Исследования оператора Харди в весовых БФП имеют недавню историю. Цель этих исследований была тесно связана с нахождением критерий на геометрию БФП и на весовые функции для справедливости ограниченности и компактности оператора Харди в БФП. Характеризация отображающих свойств, таких как ограниченность и компактность одномерного оператора Харди в весовых БФП были рассмотрены в работах Е. И. Бережного, М. Л. Гольдмана, Е. Ломакиной и В. Д. Степанова, S. Bloom и R. Kerman, D. E. Edmunds, P. Gurka и B. Opic и др. Интерес к этой тематике обусловлен тем, что весовые БФП обобщают многие известные пространства таких, как пространства Лоренца, пространства Марцинкевица, пространства Орлича-Мусилака, пространства Лебега с переменным показателем и т.д.

Теперь перейдем к изложению основной задачи диссертационной работы.

Пусть X и Y функциональные пространства. Предположим, что T линейный оператор, действующий из пространства X в пространство Y. Свойства ограниченности этого оператора является важным атрибутом для многих исследований. Нахождение нормы оператора T играет существенную роль во многих вопросах как например, при оценке характеристических чисел оператора T и т.д.

Через $L^s(X,Y)$ будем обозначать банахово пространство всех ограниченных сублинейных операторов, действующих из X в Y. Через $\|T\|_{X\to Y}$ обозначим норму оператора T.

Пусть $p\in(0,\infty)$ и $u:(0,\infty)\mapsto(0,\infty)$ измеримая по Лебегу функция, т.е. весовая функция. Через $L_{p,u}(0,\infty)$ обозначим весовое пространство вещественнозначных, определенных на $(0,\infty)$ и измеримых по Лебегу функций, таких, что

$$\|f\|_{L_{p,u}(0,\infty)}=\left(\int_0^\infty |f(x)|^p u(x)dx\right)^{1/p}<\infty.$$

Пусть $1<p<\infty$ и $f\in L_{p,u}(0,\infty)$. Теперь приведем двухвесовое неравенство Харди

$$\left(\int_0^\infty |Hf(x)|^q w(x)dx\right)^{1/q}\le C\left(\int_0^\infty |f(x)|^p u(x)dx\right)^{1/p}, \qquad (1)$$

где $Hf(x)=\int_0^x f(t)dt$ оператор типа Харди. Диссертационная работа в основном связана с неравенством типа Харди. Поэтому приведем детальную историю относительно этого неравенства. Известно, что неравенство (1) при $w(x)=x^{-q}$, $u(x)=1$, $f\ge 0$ и $p=q$ был получен Харди. Некоторые важные исторические данные в развитии неравенства Харди были приведены в работе A. Kufner, L. Maligranda и L.-E. Persson. В работе G. A. Bliss была найдена точная постоянная в неравенстве (1) в случае, когда $w(x)=x^{-q}$, $u(x)=x^{\alpha}$, $f\ge 0$ и $p=q$. Систематическое изучение неравенства (1) при $p=q$ была заложена в работах P. R. Beesack, J. Kadlec и A. Kufner, B. P. Портнов, B. H. Седов, Ф. А. Сысоева, G. Talenti, G. Tomaselli и т.д. Отметим, что в работах P. R. Beesack, G. Talenti и G. Tomaselli неравенство (1) в следующей эквивалентной форме

$$\left(\int_0^\infty |f(x)|^q w(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_0^\infty |f'(x)|^p u(x)dx\right)^{1/p}, f(0)=f(+0)=0$$

была связана с дифференциальным уравнением Эйлера-Лагранжа. Изучение неравенство (1) при различных p и q было начато в работе J. S. Bradley. Пусть $1 \le p \le q < \infty$. В этой работе было доказано, что для справедливости неравенства (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty w(x)dx\right)^{1/q}\left(\int_0^t [u(x)]^{1-p'}dx\right)^{1/p'} < \infty, \qquad (2)$$

где $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Отметим, что условие (2) при $p = q$ была получена в G. Talenti и G. Tomaselli. В работе B. Muckenhoupt неравенство (1) при $p = q$ была доказана в более общем виде, т.е., для некоторых бореловских мер $d\mu(x)$ и $d\nu(x)$ вместо абсолютно непрерывных мер $w(x)dx$ и $u(x)dx$. Аналогичный результат, имеет место для сопряженного оператора к оператору Харди $H^* f(x) = \int_x^\infty f(t)dt$.

Этот результат независимо был получен в работах В. Г. Мазья, В. М. Кокилашвили, K. F. Andersen и B. Muckenhoupt. Из азербайджанских математиков в направлении неравенства Харди отметим работы Р. В. Гусейнова и Ф. И. Мамедова. Случай $0 < q < p < \infty$ был исследован в работах В. Г. Мазья, V. D. Stepanov и G. Sinnamon и др.

Так как один из ключевых моментов диссертационной работы является исследование некоторых сублинейных операторов в пространстве Лебега с переменным показателем, то приведем историю исследования этих пространств. Известно, что пространство Лебега с переменным показателем в литературах берет начала с работы Орлича. Систематическое и целенаправленное исследование топологии пространств $L_{p(x)}$ в одномерном случае было дано в работе И. И. Шарапудинова. В многомерном случае изучение этих пространств, а также пространство Соболева с переменным показателем приведено в работе O. Kovacik и J. Rakosnik . В работе И. В. Ценова была рассмотрена некоторое конечномерное подпространство пространства Лебега с переменным показателем в связи с минимизацией конкретного функционала. Задача поставленная И. В. Ценовым была решена И. И. Шарапудиновым. Исследование ограниченности интегральных и дифференциальных операторов в пространствах Лебега с переменным показателем представляет интерес не только с теоретической точки зрения, но и при исследовании моделей конкретных физических процессов. Изучение этих пространств связано с задачами теории упругости, динамики жидкостей и вариационного исчисления. Математические постановки таких задач приводят к различным дифференциальным уравнениям с нестандартными условиями роста. В этом направлении отметим работу В. В. Жикова, K.R. Rajagopal и M. Růžička и т.д. При этом следует отметить, что наиболее важные результаты, полученные в указанных работах, связаны с условием Дини-Липшица, обнаруженным впервые в работах И. И. Шарапудинова. А в работах С. Г. Самко изучена ограниченность некоторых сверточных операторов в пространстве Лебега с переменным показателем. Начиная с 2000-го года теория пространств Лебега с переменным показателем начало сильно развиватся. В этом направление отметим работы S.G. Samko, M. Růžička L. Diening, D.E. Edmunds, V. Kokilashvili и A. Meskhi, A. Nekvinda, T.S. Kopaliani, D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, и C. J. Neugebauer , D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J.M. Martell и C. Pérez , F.I. Mamedov, D. Cruz-Uribe и F.I. Mamedov, D. Cruz-Uribe и A. Fiorenza, Б.Т. Билалов и З.Г. Гусейнов, Б.Т. Билалов, Ф.И. Мамедов и Р. А. Бандалиев, V.S. Guliyev, J.J. Gasanov и S. Samko, M.G. Hajibayov, R.A. Bandaliev и др. Подробное описание история пространств Лебега с переменным показателем приведено в монографии D. Cruz-Uribe и A. Fiorenza.

Цель работы. 1. Получение критериев ограниченности и компактности и оценки нормы оператора типа Харди действующий из весового пространства Лебега в БФП и приложения этих результатов в весовых функциональных пространствах Орлича-Мусилака.

2. Получение связи некоторого нелинейного дифференциального уранения с неравенством Харди и доказательства ограниченности потенциала Рисса в весовом пространстве Лебега с переменным показателем.

3. Исследование весового пространства Лебега $L_{p(x),\omega}$ при

$0 < p(x) < 1$ и доказательство неравенство Харди.

4. Доказательство ограниченности некоторого сверточного оператора в весовом пространстве Лебега ядро которого удовлетворяет обобщенному условию Хермандера и теорема вложения для весовых анизотропных пространств Соболева на областях в R^n.

5. Доказательство некоторых свойств пространства Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости и вложение между различными этими пространствами.

6. Получение связи двух нелинейных дифференциальных уравнений с двумерным оператором типа Харди в обычном весовом пространстве Лебега со смешанной нормой и доказательство аналога теоремы вложения Соболева на случай пространства Соболева с переменным показателем.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены критерии ограниченности и компактности и оценки нормы оператора типа Харди действующий из весового пространства Лебега в БФП и приложения этих результатов в весовых функциональных пространствах Орлича-Мусилака;
- получена связь некоторого нелинейного дифференциального уранения с неравенством Харди и доказана ограниченность потенциала Рисса в весовом пространстве Лебега с переменным показателем;
- исследовано структурные свойства весового пространства Лебега $L_{p(x),\omega}$ при $0 < p(x) < 1$ и доказана неравенство Харди;
- доказана ограниченность некоторого сверточного оператора в весовом пространстве Лебега ядро которого удовлетворяет обобщенному условию Хермандера;
- получена теорема вложения для весовых анизотропных пространств Соболева на областях в R^n и исследована поведения членов интегрального представления В. П. Ильина и О.В. Бесова при больших значениях усредняющего параметра;
- доказана некоторые свойства пространства Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости и доказательства вложение между различными этими пространствами;
- найдена связь двух нелинейных дифференциальных уравнений с

двумерным оператором типа Харди в обычном весовом пространстве Лебега со смешанной нормой;

- доказан аналог теоремы вложения Соболева на случай пространства Соболева с переменным показателем.

Общая методика исследований. В диссертации применяются методы теории функций и функционального анализа, теории интегральных операторов гармонического анализа, теории вложений.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертационной работе носят, в основном, теоретический характер. Но полученные результаты могут быть применены при исследовании моделей несжимаемых жидкостей и теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на семинарах отдела "Математического анализа" ИММ НАНА (рук. акад. А.Д. Гаджиев); на семинарах отдела "Дифференциальные уравнения" ИММ НАНА (рук. д.ф.-м.н., проф., А.Б. Алиев); на семинарах отдела "Негармонический анализ" ИММ НАНА (рук. д.ф.-м.н., проф. Б.Т. Билалов); на семинарах отдела +"Теории функций" ИММ НАНА (рук. д.ф.-м.н., проф. М.-Б.А. Бабаев); на общеинститутском семинарах ИММ НАНА; на второй Международной конференции посвященной 80-летию член.-корр. РАН, проф. Л.Д. Кудрявцева (Москва, 2003); на научной конференции посвященной 70-летию чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. А.А. Бабаева (Баку, 2004); на десятой Международной конференции по математике и механике посвященной 45-летию ИММ НАНА (Баку, 2004); на Международной конференции посвященной 100-летию акад. РАН С. М. Никольского (Москва, 2005); на тринадцатой Международной конференции по математике и механике посвященной 70-летию акад. НАНА А.Д. Гаджиева (Баку, 2007); на третьей Международной конференции посвященной 85-летию член-корр. РАН Л.Д. Кудрявцева (Москва, 2008); на Международной конференции посвященной 70-летию проф. В.Г. Мазьи (Рим, 2008); на рабочем семинаре проведенной совместно Институтом Математики им. А. Размадзе и Грузинской Технической Университетом (Тбилиси, 2008); на Международной конференции посвященной 100-летию акад. РАН С.Л. Соболева (Новосибирск, 2008); на Международной конференции по математике и механике посвященной 50-летию ИММ НАНА (Баку, 2009); на пятнадцатой Саратовской зимней школе

"Совр. пробл. теории функций и их приложения" (Саратов 2010); на Международной конференции посвященной 100-летию акад. НАНА З.И. Халилова (Баку, 2011); на Международной семинаре приуроченной к 70-летию проф. С.Г. Самко (Ростов, 2011); на Международной конференции посвященной 70-летию проф. А. Степанца (Киев, Каменец-Подольский, 2012); на Международной семинаре посвященной к 75-летию проф. И.Б. Симоненко (Ростов, 2013); на Международной конференции посвященной 75-летию акад. НАНУ А. М. Самойленко (Киев, Севастополь, 2013).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 40 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Объем диссертации состоит из 257 страниц. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 245 наименований

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

В первой главе настоящей диссертации получена необходимое и достаточное условие на весовые функции для справедливости ограниченности и компактности интегральных операторов типа Харди из весового пространства Лебега в p-выпуклое БФП. А также, доказаны критерии ограниченности и компактности интегрального оператора типа Харди действующий из обычного весового пространства Лебега в весовое пространство Лебега с переменным показателем и с мерой. В диссертационной работе приведены примеры пространств, которые являются p-выпуклыми банаховыми функциональными пространствами.

В первом параграфе данной главы приводится определения пространства Лебега с переменным показателем и с мерой. Установлена критерия для справедливости непрерывного вложения между пространствами Лебега с переменными показателями и с различными мерами. В частности, доказана, что условие абсолютной непрерывности одной меры к другой является необходимым условием для справедливости непрерывного вложения между этими пространствами. Доказан аналог обобщенного неравенства Минковского в пространстве Лебега с переменным показателем суммируемости.

Пусть S-произвольное множество, Σ-некоторая σ-алгебра подмножеств множества S. Предположим, что (S,Σ,μ) и (S,Σ,ν) σ-конечные, полные измеримые пространства. Через $\mathcal{P}(S)$ обозначим множество всех μ-измеримых функций, таких, что $p:S\to[1,\infty)$. Также через $Q(S)$ обозначим множество всех ν-измеримых функций, таких, что $q:S\to[1,\infty)$. Отметим,что функции $p\in\mathcal{P}(S)$ and $q\in Q(S)$ называются переменными показателями на S. Положим $\underline{p}=ess\inf\limits_{x\in S}p(x)$ и $\overline{p}=ess\sup\limits_{x\in S}p(x)$. Обозначим через $p'(x)$ сопряженный переменный показатель к функции $p(x)$, определенный как $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}=1$, $x\in S$. Совершенно очевидно, что $\sup\limits_{x\in S}p'(x)=\overline{p'}=\frac{\underline{p}}{\underline{p}-1}$ и $\inf\limits_{x\in S}p'(x)=\underline{p'}=\frac{\overline{p}}{\overline{p}-1}$. Пусть $B(0,t)=\{x:x\in R^n;|x|<t\}$, где $t>0$. Лебегову меру множества $A\subset S$ будем обозначить через $|A|$.

Определение 1. *Пусть* $p\in\mathcal{P}(S)$. *Через* $L_{p(x),\mu}(S)$ *обозначим пространство* μ*-измеримых функций* f *на* S *таких, что для некоторого* $\lambda_0>0$

$$\int\limits_S\left(\frac{|f(x)|}{\lambda_0}\right)^{p(x)}d\mu(x)<\infty.$$

Этот класс является банаховым пространством по отношению к норме

$$\|f\|_{L_{p(x),\mu}(S)}=\|f\|_{p(\cdot),\mu}=\inf\left\{\lambda>0:\int\limits_S\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)}d\mu(x)\le1\right\}.$$

Основным же результатом параграфа 1.1 является

Теорема 1. *Пусть* $p\in\mathcal{P}(S)$, $q\in Q(S)$ *и* $1\le p(x)\le q(x)\le\overline{q}<\infty$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $L_{q(x),\nu}(S) \subset_{>} L_{p(x),\mu}(S)$ $\left(\subset_{>}\right.$ *−знак непрерывного вложения*$\left.\right)$ *т.е. для некоторого* $M>0$ $\|f\|_{p(\cdot),\mu} \le M\|f\|_{q(\cdot),\nu}$;

(b) $\dfrac{d\mu}{d\nu} \in L_{r(x),\nu}(S)$, *где* $r(x)=\dfrac{q(x)p(x)}{q(x)-p(x)}$.

Теорема 2. *Пусть* $p \in \mathcal{P}(S)$, $q \in Q(S)$ *и* $1 \le q(x) \le p(x) \le \overline{p} < \infty$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $\exists C>0$: $L_{q(x),\nu}(S) \subset_{>} L_{p(x),\mu}(S)$, *т.е.* $\|f\|_{p(\cdot),\mu} \le C\|f\|_{q(\cdot),\nu}$;

(b) $\|\chi_E\|_{p(\cdot),\mu} \le M\|\chi_E\|_{q(\cdot),\nu}$ $\forall E \subset S$ *с конечной* ν *-мерой, где*

χ_E *-характеристическая функция множества* E, *постоянная* $M>0$ *от* E *не зависит.*

Следующая теорема является аналогом обобщенного неравенства Минковского в пространстве Лебега с переменным показателем.

Теорема 3. *Пусть* $1 \le \overline{p} < q(y) \le \overline{q} < \infty$ *п.в.* $x \in \Omega_1$ *и* $y \in \Omega_2$. *Если* $p(x) \in C(\Omega_1)$, *тогда для любого* $f \in L_{(q(y),p(x))}(\Omega_2 \times \Omega_1)$ *имеет место неравенство*

$$\left\| \|f\|_{p,\Omega_1} \right\|_{q,\Omega_2} \le \left(\frac{\overline{p}}{\underline{q}} + \frac{\overline{q}-\underline{p}}{\overline{q}} \right)^{\frac{1}{\underline{p}}} \left\| \|f\|_{q,\Omega_2} \right\|_{p,\Omega_1},$$

где $\underline{p} = \inf\limits_{\Omega_1} p(x)$, $\overline{q} = \sup\limits_{\Omega_2} q(x)$ *и* $f:\Omega_1 \times \Omega_2 \to R$ *измеримая функция и* $C(\Omega_1)$ *пространство непрерывных функций на* Ω_1.

Во втором параграфе первой главы получены двухвесовой критерий для многомерного оператора типа Харди в пространстве Лебега с переменным показателем и с мерой. Аналогичная задача исследована для сопряженного оператора Харди.

Рассмотрим многомерный оператор типа Харди и ее сопряженный оператор $Hf(x) = \int\limits_{B(0,|x|)} f(y)dy$ и $H^*f(x) = \int\limits_{R^n \setminus B(0,|x|)} f(y)dy$, где $f \ge 0$ и $x \in R^n$.

Теперь приведем критерию об ограниченности многомерного оператора типа Харди в пространстве Лебега с переменным показателем и с мерой.

Теорема 4. *Пусть* μ *и* ν *неотрицательные борелевские меры на* R^n *и* ν^* *является абсолютно непрерывная часть меры* ν. *Предположим, что* $p(x) = p = const$, $q \in P(R^n)$, $1 < p \le q(x) \le \bar{q} < \infty$ *и* $f \ge 0$. *Тогда для справедливости неравенства*

$$\|Hf\|_{L_{q(\cdot),\mu}(R^n)} \le C\|f\|_{L_{p,\nu}(R^n)},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало $\alpha \in (0,1)$*:*

$$A(\alpha,p,q) = \sup_{t>0}\left(\int_{|y|<t}\left[\frac{d\nu^*}{dy}\right]^{1-p'} dy\right)^{\frac{\alpha}{p'}}\left\|\left(\int_{|y|<|\cdot|}\left[\frac{d\nu^*}{dy}\right]^{1-p'} dy\right)^{\frac{1-\alpha}{p'}}\right\|_{L_{q(\cdot),\mu}(|x|>t)} < \infty.$$

Более того, имеет место

$$\sup_{0<\alpha<1}\frac{p' A(\alpha,p,q)}{(1-\alpha)\left[\left(\frac{p'}{1-\alpha}\right)^p + \frac{1}{\alpha(p-1)}\right]^{1/p}} \le \|H\|_{L_{p,\nu}\to L_{q(\cdot),\mu}}$$

$$\le \left(\frac{p}{\underline{q}} + \frac{\bar{q}-p}{\bar{q}}\right)^{\frac{2}{p}} \inf_{0<\alpha<1}\frac{A(\alpha,p,q)}{(1-\alpha)^{1/p'}}.$$

Определение 2. Пусть T некоторый оператор действующий из пространства $L_{p(x)}$ в пространство $L_{q(x)}$. Говорят, что оператор T является сублинейным, если для всех $f, g \in L_{p(x)}$ и $\lambda > 0$ имеет место

(1) $T(\lambda f) = \lambda T(f)$;

(2) $T(f+g) \le T(f) + T(g)$.

Теперь применяя полученные неравенства для многомерного оператора типа Харди приведем достаточные условия для абсолютно непрерывных мер обеспечивающее справедливость двухвесового неравенства сильного типа для некоторого сублинейного оператора. Имеет место

Теорема 5. *Пусть* $1 < \underline{p} \le p(x) \le \overline{p} < \infty, \quad x \in R^n$, *и для некоторого* $\delta \in [0,1)$ $\int\limits_{R^n} \delta^{\frac{\underline{p}\,p(x)}{p(x)-\underline{p}}} dx < \infty$. *Далее, предположим, что* T *сублинейный оператор, действующий ограниченно из* $L_{\underline{p}}(R^n)$ *в* $L_{p(x)}(R^n)$, *такой, что для любого* $f \in L_1(R^n)$ *имеющий компактный носитель и для* $x \notin supp\ f$

$$|Tf(x)| \le C \int\limits_{R^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy,$$

где $C > 0$ *не зависит от* f *и* x.

Предположим, что $v(x)$ *и* $w(x)$ *являются весовыми функциями определенные на* R^n *и удовлетворяющие следующим условиям:*

$$A = \sup_{t>0} \left(\int\limits_{|y|<t} [v(y)]^{-\overline{p}'} dy \right)^{\frac{\alpha}{\overline{p}'}} \left\| \frac{w(\cdot)}{|\cdot|^n} \left(\int\limits_{|y|<|\cdot|} [v(y)]^{-\overline{p}'} dy \right)^{\frac{1-\alpha}{\overline{p}'}} \right\|_{L_{p(\cdot)}(|\cdot|>t)} < \infty,$$

$$B = \sup_{t>0} \left(\int\limits_{|y|>t} [v(y)|y|^n]^{-\overline{p}'} dy \right)^{\frac{\beta}{\overline{p}'}} \left\| w(\cdot) \left(\int\limits_{|y|>|\cdot|} [v(y)|y|^n]^{-\overline{p}'} dy \right)^{\frac{1-\beta}{\overline{p}'}} \right\|_{L_{p(\cdot)}(|\cdot|<t)} < \infty.$$

$$\exists M > 0: \quad \sup_{|x|/4<|y|\le 4|x|} w(y) \le M \inf_{|x|/4<|y|\le 4|x|} v(y).$$

Тогда $T \in L^s\left(L_{p(\cdot),v}\left(R^n\right); L_{p(\cdot),\mu}\left(R^n\right)\right)$.

В пункте 1.3 доказаны двухвесовые критерия для ограниченности многомерного оператора типа Харди и ее сопряженного оператора действующие из весового пространства Лебега в весовое пространство Орлича-Мусилака. В качестве приложения полученных результатов сформулируем ограниченность многомерного геометрического среднего оператора из весового пространства Лебега в весовое пространство Орлича-Мусилака.

Определение 3. Пусть $\Omega \subset R^n$ измеримое по Лебегу множество. Говорят, что вещественная функция $\varphi : \Omega \times [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ называется обобщенной φ-функцией если выполняется следующие свойства:

a) $\varphi(x,\cdot)$ является φ-функцией для всех $x \in \Omega$, т.е., $\varphi(x,\cdot):[0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ является выпуклым, непрерывной слева и удовлетворяет $\varphi(x,0)=0$, $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(x,t)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(x,t)=\infty$;

b) $\psi : x \mapsto \varphi(x,t)$ является измеримым для всех $t \geq 0$.

Если φ обобщенная φ-функция на Ω, то для краткости будем писать $\varphi \in \Phi$.

Через $L_0(\Omega)$ обозначим множество всех лебегово измеримых и почти всюду конечных вещественных функций на Ω.

Определение 4. Пусть $\varphi \in \Phi$ и предположим, что функционал ρ_φ определяется выражением $\rho_\varphi(f) := \int\limits_\Omega \varphi(y,|f(y)|)dy$ для всех $f \in L_0(\Omega)$.

Положим $L_\varphi = \{ f \in L_0(\Omega) : \rho_\varphi(\lambda_0 f) < \infty \quad \text{для всех} \quad \lambda_0 > 0 \}$ и

$$\|f\|_{L_\varphi} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \rho_\varphi\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

Пространства L_φ называется пространством Орлича-Мусилака.

Приведем критерию об ограниченности многомерного оператора типа Харди действующий из весового пространства Лебега в весовое пространство Орлича-Мусилака.

Теорема 6. *Пусть для некоторого* $1 \leq p < \infty$, $\varphi\left(x, t^{1/p}\right) \in \Phi$, *где* $x \in R^n$. *Предположим, что* $v(x)$ *и* $w(x)$ *весовые функции на* R^n *и* $f \geq 0$. *Тогда для справедливости неравенства*

$$\|Hf\|_{L_{\varphi,w}} \leq C\|f\|_{L_{p,v}}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало $\alpha \in (0,1)$*:*

$$A(\alpha) = \sup_{t>0}\left(\int_{|y|<t}[v(y)]^{-p'}\,dy\right)^{\frac{\alpha}{p'}}\left\|\chi_{\{|z|>t\}}(\cdot)\left(\int_{|y|<|\cdot|}[v(y)]^{-p'}\,dy\right)^{\frac{1-\alpha}{p'}}\right\|_{L_{\varphi,w}} < \infty.$$

Более того, имеет место

$$\sup_{0<\alpha<1}\frac{p'A(\alpha)}{(1-\alpha)\left[\left(\frac{p'}{1-\alpha}\right)^p+\frac{1}{\alpha(p-1)}\right]^{1/p}} \le \|H\|_{L_{p,v}\to L_{\varphi,w}} \le 2^{1/p}\inf_{0<\alpha<1}\frac{A(\alpha)}{(1-\alpha)^{1/p'}}.$$

Пусть $Gf(x) = \exp\left(\frac{1}{|B(0,|x|)|}\int_{B(0,|x|)}\ln f(y)dy\right)$, где $f>0$ и $x\in R^n$. Теперь сформулируем двухвесовую критерию об ограниченности геометрического среднего оператора в весовом пространстве Орлича-Мусилака.

Теорема 7. *Пусть для некоторого* $0<p<\infty$ $\varphi\left(x,t^{1/p}\right)\in\Phi$ *и* $x\in R^n$. *Предположим, что* $v(x)$ *и* $w(x)$ *весовые функции, определенные на* R^n. *Тогда для справедливости неравенства*

$$\|Gf\|_{L_{\varphi,w}} \le C\|f\|_{L_{p,v}}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало $s\in(1,p)$:

$$D(s) = \sup_{t>0}|B(0,t)|^{\frac{s-1}{p}}\left\|\frac{\chi_{\{|z|>t\}}(\cdot)}{|B(0,|\cdot|)|^{\frac{s}{p}}}\exp\left(\frac{1}{|B(0,|\cdot|)|}\int_{B(0,|\cdot|)}\ln\frac{1}{v(y)}dy\right)\right\|_{L_{\varphi,w}} < \infty.$$

Также, имеет место

$$\sup_{s>1}\frac{e^{\frac{s}{p}}}{\left(e^s+\frac{1}{s-1}\right)^{1/p}}D(s) \le \|G\|_{L_{p,v}\to L_{\varphi,w}} \le 2^{1/p}\inf_{s>1}e^{\frac{s-1}{p}}D(s).$$

В пункте 1.4 находится необходимое и достаточное условие интегрального типа на весовые функции, который гарантирует ограниченность многомерного оператора типа Харди из весового пространства Лебега к p-выпуклому весовому БФП.

Пусть (Ω,μ) полное σ-конечное измеримое пространство. Через $L_0 = L_0(\Omega,\mu)$ обозначим совокупность всех вещественнозначных μ-измеримых функций на Ω.

Определение 5. Говорят, что нормированное пространство X является БФП, если выполяются следующие условия:

(P1) норма $\|f\|_X$ определена для каждой μ-измеримой функции f и $f \in X$ тогда и только тогда, когда $\|f\|_X < \infty$; $\|f\|_X = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$ a.e. $x \in \Omega$;

(P2) $\|f\|_X = \||f|\|_X$ для всех $f \in X$;

(P3) если $0 \le f_n \uparrow f$ п.в., то $\|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$ ($n \uparrow \infty$) (свойство Фату);

(P4) если E μ-измеримое подмножество в Ω такое, что $\mu(E) < \infty$, то $\|\chi_E\|_X < \infty$, где χ_E характеристическая функция множества E;

(P5) для каждого μ-измеримого конечного подмножества $E \subset \Omega$ здесь существует постоянная $C_E > 0$ такая, что $\int_E f(x)\, d\mu(x) \le C_E \|f\|_X$.

Приведем определение p-выпуклости и p-вогнутости БФП.

Определение 6. Пусть X является БФП и $1 \le p \le \infty$. Тогда X называется p-выпуклым, если $\exists M > 0$:

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{m} |f_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_X \le M \left(\sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall f_k \in X,\ k = 1,\dots,m,\ 1 \le p < \infty,$$

или $\left\| \sup_{1\le k\le m} |f_k| \right\|_X \le M \max_{1\le k\le m} \|f_k\|_X$ при $p=\infty$. Аналогично X называется p-вогнутым, если $\exists M>0$:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}} \le M \left\| \left(\sum_{k=1}^{m} |f_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\|_X, \ \forall f_k \in X, \ k=1,\dots,m, \ 1\le p<\infty,$$

или $\max_{1\le k\le m} \|f_k\|_X \le M \left\| \sup_{1\le k\le m} |f_k| \right\|_X$ при $p=\infty$.

Сформулируем двухвесовой критерий для многомерного оператора типа Харди действующий из весового пространства Лебега к p-выпуклому весовому БФП.

Теорема 8. *Пусть $v(x)$ и $w(x)$ весовые функции, определенные на R^n и $f\ge 0$. Предположим, что X_w является p-выпуклым весовым БФП при $1\le p<\infty$ на R^n. Тогда для справедливости неравенства*

$$\|Hf\|_{X_w} \le C\|f\|_{L_{p,v}}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало $\alpha\in(0,1)$:

$$A(\alpha)=\sup_{t>0}\left(\int_{|y|<t}[v(y)]^{-p'}\,dy\right)^{\frac{\alpha}{p'}} \left\| \chi_{\{|z|>t\}}(\cdot)\left(\int_{|y|<|\cdot|}[v(y)]^{-p'}\,dy\right)^{\frac{1-\alpha}{p'}} \right\|_{X_w} <\infty.$$

Кроме того, имеет место

$$\sup_{0<\alpha<1}\frac{p' A(\alpha)}{(1-\alpha)\left[\left(\frac{p'}{1-\alpha}\right)^p+\frac{1}{\alpha(p-1)}\right]^{1/p}} \le \|H\|_{L_{p,v}\to X_w} \le M \inf_{0<\alpha<1}\frac{A(\alpha)}{(1-\alpha)^{1/p'}}.$$

Приведем теорему о компактности оператора типа Харди из весового пространства Лебега в весовое p-выпуклое БФП.

Теорема 9. *Пусть $v(x)$ и $w(x)$ весовые функции, определенные на R^n. Предположим, что $1\le p<\infty$ и X_w p-выпуклое весовое БФП* *на* R^n. *Оператор* H *является компактным из* $L_{p,v}$ *в* X_w, *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(a) существует число $\alpha \in (0,1)$ *:*

$$A(\alpha) = \sup_{t>0} \left(\int_{|y|<t} [v(y)]^{-p'} \, dy \right)^{\frac{\alpha}{p'}} \left\| \chi_{\{|z|>t\}}(\cdot) \left(\int_{|y|<|\cdot|} [v(y)]^{-p'} \, dy \right)^{\frac{1-\alpha}{p'}} \right\|_{X_w} < \infty;$$

(b) $$\lim_{\gamma \to +0} \sup_{0<t<\gamma} \left(\int_{|y|<t} [v(y)]^{-p'} \, dy \right)^{\frac{\alpha}{p'}} \left\| \chi_{\{t<|z|<\gamma\}}(\cdot) \left(\int_{|y|<|\cdot|} [v(y)]^{-p'} \, dy \right)^{\frac{1-\alpha}{p'}} \right\|_{X_w} = 0;$$

$$\lim_{\delta \to \infty} \sup_{\delta<t<\infty} \left(\int_{\delta<|y|<t} [v(y)]^{-p'} \, dy \right)^{\frac{\alpha}{p'}} \left\| \chi_{\{|z|>t\}}(\cdot) \left(\int_{|y|<|\cdot|} [v(y)]^{-p'} \, dy \right)^{\frac{1-\alpha}{p'}} \right\|_{X_w} = 0;$$

(c) $\forall \, \varepsilon \in (0,\infty)$ *имеют место*

$$\lim_{\beta \to \varepsilon+0} \left\| \chi_{\{\varepsilon<|z|<\beta\}}(\cdot) \left(\int_{|y|<|\cdot|} [v(y)]^{-p'} \, dy \right)^{\frac{1-\alpha}{p'}} \right\|_{X_w} = 0;$$

$$\lim_{\beta \to \varepsilon-0} \left\| \chi_{\{\beta<|z|<\varepsilon\}}(\cdot) \left(\int_{|y|<|\cdot|} [v(y)]^{-p'} \, dy \right)^{\frac{1-\alpha}{p'}} \right\|_{X_w} = 0.$$

Во второй главе диссертационной работы получена ограниченность потенциала Рисса действующий в весовом пространстве Лебега, и установлена связь неравенства Харди с некоторым нелинейным дифференциальным уравнением в пространстве Лебега с переменным показателем. Изучены структурные свойства пространств Лебега $L_{p(x)}$ при $0 < p(x) < 1$ и доказано неравенство Харди в этом случае. В этой главе изучен также класс гармонических функций с переменным показателем и доказана теорема типа Плеснера.

В пункте 2.1 исследуется следующие задачи.

Рассмотрим потенциал Рисса $\mathcal{R}^s f(x) = \int\limits_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-s}} dy$ и дробный максимальный оператор

$$M^s f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{s}{n}}} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)| dy,$$

где $B(x,r) = \{y : y \in R^n, |y-x| \le r\}$ и $0 < s < n.$

Говорят, что функция $p(x)$ удовлетворяет слабому условию Липшица, если выполняются следующие условия:

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{M_1}{\ln \frac{1}{|x-y|}}, \quad 0 < |x-y| \le \frac{1}{2}, \quad x, y \in R^n,$$

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{M_2}{\ln(e + |x|)}, \quad |x| \ge |y|, \quad x, y \in R^n,$$

где положительная постоянная M_1 и M_2 не зависят от x и y. Класс функций удовлетворяющих слабому условию Липшица обозначим через $WL(R^n)$. Пусть $T = \mathcal{R}^s$ или $T = M^s$. Имеет место

Теорема 10. *Пусть* $\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{s}{n}$, $p(x) \in WL(R^n)$, $\underline{p} > 1$, $\overline{p} < n/s$ *и* $\underline{q} \ge \overline{p}$. *Предположим, что* $\|1\|_{L_{\frac{\underline{p} \cdot p(x)}{p(x) - \underline{p}}}(R^n)} < \infty$. *Далее, пусть* $v(x)$ *и* $w(x)$ *весовые функции определенные на* R^n *и удовлетворяющие условиям*

$$\sup_{t>0} \left(\int\limits_{|y|<t} [v(y)]^{-\overline{p}'} dy \right)^{\frac{\alpha}{\overline{p}'}} \left\| \frac{w(\cdot)}{|\cdot|^{s-n}} \left(\int\limits_{|y|<|\cdot|} [v(y)]^{-\overline{p}'} dy \right)^{\frac{1-\alpha}{\overline{p}'}} \right\|_{L_{q(\cdot)}(|\cdot|>t)} < \infty;$$

$$\sup_{t>0}\left(\int_{|y|>t}[v(y)\,|\,y\,|^{n-s}]^{-\bar{p}'}\,dy\right)^{\frac{\beta}{\bar{p}'}}\left\|w(\cdot)\left(\int_{|y|>|\cdot|}[v(y)\,|\,y\,|^{n-s}]^{-\bar{p}'}\,dy\right)^{\frac{1-\beta}{\bar{p}'}}\right\|_{L_{q(\cdot)}(|\cdot|<t)}<\infty,$$

где $0<\alpha,\beta<1$;

$\exists M>0:\ \sup\limits_{|x|/4<|y|\le 4|x|} w(y)\le M \inf\limits_{|x|/4<|y|\le 4|x|} v(y)$ для *п.в.* $x\in R^n$.

Тогда $T\in L^s\left(L_{p(\cdot),v}\left(R^n\right);\,L_{q(\cdot),w}\left(R^n\right)\right)$.

Теперь рассмотрим связь неравенства Харди с некоторым нелинейным дифференциальным уравнением в пространстве Лебега с переменным показателем. Пусть $L(t,\omega,y)=\left\|\omega y^{1/p'}\right\|_{L_{q(x)}(x>t)}$, где $t\in(0,\infty)$ и ω весовая функция определенная на $(0,\infty)$. Через $AC(0,\infty)$ обозначим совокупность всех абсолютно непрерывных функций на $(0,\infty)$. Положим

$$K=p'\inf\sup_{x>0}\frac{1}{f(x)-x-p'\int\limits_0^t\frac{\omega_1'(s)f(s)}{\omega_1(s)}ds}\int\limits_0^x\frac{[f(t)]^{1/p'+1}P\left(t,\omega_2,y,f\right)}{\omega_1(t)[y(t)]^{1/p'}}dt,$$

где $P\left(t,\omega_2,y,f\right)\ge 0$ для любого $t>0$, $y(t)$ фиксированное положительное решение уравнения $L\left(t,\omega_2,y\right)-\lambda\omega_1(t)\left(y'(t)\right)^{1/p'}=0$ и инфимум берется в классе лебегово измеримых функций, таких, что

$$f(x)>x+p'\int\limits_0^t\frac{\omega_1'(s)f(s)}{\omega_1(s)}ds \qquad \text{для всех} \quad x>0.$$

Теорема 11. *Пусть* $1<p\le q(x)\le\bar{q}<\infty$ *и* $K<+\infty$. *Предположим, что* ω_1 *и* ω_2 *весовые функции определенные на* $(0,\infty)$ *и для всех* $t\in(0,\infty)$ *существует производная* $\omega_1'(t)$ *и* $\omega_1(t)\ge\omega_1(0)>0$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

а) существует положительное решение с локально абсолютно непрерывным производным первого порядка уравнения

$L(t,\omega_2,y)-\lambda\omega_1(t)(y'(t))^{1/p'}=0,\ y(t)>0,\ y'(t)>0,\ y\in AC(0,\infty),$
где $\lambda>0$;

b) имеет место весовая оценка

$$\|u\|_{L_{q(\cdot),\omega_2}(0,\infty)}\le C_0\|u'\|_{L_{p,\omega_1}(0,\infty)},$$

где $u\in AC(0,\infty)$, $u(0)=\lim\limits_{t\to+0}u(t)=0$ *и* $C_0>0$ *постоянная не зависящая от* u.

В пункте 2.2 доказывается, что пространство $L_{p(x)}$ при $0<p(x)<1$ является квазибанаховым и топология этого пространства не является локально выпуклой. Основным результатом этого пункта является двухвесовое неравенство Харди в пространстве $L_{p(x)}$ при $0<p(x)<1$. Отметим, что в этом случае классическое неравенство Харди верно для монотонных функций. Пространства $L_{p(x)}$ при $0<p(x)<1$ определяется также, как и в случае переменного показателя $p(x)\ge 1$.

Следующая теорема показывает, что сопряженное пространство с $L_{p(x),\omega}(\Omega)$ состоит из единственного нулевого непрерывного линейного функционала.

Теорема 12. *Пусть* $0<\underline{p}\le p(x)\le q(x)\le\overline{q}<1$, ω *весовая функция определенная в* Ω *и* $0<\omega(x)<\infty$ *п.в.* $x\in\Omega$. *Тогда* $\left[L_{p(x),\omega}(\Omega)\right]^*=\{0\}$, *где* $\left[L_{p(x),\omega}(\Omega)\right]^*$ *- означает сопряженное пространство пространства* $L_{p(x),\omega}(\Omega)$, *т.е., пространство непрерывных линейных функционалов действующих из* $L_{p(x),\omega}(\Omega)$ *в* R.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 13. *Пусть* $0<\underline{p}\le p(x)\le\overline{p}<1$, ω *весовая функция определенная в* Ω *и* $0<\omega(x)<\infty$ *п.в.* $x\in\Omega$. *Тогда пространство* $L_{p(x),\omega}(\Omega)$ *является полным.*

Для одномерного оператора типа Харди в пункте 2.2 доказывается следующие теоремы.

Теорема 14. *Пусть* $x \in (0,\infty)$, $0 < \underline{p} \le p(x) \le q(x) \le \overline{q} < 1$, $r(x) = \dfrac{\underline{p}\, p(x)}{p(x) - \underline{p}}$ *и* $f(x)$ *неотрицательная и убывающая функция определенная на* $(0,\infty)$. *Предположим, что* ω_1 *и* ω_2 *весовые функции определенные на* $(0,\infty)$ *и удовлетворяющие условию*

$$\left\| \frac{t^{1/p'} \left\| \omega_2 \right\|_{L_{q(\cdot)}(t,\infty)}}{\omega_1} \right\|_{L_{r(\cdot)}(0,\infty)} < \infty.$$

Тогда для любого $f \in L_{p(x),\omega_1}(0,\infty)$ *имеет место неравенство*

$$\left\| Hf \right\|_{L_{q(\cdot),\omega_2}(0,\infty)} \le \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}} c_{p,q}\, d_p \left\| \frac{t^{1/p'} \left\| \omega_2 \right\|_{L_{q(\cdot)}(t,\infty)}}{\omega_1} \right\|_{L_{r(\cdot)}(0,\infty)} \left\| f \right\|_{L_{p(\cdot),\omega_1}(0,\infty)},$$

где $S_1 = \{x \in (0,\infty) : p(x) = \underline{p}\}$, $S_2 = (0,\infty) \setminus S_1$,

$$c_{p,q} = \left(\left\| \chi_{\Delta_1} \right\|_{L_\infty(0,\infty)} + \left\| \chi_{\Delta_2} \right\|_{L_\infty(0,\infty)} + \underline{p}\left(\frac{1}{\underline{q}} - \frac{1}{\overline{q}} \right) \right) \left(\left\| \chi_{S_1} \right\|_{L_\infty(0,\infty)} + \left\| \chi_{S_2} \right\|_{L_\infty(0,\infty)} \right)$$

и $$d_p = \left(1 + \frac{\overline{p} - \underline{p}}{\overline{p}} + \left\| \chi_{S_1} \right\|_{L_\infty(0,\infty)} \right)^{1/\underline{p}}.$$

Теорема 15. *Пусть* $0 < \underline{p} \le p(x) \le q(x) \le \overline{q} < 1$, $r(x) = \dfrac{\underline{p}\, p(x)}{p(x) - \underline{p}}$ *и* $f(x)$ *неотрицательная и возрастающая функция определенная на* $(0,\infty)$. *Предположим, что* ω_1 *и* ω_2 *весовые функции определенные на* $(0,\infty)$ *и удовлетворяющие условию*

$$\left\| \left\| (x-t)^{1/\overline{p}'} \omega_2 \right\|_{L_{q(\cdot)}(t,\infty)} \frac{1}{\omega_1} \right\|_{L_{r(\cdot)}(0,\infty)} < \infty.$$

Тогда для любого $f \in L_{p(x),\omega_1}(0,\infty)$ *имеет место неравенство*

$$\|Hf\|_{L_{q(\cdot),\omega_2}(0,\infty)} \le \underline{p}^{\frac{1}{\underline{p}}}\, c_{p,q}\, d_p \left\| \left\|(x-t)^{1/\overline{p}'}\omega_2\right\|_{L_{q(\cdot)}(t,\infty)} \frac{1}{\omega_1} \right\|_{L_{r(\cdot)}(0,\infty)} \|f\|_{L_{p(\cdot),\omega_1}(0,\infty)},$$

где $c_{p,q}$ *и* d_p *постоянные участвующие в теореме 14.*

В пункте 2.3 рассмотрена классы гармонических функций с переменным показателем в единичном круге. Доказана аналог теоремы Плеснера для функций из этого пространства.

Рассмотрение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге $U \equiv \{z \in C : |\, z\,| < 1\}$

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } U$$

с граничным значением f из $L_{p(x)}$ на единичной окружности $\Gamma = \partial U$

$$u\big|_\Gamma = f,$$

требует введения банахово пространство $h_{p(x)}$ гармонических функций с переменным показателем, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ -оператор Лапласа. Приведем определение этого пространства.

Определение 7. Через $h_{p(\theta)}(-\pi,\pi)$ обозначим класс гармонических функций внутри единичного круга U с обычными линейными операциями и рассмотрим в этом классе норму

$$\|u\|_{h_p(\cdot)(-\pi,\pi)} = \|u\|_{h(\cdot)} = \sup_{0<r<1} \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\left|u\left(re^{i\theta}\right)\right|}{\lambda} \right)^{p(\theta)} d\theta \le 1 \right\},$$

где предпологается, что

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left|u\left(re^{i\theta}\right)\right|^{p(\theta)} d\theta < \infty.$$

Известно, что в классическом случае необходимым и достаточным условием принадлежности функции $u\left(re^{i\theta}\right)$ пространству h_p является представление этой функции в виде интеграла Пуассона-Лебега

$$u\left(re^{i\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f(t)dt, \tag{7}$$

где $f(\theta)=\lim\limits_{r\to 1-0}u\left(re^{i\theta}\right)$ и $P_r=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$ ядро Пуассона. Следующая теорема устанавливает аналогичную представления для функций из пространства $h_{p(\theta)}$.

Теорема 16. *Пусть* $1<\underline{p}\le p(\theta)\le\overline{p}<\infty$ *и* $p(\theta)-2\pi$*-периодическая, измеримая по Лебегу функция и удовлетворяет следующему условию:*

$$\left|p(\theta_1)-p(\theta_2)\right|\le\frac{C}{\ln\frac{1}{|\theta_1-\theta_2|}};0<|\theta_1-\theta_2|\le\frac{1}{2};\forall\theta_1,\theta_2\in[-\pi,\pi]. \tag{8}$$

Функция $u\left(re^{i\theta}\right)$ *принадлежит пространству* $h_{p(\theta)}$ *тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде интеграла Пуассона-Лебега (7), плотность* $f(\theta)$ *которого принадлежит пространству* $L_{p(\theta)}(-\pi,\pi)$.

Теорема 17. *Пусть выполняется все условия теоремы 18. Тогда*

$$\left\|u_r f-f\right\|_{L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)}\to 0, \text{ при } r\to 1-0,$$

где $\left(u_r f\right)(\theta)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f(t)dt.$

В общем случае имеет место следующая теорема.

Теорема 18. [типа Плеснера]. *Пусть* $1<\underline{p}\le p(\theta)\le\overline{p}<\infty$ *и* $p(\theta)-2\pi$*-периодическая, измеримая по Лебегу функция и удовлетворяет условию (8). Если* $u\left(re^{i\theta}\right)\in h_{p(\theta)}$*, то существует функция* $\mu(t)\in V[-\pi,\pi]$ *(т.е., функция с ограниченной вариацией), такая, что* $\mu'(t)\in L_{p(\theta)}(-\pi,\pi)$ *и имеет место следующее представление*

$$u\left(re^{i\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t).$$

В третьей главе диссертационной работы получены двухвесовые неравенства для ограниченности некоторого сверточного оператора в весовом пространстве Лебега, ядро которого удовлетворяет обобщенному условию Хермандера. При этом получены достаточные условия интегрального типа для пары радиальных и общих весовых функций обеспечивающие справедливость двухвесового неравенства сильного и слабого типов для этого сверточного оператора. Кроме того, в последнем параграфе этой главы получена теорема вложения между пространствами Соболева.

В первом пункте третьей главы, получены двухвесовые неравенства сильного (p,q) и слабого $(p,1)$ типов для некоторого оператора в весовом пространстве Лебега, ядро которого удовлетворяет обобщенному условию Хермандера.

Определение 8. Говорят, что положительная, измеримая и локально интегрируемая функция g удовлетворяет обратному L_∞ условию или $g\in RL_\infty\left(R^n\right)$, если

$$0<\sup_{x\in B}g(x)\le C\frac{1}{|B|}\int_B g(x)dx,$$

где B-произвольный куб с центром в нуле и $C>0$ постоянная не зависящая от B.

Пусть $K\in L_2\left(R^n\right)$-некоторая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(a) $\left\|\hat{K}\right\|_\infty\le C$, где $\hat{K}(\xi)=\int_{R^n}e^{-i(x,\xi)}K(x)dx$-преобразование Фурье функции K;

(b) $|K(x)|\le\dfrac{C}{|x|^n}$;

(c) существуют функции $A_1,\dots,A_m\in L_1^{loc}\left(R^n\setminus\{0\}\right)$ и $\Phi=\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$-конечное семейство функций, таких, что $\varphi_i\in L_\infty\left(R^n\right)$ и $\left|det\left[\varphi_j\left(y_i\right)\right]\right|^2\in RL_\infty\left(R^{nm}\right)$, $y_i\in R^n$, $i,j=1,\dots,m$;

(d) для фиксированного $\gamma > 0$ и для любого $|x| > 2|y| > 0$

$$\left| K(x-y) - \sum_{i=1}^{m} A_i(x)\varphi_i(y) \right| \le C \frac{|y|^{\gamma}}{|x-y|^{n+\gamma}},$$

где $C > 0$ - некоторая постоянная не зависящая от x и y. Вообще говоря, функции A_i и φ_i $(i = 1, \dots, m)$ определены в R_0^n и являются комплекснозначными.

Определение 9. Говорят, что локально интегрируемая весовая функция ν принадлежит $A_p\left(R^n\right)$, если

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B \nu(x)dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B \nu^{1-p'}(x)dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где супремум берется по всем шарам $B \subset R^n$, $1 < p < \infty$ и $p' = \dfrac{p}{p-1}$. А также, говорят, что $\nu \in A_1\left(R^n\right)$ если существует положительная постоянная C такая, что для любого произвольного шара $B \subset R^n$ справедлива неравенство

$$\frac{1}{|B|} \int_B \nu(x)dx \le C ess \inf_{x \in B} \nu(x).$$

Для функции $f \in L_p\left(R^n\right)$, $1 < p < \infty$ положим

$$Tf(x) = \int_{R^n} K(x-y) f(y) dy. \tag{9}$$

Теперь перейдем к изложению основных теорем этого параграфа.

Теорема 19. *Пусть* $1 < q < p < \infty$, $\alpha \ge 1$ *и ядро сверточного оператора (9) удовлетворяет условиям (a)-(d). Предположим, что* u_1 *положительная неубывающая функция определенная на* $(0, \infty)$, $\varphi \in A_q\left(R^n\right)$*-радиальная функция,* ω*-положительная функция определенная на* $(0, \infty)$ *и* $\omega_1 = u_1\varphi$. *Пусть весовая пара* (ω_1, ω) *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\displaystyle\int_{R^n} \left[u_1(\alpha |x|)\varphi(x)\right]^{\frac{p}{p-q}} \left[\omega(x)\right]^{-\frac{q}{p-q}} dx < \infty,$

2) $\int_0^{\infty}\left[\left(\int_t^{\infty}\omega_1(\tau)\tau^{n-nq-1}\,d\tau\right)\left(\int_0^{t}\omega^{1-p'}(\tau)\tau^{n-1}\,d\tau\right)^{q-1}\right]^{\frac{p}{p-q}}\omega^{1-p'}(t)t^{n-1}dt<\infty,$

то существует постоянная $C>0$ *такая, что для любого* $f\in L_{p,\omega}(\mathrm{R}^n)$ *имеет место неравенство*

$$\left(\int_{R^n}|Tf(x)|^q\ \omega_1(|x|)dx\right)^{1/q}\le C\left(\int_{R^n}|f(x)|^p\,\omega(|x|)dx\right)^{1/p}. \qquad (10)$$

Аналогичное неравенство верно и в случае, когда u_1 положительная невозрастающая функция определенная на $(0,\infty)$.

Во втором пункте третьей главы получены достаточные условия интегрального типа на пары общих весовых функций обеспечивающее справедливость двухвесового неравенства сильного и слабого типов для сверточного оператора (10).

Пусть $K\in L_2\left(R^n\right)$ ядро которое удовлетворяет условиям (a)-(c) предыдущего параграфа и следующему более слабому условие

$$\int_{|x|>2|y|}\left|K(x-y)-\sum_{i=1}^{m}A_i(x)\varphi_i(y)\right|dx\le C, \qquad (11)$$

где $C>0$-постоянная не зависящая от $y\in R^n$.

Имеет место следующая

Теорема 20. *Пусть* $1<q<p<\infty$ *и ядро сверточного оператора (9) удовлетворяет условиям (a)-(c) и (11). Предположим, что* ω *и* ω_1 *весовые функции определенные на* R^n*. Далее, пусть весовая пара* (ω_1,ω) *удовлетворяет условиям:*

1) $\int_{R^n}\left[\left(\int_{|y|>|x|}\frac{\omega_1(y)}{|y|^{nq}}dy\right)\left(\int_{|y|<|x|}\omega^{1-p'}(y)dy\right)^{q-1}\right]^{\frac{p}{p-q}}\omega^{1-p'}(x)dx<\infty;$

2) $\int_{R^n}\left[\left(\int_{|y|<|x|}\omega_1(y)dy\right)\left(\int_{|y|>|x|}\frac{\omega^{1-p'}(y)}{|y|^{np'}}dx\right)^{q-1}\right]^{\frac{p}{p-q}}\frac{\omega^{1-p'}(x)}{|x|^{np'}}dx<\infty;$

3) *существует постоянная* $d > 0$ *такая, что для всех* $f \in L_{p,\omega}\left(R^n\right)$ *имеет место неравенство*

$$\left(\sum_{k\in Z} \sup_{2^{k-1} < |x| \le 2^{k+2}} \omega_1(x) \int_{2^{k-1} < |x| \le 2^{k+2}} | f(x) |^q \, dx \right)^{1/q} \le d \left(\int_{R^n} | f(x) |^p \, \omega(x) dx \right)^{1/p} .$$

Тогда

$$\|Tf\|_{L_{q,\omega_1}(R^n)} \le C \|f\|_{L_{p,\omega}(R^n)},$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* f.

В третьем пункте третьей главы, доказаны теоремы вложения для весовых пространств Соболева числовых функций, определенные на специальных областях пространства R^n. В частности, получена теорема вложения из одного весового пространства Соболева в другое. А также изучена поведение членов интегрального представления В.П. Ильина и О.В. Бесова при больших значениях усредняющего параметра.

Пусть $R^n = R^k \times R^{n-k}$, $k = 1, \ldots, n-1$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_i > 0$, $| a |= \sum_{i=1}^{n} a_i$, $N_0 = N \cup \{0\}$, N -множество натуральных чисел, $l, \nu \in N_0^n$, $\rho(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^{2/a_i} \right)^{1/2}$ и $\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n} \right)$. Определим весовое пространство Соболева, как совокупность измеримых функций $f(x)$, $x \in \Omega_k$, имеющих обобщенные производные $D_i^{l_i} f$ с конечной нормой

$$\|f\|_{W^{l_1,\ldots,l_n}_{p,\omega_0,\ldots,\omega_n}(\Omega_k)} = \|f\|_{L_{p,\omega_0}(\Omega_k)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{L_{p,\omega_i}(\Omega_k)},$$

где $\Omega_k = \left\{ x : x' \in R^k ; \varphi_i(x') < x_i < \infty, i = k+1, \ldots, n \right\}, k = 1, \ldots, n-1,$ $\Omega_0 = \left\{ x : x \in R^n ; x_i^0 < x_i < \infty,\ i = 1, \ldots, n \right\}$, $\Gamma_0 = \{ x : x \in R^n ; x_i = x_i^{(0)},$ $i = 1, \ldots, n \}$, $\Gamma_k = \left\{ x :\ x' \in R^k ; x_i = \varphi_i(x'), i = k+1, \ldots, n \right\}$,

$k=1,\ldots,n-1$ и вектор функция $\overline{\varphi}(x')=(\varphi_{k+1}(x'),\ldots,\varphi_n(x'))$ удовлетворяет анизотропному условию Гельдера:

$$\rho\left(\overline{\varphi}(x')-\overline{\varphi}(y')\right)\le M\,\rho(x'-y'),\ \ \forall x',y'\in R^k.$$

Обозначим $\rho(x,\Gamma_k)=\inf\limits_{y\in\Gamma_k}\rho(x-y)$, где $1\le k\le n-1$.

В случае $k=0$, $\rho(x,\Gamma_0)=\rho\left(x-x^{(0)}\right)$ и положим $\pi_k(x)=\rho\left(x''-\overline{\varphi}(x')\right)=\left(\sum\limits_{i=k+1}^{n}\left|x_i-\varphi_i(x')\right|^{2/a_i}\right)^{1/2}$ при $k=1,\ldots,n-1$ и $\pi_0(x)=\rho\left(x-x^{(0)}\right)$ при $k=0$.

Отметим, что весовые изотропные пространства локально суммируемых на области $\Omega\subset R^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ функций f с нормой $\|f\|_{p,\omega}+\sum\limits_{|\nu|=l}\left\|\rho^{\alpha}(\cdot;\partial\Omega)D^{\nu}f\right\|_{p,\omega}$, где $\rho(x;\partial\Omega)$-обычное расстояние от точки $x\in\Omega$ до границы $\partial\Omega$, изучались в работах Л.Д. Кудрявцева, П.И. Лизоркина , С.М. Никольского, Х. Трибеля, В. П. Ильина, Ю. Салманова, В. С. Гулиева и др.

Известно, что для функции f, имеющей обобщенные производные $D_i^{l_i}f$ $(i=1,\ldots,n)$ на Ω_k, $k=0,1,\ldots,n$ имеет место интегральное представление В.П. Ильина и О.В. Бесова

$$D^{\nu}f_{\varepsilon}(x)=D^{\nu}f_h(x)+(-1)^{|\nu|}\sum_{i=1}^{n}\int_{\varepsilon}^{h}\upsilon^{-1-\sigma_i}d\upsilon\int_{R^n}\Phi_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{\upsilon^{a}}\right)D_i^{l_i}f(x+y)dy,\quad (12)$$

где $\sigma_i=|a|+(\nu,a)-l_ia_i$, $i=1,2,\ldots,n$ и $D^{\nu}f_h(x)=\dfrac{(-1)^{|\nu|}}{h^{|a|+(\nu,a)}}\displaystyle\int_{R^n}\Phi_i^{(\nu)}\left(\frac{y}{\upsilon^{a}}\right)f(x+y)dy$, Φ_j, $j=1,2,\ldots,n$- некоторые бесконечно дифференцируемые финитные функции, сосредоточенные в области $\left\{y:0<b_i^{a_i}<y_i<c_i^{a_i}\right\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ и обладающие соответственно свойствами

$$\int_{R^n}\Phi_0(y)dy=1,\ \ \int_{R^n}\Phi_i^{(\nu)}(y)dy=0,\ i=1,2,\ldots,n,\ \forall\,\nu\in N_0^n=N^n\cup\{0\}.$$

Теорема 21. *Пусть* $f \in W^l_{p,\omega}(\Omega_k)$, $1 \le p < \infty$, $l = \frac{1}{a}$ *и* $F \subset \Omega_k$ *некоторый компакт. Предположим, что весовая функция* $\omega(\pi_k(x))$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$\forall x \in F$, $\quad \forall y \in \{y : 0 < (b_i \upsilon)^{a_i} < y_i < (c_i \upsilon)^{a_i}; i = 1, \dots, n\}$, *и для достаточно больших* $\upsilon > 0$ *имеет место неравенство:*

$$\omega(\pi_k(x+y)) \ge C\omega(\upsilon); \tag{13}$$

и

$$\lim_{h\to\infty} \frac{h^{1-\frac{|a|}{p}-(\nu,a)}}{(\omega(h))^{\frac{1}{p}}} = 0. \tag{14}$$

Тогда при $h \to \infty$, $D^\nu f_h(x)$ *из представления (12) при выполнении условий (13) и (14) сходится равномерно на любом компакте* F, *где* $b_i > M\sum_{j=1}^{k} c_j$, $i = k+1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n-1$. *К тому же, если при некотором* $j \le n$, $\nu_j \ge r_j$, *то* $D^\nu f_h(x) \rightrightarrows 0$ *на любом компакте* F *при выполнении условий (13) и (14).*

В четвертой главе диссертационной работы изучена некоторые свойства пространства Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости и доказана вложение между различными пространствами Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости. Во втором пункте четвертой главы доказывается, что весовые функции участвующие в определение весового пространства Лебега со смешанной нормой, связывает двумерный оператор Харди двумя нелинейными дифференциальными уравнениями в этом пространстве. В третьем пункте этой главы приводится обобщение классической теоремы вложения Соболева на случай пространств Соболева с переменным показателем.

Пусть Ω измеримое по Лебегу подмножество в R^n. Предположим, что $\mathbf{p}(x) = (p_1(x_1,...,x_n), p_2(x_2,...,x_n),...,p_n(x_n))$- вектор-функция определенная в R^n и с измеримыми по Лебегу компонентами удовлетворяющими неравенствам $1 \le p_i(x^{(i)}) < \infty$,

$\sup\limits_{x^{(i)}\in R^{n-i+1}} p_i(x^{(i)}) = \overline{p}_i < \infty, \quad x^{(i)} = (x_i,...,x_n), \quad i = 1,...,n.$ Всюду в дальнейшем будем учитывать, что $x^{(1)} = x, \quad x^{(n)} = x_n$, а также, рассматриваемые множества и функции являются измеримыми по Лебегу.

Определение 10. Пространство $L_{\mathbf{p}(x)}\left(R^n\right)$ определяется как пространство измеримых на R^n функций f таких, что

$$\rho_{\mathbf{p}}(f) = \int\limits_R \left(\left\| \ldots \left\| \|f\|_{p_1,x_1} \right\|_{p_2,x_2} \ldots \right\|_{p_{n-1},x_{n-1}} (x_n) \right)^{p_n(x_n)} dx_n < \infty,$$

где $\|f\|_{p_1,x_1} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int\limits_R \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p_1(x)} dx_1 \le 1 \right\}$. Величина

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}(x)}\left(R^n\right)} = \left\| \ldots \left\| \|f\|_{p_1,x_1} \right\|_{p_2,x_2} \ldots \right\|_{p_n,x_n} =$$

$$= \inf\left\{ \nu > 0 : \int\limits_R \left(\frac{\left\| \ldots \left\| \|f\|_{p_1,x_1} \right\|_{p_2,x_2} \ldots \right\|_{p_{n-1},x_{n-1}} (x_n)}{\nu} \right)^{p_n(x_n)} dx_n \le 1 \right\} \qquad (15)$$

определяет одну из эквивалентных норм в пространстве $f \in L_{\mathbf{p}(x)}\left(R^n\right)$. В случае произвольного множества $\Omega \subset R^n$ норма (15) в пространстве $L_{\mathbf{p}(x)}(\Omega)$ определяется как $\|f\|_{L_{\mathbf{p}(x)}(\Omega)} = \|f\chi_\Omega\|_{L_{\mathbf{p}(x)}\left(R^n\right)}$, где $\chi_\Omega(x)$-характеристическая функция множества Ω.

Справедлива следующая

Теорема 22. *Предположим, что* $\mathbf{p}(x) = \left(p_1(x), p_2(x^{(2)}),..., p_n(x_n)\right)$ *и* $\mathbf{q}(x) = \left(q_1(x), q_2(x^{(2)}), ..., q_n(x_n)\right)$ *две вектор-функции такие, что* $\mathbf{1} \le \mathbf{p}(x) \le \mathbf{q}(x) \le \overline{\mathbf{q}} < \infty$, $x \in I = \{x \in R^n : -\infty \le a_i < x_i < b_i \le \infty,$

$i=1,...,n\}$ *и пусть выполняется следующие условия:*

$$A_i = \sup_{(x_{i+1},\cdots,x_n)} \int_{a_i}^{b_i} [q_i(x^{(i)}) - p_i(x^{(i)})] dx_i < \infty, i=1,\cdots,n-1,$$

$$A_n = \int_{a_n}^{b_n} [q(x_n) - p(x_n)] dx_n < \infty.$$

Тогда имеет место непрерывное вложение $L_{\mathbf{q}(x)}(I) \subset\!\!> L_{\mathbf{p}(x)}(I)$ *и*

$$\|f\|_{L_{\mathbf{q}(x)}(I)} \le \prod_{i=1}^{n} [B_i(p_i, q_i)]^{\gamma_i} \|f\|_{L_{\mathbf{p}(x)}(I)},$$

где $B_i(p_i, q_i) = \dfrac{1}{\underline{r}_i} + \dfrac{A_i}{\underline{q}_i}$, $\underline{r}_i = \inf\limits_{x \in R^{n-i+1}} \dfrac{q_i(x^{(i)})}{p_i(x^{(i)})}$,

$$\gamma_i = \begin{cases} 1/\underline{\underline{p}}_i, & \text{при } B_i(p_i, q_i) \ge 1, \\ 1/\overline{p}_i, & \text{при } B_i(p_i, q_i) \le 1. \end{cases}$$

Во втором пункте этой главы доказывается связь двух нелинейных дифференциальных уравнений с двумерным оператором Харди в весовом пространстве Лебега со смешанной нормой. В третьем пункте четвертой главы доказаны теоремы вложения в пространстве С. Л. Соболева с переменным показателем. Приведем определение пространства Соболева с переменным показателем.

Определение 11. Пусть Ω-открытое множество в R^n, $l=(l_1,\ldots,l_n) \in N^n$ и $1 \le p(x) < \infty$. Определим анизотропное пространство $W^l_{p(x)}(\Omega)$ с переменным показателем, как множество измеримых на Ω функций $f \in L_{p(x)}(\Omega)$, имеющих на Ω обобщенные по Соболеву производные $D_i^{l_i} f$ $(i=1,\ldots,n)$ и конечную норму

$$\|f\|_{W^l_{p(x)}(\Omega)} = \|f\|_{L_{p(x)}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| D_i^{l_i} f \right\|_{L_{p(x)}(\Omega)}.$$

А именно, имеет место следующие теоремы.

Теорема 23. *Пусть* Ω*-открытая ограниченная область в* R^n*, удовлетворяющая условию* l*-рога, где* $l=(l_1,\dots,l_n)\in N^n$*. Предположим, что* $1<\underline{p}\le p(x)\le q(x)\le \overline{q}<\infty$, $\overline{p}<|1/l|$, $|1/l|=\sum_{i=1}^{n}1/l_i$, $p\in C(\overline{\Omega})$ *и* $q(x)\le r(x)=\dfrac{|1/l|p(x)}{|1/l|-p(x)}$, $x\in\Omega.$

Тогда имеет место вложение

$$W_{p(x)}^{l_1,\dots,l_n}(\Omega)\subset\!\!> L_{q(x)}(\Omega). \tag{16}$$

Кроме того, если $\inf_{x\in\Omega}(r(x)-q(x))>0,$ *то вложение (16) компактно.*

Теорема 24. *Предположим, что* $1<\underline{p}\le p(x)\le q(x)\le \overline{q}<\infty$, $\overline{p}<|1/l|$, p*-равномерная непрерывная функция на* R^n *и* $q(x)\le r(x)=\dfrac{|1/l|p(x)}{|1/l|-p(x)}$, $x\in R^n$*. Тогда имеет место вложение*

$$W_{p(x)}^{l_1,\dots,l_n}(R^n)\subset\!\!> L_{q(x)}(R^n). \tag{17}$$

Кроме того, если $inf_{x\in\Omega}(r(x)-q(x))>0,$ *то вложение (17) компактно.*

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту, член- корр. НАНА, профессору В.С. Гулиеву за постоянное внимание к работе, ценные советы и полезные обсуждения.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Бандалиев Р. А. Теоремы вложения для весовых анизотропных пространств Соболева на областях в R^n. Вестник БГУ, № 3, 2003, с. 64-69.
2. Бандалиев Р. А. Теоремы вложения для весовых анизотропных пространств Соболева в областях R^n. Тезисы докладов II межд. конф. посв. 80 член-корр. РАН проф. Л. Д. Кудрявцева, 2003, с. 21-23.

3. Bandaliev R. A. Two-weighted inequalities of weak type for some anisotropic integral operator on the domains in R^n. Proc. of Inst. of Math. and Mech. of NAS of Azerbaijan, v. XIX (XXVII), 2003, p. 49-58.
4.Гулиев В. С., Бандалиев Р. А. Двухвесовые неравенства для интегральных операторов в L_p – пространствах банаховозначных функций и их приложения. Труды Института Матем. им. В. А. Стеклова, 2003, т. 243, с.194-212.
5. Бандалиев Р. А. О смешанном пространстве $L_{(p_1(x_1),\ldots,p_n(x_n))}\left(R^n\right)$. Тезисы X международной конф. по математике и механике посвященной 45-летию ИММ НАНА, 5-8 мая, 2004, Баку, с. 38.
6. Бандалиев Р. А. Теорема о компактном вложении в анизотропном пространстве Соболева с переменными показателями суммируемости. Тезис науч. конф. посв. 70-летию чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. А. А. Бабаева. Баку 2004, с. 52-53.
7. Bandaliev R. A. The imbedding theorem for anisotropic Sobolev spaces with variable exponent of summability. The Sci. and Pedag. news of Odlar Yurdu Univ. Ser. of phys. tech., math. and natur. sci, № 13, 2005, p. 138-142.
8. Бандалиев Р. А. Теорема вложения в анизотропном пространстве С. Л. Соболева с переменными показателями суммируемости. Тезисы докл. межд. конф. посв. 100-летию акад. С.М. Никольского. Инст. Матем. им. В.А. Стеклова, Москва, 2005, с.46.
9. Бандалиев Р. А. Двухвесовые неравенства для сверточных операторов в пространстве Лебега. Матем. заметки, т. 80, вып. 1, 2006, с. 3-10.
10. Bandaliev R. A., Abbasova M. M. On an inequality and $p(x)$-mean continuity in the variable Lebesgue space with mixed norm. Trans. of NAS of Azerbaijan, ser. phys.-tech. and math. sci., v. XXVI, № 7, 2006, p. 47-56.
11.Guliyev V. S., Bandaliev R. A. Weighted embedding theorems for anisotropic Sobolev spaces on domains. Khazar journal of mathematics, v. 4, № 4, 2006, p. 3-16.
12.Агамалиев Н. Ч., Бандалиев Р. А. О поведении членов интегрального представления для больших значений усредняющего параметра. Труды Орловского Гос. Унив. Дифф. урав., Теор. функций и функ. анализ, Алгебра, топология и геометрия, 2006, т.1, с. 144-148.
13. Бандалиев Р. А. Об ограниченности оператора Харди в весовом

пространстве $L_{p(x),\omega}(0,\infty)$. Тезисы XIII межд. конф. по матем. и мех. посв. 70-летию акад. НАН Азербайджана А. Д. Гаджиева, Баку 2007, с. 43.
14. Bandaliev R. A., Abbasova M. M. On the boundedness of Hardy operator in the weighted variable exponent spaces. Proc. of Inst. of Math. and Mech. of NAS of Azerbaijan. Embedding theorems. Harmonic analysis, iss. 13, 2007, p. 5-18.
15. Билалов Б. Т., Бандалиев Р. А., Мамедов Ф. И. О классах гармонических функций с переменным показателем суммируемости. Докл. НАН Азербайджана, 2007, т.43, № 5, с.16-21.
16. Bandaliev R. A. The boundedness of certain sublinear operator in the weighted variable Lebesgue spaces. Workshop "Variable exponent analysis and related topics". A. Razmadze Math. Inst. and Georgian Tech. Univ., Tbilisi, 2008, p. 1-2.
17. Бандалиев Р. А. Об одной теореме вложения в пространстве Лебега с переменным показателем и со смешанной нормой. Тезисы докл. 3-й межд. конф. посв. 85-летию член-корр. РАН Л. Д. Кудрявцева, Москва 2008, с. 112-114.
18. Бандалиев Р. А. Об одном неравенстве в пространстве Лебега со смешанной нормой и с переменными показателями суммируемости. Матем. заметки, 2008, т.84, № 3, с. 323-333.
19. Бандалиев Р. А. Весовые неравенства для дробных интегралов в пространстве Лебега с переменным показателем суммируемости. Тезисы межд. конф. посв. 100-летию акад. РАН С. Л. Соболева. Диф. уравн. Функц. простр. Теория прибл., Новосибирск, Россия, 2008, с. 292.
20. Бандалиев Р. А. О неравенстве Харди с мерами. Межд. Российско-Абхазский симп. "Уравн. смеш. типа и родственные проб. анализа и инфор". Нальчик-Эльбрус, 2009, с. 50-51.
21. Bandaliev R. A., Abbasova M. M., Chiragova Kh. A. On a two-weight criteria for Hardy operator in Orlicz-Musielak spaces. Abstract of Inter. conf. on math. and mech. devoted to the 50-th anniver. of the Inst. of Math. and Mech. of NAS of Azerbaijan, 2009, p. 79-80.
22. Бандалиев Р. А. Об ограниченности двумерного оператора Харди в весовом пространстве Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости. Тезисы докл. 15-ой Саратовской зимней шк. Совр. пробл. теории функций и их приложения, Саратов 2010, с. 78-79.

23. Bandaliev R.A. The boundedness of certain sublinear operator in the weighted variable Lebesgue spaces. Czechoslovak Math. J., 2010, v.60, № 2, p.327-337; correction in Czechoslovak Math. J., 2013, v.63, № 4, p.1149-1152.
24. Bandaliev R. A. The boundedness of multidimensional Hardy operators in weighted variable Lebesgue spaces. Lithuanian Math. J., 2010, v.50, № 3, p. 249-259.
25. Bandaliev R. A. On a two-weight criterion for Hardy type operator in weighted variable Lebesgue spaces with measures. Trans. of NAS of Azerbaijan, 2010, v. XXX, № 4, p. 45-55.
26. Bandaliev R. A. On an application of Hardy inequality in Orlicz-Muselak spaces. "Functional analysis and its applications". Proceedings of the Inter. Conf. devoted to the 100-th anniversary of academician Z. I. Khalilov, 2011, p. 80-82.
27. Бандалиев Р.А. Об ограниченности многомерного геометрического среднего оператора в пространстве Лебега переменного порядка. Межд. семинар "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения". Семинар приур. к 70-летию проф. С.Г. Самко , Южный Фед. Унив., Ростов, 2011, с. 20.
28. Bandaliev R. A. Compactness criteria in weighted variable Lebesgue spaces. News of Chechen State Univ., 2011, № 1, p. 5-9.
29. Bandaliev R. A. Embedding between variable Lebesgue spaces with measures. Azerbaijan Journal of Math., 2012, v.2, № 1, p. 111-117.
30. Bandaliev R. A., Omarova K. K. Two-weight norm inequalities for certain singular integrals. Taiwanese Journal of Math., 2012, № 2, p. 713-732.
31. Bandaliev R. A. On the weighted space $L_{p(x),\omega}(R^n)$ for $0<p(x)<1$ and Hardy inequality in this space. Inter. Conference devoted to the 70-th anniversary of prof. A.Stepanets, Kiev, 2012, p.78-79.
32. Bandaliev R.A. Applications of multidimensional Hardy operator and its connection with a certain nonlinear differential equation in weighted variable Lebesgue spaces. Annals of Functional Analysis, 2013, v. 4, № 2, p. 118-130.
33. Bandaliev R. A. On compactness criterion for multidimensional Hardy type operator in weighted p-convex Banach function spaces. Abstract of the Inter. conf. dedicated to the 90-th anniversary of H. Aliyev, Baku, 2013, p. 22.
34. Бандалиев Р.А. Связь некоторой системы нелинейных

дифференциальных уравнений с неравенством Харди в пространстве Лебега со смешанной нормой и с переменными показателями суммируемости. Межд. конф. посв. проф. И. Б. Симоненко. Южный Федер. Унив., Ростов, 2013, с. 25.
35. Bandaliev R.A. On one inequalities for convolution type operator. Hacettepe Journal of Math. and Stat., 2013, v. 42, № 3, p. 199-210.
36. Bandaliev R.A. On a two-weight criteria for multidimensional Hardy type operator in weighted p-convex Banach function spaces. Abstract of the Inter. conf. dedicated to the 75-th anniversary of acad. NANU A. M. Samoilenko, Kiev, Sevastopol, 2013, p.203-204.
37. Bandaliev R.A. On a compactness criteria for multidimensional Hardy type operator in p-convex Banach function spaces. Caspian Journal of Applied Mathematics, Economy and Ecology, 2013, v.1, № 1, p. 1-10.
38. Bandaliev R.A. Criteria of two-weighted inequalities for multidimensional Hardy type operator in weighted Musielak-Orlicz spaces and some application. Math. and Stat., 2013, v. 1, № 3, p. 144-156.
39. Bandaliev R.A. On Hardy-type inequalities in weighted variable Lebesgue space $L_{p(x),\omega}$ for $0<p(x)<1$. Eurasian Math. Journal, 2013, v.4, № 4, p. 5-16.
40. Бандалиев Р.А. О структурных свойствах весового пространства $L_{p(x),\omega}$ для $0<p(x)<1$. Матем. заметки, 2014, т.95, №4, с.492-506.

RÖVŞƏN ƏLİFAĞA oğlu BƏNDƏLİYEV

BANAX FUNKSİONAL FƏZALARINDA HARMONİK ANALİZİN İNTEQRAL OPERATORLARI VƏ BƏZİ TƏTBİQLƏRİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi çəkili Banax funksional fəzalarda çoxölçülü Hardi tipli operatorlar üçün məhdudluq və kompaktlıq meyarlarının alınmasına və bu nəticələrin çəkili Orliç-Musilak fəzasında tətbiqinə həsr olunmuşdur. Həmçinin, işdə birölçülü Hardi operatorunun dəyişən dərəcəli Lebeq fəzasında məhdudluğu məsələsi öyrənilmişdir.

Dissertasiyada aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

1. Çoxölçülü Hardi tipli operatorun çəkili Lebeq fəzasından çəkili Banax funksional fəzasına məhdud təsir etməsi və kompakt olması üçün çəki funksiyaları üzərinə zəriri və kafi şərtlər alınmış və bu nəticələr çəkili Orliç-Musilak fəzasında tətbiq edilmişdir.
2. Müəyyən qeyri-xətti adi diferensial tənliyin birölçülü Hardi operatoru ilə əlaqəsi öyrənilmiş və Riss potensialının çəkili dəyişən dərəcəli Lebeq fəzasında məhdudluğu isbat edilmişdir.
3. $L_{p(x),\omega}$- çəkili dəyişən dərəcəli Lebeq fəzasının $0 < p(x) < 1$ halında struktur xassələri öyrənilmiş və Hardi bərabərsizliyi isbat edilmişdir.
4. Nüvəsi ümumiləşmiş Hörmander şərtini ödəyən müəyyən bürünmə operatoru üçün çəkili Lebeq fəzasında ikiçəkili bərabərsizliklər isbat edilmişdir.
5. R^n-də xüsusi oblastlarda təyin olunmuş funksiyalardan ibarət çəkili anizotrop Sobolev fəzasında daxilolma teoremləri isbat edilmiş və V. P. İlyinin və O.V. Besovun inteqral göstərilişindəki hədlərin ortalaşdırıcı parametrin kifayət qədər böyük qiymətlərində davranışı öyrənilmişdir.
6. Dəyişən dərəcəli və qarışıq normalı Lebeq fəzasının bəzi xassələri isbat edilmiş və ikiölçülü Hardi operatorunun adi qarışıq normalı Lebeq fəzasında iki qeyri-xətti diferensial tənliklərlə əlaqəsi göstərilmişdir. Əlavə olaraq dəyişən dərəcəli Sobolev fəzasında klassik Sobolev daxilolma teoreminin analoqu alınmışdır.

ROVSHAN ALIFAGHA oglu BANDALIYEV

INTEGRAL OPERATORS OF HARMONIC ANALYSIS IN BANACH FUNCTION SPACES AND SOME APPLICATIONS

ABSTRACT

The thesis is devoted to obtaining a criteria for the boundedness and compactness of multidimensional Hardy type operators in weighted Banach function spaces and the application of these results in weighted Orlicz-Musielak space. In this thesis the following main results were obtained:

1. A necessary and sufficient conditions on weighted functions for boundedness and compactness of multidimensional Hardy type operators acting from weighted Lebesgue space to weighted Banach function spaces are proved and the application of these results in weighted Orlicz-Musielak space.
2. The connection of certain ordinary non-linear differential equation with onedimensional Hardy operator is studied and the boundedness of Riesz potential in weighted variable exponent Lebesgue space is proved.
3. The structural properties of weighted variable exponent Lebesgue space $L_{p(x),\omega}$ in the case $0 < p(x) < 1$ is studied and Hardy inequalities is proved.
4. The two-weighted inequalities for some convolution operator with kernel satisfying generalized Hormander condition was proved.
5. Embedding theorem in anisotropic weighted Sobolev space consisting of functions defined in specific domains in R^n is proved and the behavior of terms of the integral representation of O.V.Besov-V.P.Ilyin for sufficient large values of averaged parameter is studied.
6. The some properties of variable exponent Lebesgue space with mixed norm is proved and studied the connection of two-dimensional Hardy operator with two nonlinear differential equations in usual weighted Lebesgue space with mixed norm. In addition, analog of the classical Sobolev's embedding theorem in variable exponent Sobolev space was obtained.