AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

MÜBARİZ QAFARŞAH oğlu HACIBƏYOV

BÜRÜNMƏ TİPLİ İNTEQRAL OPERATORLARIN ARAŞDIRILMASI

1202.01-Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı- 2017

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Riyazi analiz"** şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi məsləhətçi:
Akademik Akif C. Hacıyev

Rəsmi opponentlər:
AMEA-nın müxbir üzvü, prof. **Bilal T. Bilalov**
(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu).
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Sadiq K. Abdullayev**
(Bakı Dövlət Universiteti).
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **İlham A. Əliyev**
(Akdeniz Universiteti, Türkiyə).

Aparıcı təşkilat:
Azərbaycan Dövlət Pedoqoji Universitetinin "Riyazi analiz" kafedrası

Dissertasiyanın müdafiəsi 08 dekabr 2017-ci il saat 14^{00} -da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcək.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B. Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 23 oktyabr 2017-ci il.

AMEA RMİ-nin D 01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla X. Həsənova**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Klassik harmonik analiz öz başlanğıcını mexanika, fizika və ehtimal nəzəriyyəsinin məsələlərinin həlli yollarından biri kimi götürmüşdür. Furye sıraları və inteqralları nəzəriyyəsi, spektral analizin məsələləri harmonik analizin inkişafınının başlanğıc etapını təşkil edir. Topoloji qruplar nəzəriyyəsi sahəsində əldə olunmuş nəticələrdən sonra məlum oldu ki, klassik harmonik analizin bir sıra məsələ və teoremlərini ixtiyari topoloji qruplar halında da vermək olar. Beləliklə harmonik analizin yeni istiqaməti – abstrakt harmonik analiz yarandı. Abstrakt harmonik analizin qurulmasında və inkişafında L.S.Pontryaqin, A.İ.Maltsev, İ.M.Qelfand, M.Q.Kreyn və M.A. Naymark kimi riyaziyyatçıların işləri böyük rol oynamışdır.

Müasir dövrdə harmonik analiz (abstrakt harmonik analiz) nəinki topoloji qruplarda, həmçinin hiperqruplarda, bircins və qeyri bircins fəzalarda inkişaf edir.

Harmonik analizin əsas əməliyyatlarından biri bürünmə əməliyyatıdır. Dissertasiya işi bürünmə tipli inteqral operatorların araşdırılmasına həsr olunmuşdur. Bu inteqral operatorlar klassik bürünmə inteqral operatorların ümumiləşməsidir. Belə ki dissertasiya işində baxılan inteqral operatorların inteqrallama oblastı Evklid oblastı və ya onun altoblastı deyil, hiperqrup, bircins fəza və qeyri-bircins fəza kimi abstrakt fəzalardır. Aydındır ki, bu inteqrallarda inteqrallama Lebeq ölçüsünə görə deyil, daha abstrakt ölçüyə görə aparılır. Ona görə burada "bürünmə inteqral operatorlar" söz birləşməsindən daha çox "bürünmə tipli inteqral operatorlar" söz birləşməsi uyğun gəlir.

Dissertasiya işində baxılan integral operatorların böyük bir hissəsi klassik Riss potensiallarının, loqarifmik potensialın, Hardi-Littvuld maksimal operatorun, kəsr-maksimal operatorların ümumiləşməsidir. Məlum olduğu kimi, bütün bu klassik operatorlar ya bürünmə operatorlarıdır, ya da bürünmə operatorlarından alina bilirlər. Bundan başqa bu operatorların hər biri potensial nəzəriyyəsinin çox mühüm aparatlarıdır.

Uzun müddət ərzində potensial nəzəriyyəsinə riyazi fizikanın bir bölməsi kimi baxılmışdır. Lakin demək olar ki, iki əsr ərzində uzun müddətli inkişaf nəticəsində bu nəzəriyyə geniş və müstəqil tədqiqat sahəsinə çevrilmiş, bir sıra yeni istiqamətlərlə zənginləşmişdir. Hal hazırkı dövrdə potensial nəzəriyyəsinin nəticələri, ideya və metodları nəinki riyazi fizikada, həmçinin funksiyalar nəzəriyyəsində, funksional analizdə, ehtimal nəzəriyyəsində, yaxınlaşmalar nəzəriyyəsinin və harmonik analizin məsələlərində tətbiq edilir.

Klassik Riss potensialları funksiyalar nəzəriyyəsində və harmonik analizdə geniş tətbiqə malikdir. Bu potensiallar Riman və Liuvill tərəfindən təklif olunan kəsr tərtibli inteqralların modifikasiyası nəticəsində əmələ gəlmişdir. Məlum olduğu kimi, Riman və Liuvill

$$L_\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} f(u)du,$$

inteqralını, burada $x > a$ və a sonlu və ya $-\infty$-a bərabər qiymət alan (inteqralın varlığı şərtində) ədəddir, f funksiyasının α ($\alpha > 0$) tərtibli (kəsr tərtibli) integralı adlandırmışlar.

M.Riss 1949-cu ildə özünün klassik işində α tərtibli (kəsr tərtibli) integralının başqa tərəfini verdi. Belə ki, Riss həmin işdə

$$T_\alpha f(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u}{|x-u|^{1-\alpha}} du, \ 0 < \alpha < 1,$$

inteqralını f funksiyasının α tərtibli (kəsr tərtibli) integralı adlandırır. Məhz bu inteqral gələcəkdə

$$I_\alpha f(x) = \int_{R^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy, \ 0 < \alpha < n,$$

inteqral operatorunun n tərtibli (klassik) Riss potensialı adlandırılması üçün bir model oldu. Riss potensialları çoxlu sayda elmi məqalələrdə öyrənilmişdir. Belə ki, hətta bu məqalələrin sadəcə olaraq sadalanması çox böyük siyahının yaranmasına səbəb ola bilər. Klassik Riss potensiallarının araşdırılması və geniş şəkildə analizi Adams və Hedberqin, Landkovun, Mizutanın, Samko, Kilbas, Marıçevin monoqrafiyalarında öz əksini tapmışdır. Azərbaycan rayaziyyat məktəbinin nümayəndələri – A.Hacıyev, S.Abdullayev, V.Quliyev, R.Rzayev, İ.Əliyev və başqaları öz işlərində Riss potensiallarının xassələrini öyrənmişlər.

Funksiyalar nəzəriyyəsində və harmonik analizdə I_α potensiallarının araşdırılmasının ümumi istiqamətləri aşağıdakı məsələləri əhatə edir.

a) Xətti inteqral operator kimi $I_\alpha f$ operatorunun bir funksional fəzadan digər funksional fəzaya (o cümlədən çəkili fəzalarda) məhdud təsirinin araşdırılması;

b) $I_\alpha f(x)$ -ın x -in funksiyası kimi öyrənilməsi, yəni $I_\alpha f(x)$ -ın R^n -də kəsilməzlik, diferensiallama, sonsuzluqda özünü aparması və s. xassəlirinin araşdırilması;
c) ümumiləşmiş potensialların araşdırılması, belə ki, daha ümumi nüvəli inteqrallara baxılır, adi sürüşmə ümumi sürüşmə ilə, Evklid məsafəsi metrika və ya kvazimetrika ilə, inteqrallama oblastı abstrakt fəzalarla əvəz edilir və s.

Dissertasiya işində əsas araşdırma obyekti klassik Riss potensiallarının ümumiləşməsi olan inteqral operatorlardır. Bu mövzuda olan ədəbiyyatlara uyğun olaraq biz bu inteqral operatorları ümumiləşmiş potensiallar (ümumiləşmiş Riss potensialları) və ya potensial tipli inteqral operatorlar adlandıracağıq.

Dissertasiya işində bir sıra nəticələr dəyişən dərəcəli Lebeq fəzaları və Musielak-Orliç fəzaları ilə sıx əlaqəlidir.

Dəyişən dərəcəli Lebeq fəzaları Musielak-Orliç fəzalarının xüsusi halıdır. Bu fəzaya ədəbiyyatda ilk dəfə 1931-ci ildə Orliçin işində rast gəlinir. Orliç öz işində, R -də dəyişən dərəcəli Lebeq sinfinə baxaraq, orada Hölder bərabərsizliyini isbat etmişdir

Dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarının (həm də Musielak-Orliç fəzalarının) sonrakı inkişafı iki dekadadan sonra Nakanonun işləri ilə bağlıdır.

Nakano öz işlərində Musielak-Orliç fəzalıarından daha ümumi olan modulyar fəzaları daxil etmiş və öyrənmişdir. Sonralar Musielak-Orliç fəzaları polyak riyaziyyatçıları Orliç, Musielak, Hyudzik, Kaminskiy və başqaları tərəfindən sistematik şəkildə öyrənilmişdir.

İntervalda (həqiqi ox üzərində) dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarının təpologiyasının araşdırılmısı Şarapudinov tərəfindən verilmişdir. (Bu nəticələr çoxölçülü hal üçün Kovaçik və Rakoşnik ümumiləşdirilmişdir.). Şarapudunovun işlərində, həmçinin, dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarında analizin başqa məsələləri də araşdırılmışdır. Şarapudinov ilk dəfə $p(\cdot)$ eksponent funksiyasının requlyarlığı məsələsinə baxmış və həmin funksiya üçün Dini-Lipşis sərtini vermişdir

$L^{p(\cdot)}$ fəzalarında bürünmə inteqral operatorlarının məhdudluğunun araşdırılması fiziki proseslərin modellərinin araşdırılması baxımından da maraq doğurur. Dəyişən dərəcəli fəzaların öyrənilməsi elastiklik nəzəriyyəsinin, maye dinamikasının və variasiya hesabının məsələləri ilə əlaqədardır. 1995-1999-cu illərdə Ruziçkanın çap olunan seriya işlərində reoloji və elekroreoloji məyelərin bəzi məsələrinə baxılır və bu məsələrin öyrənilməsi dəyişən dərəcəli fəzalara gətirib çıxarılır. Məlum olur ki, maye mexanikasının, elastiklik nəzəriyyəsinin bəzi məsələlərinin riyazi modelləşməsi standart olmayan artım şərtinə diferensial tənliklərə gətirilir. Burada həm də Jikovun işlərini qeyd etmək yerinə düşər. Onun işlərində dəyişən dərəcəli fəzalar variasiya hesabının müxtəlif məsələlərinə tətbiq olunur.

S.Samkonun və Dininqin dəyişən dərəcəli fəzalar sahəsində olan məlum işləri ilə bu fəzaların harmonik analiz və potensial nəzəriyyəsinin məsələlərinə nüfuz etməsi prosesinin başlanğıcı qoyulur. S.Samkonun işlərində müəyyən bürünmə inteqral operatorların (o cümlədən Riss potensialının) dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarında, Dininqin işlərində isə Hardi-Littvuld maksimal operatorunun $L^{p(\cdot)}$ fəzasında məhdudluğu öyrənilir. Bu işlərdən sonra həm də dəyişən dərəcəli fəzaların sürətli inkişafı başlayır. Qeyd etmək lazımdır ki, Azərbaycan riyaziyyatçıları V.Quliyevin, B.Bilalovun, F.Məmmədovun, R.Bəndəliyevin və başqalarının müəyyən tədqiqatları dəyişən dərəcəli fəzaların öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Lokal kompakt qruplar nəzəriyyəsində elə fəzalar meydana çıxır ki, onlar qrup təşkil etmir, lakin qrupların müəyyən strukturunu özündə saxlayır. Çox vaxt bu struktur həmin fəzalarda verilən ölçülərin abstrakt bürünməsi şəklində ifadə olunur. Hiperqrup elə ölçülər cəbridir ki, burada, qruplarda verilən ölçülərin bürünməsinin cəbri ilə əlaqəli bir çox əhəmiyyətli xassələr saxlanılır. Analizdə hiperqrup anlayışı, lokal kompakt Hausdorf qrupu anlayışının ümumiləşməsidir.

Dissertasiya işində hiperqruplarda verilən bürünmə tipli inteqral operatorlar da araşdırılır.

Lokal kompaktlıq anlayışının təyin olunması topoloji qrupların öyrənilməsində xüsusilə vacibdir, belə ki hər bir lokal kompakt Hausdorf qrupunda Haar ölçüsü vermək olar ki, bu da həmin qrupda funksiyaları inteqrallamağa imkan verir. R^n fəzasında Lebeq ölçüsü Haar ölçüsü rolunu oynayır. Lokal kompakt Hausdorf qruplarında Haar ölçüsü vasitəsilə bürünmə inteqral operatoru (iki funksiyanın bürünməsi) anlayışı verilə bilir.

Lokal kompakt qruplar harmonik analizdə tətbiq edilir. Belə ki harmonik analizin müasir bölmələrindən biri lokal kompakt qrupların öyrənilməsinə həsr edilmişdir. Qruplarda tətbiq olunan metodlar analizdə və onun tətbiqi məsələlərində, o cümlədən kvant mexanikasının məsələlərində vacib rol oynayır. Sürüşmə operatoru, bürünmə, periodik funksiya, sanki periodik funksiya, müsbət müəyyən funksiya və s. kimi bəzi riyazi anlayışlar qrup terminlərində ifadə oluna bilir. Bu nəzəriyyənin əhəmiyyətli franqmentləri ümumiləşmiş sürüşmə operatorlarının Delsart—Levitan nəzəriyyəsi, kəsilməz bazisə malik hiperkompleks sistemlərin Yu. M. Berezanskiy-S. Q. Kreyn nəzəriyyəsi, bürünmə cəbrləri nəzəriyyəsi və s. kimi tanınmışdır.

Hiperqrup elə əlavə struktura malik topoloji fəzadır ki, burada qrup cəbri tipində Banax cəbri və ya topoloji cəbr qurmaq mümkündür (bunu bəzən hiperqrup cəbri adlandırırlar). Hiperqrup vasitəsilə Furye cevirməsinin analoqunu qurmaq olur, Planşerel teoremini və çevirmə düsturunu almaq olur. Sən demə bunun tərsi də doğrudur: Belə ki Furye cevirməsi tip çevirmənin varlığı və burada Planşerel teoreminin, çevirmə düsturunun doğruluğu, hökmən burada müəyyən hiperqrupun varlığı ilə əlaqəlidir. Məhz bu nəticə harmonik analizin müxtəlif məsələlərində hiperqrup strukturlarının meydana çıxmasını izah edir.

İşin məqsədi.

1. Ümumiləşmiş potensialların dəyişən dərəcəli Lebeq fəzasından Musielak-Orliç fəzasına məhdud təsirinin öyrənilməsi.
2. Ümumiləşmiş potensialların dəyişən dərəcəli çəkili Lebeq fəzasından çəkili Musielak-Orliç fəzasına məhdud təsirinin öyrənilməsi.
3. Bircins fəzalarda verilən ümumiləşmiş potensialların funksiya kimi kəsilməzlik xassələrinin öyrənilməsi.
4. Bircins fəzalarda verilən ümumiləşmiş potensialların sonsuzluqda limitinin öyrənilməsi.
5. Kommutativ hiperqruplarda iki funksiyanın bürünməsi üçün ümumiləşmiş Yunq bərabərsizliyinin alınması.
6. Kommutativ hiperqruplarda verilən ümumiləşmiş Rİss potensiallarının, Hardi-Littvuld maksimal operatonun, kəsr-maksimal maksimal operatorlarınıin öyrənilməsi.
7. Qeyri-bircins fəzalarda verilən ümumiləşmiş potensialların Lebeq fəzalarında məhdudluğunun araşdırılması.

Elmi yenilik. Dissertasiya işinin bütün əsas nəticələri yenidir. Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- bircins fəzalarda ümumiləşmiş potensialların dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarından müəyyən Musielak-Orliç fəzasına məhdud təsiri haqqında teorem isbat edilmişdir;

- bircins fəzalarda ümumiləşmiş potensialların çəkili dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarından müəyyən çəkili Musielak-Orliç fəzasına məhdud təsiri isbat edilmişdir;
- bircins fəzalarda ümumiləşmiş Riss potensialların varlığı və funksiya kimi kəsilməzliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir;
- kvazi metrikaya görə bir-birinə yaxın nöqtələrdə, bircins fəzalarda Riss potensialların sonlu artımının özünü aparması öyrənilmişdir;
- ümumiləşmiş Riss potensialların sonsuzluqda özünü aparması haqqında zəruri və kafi şərt alınmışdır;
- kommutativ hiperqruplarda Riss potensialların çəkili Lebeq fəzalarında məhdud təsiri üçün yerdəyişmə funksiyası terminlərində kafi şərt tapılmışdır;
- kommutativ hiperqruplarda ümumiləşmiş Riss potensialları üçün Nakai-Sumitomo teoreminin analoqu isbat edilmişdir;
- kommutativ hiperqruplarda iki funksiyanın bürünməsi üçün ONeil bərabərsizliyi və ümumiləşmiş Yunq bərabərsizliyi isbat edilmişdir;
- hiperqruplarda Riss potensialları, Hardi-Littvuld maksimal operatoru və kəsr maksimal operatorlar arasında müəyyən nöqtəvi qiymətləndirmələr tapılmışdır;
- qeyrı-bircins fəzalarda loqarifmik potensialların varlığı və funksiya kimi kəsilməzliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.
- qeyri-bircins fəzalarda ümumiləşmiş Riss potensialların, müxtəlif ölçülərlə təchiz edilmiş Lebeq fəzalərında məhdudluğu araşdırılmışdır.

Tədqiqatların ümumi metodikası. Dissertasiya işində funksiyalar nəzəriyyəsinin və funksional analizin, inteqral operatorlar nəzəriyyəsinin, harmonik analizin, potensial nəzəriyyəsinin metodları tətbiq edilir.

Işin nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya işi nəzəri xarakter daşıyır. Dissertasiyada alınan nəticələr xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsində, habelə riyazi fizika və mexanikanın bəzi məsələlərində tətbiq edilə bilər. Dissertasiya işinin nəticələri yenidir.

İşin aprobasiyası. Dissertasiya işinin nəticələri AMEA RMİ-nin "Riyazi analiz" şöbəsinin (əvvəlki rəhbəri akademik A.C.Hacıyev, indiki rəhbəri f.-r. e. d., AMEA-nin müxbir üzvü V.S.Quliyev) seminarlarında; AMEA RMİ-nin "Qeyri-harmonik analiz" şöbəsinin (rəhbəri f.-r. e. d., AMEA-nin müxbir üzvü B.T.Bilalov) seminarlarında; AMEA RMİ-nin "Riyazi fizika" şöbəsinin (rəhbəri f.-r. e. d., AMEA-nin müxbir üzvü R.Hüseynov) seminarlarında; AMEA RMİ-nin ümuminstitut seminarlarında; Rusiya EA-nın akademiki S.M.Nikolskinin 100 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransda (Moskva, 2005); AMEA-nin müxbir üzvü İ.Məmmədovun 50 illiyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika üzrə Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2005); Abdussalam adına nəzəri fizika üzrə Beynəlxalq mərkəzdə (Triest, İtaliya, 2006); AMEA-nin müxbir üzvü B.İsgəndərovun 70 illiyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika üzrə Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2006); AMEA-nın həqiqi üzvü A.C.Hacıyevin 70 illiyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika üzrə on üçüncü Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2007); Rusiya EA-nın müxbir üzvü L.D.Kudryavtsevin 85 illiyinə həsr olunmuş üçüncü Beynəlxalq konfransda (Moskva, 2008); Professor V.Q.Mazyanın 70 illiyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransda (Roma, İtaliya, 2008); A. Razmadze adına Riyaziyyat İnstitutu və Gürcüstan Texniki Universiteti ilə birgə keçirilən işçi seminarda (Tbilisi, 2008); ISAAC-ın 7-ci Beynəlxalq konqresində (London, Böyük Britaniya, 2008); AMEA RMİ-nin 50 illiyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika üzrə Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2009); professor S.Q.Samkonun 70 illiyinə həsr olunmuş Beynəlxalq seminarda (Rostov, 2011); professor A.Stepanetsin 70 illiyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransda (Kiev, Kamenets-Podolskiy, 2012); AMEA-nın akademiki İ.İbrahimovun 100 illiyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika üzrə Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2012); Ukrayna MEA-nın akademiki A.M.Samoylenkonun 75 illiyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransda (Kiev, Sevastopol, 2013); MADEA-7 Beynəlxalq konfransında (Bakı, 2015) məruzə edilmişdir.

Nəşrlər. Dissertasiyanın əsas nəticələri 39 elmi işdə nəşr olunmuşdur. Onların siyahısı avtoreferatın sonunda verilmişdir.

İşin strukturu və həcmi. Dissertasiya işinin həcmi 266 səhifədir. Dissertasiya işi girişdən, beş fəsildən və 253 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

İŞİN MƏZMUNU

Girişdə dissertasiya işinin mövzusunun aktuallığı əsaslandırılır, dissertasiya işinin mövzusu ilə əlaqəli olan nəticələrin qısa tarixi icmalı verilir və dissertasiyanın əsas nəticələri şərh olunur.

Birinci fəsildə bircins fəzalarda verilən ümumiləşmiş potensialların dəyişən dərəcəli fəzalarda məhdudluğu məsələləri araşdırılır.

Həmin fəslin 1.1 yarımfəslində dissertasiya işində istifadə olunan müəyyən məlum anlayışlar daxil edilir. Onların sırasında bircins fəza, Musielak-Orliç fəzası, habelə dəyişən dərəcəli Lebeq fəzaları kimi anlayişlar da yer alır.

Tərif 1 Tutaq ki, ρ kvazimetrikası və μ müsbət Borel requlyar ölçüsünə malik (X,ρ,μ) fəzası verilmişdir və hər bir $x \in X$ nöqtəsi və $r > 0$ üçün $0 < \mu B(x,r) < \infty$. Fərz edək ki, elə $C_\mu > 0$ sabit ədədi var ki, hər bir $x \in X$ nöqtəsi və $r > 0$ üçün

$$\mu B(x,2r) \le C_\mu \mu B(x,r) \qquad (1)$$

bərabərsizliyi ödənir. Onda deyirlər ki, μ ölçüsü ikililik şərtini ödəyir. (1) şərtini ödəyən (X,ρ,μ) fəzası isə bircins fəza adlanır.

Bircins fəza anlayışı 1971-ci ildə Koyfman və Veys tərəfindən daxil edilmişdir.

Tutaq ki, $N \in (0,\infty)$ və ρ kvazimetrikası və μ müsbət Borel requlyar ölçüsünə malik (X,ρ,μ) fəzası verilmişdir. Fərz edək ki, elə $K > 0$ sabit ədədi var ki, hər bir $x \in X$ nöqtəsi və $r > 0$ üçün $\mu B(x,r) \le K r^N$ bərabərsizliyi ödənir. Onda deyirlər ki, μ ölçüsü (və ya X fəzası) yuxarıdan Alfors N -requlyardır.

Tərif 2 Tutaq ki, (X,μ) müsbət Borel requlyar μ ölçüsünə malik fəzadır və $\Phi : X \times [0,\infty) \to [0,+\infty)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir: 1) hər bir qeyd olunmuş $x \in X$ nöqtəsi üçün $\Phi(x,t)$ funksiyası t – yə görə ($t \in [0,\infty)$) qabarıq, monoton artan, kəsilməzdir; 2) $\Phi(x,0) = 0$ və hər bir $t > 0$ nöqtəsi üçün $\Phi(x,t) > 0$ bərabərsizliyi ödənir; 3) hər bir qeyd olunmuş $t \ge 0$ nöqtəsi üçün $\Phi(x,t)$ funksiyası x-ə görə μ-ölçüləndir. Onda $\Phi(x,t)$ funksiyası N -funksiya adlanır.

Tutaq ki, (X,μ) müsbət Borel requlyar μ ölçüsünə malik fəza və $\Phi(x,t)$ funksiyası N -funksiyadır. Onda

$$\mathsf{M}_\Phi(f) = \int_X \Phi(x,|f(x)|)\,d\mu(x)$$

inteqralı modulyar adlanır.

Tərif 3 Tutaq ki, $\Phi(x,t)$ funksiyası N -funksiyadır. Həqiqi qiymətli, μ-ölçülən, X-də μ sanki hər yerdə sonlu və müəyyən $\lambda > 0$ üçün

$\mathsf{M}_{\Phi}\left(\frac{f}{\lambda}\right) < \infty$ şərtini ödəyən f funksiyaları çoxluğu $L^{\Phi}(X)$ Musielak-Orliç sinfi adlanır. Əgər həmin sinifdə

$$\| f \|_{\Phi} = \inf\left\{\lambda > 0 : \mathsf{M}_{\Phi}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \le 1\right\}$$

norması təyin etsək, onda o, Musielak-Orliç fəzasına çevrilir.

X - də μ-ölçülən $p : X \to [1,+\infty)$ funksiyası üçün $\Phi(x,t) = t^{p(x)}$ funksiyasına baxaq. Yoxlamaq olar ki, bu funksiya N-funksiyadır. $\Phi(x,t) = t^{p(x)}$ olduqda Orliç-Musielak fəzası dəyişən dərəcəli Lebeq fəzası adlanır və $L^{p(\cdot)}(X)$ ilə işarə olunur. Dəyişən dərəcəli Lebeq fəzasının normasını

$$\| f \|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_X \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} d\mu(x) \le 1\right\}$$

ilə işarə edirik.

$p_- = essinf_{x\in X}\, p(x), \quad p_+ = esssup_{x\in X}\, p(x)$ işarələmələrini qəbul edək. Biz fərz edəcəyik ki, $p(x)$ funksiyası

$$1 < p_- \le p(x) \le p_+ < +\infty, \qquad (2)$$

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{\mathsf{A}}{-\ln \rho(x,y)}, \quad \rho(x,y) \le \frac{1}{2} \qquad (3)$$

şərtlərinir ödəyir, burada $\mathsf{A} > 0$ sabiti x və y-dən asılı deyil. (3) şərti zəif Lipşis şərti adlanır.

Biz həmçinin $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ işarələməsindən istifadə edəcəyik.

1.2 yarimfəslidə birdəyişənli funksiyaların müəyyən sinifləri daxil edilmişdir.

Tərif 4 Fərz edək ki, $0 < d < \infty$. $W_0 = W_0([0,d])$ ilə aşağıdakı üç şərti ödəyən bütün $a = a(r)$ funksiyaları sinfini işarə edəcəyik: 1) W_0-dan olan hər bir $a = a(r)$ funksiyası $[0,d]$ parçasında mənfi deyil və kəsilməzdir; 2) W_0-dan olan hər bir $a = a(r)$ funksiyası sanki artır; 3) W_0-dan olan hər bir $a = a(r)$ funksiyası üçün $\lim_{r\to 0} a(r) = 0$.

1.3 və 1.4 yarimfəsillərində bəzi lemmalar isbat olunur. 1.5 və 1.6 yarımfəsillərində

$$\beta_p = \beta_p(x,r) := \left\| \frac{a[\rho(x,\cdot)]}{[\rho(x,\cdot)]^N} \chi_{X \setminus B(x,r)}(\cdot) \right\|_{p(\cdot)}$$

norması qiymətləndirilir.

Teorem 1 Tutaq ki, (X,ρ,μ) yuxarıdan Alfors N-requlyar ölçüsünə malik məhdud bircins fəzadır, $d = diamX$, $p : X \to [0,\infty)$ funksiyası isə (2) və (3) şərtlərini ödəyir. Fərz edək ki, $a(t)$ funksiyası $(0,d]$-də mənfi olmayan, kəsilməz, sanki artandır və $\frac{a(r)}{r^N}$ funksiyası $(0,d]$-də sanki azalandır. Onda $x \in X$-dən və $r \in (0,d)$-dən asılı olmayan elə $C > 0$ sabit ədədi var ki,

$$\beta_p(x,r) \le C \left(\int_r^d \left[\frac{a(t)}{t^{\frac{N}{p'(x)}}} \right]^{p(x)} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p(x)}} + C\chi_{\left[\frac{d}{2},d\right]}(r)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

1.7 yarımfəslində xüsusi tipli funksiya daxil olunur. Göstərilir ki, həmin funksiyanin tərs funksiyası N-funksiyadır. Həmin funksiyanın ekvivalent formaları tapılır.

1.8 yarımfəslində birinci fəslin əsas nəticəsi isbat olunur. Həmin yarımfəsildə ümumiləşmiş Riss potensiallarının dəyişən dərəcəli Lebeq fəzasından Musielak-Orliç fəzasına məhdud təsiri öyrənilir.

Tutaq ki, (X,ρ,μ) yuxarıdan Alfors N-requlyar μ ölçüsünə malik məhdud fəzadır. Formal olaraq

$$I_a f(x) = \int_X \frac{a[\rho(x,y)]}{[\rho(x,y)]^N} f(y)d\mu(y) \qquad (4)$$

operatorunu təyin edək. $a = a(r)$ funksiyası üzərinə qoyulmuş müəyyən şərtlər daxilində (məsələn, həmin şərtlər teorem 2-də verilmişdir), biz I_a operatorunu ümumiləşmiş Riss potensialı adlandiracağıq.

Biz həmçinin $A(r) = \int_0^r \frac{a(t)}{t} dt$ funksiyasına baxacağıq.

Teorem 2 Tutaq ki, (X,ρ,μ) yuxarıdan Alfors N-requlyar ölçüsünə malik məhdud və bircins fəzadır, $d = diamX$, $p: X \to [0,\infty)$ funksiyası isə (2) və (3) şərtlərini ödəyir. Fərz edək ki, $a \in W_0([0,d])$ funksiyası $\int_0^d \frac{a(t)}{t}dt < \infty$ şərtini ödəyir və müəyyən $0 < \lambda < \frac{N}{p_+}$ üçün $\frac{a(r)}{r^\lambda}$ funksiyası [0,d]-də sanki azalır. Onda I_a operatoru $L^{p(\cdot)}(X)$ fəzasından $L^\Phi(X)$ Musielak-Orliç fəzasına məhdud təsir edir, burada N-funksiya özünün tərs funksiyası vasitəsilə (hər bir qeyd olunmuş $x \in X$ nöqtəsi üçün)

$$\Phi^{-1}(x,u) = \int_0^u A\left(t^{-\frac{1}{N}}\right) t^{-\frac{1}{p'(x)}} dt \qquad (5)$$

şəklində təyin olunur və $a(t)$ funksiyası $r > d$ olduqda $a(t) \equiv a(d)$ şəklində davam etdirilmiş sayılır.

1.9 yarımfəslində $a(r)$ funksiyası üzərinə teorem 2-də qoyulan şərtlər dəyişdirilərək, onun yuxarı Matuçevska-Orliç indeksi terminlərində ifadə olunur. $a \in W_0$ funksiyası üçün

$$M(a) = \sup_{x>1} \frac{\ln\left(\limsup\limits_{h\to 0} \frac{a(hx)}{a(h)}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\limsup\limits_{h\to 0} \frac{a(hx)}{a(h)}\right)}{\ln x}$$

ədədi $a(r)$ funksiyasının yuxarı Matuçevska-Orliç indeksi adlanır.

Teorem 3 Tutaq ki, (X,ρ,μ) yuxarıdan Alfors N-requlyar ölçüsünə malik məhdud bircins fəzadır, $d = diamX$, $p: X \to [0,\infty)$ funksiyası isə (2) və (3) şərtlərini ödəyir. Əgər $a \in W_0([0,d])$ funksiyası $\int_0^d \frac{a(t)}{t}dt < \infty$ şərtini ödəyirsə və $M(a) < \frac{N}{p_+}$ olarsa, onda I_a operatoru $L^{p(\cdot)}(X)$ fəzasından $L^\Phi(X)$ Musielak-Orliç fəzasına məhdud təsir edir, burada N-funksiya özünün tərs funksiyası vasitəsilə (hər bir qeyd olunmuş $x \in X$ nöqtəsi üçün) (5) şəklində təyin olunur və $a(t)$ funksiyası $r > d$ olduqda $a(t) \equiv a(d)$ şəklində davam etdirilmiş sayılır.

İkinci fəsildə ümumiləşmiş potensiallar üçün dəyişən dərəcəli fəzalarda çəkili qiymətləndirmələr alınmışdır. 2.1 yarımfəslində əvvəllər məlum olan çəkili Musielak-Orliç fəzası, X fəzasının $\underline{\dim}(X)$ aşağı ölçülüyü kimi anlayışlar və bəzi faktlar verilir.

(X,μ) fəzasında çəki dedikdə, X-də müsbət və μ-lokal inteqrallanan funksiya başa düşülür.

Tərif 5 Tutaq ki, (X,μ) müsbət Borel requlyar μ ölçüsünə malik fəzadır, $\Phi(x,t)$ funksiyası N-funksiyadır, w isə X-də çəkidir. $L^{\Phi}(X,w)$ çəkili Musielak-Orliç sinfi dedikdə, X-də həqiqi qiymətli, μ-ölçülən və μ sanki hər yerdə sonlu, müəyyən $\lambda>0$ üçün

$$\int_X \Phi\left(x,\frac{w(x)f(x)}{\lambda}\right)d\mu(x)<\infty$$

şərtini ödəyən bütün f funksiyaları çoxluğu başa düşülür. Əgər həmin sinifdə

$$\| f \|_{\Phi,w}=\inf\left\{\lambda>0:\int_X \Phi\left(x,\frac{w(x)f(x)}{\lambda}\right)d\mu(x)\le 1\right\}$$

norması təyin etsək, onda o, çəkili Musielak-Orliç fəzasına çevrilir.

Xüsusi halda, əgər $\Phi(x,t)=t^{p(x)}$, burada $1\le p(x)<\infty$, olarsa, onda çəkili Musielak-Orliç fəzası dəyişən dərəcəli çəkili Lebeq fəzası adlanır və $L^{p(\cdot)}(X,w)$ ilə işarə olunur.

ρ kvazimetrikası və müsbət Borel requlyar μ ölçüsü ilə təchiz olunmuş malik (X,ρ,μ) fəzana baxaq. X fəzasının $\underline{\dim}(X)$ aşağı ölçülüyü

$$\underline{\dim}(X)=\sup_{t>1}\frac{\ln\left(\liminf\limits_{r\to 0}\inf\limits_{x\in X}\dfrac{\mu B(x,rt)}{\mu B(x,r)}\right)}{\ln t}$$

şəklində təyin olunur.

Qeyd olunmuş $x_0\in X$ nöqtəsi üçün $w^{\nu}=[\rho(x,x_0)]^{\nu}$ işarələməsini aparaq.

2.2 yarımfəslində

$$\mathrm{J}(x,r)=\int_{X\setminus B(x,r)}\left(\frac{a(\rho(x,y))}{\rho(x,y)^N}\right)^{p(x)}\rho(y,x_0)^b\,d\mu(y),\quad x_0\in X,$$

inteqralı qiymətləndirilir.

2.3 yarımfəslində kəsilmiş ümumiləşmiş potensialların çəkili qiymətləndirilmələri öyrənilir, yəni $a(t)$ funksiyası üzərinə müəyyən şərtlər daxilində

$$\eta_{p,\gamma}(x,r)=\left\|\frac{a(\rho(x,y))}{\rho(x,y)^N}\right\|_{L^{p(\cdot)}\left(X\setminus B(x,r),w^{\frac{\gamma-N}{p(y)}}\right)},$$

norması qiymətləndirilir, burada

$$w^{\frac{\gamma-N}{p(y)}}(y)=\rho(x_0,y)^{\frac{\gamma-N}{p(y)}} \text{ və } \gamma>0.$$

2.4 yarımfəslində bircins fəzalarda verilmiş ümumiləşmiş Riss potensiallarının dəyişən dərəcəli çəkili Lebeq fəzasından çəkili Musielak-Orliç fəzasına məhdud təsiri öyrənilir.

Aşağıdakı iki teorem ikinci fəslin əsas nəticələridir.

Teorem 4 Tutaq ki, (X,ρ,μ) ikililik şərtinə malik ölçü ilə təchiz olunmuş kvazimetrik məhdud fəzadır, belə ki, onun $\underline{\dim}(X)$ aşağı ölçülüyü sonlu müsbət ədəddir, $d=diamX$, $x_0\in X$, $p:X\to[0,\infty)$ funksiyası (2) və (3) şərtlərini və ν ədədi

$$0\le\nu<\frac{\underline{\dim}(X)}{p'(x_0)}$$

şərtini ödəyir. Həmçinin, fərz edək ki, $a(r):(0,d]\to(0,+\infty)$ funksiyası kəsilməz və sanki artandır, $\int_0^d\frac{a(t)}{t}dt<\infty$ şərtini ödəyir və elə

$$\beta\in\left(0,\frac{\underline{\dim}(X)}{p_+}\right)$$

ədədi var ki, $\frac{a(r)}{r^\beta}$ funksiyası $(0,d]$-də sanki azalır. Onda

$$\max\left(\nu p'(x_0),\beta p_+\right)<N<\underline{\dim}(X),$$

şərtini ödəyən ixtiyari N ədədi üçün (4) operatoru $L^{p(\cdot)}\left(X,\rho(\cdot,x_0)^\nu\right)$ dəyişən dərəcəli çəkili Lebeq fəzasından $L^\Phi(X,\rho(\cdot,x_0)^{\nu_1})$ çəkili Musielak-Orliç fəzasına məhdud təsir edir, burada $\nu_1=\frac{\nu}{p(x_0)}$ kimi təyin edilir, N-funksiya Φ özünün tərs funksiyası vasitəsilə (hər bir qeyd olunmuş $x\in X$

nöqtəsi üçün) (5) şəklində verilir və $a(t)$ funksiyası $r > d$ olduqda $a(t) \equiv a(d)$ şəklində davam etdirilmiş sayılır.

Teorem 5 Tutaq ki, ρ kvazimetrikası və müsbət Borel requlyar μ ölçüsü ilə təchiz olunmuş malik (X, ρ, μ) fəzası məhduddur, $d = diamX$, elə $c_1 > 0$ və $c_2 > 0$ ədədləri var ki, ixtiyari $x \in X$ nöqtəsi və ixtiyari $0 < r < d$ üçün

$$c_1 r^N \leq \mu B(x, r) \leq c_2 r^N$$

bərabərsizliyi ödənir. Fərz edək ki, $p : X \to [0, \infty)$ funksiyası (2) və (3) şərtlərini ödəyir, $0 \leq \nu < \frac{N}{p'(x_0)}, x_0 \in X$ $a(r) : (0, d] \to (0, +\infty)$ funksiyası kəsilməz və sanki artandır, $\int_0^d \frac{a(t)}{t} dt < \infty$ şərti ödənir və elə $\beta \in \left(0, \frac{N}{p_+}\right)$ ədədi var ki, $\frac{a(r)}{r^\beta}$ funksiyası $(0, d]$-də sanki azalır. Onda (4) operatoru operatoru $L^{p(\cdot)}\left(X, \rho(\cdot, x_0)^\nu\right)$ dəyişən dərəcəli çəkili Lebeq fəzasından $L^\Phi(X, \rho(\cdot, x_0)^{\nu_1})$ çəkili Musielak-Orliç fəzasına məhdud təsir edir, burada $\nu_1 = \frac{\nu}{p(x_0)}$ kimi təyin edilir, N-funksiya Φ özünün tərs funksiyası vasitəsilə (hər bir qeyd olunmuş $x \in X$ nöqtəsi üçün) (5) şəklində verilir və $a(t)$ funksiyası $r > d$ olduqda $a(t) \equiv a(d)$ şəklində davam etdirilmiş sayılır.

Üçüncü fəsildə ümumiləşmiş potensialların "incə" ("yaxşı") xassələri öyrənilir. Daha dəqiq desək, ümumiləşmiş potensialların x-in funksiyası kimi müəyyən limit xassələri, o cümlədən kəsilməzlik xassələri öyrənilir.

Klassik $I_\alpha f(x)$ Riss potensialının x-in funksiyası kimi kəsilməzlik xassələri Mizutanın işlərində öyrənilmişdir. Hacıyev və Doğrunun məlum işində klassik Riss potensialarının varlığı və kəsilməzliyi haqqında nəticələr λ-məsafədən asılı olan anizotrop nüvələrə malik olan Riss potensialları üçün ümumiləşmişdir.

Sobolevin daxilolma teoreminə görə, əgər $I_\alpha f(x)$ Riss potensialı sanki hər yerdə sonludursa və $p > \frac{n}{\alpha}$ olarsa, onda $I_\alpha f$ operatoru $L_p\left(R^n\right)$

fəzasından $C(R^n)$ fəzasına məhdud təsir edir. Lakin bu fakt $p \le \dfrac{n}{\alpha}$ olduqda doğru deyil. Ona gorə Y. Mizuta $p = \dfrac{n}{\alpha}$ olduqda $L_p(R^n)$ fəzasının elə bir altsinfini tapdı ki, həmin altsinif $L_p(R^n)$ fəzasından fərqli olan heç bir $L_q(R^n)$ fəzasına daxil deyil və $I_\alpha f$ potensialı bu sinifdən $C(R^n)$ fəzasına məhdud təsir edir.

Mizutanın Riss potensiallarının kəsilməzliyi üçün tətbiq etdiyi metodların modifikasiya olunmuş formalarından istifadə edərək, biz abstrakt fəzalarda ümumiləşmiş Riss potensiallarının kəsilməzlik xassələrini araşdırırıq.

3.1 yarımfəslində potensialların kəsilməzliyi haqqında bəzi tarixi faktlar sadalanır. 3.2 yarımfəslində Riss potensiallarının ümumiləşmələri olan inteqral operatorların varlığı haqqında teorem isbat olunur.

Teorem 6 Tutaq ki, ρ kvazimetrikası və müsbət Borel μ ölçüsü ilə təchiz olunmuş (X,ρ,μ) fəzası üçün $supp\mu = X$, $diam X = \infty$ və f funksiyası X-də μ-lokal inteqrallanandır. Fərz edək ki, $K:(0,\infty)\to[0,\infty)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir.

(K_1) $K(t)$ sanki azalan funksiyadır;

(K_2) elə $M \ge 1$ sabiti var ki, ixtiyari $r > 0$ üçün $K(r) \le MK(2r)$ bərabərsizliyi ödənir;

(K_3) elə $A > 0$ ədədi var ki, hər bir $x \in X$ üçün

$$\int_{B(x,r)} K(\rho(x,y))d\mu(y) < A$$

bərabərsizliyi ödənir.

Onda

$$U_K f(x) = \int_X K(\rho(x,y))f(y)d\mu(y)$$

inteqralının X-də μ-sanki hər yerdə varlığı üçün varlığı üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı şərtlərdən birinin ödənməsidir.

(i) Elə $x_0 \in X$ nöqtəsi tapmaq olar ki,

$$\int_{X\setminus B(x_0,1)} K(\rho(x_0,y))f(y)d\mu(y) < \infty;$$

(ii) Hər bir $x \in X$ nöqtəsi üçün

$$\int_{X \setminus B(x,1)} K(\rho(x,y)) f(y) d\mu(y) < \infty;$$

(iii) Elə $x^0 \in X$ nöqtəsi tapmaq olar ki, $\int_X K(1+\rho(x^0,y)) f(y) d\mu(y) < \infty$.

3.3 yarımfəslində bircins fəzalıarda ümumiləşmiş potensialların kəsilməzliyi üçün əsas lemma isbat olunur. 3.4 yarımfəslində ümumiləşmiş potensialların kəsilməzliyi haqqında teorem isbat olunur.

Tutaq ki, $\phi(r)$ funksiyası $(0,\infty)$-da ciddi artandır və $\lim_{r \downarrow 0} \phi(r) = 0$. Fərz edək ki, X çoxluğu ρ kvazimetrikası və müsbət Borel μ ölçüsü ilə təchiz olunmuşdur, $supp\mu = X$, $diam X = \infty$ və elə $C \geq 1$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $r > 0$ ədədi və ixtiyari $x \in X$ nöqtəsi üçün

$$C^{-1}\phi(r) \leq \mu(B(x,r)) \leq C\phi(r).$$

Bu cür fəzanı $(X,\rho,\mu)_\phi$ ilə işarə edək.

Teorem 7 Tutaq ki, $(X,\rho,\mu)_\phi$ fəzası verilmişdir, $K:(0,\infty) \to [0,\infty)$ funksiyası kəsilməzdir, (K_1), (K_2), (K_4) şərtlərini ödəyir və elə $F > 0$ sabit ədədi və $0 < \sigma < 1$ var ki, ixtiyari $r > 0$ üçün

$$\int_{B(x,r)} K(\rho(x,y)) d\mu(y) < F\phi(r)^\sigma.$$

Fərz edək ki, $p = \dfrac{1}{\sigma}$, f funksiyası X-də μ-lokal inteqrallanandır, (iii) və

$$\int_X |f(y)|^p w(|f(y)|) d\mu(y) < \infty, \qquad (6)$$

şərtləri ödənir, burada

(w_1) w funksiyası $(0,\infty)$-da müsbət və ciddi artandır;

(w_2) $\int_1^\infty w(r)^{-\frac{1}{p-1}} \dfrac{dr}{r} < \infty$;

(w_3) Elə $A > 0$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $r > 0$ üçün $w(2r) < Aw(r)$.

Onda $U_K f(x)$ X-də kəsilməzdir.

Qeyd 1 (w_1), (w_2), (w_3) şərtlərini ödəyən $w(r)$ funksiyasına aid misal $w(r)=\log(2+r)^{\delta}$; $w(r)=\log(2+r)^{p-1}\log(2+\log(2+r))^{\delta}$ və s., burada $\delta>p-1>0$, funksiyalarını göstərmək olar.

Qeyd 2 Tutaq ki, $\phi(r)=r^{d}$. Onda, $0<\alpha<d$ olduqda, $K(t)=t^{\alpha-d}$ və $K(t)=t^{\alpha-d}\log\left(1+t^{-1}\right)$ funksiyaları (K_1), (K_2), (K_4) şərtlərini ödəyir. Əgər $K(r)=r^{\alpha-d}$ olarsa, onda asanlıqla görmək olar ki, $\sigma=\dfrac{\alpha}{d}$. Əgər

$$K(t)=t^{\alpha-d}\log\left(1+t^{-1}\right)$$

olarsa, onda $\sigma=\dfrac{\alpha-\beta}{d}$.

3.5 yarımfəslində, kvazimetrikaya görə bir-birinə yaxın nöqtələrdə, bircins fəzalarda verilmiş Riss potensiallarının sonlu artımının özünü aparması haqqında teorem isbat olunur.

Tutaq ki, $d>0$ və $0<\theta\leq 1$. Fərz edək ki, X çoxluğu ρ kvazimetrikası və mənfi olmayan Borel μ ölçüsü ilə təchiz olunmuşdur, $supp\mu=X$, $diam X=\infty$ və elə $C\geq 1$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $r>0$ ədədi və ixtiyari $x,y,z\in X$ nöqtələri üçün

$$C^{-1}r^{d}<\mu(B(x,r))<Cr^{d},$$

$$|\rho(x,y)-\rho(z,y)|\leq C_0\rho(x,z)^{\theta}\left[\rho(x,y)+\rho(z,y)\right]^{1-\theta}.$$

Bu cür fəzanı $(X,\rho,\mu)_{d,\theta}$ ilə işarə edək.

Tutaq ki, $(X,\rho,\mu)_{d,\theta}$ fəzası verilmişdir və $0<\alpha<d$. Biz

$$R_\alpha f(x)=\int_X\rho(x,y)^{\alpha-d}f(y)d\mu(y)$$

Riss potensialına baxacağıq.

Teorem 8 Tutaq ki, $(X,\rho,\mu)_{d,\theta}$ fəzası verilmişdir, $p=\dfrac{d}{\alpha}>0$, $w(r)$ funksiyası (w_1), (w_2) şərtlərini ödəyir və

(w_4) elə $A_1>0$ sabiti var ki,

$$A_1^{-1}w(r)\leq w\left(r^2\right)\leq A_1w(r).$$

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası X-də μ-lokal inteqrallanandır, (6) şərtini ödəyir və elə x^0 nöqtəsi var ki,

$$\int_X \left(1+\rho\left(x^0, y\right)\right)^{\alpha-d} |f(y)| d\mu(y) < \infty.$$

Onda

$$\left|R_\alpha f(x) - R_\alpha f(z)\right| = o\left(w^*\left(\rho(x,z)\right)\right), \quad \rho(x,z) \to 0,$$

burada $w^*(r) = \left(\int_0^r w\left(t^{-1}\right)^{-\frac{1}{p-1}} t^{-1} dt \right)^{1-\frac{1}{p}}$.

3.6 yarımfəslində potensial tipli inteqralların sonsuzluqda özünü aparması üçün zəruri və kafi şərt isbat olunur.

Məlumdur ki, f kompakt daşıyıcısı olan mənfi olmayan funksiyadırsa, onda $I_\alpha f(x)$ klassik Riss potensialı sonsuzluq ətrafında özünü $|x|^{\alpha-n}$ kimi aparır. D. Siegel və E. Talvila, f funksiyası kompakt daşıyıcıya malik olmadığı halda belə, $I_\alpha f(x)$-in özünü $I_\alpha f(x) = O\left(|x|^{\alpha-n}\right)$, $|x| \to \infty$, kimi aparması üçün zəruri və kafi şərt tapmışlar.

Teorem 9 (D. Siegel və E. Talvila) Əgər $f \ge 0$ olarsa, onda aşağıdakı şərtlər ekvivalentdir:

a) hər bir $x \in R^n$ nöqtəsi üçün $\int_{R^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y) dy$ inteqralı yığılır və $I_\alpha f(x)$ özünü $|x| \to \infty$ yaxınlaşdıqda $O\left(|x|^{\alpha-n}\right)$ kimi aparır;

b) bütün $x \in R^n$ nöqtələri üçün

$$\int_{R^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y) (1+|y|)^{n-\alpha} dy$$

inteqralı yığılır.

3.6 yarımfəslində biz bu faktı ümumiləşdirərək, monoton azalan olan və ikililik şərtini ödəyən nüvəli bürünmə tipli inteqrallar üçün isbat edirik.

Formal olaraq $K_\mu(x) = \int_X K(\rho(x,y)) d\mu(y)$ inteqralına baxaq.

Teorem 10 Tutaq ki, (X, ρ, μ) fəzası ρ kvazimetrikası və müsbət Borel μ ölçüsü ilə təchiz olunmuşdur, $diam X = \infty$, $\xi \in X$, $K : (0,\infty) \to [0,\infty)$ funksiyası monoton azalandır və elə $C \ge 1$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $r > 0$ üçün $K(r) \le CK(2r)$. Onda aşağıdakı şərtlər ekvivalentdir:

a) hər bir $x \in X$ üçün $\int_X K(\rho(x,y))d\mu(y)$ inteqralı yığılır və $\rho(\xi,x) \to \infty$ yaxınlaşdıqda $K_\mu(x)$ özünü $O(K(\rho(\xi,x)))$ kimi aparır;

b) hər bir $x \in X$ nöqtəsi üçün

$$\int_X \frac{K(\rho(x,y))}{K(1+\rho(\xi,y))} d\mu(y)$$

inteqralı yığılır.

3.7 yarımfəslində ümumiləşmiş potensialların sonsuzluqda limit xassələri öyrənilmişdir.

Tərif 6 Tutaq ki, $\beta > 0$ və X çoxluğu ρ kvazimetrikası və mənfi olmayan Borel μ ölçüsü ilə təchiz olunmuşdur, $supp\mu = X$, $diam X = \infty$ və elə $C \geq 1$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $r > 0$ ədədi və ixtiyari $x \in X$ nöqtəsi üçün

$$C^{-1}r^\beta \leq \mu(B(x,r)) \leq Cr^\beta .$$

Bu cür fəzanı $(X,\rho,\mu)_\beta$ ilə işarə edəcəyik.

Теорема 11 Tutaq ki, $(X,\rho,\mu)_\beta$ fəzası verilmişdir, $K:(0,\infty) \to [0,\infty)$ funksiyası kəsilməzdir, (K_1), (K_2) şərtləri ödənir,

(K_5) elə $F > 0$ sabiti və $0 < \sigma < \beta$ var ki, ixtiyari $r > 0$ üçün

$$\int_{B(x,r)} K(\rho(x,y))d\mu(y) < Fr^\sigma ,$$

(K_6) $\lim_{r\to\infty} K(r) = 0.$

Fərz edək ki, f funksiyası X-də mənfi olmayan, μ-lokal inteqrallanandır, (iii) və

$$\int_X f(y)^p w(f(y))d\mu(y) < \infty,$$

şərtləri ödənir, burada

burada $p = \dfrac{\beta}{\sigma}$ və w funksiyası (w_1), (w_2), (w_3) şərtlərini ödəyir və

(w_5) ixtiyari $r \in (1,\infty)$ üçün $w(r^2) \leq A_1 w(r)$. Onda

$$w^*\left(\rho(\xi,x)^{-1}\right)^{\frac{1}{p}} U_K f(x) \to 0, \qquad \rho(\xi,x) \to \infty,$$

burada $w^*(r)=\left(\int\limits_r^{\infty} w(t)^{-\frac{1}{p-1}} t^{-1} dt\right)^{1-p}$.

Dördüncü fəsil hiperqrupda iki funksiyanın bürünməsinin xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. 4.1 yarımfəslində hiperqrup anlayışı haqqında məlumatlar yerini tapır, müəyyən təriflər, faktlar və işarələmələr, lemmalar verilir.

Tərif 7 $(K,*)$ hiperqrupu - elə Hausdorf lokal kompakt K fəzasıdır ki, K -da bütün məhdud Borel requlyar ölçülərinin Banax fəzasında bixətti, assotiativ, zəif kəsilməz bürünmə verilmişdir və aşağıdakı xassələr ödənir:

1. Hər bir $x,y\in K$ üçün Dirak ölçülərinin $\delta_x * \delta_y$ bürünməsi kompakt daşıyıcısı olan ehtimal ölçüsüdür.
2. $K\times K$ -dan $\mathcal{C}(K)$ -ya olan

$$(x,y)\mapsto supp(\delta_x * \delta_y)$$

inikası kəsilməzdir, burada $\mathcal{C}(K)$ ilə Maykl topologiyası ilə təchiz olunmuş K fəzasının kompakt altçoxluqları fəzası işarə edilmişdir. (Maykl topologiyası dedikdə, bütün

$$U_{V,W}=\{L\in\mathcal{C}(K): L\cap V\neq\varnothing, L\subset W\}$$

çoxluqlarının altbazisinin doğurduğu topologiya başa düşülür, burada V,W ilə K -nın açıq altçoxluqları işarə edilmişdir).

3. Neytral element (vahid) adlanan elə $e\in K$ elementi var ki, ixtiyari $x\in K$ üçün

$$\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x .$$

4. K -dan K -ya inikas edən, topoloji involyusiya adlanan və $\vee$ işarə edilən elə əməliyyat var ki, ixtiyari $x,y\in K$ üçün

$$\left(x^{\vee}\right)^{\vee}=x \quad \text{və} \quad \left(\delta_x * \delta_y\right)^{\vee}=\delta_{y^{\vee}} * \delta_{x^{\vee}},$$

burada hər bir Borel çoxluğu üçün $\mu^{\vee}(B)=\mu\left(\{x^{\vee}: x\in B\}\right)$ işarə edilmişdir.

5. İxtiyari $x,y\in K$ üçün

$$e\in supp(\delta_x * \delta_y)$$

münasibəti yalnız və yalnız o zaman doğru olur ki, $x=y^{\vee}$ olsun.

Əgər bütün $x,y\in K$ nöqtələri üçün $\delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x$ olarsa, onda K kommutativ hiperqrup adlanır.

Məlumdur ki, K kommutativ hiperqrupunda Haar ölçüsü vermək olar. (Haar ölçüsünü λ ilə işarə edəcəyik.) Haar ölçüsünün varlığı o deməkdir ki, K -da ixtiyari Borel mənada ölçülən f funksiyası üçün

$$\int_K f(\delta_x * \delta_y) d\lambda(y) = \int_K f(y) d\lambda(y) \; (x \in K)$$

bərabərliyi doğrudur.

$x \in K$ olduqda T^x ümumiləşmiş sürüşmə, ixtiyari $y \in K$ üçün

$$T^x f(y) = \int_K f d(\delta_x * \delta_y)$$

şəklində təyin edilir.

Əgər K hiperqrupu kommutativdirsə, onda $T^x f(y) = T^y f(x)$ və iki funksiyanın bürünməsi

$$(f *_K g)(x) = \int_K T^x f(y) g(y^\vee) d\lambda(y)$$

şəklində təyin olunur.

Tutaq ki, u funksiyası K kommutativ hipergrupunda mənfi olmayan və lokal λ -inteqrallanandır. $1 \le p \le \infty$ olduqda, çəkili Lebeq fəzası

$$L_u^p(K,\lambda) = \{f : K \to (-\infty, +\infty) : f \; K - \text{da} \; \lambda - \text{ölç.}, \| f \|_{K,p,u} < \infty\}$$

şəklində təyin olunur, burada $\| f \|_{K,p,u}$ norması

$$\| f \|_{K,p,u} = \begin{cases} \left(\int_K |f(x)|^p u(x) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in K} (f(x) u(x)), & p = \infty. \end{cases}$$

şəklində təyin olunur.

Əgər $u = 1$ olarsa, onda $L_u^p(K,\lambda)$ fəzasını $L^p(K,\lambda)$ ilə işarə edəcəyik. f funksiyasının $L^p(K,\lambda)$-dəki normasını isə $\| f \|_{K,p}$ və ya $\| f \|_{L^p(K,\lambda)}$ ilə işarə edəcəyik .

Fərz edək ki $f : K \to (-\infty, +\infty)$ Borel mənada ölçülən funksiyadır. f funksiyasının λ_f paylanma funksiyası

$$\lambda_f(s) = \lambda\{x : x \in K, |f(x)| > s\}, \qquad s > 0$$

şəklində təyin olunur.

Paylanma funksiyası ilə mənfi olmayan və yerdəyişmə funksiyası adlanan funksiya assosirə olunur. f funksiyasının yerdəyişmə funksiyası

$$f^{*K}(t)=\inf\{s>0:\lambda_f(s)\le t\}$$

şəklində təyin olunur.

f^{**K} ilə f^{*K} funksiyasının maksimal funksiyasını, yəni

$$f^{**K}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^{*K}(u)du,\quad t>0$$

işarə edək.

$1\le p<\infty$ və $1\le q\le\infty$ olduqda, $L^{p,q}(K,\lambda)$ Lorents fəzası

$$L^{p,q}(K,\lambda)=\{f:K\to(-\infty,+\infty): f\ K-\text{da}\ \lambda-\text{ölç.},\ \|f\|_{K,p,q}<\infty\},$$

şəklində təyin olunur, burada

$$\|f\|_{K,p,q}=\begin{cases}\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^{**K}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & 1\le p<\infty,1\le q<\infty\\ \sup\limits_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^{**K}(t), & 1\le p\le\infty,\ q=\infty.\end{cases}$$

$\Phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ funksiyası $\Phi(r)=\int_0^r\phi(t)dt$ şəklində göstərilə bilirsə, burada $\phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ mənfi olmayan, kəsilməz funksiyadır, $\phi(0)=0$ və $\lim_{t\to\infty}\phi(t)=\infty$, onda o, Yunq funksiyası adlanır.

Tutaq ki, Φ Yunq funksiyasıdır. K -da lokal inteqrallanan və müəyyən $\eta>0$ üçün

$$\int_K\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\eta}\right)d\lambda(x)<\infty$$

şərtini ödəyən bütün f funksiyaları çoxluğu $L^\Phi(K,\lambda)$ Orliç sinfi adlanır. Əgər həmin sinifdə

$$\|f\|_\Phi=\inf\{\eta>0:\int_K\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\eta}\right)d\lambda(x)\le 1\}$$

norması versək, onda $L^\Phi(K,\lambda)$ Orliç fəzası adlanır.

Tutaq ki, $(K,*)$ kommutativ hiperqrupunda ρ kvazimetrikası və λ Haar ölçüsü verilmişdir, belə ki, Haar ölçüsü hiperqrupun vahidi (neytral elementi) ətrafında yuxarıdan Alfors N-requlyardır. $(K,*)$-da Riss potensialını

$$I_\alpha^K f(x) = \left(\rho(e,\cdot)^{\alpha-N} *_K f\right)(x), 0 < \alpha < N \qquad (7)$$

şəklində təyin edək.

Həmçinin, $\Lambda_x(y) = T^x \chi_{B(e,r)}(y^\vee)$ funksiyasını təyin edək.

Biz fərz edəcəyik ki, elə $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ və $c_3 > 0$ sabitləri var ki, ixtiyari $x, y \in K$ və $r > 0$ üçün

$$supp\Lambda_x(\cdot) \subset B(x, c_1 r), \qquad (8)$$

$$\lambda B(x,r) T^x \chi_{B(e,r)}(y^\vee) \le c_2 \lambda B(e,r) \le c_3 r^N, \qquad (9)$$

münasibətləri ödənir, burada $B(x,r) = \{y \in K : \rho(x,y) < r\}$ mərkəzi x-də və radiusu r olan kürədir.

4.2 yarımfəsıində kommutativ hiperqruplarda Riss potensialları üçün iki çəkili qiymətləndirmələr alınır. Alınmış nəticə Heininqin klassik nəticəsinin ümumiləşdirir.

Teorem 12 Tutaq ki, $(K,*)$ kommutativ hiperqrupunda ρ kvazimetrikası və λ Haar ölçüsü verilmişdir, belə ki, Haar ölçüsü ikililik şərtini ödəyir və (8), (9) şərtləri ödənir, $0 < \alpha < N$, $1 < r < \frac{N}{\alpha}$, $1 < p \le q < +\infty$. Fərz edək ki, u, v funksiyaları K-da müsbət λ-lokal inteqrallanandır və

$$\sup_{s>0}\left(\int_s^{+\infty} u^{*K}(t) t^{-q(1-\frac{\alpha}{N})} dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^s \left((\frac{1}{v})^{*K}(t)\right)^{p'-1} dt\right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty ,$$

$$\sup_{s>0}\left(\int_0^s u^{*K}(t) t^{-q(\frac{1}{r}-\frac{\alpha}{N})} dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_s^{+\infty} \left((\frac{1}{v})^{*K}(t)\right)^{p'-1} t^{p'(\frac{1}{r}-1)} dt\right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty$$

Onda I_α^K operatoru $L_{K,p,v}(K)$ çəkili fəzasından $L_{K,q,u}(K)$ şəkili fəzasına məhdud təsir edir

4.3 yarımfəslində kommutativ hiperqruplarda ümumiləşmiş Riss potensialları təyin olunur və kommutativ hiperqruplarda Nakai-Sumitomo teoreminin analoqu isbat olunur. Qeyd edək ki, Nakai-Sumitomo teoremi klassik Riss potensialları üçün olan Hardi-Littlvud-Sobolev teoreminin ümumiləşməsidir və bircins fəzalarda verilən ümumiləşmiş Riss potensiallarının Lebeq fəzalarından Orliç fəzalarına məhdud təsiri haqqında hökm verir.

Azalmayan $a:(0,\infty)\to(0,\infty)$ funksiyası üçün ρ kvazimetrikası ilə təzhiz olunan $(K,*)$ kommutativ hiperqrupunda formal olaraq

$$I_a^K f(x)=\left(\frac{a(\rho(e,\cdot))}{\rho(e,\cdot)^N}*_K f\right)(x)$$

operatorunu təyin edək.

Teorem 13 Tutaq ki, $(K,*)$ kommutativ hiperqrupunda ρ kvazimetrikası və λ Haar ölçüsü verilmişdir, belə ki, Haar ölçüsü ikililik şərtini ödəyir və (8), (9) şərtləri ödənir. Fərz edək ki, $1<p<\infty$, $a=a(r)$ funksiyası $[0,\infty)$ -da mənfi olmayan, sanki artan funksiyadır, müəyyən

$$0<\beta<\frac{N}{p}$$

üçün $\dfrac{a(r)}{r^\beta}$ funksiyası sanki azalır və $\displaystyle\int_0^1\frac{a(t)}{t}dt<\infty.$

Onda I_a^K operatoru $L^p(K,\lambda)$ fəzasından $L^\Phi(K,\lambda)$ Orliç fəzasına məhdud təsir edir, burada Yunq funksiyası özünün

$$\Phi^{-1}(r)=\int_0^r A\left(t^{-\frac{1}{N}}\right)t^{-\frac{1}{p'}}dt$$

tərs funksiyası vasitəsi ilə təyin olunur, burada $A(r)=\displaystyle\int_0^r\frac{a(t)}{t}dt$.

4.4 yarımfəslində kommutativ hiperqruplarda iki funksiyanın bürünməsi üçün bərabərsizliklər isbat olunur. Bu bərabərsizliklər Oneyl bərabərsizliklərinin analoqlarıdır.

Teorem 14 Tutaq ki, f və φ funksiyaları kommutativ K hiperqrupunda Borel mənada ölçüləndir. Onda ixtiyari $t>0$ üçün

$$(f*_K\varphi)^{**K}(t)\le tf^{**K}(t)\varphi^{**K}(t)+\int_t^\infty f^{*K}(s)\varphi^{*K}(s)ds$$

bərabərsiyi doğrudur.

Teorem 15 Tutaq ki, f və φ funksiyaları kommutativ K hiperqrupunda Borel mənada ölçüləndir. Onda ixtiyari $t>0$ üçün

$$\left(f *_K \varphi\right)^{**K}(t) \le \int_t^\infty f^{**K}(s)\varphi^{**K}(s)ds$$

bərabərsiyi doğrudur.

4.5 yarımfəslində kommutativ hiperqruplarda iki funksiyanın bürünməsi üçün ümumiləşmiş Yunq bərabərsizliyi isbat olunur.

Teorem 16 Tutaq ki, $(K,*)$ kommutativ hiperqrupunda λ Haar ölçüsü verilmişdir, $f \in L^{p_1,q_1}(K,\lambda)$, $\varphi \in L^{p_2,q_2}(K,\lambda)$ və $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1$. Onda $(f *_K \varphi) \in L^{p_0,q_0}(K,\lambda)$, burada $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-1=\frac{1}{p_0}$ və $q_0 \ge 1$ ədədi $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2} \ge \frac{1}{q_0}$ şərtini ödəyir. Bundan əlavə,

$$\|(f *_K \varphi)\|_{K,p_0,q_0} \le p_0 e^{\frac{2}{e}} \|f\|_{K,p_1,q_1} \|\varphi\|_{K,p_2,q_2}\ .$$

4.6 yarımfəslində kommutativ hiperqruplarda ümumiləşmiş Yunq bərabərsizliyinin müəyyən tətbiqləri verilir.

Teorem 17 Tutaq ki, $(K,*)$ kommutativ hiperqrupunda ρ kvazimetrikası və λ Haar ölçüsü verilmişdir, belə ki, $\lambda B(e,r)=Ar^N$ xassəsi ödənir, burada A müsbət sabit ədəddir. Fərz edək ki, $1 \le q \le \infty$, $1 \le p < \infty$, $0<\alpha<\frac{N}{p}$. Əgər $f \in L^{p,q}(K,\lambda)$ olarsa, onda $I_\alpha f \in L^{r,q}(K,\lambda)$ və

$$\|I_\alpha^K f\|_{K,r,q} \le C\|f\|_{K,p,q},$$

burada $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{N}$, $C=\frac{re^{\frac{2}{e}}N}{\alpha}A^{\frac{N-\alpha}{N}}$.

Teorem 18 Tutaq ki, $(K,*)$ kommutativ hiperqrupunda λ Haar ölçüsü verilmişdir. Əgər

$$f \in L^{\frac{N}{N-\alpha},\infty}(K,\lambda),\ \varphi \in L^p(K,\lambda)$$

olarsa, burada $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{N}{p}$, onda $(f *_K \varphi) \in L^r(K,\lambda)$ və

$$\| (f *_K \varphi) \|_{K,r} \le 3r \frac{p}{p-1} \left(\frac{p}{r} \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \| f \|_{K, \frac{N}{N-\alpha}, \infty} \| \varphi \|_{K,p} .$$

burada $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{N}$.

Sonra gələn nəticə bizə kommutativ hiperqruplarda Hardi-Littlvud-Sobolev teoreminin analoqunu verir.

Теорема 19 Tutaq ki, $(K,*)$ kommutativ hiperqrupunda ρ kvazimetrikası və λ Haar ölçüsü verilmişdir, belə ki, $\lambda B(e,r) = Ar^N$ xassəsi ödənir, burada A müsbət sabit ədəddir. Fərz edək ki, $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{N}{p}$. Əgər $f \in L^p(K,\lambda)$ olarsa, onda $I_\alpha^K f \in L^r(K,\lambda)$ və

$$\| I_\alpha^K f \|_{K,r} \le C \| f \|_{K,p},$$

burada $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{N}$, $C = \frac{pre^{\frac{2}{e}}}{p-1} \left(\frac{p}{r} \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \frac{N}{\alpha} A^{\frac{N-\alpha}{N}}$.

4.7 yarımfəslində Haar ölçüsünə malik olan və hiperqrupun vahidində tərs ikililik şərtini ödəyən hiperqruplarda Velland bərabərsizliyi isbat olunur.

Tutaq ki, $(K,*)$ kommutativ hiperqrupunda ρ kvazimetrikası və λ Haar ölçüsü verilmişdir. Fərz edək ki, elə $D_\lambda > 0$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $r > 0$ üçün $\lambda B(e,2r) \le D_\lambda \lambda B(e,r)$ bərabərsizliyi ödənir. Onda biz deyəcəyik ki, λ Haar ölçüsü hiperqrupun vahidində ikililik şərtini ödəyir və $(K,*,\lambda)$ üçlüyü isə hiperqrupun vahidində bircins fəzadır.

Tutaq ki, $(K,*,\lambda)$ hiperqrupun vahidində bircins fəzadır. Fərz edək ki, elə $0 < \gamma < 1$ sabiti var ki, $B(e,r) \ne K$ şərtini ödəyən ixtiyari $r > 0$ üçün

$$\lambda B(e, \frac{r}{2}) \le \gamma \lambda B(e,r)$$

bərabərsizliyi ödənir. Onda biz deyəcəyik ki, λ ölçüsü hiperqrupun vahidində tərs ikililik şərtini ödəyir və $(K,*,\lambda)$ üçlüyü isə hiperqrupun vahidində tərs ikililik şərtini ödəyən fəza adlanır.

$0<\beta<1$ ədədi üçün

$$\mathrm{M}_\beta f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{\lambda B(e,r)^{1-\beta}}\int_K T^x\,|\,f(y^\vee)\,|\,\chi_{B(e,r)}(y)d\lambda(y),$$

$$\mathrm{I}_\beta f(x)=\int_K T^x f(y^\vee)\lambda B(e,\rho(e,y))^{\beta-1}d\lambda(y)$$

operatorlarını təyin edək.

Aşağıdakı teoremdə Haar ölçüsünə malik olan və hiperqrupun vahidində tərs ikililik şərtini ödəyən hiperqruplarda Velland bərabərsizliyi verilmişdir.

Teorem 20 Tutaq ki, $(K,*)$ kommutativ hiperqrupunda ρ kvazimetrikası və λ Haar ölçüsü verilmişdir və $(K,*,\lambda)$ hiperqrupun vahidində tərs ikililik şərtini ödəyən fəzadır, ε müsbət ədədi $\varepsilon<min\{\beta,1-\beta\}$ şərtini ödəyir. Fərz edək ki, $\lambda(K)=+\infty$ və ya $\mathrm{diam(K)}<+\infty$. Onda elə C müsbət sabit ədədi var iixtiyari $f\in L^1_{loc}(K)$ funksiyası və ixtiyari $x\in K$ nöqtəsi üçün

$$|\,\mathrm{I}_\beta f(x)\,|\le C\sqrt{\mathrm{M}_{\beta-\varepsilon}f(x)\mathrm{M}_{\beta+\varepsilon}f(x)}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Beşinci fəsildə ümumiləşmiş potensialların qeyri-bircins fəzalarda xassələri öyrənilmişdir. 5.1 yarımfəslində qeyri-bircins fəzalarda loqarifmik potensialların varlığı və x-in funksiyası kimi kəsilməzliyi araşdırılmışdir.

Tərif 8 Tutaq ki, $d>0$ və ρ kvazimetrikası və müsbət Borel μ ölçüsü ilə təchiz olunmuş (X,ρ,μ) fəzası üçün $supp\mu=X$, $diam X=\infty$ və elə $C\ge 1$ sabit ədədi var ki, ixtiyari $r>0$ ədədi və ixtiyari $x\in X$ nöqtəsi üçün $\mu(B(x,r))\le Cr^d$ bərabərsizliyi ödənir, burada $B(x,r)=\{y\in X:\rho(x,y)<r\}$. Bu fəzanı $(X,\rho,\mu)^d$ ilə işarə edəcəyik.

$(X,\rho,\mu)^d$ fəzasında

$$Lf(x)=\int_X \ln\frac{1}{\rho(x,y)}f(y)d\mu(y)$$

loqarifmik potensialına baxaq.

Teorem 21 Tutaq ki $(X,\rho,\mu)^d$ qeyri-bircins fəzadır və f funksiyası X-də mənfi olmayan, μ-lokal inteqrallanandır. Onda aşağıdakı şərtlər ekvivalentdir:

$(log1)$ Hər bir $x\in X$ üçün $Lf(x)>-\infty$ və X-də μ-sanki hər yerdə $Lf<+\infty$.

$(log2)$ Elə $x_0\in X$ nöqtəsi var ki,

$$\int_{X\setminus B(x_0,1)} \ln(\rho(x_0,y))f(y)d\mu(y)<+\infty;$$

$(log3)$ İxtiyari $x\in X$ nöqtəsi üçün

$$\int_{X\setminus B(x,1)} \ln(\rho(x,y))f(y)d\mu(y)<+\infty;$$

$(log4)$ Elə $a\in X$ nöqtəsi var ki,

$$\int_X \ln(2+\rho(a,y))f(y)d\mu(y)<\infty. \qquad (10)$$

Teorem 22 Tutaq ki $(X,\rho,\mu)^d$ qeyri-bircins fəzadır və f funksiyası X-də mənfi olmayan, μ-lokal inteqrallanandır, (10) və

$$\int_X \ln(2+f(y))f(y)d\mu(y)<+\infty$$

şərtləri ödənilir. Onda $Lf(x)$ X-də kəsilməzdir.

5.2 yarımfəslində qeyri-bircins fəzalarda verilən ümumiləşmiş potensial tipli inteqralların müxtəlif ölçülərlə təchiz olunan Lebeq fəzalarında məhdudluğu haqqında teorem isbat olunmuşdur.

Tutaq ki, (X,μ) müsbət μ ölçüsünə malik fəzadır. $L^p(X,d\mu)$ ilə

$$\|f\|_{p,\mu}=\left(\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

sonlu normasına malik bütün μ-ölçülən $f:X\to(-\infty,+\infty)$ funksiyaları sinfini işarə edək.

Tutaq ki, μ və ν iki müsbət ölçüdür (X-də) və T isə $L^p(X,d\mu)$-dən $L^q(X,d\nu)$-yətəsir edən xətti operatordur, burada $p,q\in(0,\infty)$. Fərz edək ki, elə müsbət C sabit ədədi var ki, ixtiyari $f\in L^p(X,d\mu)$ üçün

$$\|Tf\|_{q,\nu}\le C\|f\|_{p,\mu}$$

bərabərsizliyi ödənir. Onda T ciddi $\left(L^p\left(X,d\mu\right),L^q\left(X,d\nu\right)\right)$ tipli operator adlanır.

Fərz edək ki, elə müsbət C sabit ədədi var ki, ixtiyari $\beta>0$ və $f\in L^p\left(X,d\mu\right)$ üçün

$$\nu\{x:|Tf(x)|>\beta\}\le\left(\frac{C\|f\|_{p,\mu}}{\beta}\right)^q$$

bərabərsizliyi ödənir. Onda T zəif $\left(L^p\left(X,d\mu\right),L^q\left(X,d\nu\right)\right)$ tipli operator adlanır.

Tutaq ki, μ və ν iki müsbət Borel ölçüləridir (X -də), λ isə $X\times X$ -də müsbət funksiyadır və ixtiyari $x\in X$, $r>0$ üçün

$$B(x,r)=\{y\in X,\lambda(x,y)<r\}$$

kürələri μ və ν ölçüləndir. Fərz edək ki, elə müsbət M_1, M_2 sabit ədədləri, d və m ədədləri var ki, ixtiyari $x\in X$, $r>0$ üçün

$$\mu(B(x,r))\le M_1r^d, \tag{11}$$

$$\nu(B(x,r))\le M_2r^m. \tag{12}$$

bərabərsizlikləri ödənir.

$$\Gamma f(x)=\int_X K(\lambda(x,y))f(y)d\mu(y), \tag{13}$$

operatoruna baxaq, burada $K(\cdot)$ nüvədir.

5.2 yarımfəslində aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem 23 Tutaq ki, $1\le p<\infty$, μ və ν iki müsbət Borel ölçüləridür (X -də) və uyğun olaraq (11), (12) şərtlərini ödəyirlər, $K(\cdot)$ funksiyası isə aşağıdakı şərtləri ödəyir:

(K_1) $K:(0,\infty)\to(0,\infty)$ azalan və qarşılıqlı birqiymətli funksiyadır və ixtiyarı $h>0$ üçün

$$\int_0^h K(t)\,t^{d-1}<\infty\ ;$$

(K_2) Elə müsbət A_1 sabit ədədi və σ müsbət ədədi var ki, ixtiyari $h>0$ üçün

$$-\int_0^h \frac{dK(t)}{dt} t^{d+\frac{m-d}{p}} dt \le A_1 h^{\sigma};$$

(K_3) Elə müsbət A_2 sabit ədədi və $\gamma(p)=\gamma(p,d)$ müsbət ədədi var, ixtiyari $h>0$ üçün

$$-\int_h^\infty \frac{dK(t)}{dt} t^{\frac{d}{p'}} dt \le A_2 h^{-\gamma(p)}.$$

Onda

$i)$ Əgər $f \in L^p(X,d\mu)$olarsa, onda (13) inteqralı ν-sanki bütün x nöqtələri üçün yığılır.

$ii)$ Əgər $l=\left(1+\frac{\sigma}{\gamma(p)}\right)p$ olarsa, onda Γ zəif $\left(L^p(X,d\mu),L^l(X,d\nu)\right)$ tipli operatordur.

$iii)$ Əgər $1<p<r$ və $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}\left[\frac{r-p}{r-1}\frac{\gamma(1)}{\sigma+\gamma(1)}+\frac{p-1}{r-1}\frac{\gamma(r)}{\sigma+\gamma(r)}\right]$ olarsa, onda Γ ciddi $\left(L^p(X,d\mu),L^q(X,d\nu)\right)$ tipli operatordur.

5.3 yarımfəslində kommutativ hiperqruplarda Riss potensialları və kəsr-maksimal operatorlar müəyyən qiymətləndirmələr alınır.

5.4 yarımfəslində ölçü üzərinə ikililik şərti qoymadan, ümumiləşmiş potensialların dəyişən dərəcəli fəzalarda məhdudluğu haqqında teoremlər verilmişdir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. Hajibayov M. On finite difference of Riesz potentials on the spaces of homogeneous type / Abstracts of International conference on math. and mech. Devoted to the anniversary from birthday of member of the corr. of NASA, prof I.T. Mamedov, Baku, 2005, p.83

2. Hajibayov M. On continuity of potential type integrals / Intern. Conference and workshop dedicated to the centennial of S.M. Nikolskii, Russian Acad. Of Scien. V.A.Steklov Math.Inst., Moscow, 2005, p.290

3. Гаджибеков М.К. Двухвесовые неравенства для анизотропных Риссовых потенциалов// Научные и Педагогические Известия Университета Одлар Юрду, 2005, N13, с.73-81

4. Гаджибеков М.К. Оценки конечных разностей Риссовых потенциалов // Современные методы физико-математических наук, Труды международной конференции, Россия, Орловский Государственный Университет, Орел, 2006, т.1, с.154-158

5. Hajibayov M. The potential - type operators on homogeneous groups // Trans. of NAS of Azerbaijan, Series of physical-tech. and math. Sci. 2006, v.26, No 1, pp.81-88

6. Hajibayov M. Behavior at infinity of convolution type integrals / Abstracts of International conference on mathematics and mechanics devoted to the 70-th anniversary of the corr. member of NAS of Azerbaijan, Prof. B.A.Isgenderov, Baku, 2006, p.56

7. Hajibayov M. $(L_p;L_q)$ properties of the potential-type integrals associated to non-doubling measures // Sarajevo Journal of Math., 2006, v.15, No 2, pp.173-180

8. Hajibayov M. Continuity properties of potentials on spaces of homogeneous type // The Abdus Salam ICTP, 2006, IC/2006/076, pp.1-13

9. Hajibayov M. Continuity of logarithmic potentials // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, 2006, v.XXV(XXXII), pp.41-46

10. Hajibayov M. Boundedness of the generalized potential-type integral operators // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, 2006, v.XXIV(XXXII), pp.87-92

11. Hajibayov M. Boundedness of generalized Riesz potentials from Lebesque spaces with variable exponent into Orlics-Musielak spaces / Abstracts of International conference on mathematics and mechanics devoted to the 70-th anniversary of the academician of NAS of Azerbaijan, honoured scientist, Prof. A.D.Gadjiev, Baku, 2007, p.146

12. Hajibayov M. Convolution type integral operators at infinity // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, 2007, v.XIII, pp.212-222

13. Hajibayov M. Continuity properties of potentials on spaces of homogeneous type // Intern. Journal of Math. Analysis, 2008, v.2, No 7, p.315 - 328

14. Hajibayov M. The boundedness of generalized Riesz potentials from variable Lebesgue spaces into Musielak-Orlicz spaces /Workshop "Variable exponent analysis and related topics", 2-5 September, 2008, Tbilisi, Georgia, p.8

15. Hajibayov M. Weighted estimates of generalized potentials in variable exponent Lebesgue spaces / Abstracts of 7-th International ISAAC Congress, London, 2008, p.53

16. Hajibayov M., Samko S. Generalized Riesz potentials in variable exponent Lebesgue spaces / Третья Международная конф. посв. 85-летию чл. корр. РАН, проф. Л.Д.Кудрявцева, 2008, Москва, с.95-96

17. Hajibayov M. Behavior at infinity of convolution type integrals // Acta Math. Univ. Comenian.(N.S.), 2009, v.78, No1, pp.75-85

18. Hajibayov M. Generalized Riesz potentials in weighted variable exponent Lebesgue spaces/ Abstracts of International conference on mathematics and mechanics devoted to the 50-th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics of NAS os Azerbaijan, Baku, 2009, pp.303-304

19. Hajibayov M., Samko S. Generalized potentials in weighted variable exponent Lebesgue spaces on homogeneous spaces / International Conference on Mathematical Sciences, Istanbul, Turkey, 2009, p.282-283

20. Hajibayov M., Samko S. Weighted estimates of generalized potentials in variable exponent Lebesgue spaces on homogeneous spaces // Operator Theory: Advances and Applications, (2010), v.210, pp.107-122

21. Gadjiev A., Hajibayov M. Inequalities for B-convolution operators // TWMS J. Pure Appl. Math., 2010, v.1, No 1, pp.41-52

22. Hajibayov M., Samko S. Generalized potentials in variable exponent Lebesgue spaces on homogeneous spaces // Mathematische Nachrichten, 2011, v.284, No 1, pp.53-66

23. Hajibayov M. Boundedness of the Dunkl convolution operators //An. Univ. Vest Timis,. Ser. Mat.-Inform., 2011, v.49, No.1, pp.49-67

24. Гаджибеков М.К. Ограниченность обобщенных потенциалов в гипергруппах / Международный семинар "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения" посв. к 70 летию проф. С.Г.Самко, Ростов-на-Дону, 2011, с.23

25. Гаджибеков М.К., Шафиев М. Обобщенные потенциалы Рисса в гипергруппах / Теория функций и проблемы гармонического анализа Материалы Международной конференции, посвященной 100-летнему юбилею акад. И.И.Ибрагимова, Баку-2012, с.57-59

26. Hajibayov M. Riesz potentials on commutative hypergroups / Scientific conference "Theory of approximation of functions and its applications" dedicated to the 70-th anniversary of corr. memb. of NAS of Ukraine, Professor A.I. Stepanets, Kamianets-Podilsky, Ukraine, 2012, pp.129-130

27. Hajibayov M. Boundedness on Lorentz spaces of Riesz potentials on commutative hypergroups / International mathematical conference "Bogolyubov readings DIF-2013. Differential equations, theory of functions and their applications" Sevastopol, 2013, pp.205-206

28. Hajibayov M. Estimates for fractional integrals and fractional maximal operators on commutative hypergroups // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, 2014, v.40, No 2, pp.88-96

29. Hajibayov M. Inequalities for convolutions of functions on commutative hypergroups // Azerbaijan Journal of Mathematics, 2014, v.4, No 1, pp.92-107

30. Гаджибеков М.К. Предел на бесконечности обобщенных потенциалов в квазиметрических пространтвах с мерой // Journal of Qafqaz University - Mathematics and computer science, 2014, v.2, No 2 p.204-210

31. Hajibayov M. Boundedness of generalized Riesz potentials on commutative hypergroups // International Mathematical Forum, 2015, v.10, No 7, pp.333 - 338

32. Hajibayov M. Limit at infinity of potential type integrals on abstract spaces / Azerbaijan-Turkey-Ukrainian International conference Mathematical analysis, differential equations and their applications, MADEA-7, Baku, 2015, pp.60-61

33. Hajibayov M. Boundedness in Lebesgue spaces of Riesz potentials on commutative hypergroups // Global Journal of Mathematical Analysis, 2015, v.3, No.1, pp.18-25

34. Hajibayov M. Limit at infinity of potential type integrals on abstract spaces // Journal of Contemporary Applied Mathematics, 2015, v.5, No 1, pp.14-23

35. Hajibayov M. Generalized potentials on commutative hypergroups // Azerbaijan Journal of Mathematics, 2015, v. 5, No 2, pp.37-46

36. Eroglu A., Hajibayov M. Two weighted inequalities for fractional integrals associated with the Laplace-Bessel differential operator / Intern. conf. on anal. and its appl., Kirshehir, Turkey, 2016, p.49

37. Eroglu A., Hajibayov M., Serbetci A. Two weighted inequalities for B-fractional integrals // Journal of Inequalities and Applications, 2016, DOI: 10.1186/s13660-016-1104-2, pp. 1-8

38. Hajibayov M., Weighted inequalities for B-fractional integrals / Intern. workshop on non-harmonic anal and differ. oper. Baku, Azerbaijan, 2016, p.41-42

39. Eroglu A., Hajibayov M. Two weighted inequalities for fractional integrals on Laguerre hypergroup // Integral Transforms and Special Functions, 2017, v.28, No.3, pp.185-194. Online published 2016

МУБАРИЗ КАФАРШАХ оглы ГАДЖИБЕКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА СВЕРТКИ

АННОТАЦИЯ

Диссертацианная работа посвяшена исследованиям интегральных операторов типа свертки на однородных, и неоднородных пространствах, в гипергруппах. Другими словами, в диссертации изучены вопросы ограниченности, а также предельные свойства как функции интегральных операторов типа свертки в разных прстранствах.

В диссертации получены следующие результаты:

1. Доказана теорема об ограниченности из пространства Лебега с переменным показателем в определенное пространство Мусиелака-Орлича обобщенных потенциалов на однородных пространствах.
2. Доказана ограниченность из весового пространства Лебега с переменным показателем в определенное весовое пространство Мусиелака-Орлича обобщенных потенциалов на однородных пространствах;
3. Доказаны теоремы о существовании и непрерывности как функции, обобщенных потенциалов Рисса на однородных пространствах;
4. Изучено поведение конечных разностей потенциалов Рисса на однородных пространствах, в близких друг к другу точках по квазиметрики;
5. Получено необходимое и достаточное условие для поведения на бесконечности обобщенных потенциалов Рисса;
6. Найдено достаточное условие в терминах функции перестановки для ограниченности в весовых пространствах Лебега потенциалов Рисса в коммутативных гипергруппах;
7. Доказан аналог теоремы Накаи-Сумитомо для обобщенных потенциалов Рисса в коммутативных гипергруппах;
8. Доказаны неравенство О"Нейла и обобшенное неравенство Юнга для свертки двух функций в коммутативных гипергруппах;
9. Найдены некоторые точечные оценки между потенциалов Рисса, максимального оператора Харди-Литтвулда, дробно-максимальных операторов в гипергруппах;

10. Доказаны теоремы о существовании и непрерывности как функции, логарифмических потенциалов на неоднородных пространствах;

11. Исследована ограниченность в пространствах Лебега с разными мерами, обобщенных потенциалов на неоднородных пространствах.

MUBARIZ GAFARSHAH oglu HAJIBAYOV

INVESTIGATION OF CONVOLUTION TYPE INTEGRAL OPERATORS

ABSTRACT

The thesis is devoted of investigation of convolution type integral operators on homogeneous spaces, hypergroups and nonhomogeneous spaces. The boundedness problems in different spaces, and the limit and the continuity properties of convolution type integral operators of harmonic analysis are studied in the thesis.

The following main results have been obtained in the thesis.

1. The theorem on the boundedness from Lebesgue spaces of variable exponent to the sertain Musielak-Orlicz spaces has been proved for generalized potentials on homogeneous spaces.
2. The boundedness from variable Lebesgue spaces of variable exponent to the sertain variable Musielak-Orlicz spaces has been proved for generalized potentials on homogeneous spaces.
3. The theorems about the existense and the continuity as a function, have been proved for generalized Riesz potentials on homogeneous spaces.
4. The behavior of finite differences of Riesz potentials on homogeneous spaces has been studied in the points close each other.
5. A necessary and sufficient condition has been obtained for the behavior of generalized Riesz potentials.
6. A sufficient condition has been found in the terms of permutation functions, for the boundedness in weighted Lebesgue spaces of Riesz potentials on commutative hypergroups.
7. An analogue of Nakai-Sumitomo’s Theorem has been proved for the generalized Riesz potentials on commutative hypergroups.
8. The O’Neil inequality and the generalized Young inequality have been proved for a convolution of two functions on commutative hypergroups.
9. Pointwise estimates between Riesz potentials, the Hardy-Litlewood maximal operator and fractional maximal operators on hypergroups have been received.

10. The theorems about the existense and the continuity as a function, have been proved for logarithmic potentials on nonhomogeneous spaces.
11. The boundedness in Lebesgue spaces, provided with different measures, has been investigated for generalized Riesz potentials on nonhomogeneous spaces.

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

На правах рукописи

МУБАРИЗ КАФАРШАХ оглы ГАДЖИБЕКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА СВЕРТКИ

1202.01-Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук по математике

Баку- 2017