ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ИЛЬГАР ГУРБАТ ОГЛЫ МАМЕДОВ

РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ И НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

по специальностям

1211.01 –«Дифференциальные уравнения»
и
1214.01 –«Динамические системы и оптимальное управление»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора наук по математике

БАКУ – 2015

Работа выполнена в Институте Систем Управления НАН Азербайджана.

Научные консультанты:
доктор физ.-мат. наук, профессор Сабир С. Мирзоев;
доктор физ.-мат. наук, профессор Телман К. Меликов

Официальные оппоненты:
доктор наук по математике, **Мурад Г. Иманов**
(Институт Прикладной Математики БГУ);
доктор наук по математике, профессор **Нихан А. Алиев**
(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана);
доктор наук по математике, доцент **Бахрам А. Алиев**
(Азербайджанский Государственный Педагогический Университет)

Ведущая организация:
Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет кафедра «Высшая математика».

Защита диссертации состоится 15 января 2016 г. в 14^{00} часов
на заседании разового Диссертационного Совета B/D 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул. Б. Вагабзаде 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан 11 декабря 2015 г.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
B/D 01.111 ИММ НАНА **д.м.н., доц. Ровшан А. Бандалиев**

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

İLQAR QÜRBƏT OĞLU MƏMMƏDOV

YÜKSƏK TƏRTİBLİ QEYRİ-HAMAR ƏMSALLI HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN ÇOXÖLÇÜLÜ LOKAL VƏ QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLİ VƏ ONLARIN OPTİMAL İDARƏ MƏSƏLƏLƏRİNƏ TƏTBİQİ

1211.01 – «Diferensial tənliklər»
və
1214.01- «Dinamik sistemlər və optimal idarəetmə»
ixtisasları üzrə

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

BAKI – 2015

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Нелокальные задачи в настоящее время являются интенсивно развивающимся разделом теории дифференциальных уравнений. Теория нелокальных задач, возникла из-за потребностей современной науки и техники. Проблемы современной науки и техники выдвинули на первый план решение более реальных практических задач, связанных с исследованием разнообразных классов математических моделей. Математическое моделирование многих биологических и технологических процессов приводит к изучению нелокальных краевых задач для различных классов дифференциальных уравнений.

в монографиях Дженалиева М.Т., Рамазанова М.И. , а также Нахушева А.М. и др.

К числу нелокальных задач относятся также задачи, связанные с уравнениями «нелокального характера», например, нагруженными, с интегро-дифференциальными или функционально-дифференциальными уравнениями если даже краевые условия для них являются локальными.

Интерес к нелокальной задаче (кроме теоретического значения) вызван, очевидно, важностью ее физической интерпретации: если дифференциальное уравнение описывает некоторый физической процесс, то нелокальные краевые условия описывают некоторые алгебраические выражения, связывающие искомое решение и его производные в двух и более точках наблюдения физического процесса. Подобные ситуации имеют место при изучении явлений, происходящих в плазме, процессов распространения тепла, некоторых технологических процессов, процессов влагопереноса в пористых средах, обратных задач, а также в задачах математической биологии и демографии. Поэтому изучение нелокальных задач для различных классов дифференциальных уравнений привлекали внимание многих математиков: Абдуллаев В. М., Айда-заде К.Р., Алиев А.Р., Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Апаков Ю.П., Арланова Е.Ю., Ахиев С.С., Ахыев С.С., Бабаева С.Ф., Багирова С.Г., Бештоков М.Х., Бицзадзе А.В., Водахова В.А., Гусейнов О.М., Дезин А.А., Дюжева А. В., Жегалов В.И., Зульфугарова Р.Т., Ибиев Ф.Т., Ильин В.А., Канчукоев В.З., Керимов К. А., Кечина О.М., Кулиев Г.Ф., Кумыкова С.К., Мамчуев М.О., Мехтиев М.Ф., Мирзоев С.С., Моисеев Е.И., Муталлимов М.М., Нахушев А.М., Огородников Е.Н., Пулькина Л. С., Репин О.А., Самарский А.А., Сербина Л.И, Солдатов А.П., Уткина Е.А., Шарифов Я.А., Ширинов Т.В., Шхануков М.Х., Эфендиев С.Н., Юсифов М.Р. и др.

Заметим, что нелокальные задачи с интегральными краевыми условиями исследованы в работах Абдрахманова А. М., Голубевой Н.Д., Данилькиной О.Ю., Дмитриева В. Б., Жесткова С.В., Ибиева Ф.Т., Кожанова А. И., Мегралиева Я.Т., Мехтиева М.Ф., Пулькиной Л.С., Сабитова К.Б., Сафари А.Р., Шарифова Я.А. и др.

За последние десятилетие существенно повысился интерес к многомерным локальным и нелокальным краевым задачам для дифференциальных уравнений с частными производными . Это связано с их появлением в различных задачах прикладного характера . Актуальность исследований, проводимых в этой области, объясняется появлением многомерных локальных и нелокальных задач для уравнений с негладкими коэффициентами, связанных с различными прикладными задачами. При этом важным принципиальным моментом является то, что рассматриваемые уравнения обладают, негладкими коэффициентами которые удовлетворяют только некоторым условиям типа P-интегрируемости и ограниченности т.е. рассмотренные гиперболические дифференциальные операторы не имеют традиционного сопряженного оператора. Поэтому функция Римана для таких уравнений не может быть исследована классическим методом характеристик.

Задачи такого типа возникают, при исследовании вопросов фильтрации жидкости в трещиноватых средах, влагопереносом в грунтах, распространением импульсных лучевых волн, в различных биологических процессах и в теории обратных задач.

Заметим что, в диссертации рассматриваемые уравнения являются обобщениями многих модельных уравнений некоторых процессов (например, уравнения влагопереноса, уравнения Аллера, уравнения теплопроводности, уравнения Манжерона, уравнения Лапласа, уравнения Буссинеска-Лява, телеграфного уравнения, уравнения колебания струны и т.д.). Поэтому возникает весьма актуальный вопрос об исследовании вопросов корректной разрешимости для многомерных локальных и нелокальных задач, связанных с гиперболическими уравнениями с доминирующими производными, вообще говоря, с негладкими переменными коэффициентами. В диссертационной работе для исследований таких задач развита методика, которая аналогично методу, предложенному

С.С.Ахиевым и существенно использует современные методы теории функций и функционального анализа.

Цель работы. Основная цель данной диссертационной работы заключается в следующем:

-исследование разнообразных классов двумерных и многомерных локальных и нелокальных начально-краевых задач для гиперболических уравнений с доминирующей смешанной производной высокого порядка в неклассических трактовках;

-разработка нетрадиционных вариантов метода приращений при исследовании разнообразных классов нелокальных задач оптимального управления для гиперболических уравнений высокого порядка с негладкими коэффициентами и их применение для получения новые необходимые условия оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Л.С.Понтрягина.

Метод исследования. В диссертации применяются методы теории краевых задач, теории линейных операторных уравнений в банаховых пространствах, теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, теории нагруженных уравнений, функционального анализа и теории оптимального управления.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и заключаются в следующем:

- ♦ При весьма естественных предположениях исследованы задачи Коши и Гурса в неклассических трактовках. Обоснована формула интегрирования по частям неклассического типа при исследовании задачи Гурса для псевдопараболического уравнения с негладкими коэффициентами и с доминирующей смешанной производной четвертого порядка;
- ♦ Исследована нелокальная комбинированная задача типа Бицадзе-Самарского и Самарского-Ионкина для системы псевдопараболических уравнений;
- ♦ Обоснованы некоторые двумерные краевые задачи в неклассических трактовках (задача Дирихле, задача Неймана, задача с условиями на всей границе, контактно-краевая задача, финально-краевая задача и.т.д.);
- ♦ Исследованы трехмерные локальные и нелокальные краевые

задачи в анизотропных пространствах С.Л.Соболева;

- ♦ Продемонстрированы некоторые классы двумерные и трехмерные нелокальные краевые задачи, которые как комбинированные задачи играют агентную роль между задачами с интегральными и многоточечными краевыми условиями;
- ♦ Выявлены общие классы корректно поставленных многомерных локальных и нелокальных краевых задач для гиперболических уравнений с доминирующей смешанной производной высокого порядка с негладкими коэффициентами;
- ♦ Полученные результаты имеют приложения в исследовании различных классов многомерных локальных и нелокальных задач оптимального управления, которые описываются гиперболическими уравнениями высокого порядка с негладкими коэффициентами.

Теоретическая и практическая ценность. Задача, изученная в диссертации, представляет собой не только теоретический, но и практический интерес. Результаты работы могут быть применены при решении многомерных локальных и нелокальных задач оптимального управления для гиперболических уравнений с доминирующей смешанной производной высокого порядка с негладкими коэффициентами, возникающих при моделировании и оптимизации биологических и технологических процессов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на II Респуб. научной конференции «Современные проблемы информатизации, Кибернетики и информациионных технологий» (2004г.), на Межд. конф. по математике и механике, посвящённой 50-летию со дня рождения чл. корр. НАНА, проф. И.Т.Мамедова (2005г.), на научн. конф., посвящ.75-летию чл.- корр. НАНА, заслуженного деятеля науки, лауреата Гос. Премии, д.ф.-м.н, проф. Яхьи Джафар оглы Мамедова (2006г.), на XIII Международной конференции по математике и механике, посвящённой 70-летному юбилею дейст. чл. НАН Азербайджана, заслуженного деятеля науки, профессора А.Д.Гаджиева (2007г.), на республиканской конференции посвящённой 85-летному юбилею Общенационального Лидера Азербайджана Гайдара Алиева (2008г.), на Международной Конференции по математике и механике, посвященной 50-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана (2009г.), на

Международной конференции посвященной 80- летному юбилею академика Ф.Г.Максудова (2010г.) , на Международной конференции посвященной 100- летнему юбилею академика З.И.Халилова (2011г.) , на IV Международной конференции “Problems of Cybernetics and Informatics” (2012г.), на общеинститутском семинаре Института Математики и Механики НАНА (руководитель: проф. М.Дж. Марданов), отдела «Дифференциальные уравнения» Института Математики и Механики НАНА (руководитель: проф. А.Б.Алиев), отдела «Негармонический анализ» Института Математики и Механики НАНА (руководитель: член-корр. НАНА, проф. Б.Т. Билалов), отдела «Математический анализ» Института Математики и Механики НАНА (руководитель: член-корр. НАНА, проф. В.С. Гулиев) и др.

Публикации. По содержанию диссертации опубликовано в семидесяти работах автора. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Теперь перейдем к основным результатам диссертации, которая состоит из введения, четырех глав и цитируемой литературы. В тексте придерживаемся двойной нумерации, первая из которой означает номер главы, а вторая номер соответствующих предложений или формул.

Рассмотренные в диссертационной работе локальные и нелокальные краевые задачи исследуются при помощи интегральных представлений функций из соболевских пространств. Отметим, что интегральные представления функций из соболевских пространств с доминирующими смешанными производными общего вида изучены в работах Аманова Т.И., Никольского С.М., Лизоркина П.И. и Никольского С.М., Бесова О.В., Ильина В.П. и Никольского С.М., Джабраилова А.Дж. , Ахиева С.С., Наджафова А.М. и др.

В первой главе настоящей диссертации исследуется корректная разрешимость краевых задач для псевдопараболического уравнения четвертого порядка с негладкими коэффициентами.

Пусть $G = G_1 \times G_2$, $G_k = (0, h_k)$, $k = \overline{1,2}$; $W_p^{(3,1)}(G)$, $1 \le p \le \infty$ - пространство всех $u \in L_p(G)$, имеющих в смысле С.Л.Соболева обобщенные производные $D_1^i D_2^j u \in L_p(G)$, $\left(i=\overline{0,3};\ j=\overline{0,1}\right)$, где $D_k = \partial/\partial x_k$, $k=\overline{1,2}$. Норму в $W_p^{(3,1)}(G)$ будем определять равенством:

$$\|u\|_{W_p^{(3,1)}(G)} = \sum_{\substack{i=\overline{0,3} \\ j=\overline{0,1}}} \left\|D_1^i D_2^j u\right\|_{L_p(G)} .$$

Рассмотрим уравнение

$$\left(L_{3,1}u\right)(x) \equiv D_1^3 D_2 u(x) + a_{2,1}(x) D_1^2 D_2 u(x) + a_{3,0}(x) D_1^3 u(x) +$$
$$+ \sum_{\substack{i+j<3 \\ i=\overline{0,2};\ j=\overline{0,1}}} a_{i,j}(x) D_1^i D_2^j u(x) = \varphi_{3,1}(x),\ x=(x_1,x_2)\in G, \qquad (1)$$

где $u(x)=u(x_1,x_2)$-искомая функция из $W_p^{(3,1)}(G)$.

Для уравнения (1) задачу Коши представим в виде

$$\begin{cases} \left(L_{3,0}u\right)(x_1) \equiv D_1^3 u(x_1, S(x_1)) = \varphi_{3,0}(x_1),\ x_1 \in G_1; \\ \left(L_{i,1}u\right)(x_2) \equiv D_1^i D_2 u(\nu(x_2), x_2) = \varphi_{i,1}(x_2),\ x_2 \in G_2; \\ L_{i,0}u \equiv D_1^i u(0,h_2) = \varphi_{i,0},\ i=\overline{0,2} \end{cases} \qquad (2)$$

где $S:\overline{G}_1 \to \overline{G}_2$ - абсолютно непрерывная строго убывающая функция, $S(0)=h_2$, $S(h_1)=0$; $\nu:\overline{G}_2 \to \overline{G}_1$-функция обратная к функции $x_2 = S(x_1)$, причем производная $S_{x_1}(x_1)$ ограничена на G_1.

Пусть выполнены условия: $a_{i,0}(x)\in L_p(G)$, $i=\overline{0,2}$ и существуют функции $a_{i,1}^0(x_1)\in L_p(G_1)$, $i=\overline{0,2}$; $a_{3,0}^0(x_2)\in L_p(G_2)$ такие, что $\left|a_{i,1}(x)\right| \le a_{i,1}^0(x_1)$, $\left|a_{3,0}(x)\right| \le a_{3,0}^0(x_2)$ почти всюду на G; $\varphi = \left(\varphi_{3,1}, \varphi_{3,0}, \varphi_{0,1}, \varphi_{1,1}, \varphi_{2,1}, \varphi_{2,0}, \varphi_{1,0}, \varphi_{0,0}\right) \in E_p \equiv$

$$\equiv L_p(G)\times L_p(G_1)\times L_p(G_2)\times L_p(G_2)\times L_p(G_2)\times R\times R\times R,$$

где R-пространство действительных чисел. Норму в пространстве E_p будем считать определенной естественным образом в виде равенства

$$\|\varphi\|_{E_p} = \|\varphi_{3,1}\|_{L_p(G)} + \|\varphi_{3,0}\|_{L_p(G_1)} + \|\varphi_{0,1}\|_{L_p(G_2)} + \|\varphi_{1,1}\|_{L_p(G_2)} +$$
$$+ \|\varphi_{2,1}\|_{L_p(G_2)} + \|\varphi_{2,0}\|_R + \|\varphi_{1,0}\|_R + \|\varphi_{0,0}\|_R .$$

До сих пор во всех известных в литературе работах задача Коши для уравнения (1) была поставлена и изучена в классическом виде

$$\begin{cases} D_1^i u(x_1, S(x_1)) = \varphi^{(i)}(x_1), \ x_1 \in G_1, \ i = \overline{0,2}; \\ D_1^2 D_2 u(\nu(x_2), x_2) = \varphi^{(3)}(x_2), \ x_2 \in G_2. \end{cases} \quad (3)$$

Доказано, что условия (2) эквиваленты условиям Коши классического вида (3). Поэтому задачу (1), (2) можно рассматривать как новую постановку задачи Коши для уравнения (1). В этой постановке на правые части $\varphi_{3,1}(x) \in L_p(G)$, $\varphi_{3,0}(x_1) \in L_p(G_1)$, $\varphi_{i,1}(x_2) \in L_p(G_2)$, $\varphi_{i,0} \in R$, $i = \overline{0,2}$ никаких дополнительных условий типа «согласования» не налагаются. Это дает возможность ожидать, что оператор задачи (1), (2) есть гомеоморфизм.

При наложенных условиях оператор $L = (L_{3,1}, L_{3,0}, L_{0,1}, L_{1,1}, L_{2,1}, L_{2,0}, L_{1,0}, L_{0,0})$ задачи (1), (2) определен на $W_p^{(3,1)}(G)$, действует в E_p и ограничен.

Задача (1), (2) исследуется при помощи интегрального представления функций $u(x) \in W_p^{(3,1)}(G)$:

$$u(x_1, x_2) = (Qb)(x) \equiv \sum_{i=0}^{2} \frac{x_1^i}{i!} \left(b_{i,0} + \int_0^{x_2} b_{i,1}(\xi_2) d\xi_2 \right) + \frac{1}{2} \int_0^{x_1} (x_1 - \xi_1)^2 b_{3,0}(\xi_1) d\xi_1 +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} (x_1 - \xi_1)^2 b_{3,1}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

при некотором $b = (b_{3,1}, b_{3,0}, b_{0,1}, b_{1,1}, b_{2,1}, b_{2,0}, b_{1,0}, b_{0,0}) \in E_p$.

Таким образом, в первом параграфе данной главы изучена задача Коши (1), (2) для псевдопараболического уравнения четвертого порядка (1) возникающего при изучении вопросов фильтрации жидкости в трещиноватых средах, влагопереноса в почвогрунтах и др. При некоторых условиях суммируемости и ограниченности коэффициентов доказано, что оператор этой задачи и его сопряженный оператор осуществляет гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств. При этих же условиях для рассматриваемой задачи введено понятие θ-фундаментального решения, которое естественным образом обобщает понятие функции Римана на случай уравнений с негладкими коэффициентами и позволяет найти интегральное представление решения неоднородной задачи(теорема 1.1, теорема1.2, теорема1.3).

Используя равенство $f(Lu)=(L^* f)(u)$, а также общий вид линейных ограниченных функционалов на $W_P^{(3,1)}(G)$ утверждаем, что существует ограниченный сопряженный оператор L^* вида:
$L^*=(V_{3,1},V_{3,0},V_{0,1},V_{1,1},V_{2,1},V_{2,0},V_{1,0},V_{0,0}):E_q\to E_q$.

Теорема 1.1. *Задача (1), (2) и ее сопряженная система безусловно везде корректно разрешимы.*

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} (V_{3,1}f)(\xi)=\dfrac{(x_1-\xi_1)^2}{2}\theta(x_1-\xi_1)\theta(x_2-\xi_2), & \xi=(\xi_1,\xi_2)\in G; \\ (V_{3,0}f)(\xi_1)=\dfrac{(x_1-\xi_1)^2}{2}\theta(x_1-\xi_1), & \xi_1\in G_1; \\ (V_{i,1}f)(\xi_2)=\dfrac{x_1^i}{i!}\theta(x_2-\xi_2), & i=\overline{0,2},\ \ \xi_2\in G_2; \\ V_{i,0}f=\dfrac{x_1^i}{i!}, & i=\overline{0,2}; \end{cases} \tag{3^*}$$

где $\theta(z)$ функция Хевисайда на R.

Если система (3^*) для каждой $x\in\overline{G}$ имеет хотя бы одно решение $f(x)$ из E_q, то это решение называется θ-фундаментальным решением задачи (1), (2).

Систему (3^*) на каждой из области $G^+=\{\xi=(\xi_1,\xi_2)\in G\setminus\xi_2>s(\xi_1)\}$ и $G^-=G\setminus G^+$ изучим в отдельности. Если $\xi\in G^+$, то $\theta(s(\xi_1)-\xi_2)=\theta(\nu(\xi_2)-\xi_1)=0$. Кроме того, если же $\xi\in G^-$, то $\theta(s(\xi_1)-\xi_2)=\theta(\nu(\xi_2)-\xi_1)=1$.

Пусть $x \in G^+$, $G_x^+ = \{\xi \in G^+ \setminus \xi_i \le x_i, \ i = \overline{1,2}\}$, $\hat{G}_x^+ = G \setminus G_x^+$.
Если $x \in G^-$,то положим $G_x^- = \{\xi \in G^- \setminus \xi_i \ge x_i, \ i = \overline{1,2}\}$, $\hat{G}_x^- = G \setminus G_x^-$

Теорема 1.2. *Пусть* $x \in \overline{G}$ *и* $f(x)$*-единственное решение системы* *(*3^**) из* E_q*. Тогда*

$$f_{3,1}(\xi, x) = \begin{cases} R_{3,1}^+(\xi, x), & \xi \in G_x^+, \\ 0, & \xi \in \hat{G}_x^+, \end{cases} \quad \text{если } x \in G^+;$$

$$f_{3,1}(\xi, x) = \begin{cases} R_{3,1}^-(\xi, x), & \xi \in G_x^-, \\ 0, & \xi \in \hat{G}_x^-, \end{cases} \quad \text{если } x \in G^-.$$

Теорема 1.3. *Пусть* $f(x) - \theta$ *-фундаментальное решение задачи (1), (2). Тогда решение* $u \in W_p^{(3,1)}(G)$ *задачи (1), (2) представляется в виде*

$$u(x) = \iint_G f_{3,1}(\xi, x)\varphi_{3,1}(\xi)d\xi + \int_{G_1} f_{3,0}(\xi_1, x)\varphi_{3,0}(\xi_1)d\xi_1 +$$

$$+ \sum_{i=0}^{2} \left[\int_{G_2} f_{i,1}(\xi_2, x)\varphi_{i,1}(\xi_2)d\xi_2 + f_{i,0}(x)\varphi_{i,0} \right].$$

Отметим что, рассматриваемое уравнение (1) является обобщением многих модельных уравнений некоторых процессов (например, обобщенного уравнения влагопереноса, уравнения теплопроводности, телеграфного уравнения, уравнения колебания струны и т.д.).

Во втором параграфе первой главы рассматривается уравнение (1) при следующих условиях Гурса нового типа:

$$\begin{cases} V_{0,0}u \equiv u(0,0) = \varphi_{0,0} \in R; \\ V_{1,0}u \equiv D_1 u(0,0) = \varphi_{1,0} \in R; \\ V_{2,0}u \equiv D_1^2 u(0,0) = \varphi_{2,0} \in R; \\ (V_{3,0}u)(x_1) \equiv D_1^3 u(x_1,0) = \varphi_{3,0}(x_1) \in L_p(G_1); \\ (V_{0,1}u)(x_2) \equiv D_2 u(0,x_2) = \varphi_{0,1}(x_2) \in L_p(G_2); \\ (V_{1,1}u)(x_2) \equiv D_1 D_2 u(0,x_2) = \varphi_{1,1}(x_2) \in L_p(G_2); \\ (V_{2,1}u)(x_2) \equiv D_1^2 D_2 u(0,x_2) = \varphi_{2,1}(x_2) \in L_p(G_2) \end{cases} \tag{4}$$

В этом параграфе построится фундаментальное решение начально-краевой задачи (1), (4) для псевдопараболического уравнения с доминирующей производной четвертого порядка с негладкими коэффициентами (теорема 1.4, теорема 1.5, теорема 1.6).

Теорема 1.4. *Оператор V задачи (1), (4) есть гомеоморфизмом из $W_p^{(3,1)}(G)$ на $E_p^{(3,1)}$.*

Теорема 1.5. *Оператор $\omega_{3,1} : L_q(G) \to L_q(G)$ есть гомеоморфизм.*

Теорема 1.6. *Задача (1), (4) имеет единственное θ-фундаментальное решение $f(x_1, x_2)$. При этом решение $u \in W_p^{(3,1)}(G)$ задачи (1), (4) может быть представлено посредством θ-фундаментального решения в виде*

$$u(x_1,x_2) = \varphi_{0,0} f_{0,0}(x_1,x_2) + \varphi_{1,0} f_{1,0}(x_1,x_2) + \varphi_{2,0} f_{2,0}(x_1,x_2) +$$

$$+ \int_0^{h_1} \varphi_{3,0}(\alpha_1) f_{3,0}(\alpha_1; x_1, x_2) d\alpha_1 + \int_0^{h_2} \varphi_{0,1}(\alpha_2) f_{0,1}(\alpha_2; x_1, x_2) d\alpha_2 +$$

$$+ \int_0^{h_2} \varphi_{1,1}(\alpha_2) f_{1,1}(\alpha_2; x_1, x_2) d\alpha_2 + \int_0^{h_2} \varphi_{2,1}(\alpha_2) f_{2,1}(\alpha_2; x_1, x_2) d\alpha_2 +$$

$$+ \iint_G \varphi_{3,1}(\alpha_1, \alpha_2) f_{3,1}(\alpha_1, \alpha_2; x_1, x_2) dG.$$

В параграфе 1.3 при некоторых условиях типа p-интегрируемости и ограниченности, на коэффициенты дано понятие обобщенной функции Римана на случай уравнений четвертого порядка и найдено интегральное представление решения задачи

Гурса. Исследованы также условия, при которых оператор этой задачи, вместе с оператором соответствующей сопряженной задачи нетрадиционного вида, осуществляют гомеоморфизмы между определенными парами банаховых пространств. Найдены также некоторые достаточные условия, при которых обобщенная функция Римана существует и единственна.

В этом параграфе изучены вопросы представления решения задачи Гурса для псевдопараболического уравнения с L_p-коэффициентами. Рассматриваемое уравнение имеет, вообще говоря, негладкие коэффициенты, и поэтому не обладает некоторым формально-сопряженным дифференциальным уравнением, имеющим определенный смысл. По этим причинам этот вопрос не может быть исследован посредством известных методов, использующие классические формулы интегрирования по частям и функций Римана или фундаментальных решений классического типа. Поэтому в параграфе 1.3 этот вопрос исследован путем нахождения одной неклассической формулы для интегрирования по частям и введении функции Римана неклассического типа (теорема 1.7, теорема 1.8, теорема 1.9).

Теорема 1.7. *Пусть* $u(x) \in W_p^{(3,1)}(G)$ *и* $f \in L_q(G)$ *произвольные функции. Тогда справедлива следующая формула*

$$\iint_G \left(\left(V_{3,1} u \right)(x), f(x) \right) dx = \iint_G \left(\left(V_{3,1} P_1 u \right)(x), f(x) \right) dx + \iint_G \left(D_1^3 D_2 u(x), \left(N^* f \right)(x) \right) dx,$$

$$\forall u(x) \in W_p^{(3,1)}(G), \forall f(x) \in L_q(G).$$

Теорема 1.8. *Пусть функция* $f(\tau_1, \tau_2; x_1, x_2)$ *является обобщенной функцией Римана задачи Гурса (1), (4). Тогда любое решение этой задачи имеет следующий вид*

$$u(x) = g_0(x) + \iint_G \left(\varphi_{3,1}(\tau_1, \tau_2) - \left(V_{3,1} g_0 \right)(\tau_1, \tau_2), f(\tau_1, \tau_2; x_1, x_2) \right) d\tau_1 d\tau_2, \ (x_1, x_2) \in G, \quad (4^*)$$

Теорема 1.9. *Задача Гурса (1), (4) имеет единственную обобщенную функцию Римана* $f(\tau_1, \tau_2; x_1, x_2)$. *При этом единствен-*

ное решение $u(x)\in W_p^{(3,1)}(G)$ *этой задачи можно найти посредством обобщенной функции Римана по формуле (* 4^* *).*

В параграфе 1.4 в одном анизотропном пространстве С.Л. Соболева исследуется нелокальная комбинированная задача типа Бицадзе-Самарского и Самарского-Ионкина для одного векторного уравнения псевдопараболического типа с доминирующей производной четвертого порядка с негладкими коэффициентами .

Пусть задано модифицированное уравнение (1) в векторном виде

$$(V_{1,3}u)(t,x)\equiv D_tD_x^3u(t,x)+\sum_{\substack{i=0\\ i+j<4}}^{1}\sum_{j=0}^{3}\left(D_t^iD_x^ju(t,x)\right)A_{i,j}(t,x)=$$

$$=Z_{1,3}(t,x),(t,x)\in G=(t_0,t_1)\times(x_0,x_1), \tag{5}$$

начальное условие

$$(l_0u)(x)\equiv u(t_0,x)=Z_0(x),x\in(x_0,x_1), \tag{6}$$

и граничные условия типа Бицадзе-Самарского и Самарского-Ионкина

$$(l_1^0u)(t)\equiv u(t,x_0)\alpha_{1,1}+u_x(t,x_0)\alpha_{1,2}+u_{xx}(t,x_0)\alpha_{1,3}+u(t,x_1)\beta_{1,1}+$$
$$+u_x(t,x_1)\beta_{1,2}+u_{xx}(t,x_1)\beta_{1,3}=\psi_1(t),$$

$$(l_2^0u)(t)\equiv u(t,x_0)\alpha_{2,1}+u_x(t,x_0)\alpha_{2,2}+u_{xx}(t,x_0)\alpha_{2,3}+u(t,x_1)\beta_{2,1}+$$
$$+u_x(t,x_1)\beta_{2,2}+u_{xx}(t,x_1)\beta_{2,3}=\psi_2(t),$$

$$(l_3^0u)(t)\equiv u(t,x_0)\alpha_{3,1}+u_x(t,x_0)\alpha_{3,2}+u_{xx}(t,x_0)\alpha_{3,3}+u(t,x_1)\beta_{3,1}+$$
$$+u_x(t,x_1)\beta_{3,2}+u_{xx}(t,x_1)\beta_{3,3}=\psi_3(t),t\in(t_0,t_1). \tag{7}$$

Здесь: $u(t,x)=(u_1(t,x),...,u_n(t,x))-n$ - мерная искомая вектор функция; $\alpha_{i,j}$ и $\beta_{i,j}$ - заданные $n\times n$ - мерные постоянные матрицы, $A_{i,j}(t,x)$ - измеримые на G матричные функции порядка $n\times n$, удовлетворяющие условиям:

$A_{0,j}(t,x)\in L_p(G)$, $j=0,1,2$ и существуют функции $A_{1,j}^0(x)\in L_p(x_0,x_1)$ и $A_{0,3}^0(t)\in L_p(t_0,t_1)$ такие что, выполнены условия

$$\left\|A_{1,j}(t,x)\right\|\le A_{1,j}^0(x),\ j=0,1,2 \text{ и } \left\|A_{0,3}(t,x)\right\|\le A_{0,3}^0(t).$$

почти всюду на G, где $\| \ \|$ евклидова норма соответствующей матрицы (или вектора); $Z_0(x) \in W_{p,n}^{(3)}(x_0, x_1)$, а также $\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t) \in W_{p,n}^{(1)}(t_0, t_1)$- заданные n- мерные вектор -функции, где $W_{p,n}^{(m)}(y_0, y_1)$- пространство n- мерных вектор-функций $Z(y) = (Z_1(y), \ldots, Z_n(y))$, имеющих в смысле С.Л. Соболева производные $Z'(y), \ldots, Z^{(m)}(y) \in L_{p,n}(y_0, y_1)$, а $L_{p,n}(y_0, y_1)$ пространство всех строчных векторов $Z(y) = (Z_1(y), \ldots, Z_n(y))$ с элементами из $Z_i(y) \in L_p(y_0, y_1), i = 1, \ldots, n$. Решение задачи (5)-(7) будем искать в пространстве С.Л.Соболева

$$W_{p,n}^{(1,3)}(G) = \left\{ u \in L_{p,n}(G) \setminus D_t^i D_x^j u \in L_{p,n}(G), i = 0,1, \ j = 0,1,2,3 \right\}$$

с доминирующей производной $D_t D_x^3$. Норму в нем определим равенством

$$\|u\|_{W_{p,n}^{(1,3)}(G)} = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{3} \left\| D_t^i D_x^j u \right\|_{L_{p,n}(G)}.$$

В этом параграфе найдено интегральное представление функции в пространстве С.Л.Соболева посредством определяющих операторов при исследовании нелокальной задачи (5)-(7) (теорема 1.10).

Теорема 1.10. *Если* $\det \gamma \neq 0$*, то любая функция* $u \in W_{p,n}^{(1,3)}(G)$ *представима в виде*

$$u(t,x) = (l_0 u)(x) + \int_{t_0}^{t} (l_1 u)(\tau) \beta_1(x) d\tau + \int_{t_0}^{t} (l_2 u)(\tau) \beta_2(x) d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} (l_3 u)(\tau) \beta_3(x) d\tau + \iint_G u_{txxx}(\tau, \xi) R_0(\tau, \xi; t, x) d\tau d\xi.$$

Отметим ,что здесь $(l_k u)(\tau) = D_\tau (l_k^0 u)(\tau), k = 1, \ldots, 3$. Кроме того, даже в частности, обоснована задача Гурса с неклассическими условиями.

Известно что, можно найти различные условия для корректной разрешимости нелокальной задачи. В этом смысле, в параграфе 1.5

найдены условия корректной разрешимости нелокальной задачи с нагруженными краевыми условиями в интегральном виде для псевдопараболического уравнения четвертого порядка (теорема 1.11).

В параграфе 1.6 рассматривается нелокальная задача оптимального управления для псевдопараболического уравнения четвертого порядка с негладкими коэффициентами при нагруженных краевых условиях. Такая задача оптимального управления исследована при помощи одного нового варианта метода приращения. Этот метод существенно использует понятие сопряженного уравнения интегрального вида и позволяет охватывать также, случай, когда коэффициенты уравнения являются, вообще говоря, негладкими функциями. Иначе говоря, этот вариант является более естественным, чем классические варианты метода приращения.

Необходимые и достаточные условия оптимальных процессов для обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными при локальных условиях достаточно полно изучены в работах многих математиков. Результаты, полученные в этом направлении подробно изучены в монографиях например, Л.С.Понтрягина, В.Г.Болтянского, Р.В.Гамкрелидзе и Е.Ф.Мищенко, Р.Белмана, Н.Н.Красовского, Ж.-Л.Лионса, Р.Габасова и Ф.М.Кирилловой и др. Заметим также работ А.И.Егорова, К.Т.Ахмедова и С.С.Ахиева, К.К.Гасанова, А.Д.Искендерова, К.Б.Мансимова, М.Дж.Марданова, Т.К.Меликова, М.А.Ягубова, Г.Ф.Кулиева, Р.К.Тагиева, Ш.Ш. Юсубова и др., в которых исследованы различные классы задач оптимального управления.

В этом параграфе исследована нелокальная задача оптимального управления для псевдопараболического уравнения четвертого порядка при нагруженных краевых условиях(теорема 1.12).

Теорема.1.12. *Пусть* $f_{3,1}(x,t)\in L_q(G)$ *решение сопряженного уравнения. Тогда для оптимальности допустимого управления* $\upsilon(x,t)$ *необходимо и достаточно, чтобы почти для всех* $(x,t)\in G$, *выполнялось условие максимума*

$$\max_{\hat{\upsilon}\in\Omega_\partial} H\left(x,t,f_{3,1}(x,t),\hat{\upsilon}\right)=H\left(x,t,f_{3,1}(x,t),\upsilon(x,t)\right),$$

где $H\left(x,t,f_{3,1},\upsilon\right)=f_{3,1}\cdot\varphi(x,t,\upsilon)$ *функция Гамильтона- Понтрягина.*

Теперь рассмотрим обобщенное уравнение Манжерона

$$
\begin{gathered}
(V_{2,2}u)(x,y) \equiv D_x^2 D_y^2 u(x,y) + a_{2,1}(x,y) D_x^2 D_y u(x,y) + \\
+ a_{1,2}(x,y) D_x D_y^2 u(x,y) + a_{2,0}(x,y) D_x^2 u(x,y) + \\
+ a_{0,2}(x,y) D_y^2 u(x,y) + \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} a_{i,j}(x,y) D_x^i D_y^j u(x,y) = Z_{2,2}(x,y) \in L_p(G), \quad (8)
\end{gathered}
$$

Здесь $u(x) \equiv u(x,y)$-искомая функция, определенная на $G; a_{i,j}(x,y)$-заданные измеримые функции на $G = G_1 \times G_2$, где $G_j = (0, h_j),\ j = \overline{1,2};$ $Z_{2,2}(x,y)$-заданная измеримая функция на G; $D_t = \partial / \partial t$-оператор обобщенного дифференцирования в смысле С.Л. Соболева и D_t^0 - оператор тождественного преобразования.

Уравнение (8) является гиперболическим уравнением, которое обладает двумя действительными характеристиками $x = const,\ y = const$, первая и вторая из которых двукратная. Обобщенное уравнение Манжерона – это одно из основных дифференциальных уравнений математической биологии. Рассматриваемое уравнение является обобщением многих модельных уравнений некоторых процессов (обобщенное уравнение влагопереноса, телеграфное уравнение, уравнение колебания струны, уравнение теплопроводности, уравнение Аллера и.т.д). Кроме того, это уравнение является обобщением уравнения Буссинеска-Лява, описывающего продольные волны в тонком упругом стержне с учётом эффектов поперечной инерции.

В параграфе 2.1 для уравнения (8) рассмотрена задача Дирихле с неклассическими условиями, не требующими условий согласования. Обоснована эквивалентность этих условий классическим краевым условиям в случае, если решение поставленной задачи ищется в одном изотропном пространстве С.Л.Соболева (теорема 2.1).

Теорема 2.1. *Задачи Дирихле классического и неклассического вида для уравнения (8) эквивалентны.*

Первая краевая задача или задача Дирихле, (т.е. задача в которой носителем данных является замкнутый контур) хорошо известна для дифференциальных уравнений эллиптического типа. Задача Дирихле является одной из основных краевых задач математической физики. С этой точки зрения, эта работа посвящена актуальным проблемам математической физики.

В этом параграфе решение осуществляется редукцией к системе уравнений Фредгольма, корректная разрешимость которых устанавливается при негладких условиях на коэффициенты уравнения на основе метода интегральных представлений(теорема 2.2). При негладких условиях на коэффициенты уравнения, в прямоугольной области для этой задачи найдены условия корректной разрешимости в интегральном виде на основе метода интегральных представлений(теорема 2.3).

Теорема 2.3. *Оператор V задачи Дирихле неклассического вида есть гомеоморфизмом из $W_p^{(2,2)}(G)$ на $E_p^{(2,2)}$.*

В параграфе 2.2 для уравнения (8) рассмотрена задача Неймана с неклассическими краевыми условиями, не требующими условий согласования. Обоснована эквивалентность этих условий классическим краевым условиям в случае, если решение поставленной задачи ищется в изотропном пространстве С.Л. Соболева $W_p^{(2,2)}(G)$(теорема 2.4).

Теорема 2.4. *Задачи Неймана классического и неклассического вида для уравнения (8) эквивалентны.*

Рассмотрим уравнение

$$(V_{3,3}u)(x,y) \equiv \sum_{i,j=0}^{3} a_{i,j}(x,y) D_x^i D_y^j u(x,y) = Z_{3,3}(x,y) \in L_p(G), \qquad (9)$$

где $a_{3,3}(x,y) \equiv 1$.

Здесь $u(x,y)$-искомая функция, определенная на G; $a_{i,j}(x,y)$-заданные измеримые функции на $G = G_1 \times G_2$, где $G_k = (0,h_k),\ k=1,2;$ $Z_{3,3}(x,y)$-заданная измеримая функция на G;

Уравнение (9) является гиперболическим уравнением, которое обладает двумя действительными характеристиками $x = const,\ y = const$, первая и вторая из которых трехкратная. Поэтому уравнение (9) в некотором смысле можно рассматривать как псевдопараболическое уравнение. Это уравнение является обобщением уравнения изгиба тонкой сферической оболочки.

В параграфе 2.3. для уравнения (9) рассмотрена задача с неклассическими условиями на всей границе, не требующими условий согласования. Обоснована эквивалентность этих условий классическим краевым условиям в случае, если решение поставленной задачи ищется в изотропном пространстве С.Л. Соболева (теорема 2.5).

Теорема 2.5. *Задачи с условиями на всей границе классического и неклассического вида для уравнения (9) эквивалентны.*

Рассмотрим уравнение

$$(V_{4,4}u)(x) \equiv \sum_{i_1=0}^{4}\sum_{i_2=0}^{4} a_{i_1,i_2}(x) D_1^{i_1} D_2^{i_2} u(x) = Z_{4,4}(x) \in L_p(G), \tag{10}$$

где $a_{4,4}(x) \equiv 1$.

Здесь $u(x) \equiv u(x_1, x_2)$-искомая функция, определенная на $G; a_{i_1,i_2}(x)$-заданные измеримые функции на $G = G_1 \times G_2$, где $G_k = (0, h_k),\ k = 1,2$. $Z_{4,4}(x)$-заданная измеримая функция на G; $D_k = \partial / \partial x_k$-оператор обобщенного дифференцирования в смысле С.Л.Соболева, D_k^0 - оператор тождественного преобразования.

Уравнение (10) является гиперболическим уравнением, которое обладает двумя действительными характеристиками $x_1 = const, x_2 = const$, первая и вторая из которых четырехкратная. Поэтому уравнение (10) в некотором смысле можно рассматривать как псевдопараболическое уравнение.

В параграфе 2.4 для уравнения (10) рассмотрена контактно-краевая задача с неклассическими краевыми условиями, не требующими условий согласования. Обоснована эквивалентность этих условий классическим краевым условиям в случае, если решение поставленной задачи ищется в изотропном пространстве С.Л.Соболева (теорема 2.6).

Теорема 2.6. *Контактно-краевые задачи классического и неклассического вида для уравнения (10) эквивалентны.*

В параграфе 2.5 в прямоугольной области рассматривается финально-краевая задача для уравнения $\left(V_{4,2}u\right)(x,y) \equiv D_x^4 D_y^2 u(x,y) + a_{3,2}(x,y) D_x^3 D_y^2 u(x,y) +$

$$+ a_{4,1}(x,y) D_x^4 D_y u(x,y) + \sum_{i=0}^{4} \sum_{\substack{j=0 \\ i+j<5}}^{2} a_{i,j}(x,y) D_x^i D_y^j u(x,y) = Z_{4,2}(x,y), \quad (10^*)$$

Для этого уравнения рассмотрена финально-краевая задача с неклассическими краевыми условиями, не требующими условий согласования. Обоснована эквивалентность этих условий классическим краевым условиям в случае, если решение поставленной задачи ищется в анизотропном пространстве С.Л. Соболева (теорема 2.7).

Теорема 2.7. *Финально-краевые задачи классического и неклассического вида для уравнения* (10^*) *эквивалентны.*

В параграфе 2.6 обоснована характеристическая задача нового типа для нагруженных вольтерро-гиперболических интегро-дифференциальных векторных уравнений с доминирующей производной четвертого порядка. Впервые рассматривается задача Гурса в классическом виде для нагруженного вольтерро-гиперболического интегро-дифференциального векторного уравнения с негладкими матричными коэффициентами и с доминирующей производной $D_x^3 D_t u(x,t)$ четвертого порядка. Классические условия Гурса с помощью интегрального представления приведены к неклассическим условиям. Рассматриваемое уравнение с неклассическими краевыми условиями было названо задачей Гурса нового типа (теорема 2.8).

Теорема 2.8. *Задачи Гурса классического и неклассического вида эквивалентны.*

Рассмотрим обобщенное уравнение влагопереноса

$$\left(V_{2,1}u\right)(x) \equiv D_1^2 D_2 u(x) + a_{2,0}(x) D_1^2 u(x) + a_{1,1}(x) D_1 D_2 u(x) + a_{1,0}(x) D_1 u(x) +$$

$$+ a_{0,1}(x) D_2 u(x) + a_{0,0}(x) u(x) = \varphi_{2,1}(x) \in L_p(G), \qquad x = (x_1,\, x_2) \in G, \quad (11)$$

при следующих нелокальных условиях

$$
\begin{cases}
V_{0,0}u \equiv u(0,0) + L_{0,0}u + N_{0,0}u = \varphi_{0,0} \in R; \\
V_{1,0}u \equiv D_1 u(0,0) + L_{1,0}u + N_{1,0}u = \varphi_{1,0} \in R; \\
(V_{2,0}u)(x_1) \equiv D_1^2 u(x_1,0) + (L_{2,0}u)(x_1) + (N_{2,0}u)(x_1) = \varphi_{2,0}(x_1) \in L_p(G_1); \\
(V_{0,1}u)(x_2) \equiv D_2 u(0,x_2) + (L_{0,1}u)(x_2) + (N_{0,1}u)(x_2) = \varphi_{0,1}(x_2) \in L_p(G_2); \\
(V_{1,1}u)(x_2) \equiv D_1 D_2 u(0,x_2) + (L_{1,1}u)(x_2) + (N_{1,1}u)(x_2) = \varphi_{1,1}(x_2) \in L_p(G_2);
\end{cases}
\tag{12}
$$

где $D_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $\left(k = \overline{1,2}\right)$– оператор обобщенного дифференцирования в смысле С.Л.Соболева; $L_{i,j}$, $N_{i,j}$, ($i = \overline{0,2}$, $j = \overline{0,1}$, $i + j < 3$) линейные ограниченные интегральные и многоточечные операторы соответственно.

В параграфе 2.7 впервые рассматривается комбинированная нелокальная краевая задача с интегро-многоточечными условиями (12) для обобщенного уравнения влагопереноса (11). При этом важным принципиальным моментом является то, что рассмотренный псевдопараболический дифференциальный оператор $V_{2,1}$ не имеет традиционного сопряженного оператора. В этом параграфе исследуется комбинированная нелокальная краевая задача (11),(12) (теорема 2.9, теорема 2.10,теорема 2.11).

Теорема 2.9. *Пусть оператор* $\overline{V} : W_p^{(2,1)}(G) \to E_p^{(2,1)}, 1 \le p \le \infty$ *по норме достаточно мал, а в случае* $p = \infty$ *имеет сопряженный, действующий в* $E_1^{(2,1)}$. *Тогда задача (11), (12) везде корректно разрешима.*

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.10. *Пусть выполнены условия теоремы 2.9. Тогда оператор* $\omega_{2,1} : L_q(G) \to L_q(G)$ *есть гомеоморфизм.*

Теорема 2.11. *Задача (11), (12) имеет единственное* θ *-фундаментальное решение* $f(x)$. *При этом решение* $u(x) \in W_p^{(2,1)}(G)$ *задачи (11), (12) может быть представлено посредством* θ *-фундаментального решения в виде*

$$
u(x) = \iint_G \varphi_{2,1}(\nu) f_{2,1}(\nu; x)\, dG + \int_{G_1} \varphi_{2,0}(\nu_1) f_{2,0}(\nu_1; x)\, dG_1 +
$$

$$+\sum_{i=0}^{1}\left[\varphi_{i,0}f_{i,0}(x)+\int_{G_2}\varphi_{i,1}(\nu_2)f_{i,1}(\nu_2;x)dG_2\right].$$

Продемонстрированная нелокальная краевая (11)-(12) задача как комбинированная задача играет агентную роль между задачами с интегральными и многоточечными краевыми условиями. Практически существование таких нелокальных условий обусловлено их возникновением, например, при изучении вопросов управления различными агроэкосистемами и моделированием некоторых физических и биологических процессов и явлений. С этой точки зрения эта задача представляет не только теоретический, но и большой практический интерес.

В параграфе 2.8 изучается многоточечная краевая задача для нагруженного гиперболического интегро-дифференциального уравнения с доминирующей производной четвертого порядка с негладкими коэффициентами, являющаяся обобщением известной нелокальной задачи типа Бицадзе-Самарского и Самарского-Ионкина (теорема 2.12, теорема 2.13, теорема 2.14).

Теорема 2.12. *Пусть оператор* $\overline{L}:W_p^{(2,2)}(G)\to E_p^{(2,2)}$, $1\le p\le\infty$ *по норме достаточно мал, а в случае* $p=\infty$ *имеет сопряженный, действующий в* $E_1^{(2,2)}$. *Тогда эта задача везде корректно разрешима.*

Теорема 2.13. *Если существует хотя бы одно* θ *-фундаментальное решение* $f(x,y)\in E_q^{(2,2)}$, $(x,y)\in\overline{G}$, *то любое решение* $u\in W_p^{(2,2)}(G)$ *уравнения* $Lu+\overline{L}u=Z$, *имеет вид* $u(x,y)=f(Z)$ *и при этом однородное уравнение* $Lu+\overline{L}u=0$ *имеет только тривиальное решение* $u(x,y)=0$.

Теорема 2.14. *Если оператор* $L+\overline{L}$ *имеет левый ограниченный обратный оператор* $\left(L+\overline{L}\right)_{\Lambda}^{-1}$, *то уравнение* $Lu+\overline{L}u=Z$ *имеет хотя бы одно* $\theta-$*фундаментальное решение* $f(x,y)\in E_q^{(2,2)}$, $(x,y)\in\overline{G}$.

Пусть управляемый объект описывается уравнением Манжерона

$$\left(V_{2,2}u\right)(x) \equiv D_1^2 D_2^2 u(x) + a_{2,1}(x) D_1^2 D_2 u(x) + a_{1,2}(x) D_1 D_2^2 u(x) +$$
$$+ a_{2,0}(x) D_1^2 u(x) + a_{0,2}(x) D_2^2 u(x)$$
$$+ \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} a_{i,j}(x) D_1^i D_2^j u(x) = \varphi(x, \upsilon(x)), \quad x = (x_1, x_2), \tag{13}$$

при следующих разделённых многоточечных начально–краевых условиях

$$\begin{cases} V_{0,0}^{(k)} u \equiv u(\tau_k, \xi_k) = \varphi_{0,0}^{(k)} \in R; \\ V_{1,0}^{(k)} u \equiv D_1 u(\tau_k, \xi_k) = \varphi_{1,0}^{(k)} \in R; \\ V_{0,1}^{(k)} u \equiv D_2 u(\tau_k, \xi_k) = \varphi_{0,1}^{(k)} \in R; \\ V_{1,1}^{(k)} u \equiv D_1 D_2 u(\tau_k, \xi_k) = \varphi_{1,1}^{(k)} \in R; \\ \left(V_{2,0}^{(k)} u\right)(x_1) \equiv D_1^2 u(x_1, \xi_k) = \varphi_{2,0}^{(k)}(x_1) \in L_p(G_1); \\ \left(V_{2,1}^{(k)} u\right)(x_1) \equiv D_1^2 D_2 u(x_1, \xi_k) = \varphi_{2,1}^{(k)}(x_1) \in L_p(G_1); \\ \left(V_{0,2}^{(k)} u\right)(x_2) \equiv D_2^2 u(\tau_k, x_2) = \varphi_{0,2}^{(k)}(x_2) \in L_p(G_2); \\ \left(V_{1,2}^{(k)} u\right)(x_2) \equiv D_1 D_2^2 u(\tau_k, x_2) = \varphi_{1,2}^{(k)}(x_2) \in L_p(G_2); \end{cases} \tag{14}$$

где $\varphi_{i,j}^{(k)}$, $i, j = \overline{0,1}$ - заданные постоянные, *а* остальные $\varphi_{i,j}^{(k)}$ являются заданными измеримыми функциями; $D_k = \partial / \partial x_k$, $\left(k = \overline{1,2}\right)$- оператор обобщённого дифференцирования в смысле С. Л. Соболева. Кроме того, выше заданные $a_{i,j}(x)$- измеримые функции на $G = G_1 \times G_2$; $G_i = (0, h_i)$, $i = \overline{1,2}$ и удовлетворяющие лишь следующим условиям:

$a_{i,j}(x) \in L_p(G)$, $i, j = \overline{0,1}$; $a_{2,j}(x) \in L_{\infty,p}^{x_1,x_2}(G)$, $j = \overline{0,1}$; $a_{i,2}(x) \in L_{p,\infty}^{x_1,x_2}(G)$, $i = \overline{0,1}$;

Заметим, что здесь предполагается, (τ_k, ξ_k), $\left(k = \overline{1,N}\right)$- фиксированные точки из $\overline{G}$; $\varphi(x, \upsilon(x))$ заданная функция на $G \times R^r$, удовлетворяющая условиям Каратеодори в $G \times R^r$, (т.е. $\varphi(x, \upsilon(x))$ измерима по x на G для всех заданных $\upsilon \in R^r$ и непрерывна по υ на R^r почти для всех заданных $x \in G$) и для любого положительного числа $\delta > 0$ существует функция $\varphi_\delta^0(x) \in L_p(G)$ такая, что $|\varphi(x, \upsilon(x))| \le \varphi_\delta^0(x)$ почти для всех $x \in G$ и всех $\upsilon \in R^r$ для которых $\|\upsilon\| = \sum_{i=1}^{r} |\upsilon_i| \le \delta$; $\upsilon(x) = (\upsilon_1(x), ..., \upsilon_r(x)) - r$ -мерная управляющая вектор – функция.

Пусть вектор- функция $\upsilon(x)$ измерима и ограничена на G и почти во всех точках $x \in G$ принимает свои значения из некоторого заданного множества $\Omega \subset R^r$. Тогда эту вектор – функцию будем называть допустимым управлением. Множество допустимых управлений обозначим через Ω_∂.

Теперь рассмотрим следующую нелокальную задачу оптимального управления: найти допустимое управление $\upsilon(x)$ из Ω_∂, для которого решение нелокальной задачи (13)-(14) в пространстве С. Л. Соболева

$$u \in W_p^{(2,2)}(G) \equiv \{u(x) : D_1^i D_2^j u(x) \in L_p(G), \ i, j = \overline{0,2}, \ \}, \quad (1 \le p \le \infty)$$

доставляет наименьшее значение многоточечному функционалу

$$S(\upsilon) = \sum_{k=1}^{N} \left[\alpha_k u\left(\tau_k, \lambda_k^{(0)}\right) + \beta_k u\left(\mu_k^{(0)}, \xi_k\right) + \gamma_k u\left(\mu_k^{(0)}, \lambda_k^{(0)}\right)\right] \to \min, \quad (15)$$

где $\left(\mu_k^{(0)}, \lambda_k^{(0)}\right) \in \overline{G}$ заданные точки; $\alpha_k \in R$, $\beta_k \in R$ и $\gamma_k \in R$ заданные числа; N - натуральное число.

Отметим, что разделенные многоточечные краевые условия (14) в одноточечном случае совпадают с условиями Гурса для обобщенного уравнения Манжерона и для каждой фиксированной точки (τ_k, ξ_k), многоточечная краевая задача (13)-(14) имеет единственное решение.

В параграфе 2.9 исследуется нелокальная задача оптимального управления (13)-(15) для обобщенного уравнения Манжерона с негладкими коэффициентами при разделенных многоточечных начально-краевых условиях (14)(теорема 2.15).

Теорема 2.15. *Пусть* $f_{2,2}(x) \in L_q(G)$ *решение сопряженного уравнения* $(\omega_{2,2} f_{2,2})(x) + B(x) = 0, \quad x \in G,$. *Тогда для оптимальности допустимого управления* $\upsilon(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы почти для всех* $x \in G$, *выполнялось условие максимума*

$$\max_{\hat{\upsilon}\in\Omega_\partial} H\left(x, f_{2,2}(x), \hat{\upsilon}\right) = H\left(x, f_{2,2}(x), \upsilon(x)\right),$$

где, $H\left(x, f_{2,2}, \upsilon\right) = f_{2,2}\varphi(x,\upsilon)$ *-функция Гамильтона- Понтрягина.*

Рассмотрим трехмерное нагруженное гиперболическое уравнение со смешанным интегральным возмущением типа «Вольтерра+Фредгольма»:

$$\left(V_{1,1,1}u\right)(x,y,z) \equiv$$

$$\sum_{i=0}^{1}\left[\sum_{j=0}^{1} A_{i,0,j}(x,y,z) D_x^i D_z^j u(x,y,z) + A_{0,1,i}(x,y,z) D_y^1 D_z^1 u(x,y,z) + \right.$$

$$\left. + A_{1,1,i}(x,y,z) D_x^1 D_y^1 D_z^i u(x,y,z)\right] +$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} K_{1,2}(x,y,z;\tau,\xi) D_x^1 D_y^1 D_z^1 u(\tau,\xi, z)\, d\tau\, d\xi +$$

$$+ \int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} K_{2,3}(x,y,z; \xi,\eta) D_x^1 D_y^1 D_z^1 u(x, \xi,\eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z} K_{1,3}(x,y,z;\tau,\eta) D_x^1 D_y^1 D_z^1 u(\tau, y,\eta)\, d\tau\, d\eta +$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} K_{1,2,3}(x,y,z;\tau, \xi, \eta) D_x^1 D_y^1 D_z^1 u(\tau,\xi,\eta)\, d\tau\, d\xi\, d\eta +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\int\limits_{G_1\times G_2}\int B^{i}_{1,2}\left(x,y,z;\tau,\xi\right)D^1_x D^1_y u\left(\tau,\ \xi,z_{(i)}\right)d\tau d\xi\ +\right.$$

$$+\int\limits_{G_2\times G_3}\int B^{i}_{2,3}\left(x,y,z;\xi,\eta\right)D^1_y D^1_z u\left(x_{(i)},\xi,\eta\right)d\xi\ \ d\eta+$$

$$\left.+\int\limits_{G_1\times G_3}\int B^{i}_{1,3}\left(x,y,z;\tau,\eta\right)D^1_x D^1_z u\left(\tau,y_{(i)},\eta\right)d\tau\, d\eta\right]=$$

$$=\varphi_{1,1,1}(x,y,z)\in L_p(G),\quad (x,y,z)\in G \tag{16}$$

при следующих нелокальных краевых условиях

$$\begin{cases} V_{0,0,0}u\equiv u(x_0,y_0,z_0)+N_{0,0,0}u=\varphi_{0,0,0}\in R;\\ (V_{1,0,0}u)(x)\equiv D^1_x u(x,y_0,z_0)+(N_{1,0,0}u)(x)=\varphi_{1,0,0}(x)\in L_p(G_1);\\ (V_{0,1,0}u)(y)\equiv D^1_y u(x_0,y,z_0)+(N_{0,1,0}u)(y)=\varphi_{0,1,0}(y)\in L_p(G_2);\\ (V_{0,0,1}u)(z)\equiv D^1_z u(x_0,y_0,z)+(N_{0,0,1}u)(z)=\varphi_{0,0,1}(z)\in L_p(G_3);\\ (V_{1,1,0}u)(x,y)\equiv D^1_x D^1_y u(x,y,z_0)+(N_{1,1,0}u)(x,y)=\varphi_{1,1,0}(x,y)\in L_p(G_1\times G_2);\\ (V_{0,1,1}u)(y,z)\equiv D^1_y D^1_z u(x_0,y,z)+(N_{0,1,1}u)(y,z)=\varphi_{0,1,1}(y,z)\in L_p(G_2\times G_3);\\ (V_{1,0,1}u)(x,z)\equiv D^1_x D^1_z u(x,y_0,z)+(N_{1,0,1}u)(x,z)=\varphi_{1,0,1}(x,z)\in L_p(G_1\times G_3); \end{cases} \tag{17}$$

Где, $N_{i,j,k},\left(i,j,k=\overline{0,1},\ i+j+k<3\right)$ -линейные ограниченные интегральные операторы.

В параграфе 3.1 для нагруженного интегро-дифференциального уравнения (16) вольтерро-гиперболического типа с доминирующей производной третьего порядка с негладкими коэффициентами рассмотрена одна, вообще говоря, нелокальная задача с интегральными краевыми условиями (17), которая в некотором смысле обобщает задачи Коши и Гурса, а также некоторые другие классы локальных и нелокальных задач. Найдены достаточные условия, обеспечивающие везде корректную разрешимость этой задачи вместе со своей сопряженной системой, а также существование и единственность θ -фундаментального решения (теорема 3.1, теорема 3.2, теорема 3.3).

Теорема 3.1. *Пусть оператор* $N=\left(N_{1,1,1}, N_{0,0,0}, N_{1,0,0}, N_{0,1,0}, N_{0,0,1}, N_{1,1,0}, N_{0,1,1}, N_{1,0,1}\right)$: $W_p^{(1,1,1)}(G)\rightarrow E_p^{(1,1,1)}, 1\leq p\leq\infty$ *по норме достаточно мал, а в случае* $p=\infty$ *имеет сопряженный, действующий в* $E_1^{(1,1,1)}$. *Тогда задача 16)-(17) везде корректно разрешима.*

Теорема 3.2. *Оператор* $\omega_{1,1,1}: L_q(G)\rightarrow L_q(G)$ *есть гомеоморфизм.*

Теорема 3.3. *Задача (16)-(17) имеет единственное* θ*-фундаментальное решение* $f(x,y,z)$. *При этом решение* $u(x,y,z)\in W_p^{(1,1,1)}(G)$ *задачи (16)-(17) может быть представлено посредством* θ *-фундаментального решения в виде*

$$u(x,y,z)=\iiint_G \varphi_{1,1,1}(\alpha,\beta,\gamma) f_{1,1,1}(\alpha,\beta,\gamma;\cdot) dG+\varphi_{0,0,0} f_{0,0,0}(\cdot)+$$

$$+\int_{G_1}\varphi_{1,0,0}(\alpha) f_{1,0,0}(\alpha;\cdot) dG_1+\int_{G_2}\varphi_{0,1,0}(\beta) f_{0,1,0}(\beta;\cdot) dG_2+\int_{G_3}\varphi_{0,0,1}(\gamma) f_{0,0,1}(\gamma;\cdot) dG_3+$$

$$+\int_{G_1\times G_2}\int \varphi_{1,1,0}(\alpha,\beta) f_{1,1,0}(\alpha,\beta;\cdot) dG_1 dG_2+\int_{G_2\times G_3}\int \varphi_{0,1,1}(\beta,\gamma) f_{0,1,1}(\beta,\gamma;\cdot) dG_2 dG_3+$$

$$+\int_{G_1\times G_3}\int \varphi_{1,0,1}(\alpha,\gamma) f_{1,0,1}(\alpha,\gamma;\cdot) dG_1 dG_3.$$

Рассмотрим нагруженное вольтерро-гиперболическое интегро-дифференциальное уравнение типа Бианки

$$\left(V_{1,1,1}u\right)(x)\equiv D_1 D_2 D_3 u(x)+\left(\overline{V}_{1,1,1}u\right)(x)=Z_{1,1,1}(x), x=\left(x_1,x_2,x_3\right)\in G, \quad (18)$$

где нагруженный интегро-дифференциальный оператор $\overline{V}_{1,1,1}$ имеет следующий вид:

$$\left(\overline{V}_{1,1,1}u\right)(x) \equiv \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3<3,\\ i_\xi=0,1,\\ \xi=1,2,3}} a_{i_1,i_2,i_3}(x) D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} u(x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{\xi=1}^{3}\int_{G_\xi} K_\xi^i(x;\tau_\xi) D_\xi \left(u(x)\Big|_{\substack{x=x^{(i)}\\ x_\xi^{(i)}=\tau_\xi}} \right) d\tau_\xi \right]+$$

$$+\sum_{l<m}\int_0^{x_l}\int_0^{x_m} B_{l,m}(x;\tau_l,\tau_m) D_l D_m \left(u(x)\Big|_{\substack{x_l=\tau_l\\ x_m=\tau_m}} \right) d\tau_l d\tau_m .$$

при следующих нелокальных условиях

$$\begin{cases} V_{0,0,0}u \equiv u(0,0,0)+\overline{V}_{0,0,0}u = Z_{0,0,0}; \\ \left(V_{1,0,0}u\right)(x_1) \equiv D_1 u(x_1,0,0)+\left(\overline{V}_{1,0,0}u\right)(x_1) = Z_{1,0,0}(x_1); \\ \left(V_{0,1,0}u\right)(x_2) \equiv D_2 u(0,x_2,0)+\left(\overline{V}_{0,1,0}u\right)(x_2) = Z_{0,1,0}(x_2); \\ \left(V_{0,0,1}u\right)(x_3) \equiv D_3 u(0,0,x_3)+\left(\overline{V}_{0,0,1}u\right)(x_3) = Z_{0,0,1}(x_3); \\ \left(V_{1,1,0}u\right)(x_1,x_2) \equiv D_1 D_2 u(x_1,x_2,0)+\left(\overline{V}_{1,1,0}u\right)(x_1,x_2) = Z_{1,1,0}(x_1,x_2); \\ \left(V_{0,1,1}u\right)(x_2,x_3) \equiv D_2 D_3 u(0,x_2,x_3)+\left(\overline{V}_{0,1,1}u\right)(x_2,x_3) = Z_{0,1,1}(x_2,x_3); \\ \left(V_{1,0,1}u\right)(x_1,x_3) \equiv D_1 D_3 u(x_1,0,x_3)+\left(\overline{V}_{1,0,1}u\right)(x_1,x_3) = Z_{1,0,1}(x_1,x_3); \end{cases} \tag{19}$$

где $D_\xi = \partial/\partial x_\xi$, $(\xi=1,2,3)$-оператор обобщенного дифференцирования в смысле С.Л. Соболева;

$\overline{V}_{i_1,i_2,i_3}u \equiv N_{i_1,i_2,i_3}u + L_{i_1,i_2,i_3}u, i_1+i_2+i_3<3, i_\xi=0,1, \xi=1,2,3.$

Здесь: $N_{i_1,i_2,i_3}, L_{i_1,i_2,i_3}, \left(i_\xi=0,1, \xi=1,2,3, \sum_{\xi=1}^{3} i_\xi <3\right)$ линейные ограниченные интегральные и многоточечные операторы соответственно.

Выше коэффициенты уравнения-заданными измеримыми функциями на $G=G_1\times G_2\times G_3$, где $G_\xi=(0,h_\xi)$, $\xi=1,2,3$ и удовлетворяющими лишь следующим условиям: $a_{0,0,0}(x)\in L_p(G)$; $a_{1,0,0}(x)\in L_{\infty,p,p}^{x_1,x_2,x_3}(G)$; $a_{0,1,0}(x)\in L_{p,\infty,p}^{x_1,x_2,x_3}(G)$; $a_{0,0,1}(x)\in L_{p,p,\infty}^{x_1,x_2,x_3}(G)$;

$a_{1,1,0}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3}_{\infty,\infty,p}(G)$; $a_{0,1,1}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3}_{p,\infty,\infty}(G)$; $a_{1,0,1}(x) \in L^{x_1,x_2,x_3}_{\infty,p,\infty}(G)$.

Кроме того, предполагается, что

$K^i_\xi(x;\tau_\xi) \in L^{x,\tau_\xi}_{p,q}(G \times G_\xi), \xi = 1,2,3;$

$B_{l,m}(x;\tau_l,\tau_m) \in L^{x,\tau_l,\tau_m}_{p,q,q}(G \times G_l \times G_m), l < m;$

Z_{i_1,i_2,i_3}, $(i_\xi = 0,1,\ \xi = 1,2,3)$-заданные измеримые функции;

$x^{(i)} = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}\right)$ - фиксированные точки из $\overline{G}$, где $i = 1,2,...,n$.

При выше наложенных условиях $u(x)$ задачи (18), (19) естественно искать в пространстве С.Л.Соболева

$$W_p^{(1,1,1)}(G) \equiv \left\{u(x): D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} u(x) \in L_p(G), i_\xi = 0,1; \xi = 1,2,3\right\},$$

где $1 \le p \le \infty$. Норму в пространстве $W_p^{(1,1,1)}(G)$ будем определять равенством

$$\|u\|_{W_p^{(1,1,1)}(G)} = \sum_{i_1=0}^{1} \sum_{i_2=0}^{1} \sum_{i_3=0}^{1} \left\| D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} u(x) \right\|_{L_p(G)}.$$

Различные аспекты краевых задач для уравнений Бианки исследованы в работах В.И.Жегалова, В.А.Севастьянова, Е.А.Уткиной, О.А. Кощеевой, А.Н.Миронова и др.

Уравнения с доминирующей производной $D_1D_2D_3u(x)$ используются при моделировании процессов вибрации и играют существенную роль в теориях аппроксимации и отображений .

В параграфе 3.2 исследована комбинированная трехмерная нелокальная краевая задача (18)-(19) с интегро-многоточечными краевыми условиями для нагруженного вольтерро-гиперболического интегро-дифференциального уравнения типа Бианки (теорема 3.4).

Теорема 3.4. *Пусть оператор* $\overline{V} : W_p^{(1,1,1)}(G) \to E_p^{(1,1,1)}$, $1 \le p \le \infty$ *по норме достаточно мал, а в случае* $p = \infty$ *имеет сопряженный, действующий в* $E_1^{(1,1,1)}$. *Тогда задача (18), (19) везде корректно разрешима.*

Рассмотрим уравнение

$$(V_{2,1,1})(x,y,z) \equiv D_x^2 D_y D_z u(x,y,z) + \sum_{i=0}^{2}\sum_{j,k=0}^{1} A_{i,j,k}(x,y,z) D_x^i D_y^j D_z^k u(x,y,z) =$$

$$= \varphi_{2,1,1}(x,y,z) \in L_p(G), \ \left(A_{2,1,1}(x,y,z) \equiv 0\right), \qquad (20)$$

Здесь $u = u(x,y,z)$ искомая функция, определенная на G; $A_{i,j,k} = A_{i,j,k}(x,y,z)$ заданные измеримые функции на $G = G_1 \times G_2 \times G_3$, где $G_1 = (x_0, x_1), G_2 = (y_0, y_1), G_3 = (z_0, z_1)$;

$\varphi_{2,1,1}(x,y,z)$ -заданная измеримая функция на $G; D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$ – оператор обобщенного дифференцирования в смысле С.Л.Соболева.

Уравнение (20) является гиперболическим уравнением, которое обладает тремя действительными характеристиками $x = const, y = const, z = const$, первая, из которых двухкратная, а вторая и третая-простая. Уравнение (20) в некотором смысле можно рассматривать также как псевдопараболическое уравнение . Кроме того, в литературе до сих пор функцию Римана уравнения (20) удалось построить только для случая достаточно гладких коэффициентов (т.е. когда функции $A_{i,j,k}(x,y,z)$ непрерывны вместе с производными $D_x^i D_y^j D_z^k A_{i,j,k}(x,y,z)$ в области $\overline{G}$).

В параграфе (3.3) уравнение (20) впервые исследовано в общем случае, когда коэффициенты $A_{i,j,k}(x,y,z)$ являются негладкими функциями, удовлетворяющими лишь следующим условиям:

$A_{0,0,0}(x,y,z) \in L_p(G)$; $A_{1,0,0}(x,y,z) \in L_p(G)$; $A_{2,0,0}(x,y,z) \in L_{\infty,p,p}^{x,y,z}(G)$;

$A_{0,1,0}(x,y,z) \in L_{p,\infty,p}^{x,y,z}(G)$; $A_{1,1,0}(x,y,z) \in L_{p,\infty,p}^{x,y,z}(G)$;

$A_{0,1,1}(x,y,z) \in L_{p,\infty,\infty}^{x,y,z}(G)$; $A_{2,1,0}(x,y,z) \in L_{\infty,\infty,p}^{x,y,z}(G)$;

$A_{1,0,1}(x,y,z) \in L_{p,p,\infty}^{x,y,z}(G)$; $A_{0,0,1}(x,y,z) \in L_{p,p,\infty}^{x,y,z}(G)$;

$A_{1,1,1}(x,y,z) \in L_{p,\infty,\infty}^{x,y,z}(G)$; $A_{2,0,1}(x,y,z) \in L_{\infty,p,\infty}^{x,y,z}(G)$.

При этих условиях решение $u(x,y,z)$ уравнения (20) будем искать в пространстве С.Л.Соболева:

$$W_p^{(2,1,1)}(G) \equiv \{u \in L_p(G)/D_x^i D_y^j D_z^k u \in L_p(G), i = \overline{0,2}; j,k = \overline{0,1}\},$$

где $1 \le p \le \infty$. Норму в анизотропном пространстве $W_p^{(2,1,1)}(G)$ будем определять равенством

$$\|u\|_{W_p^{(2,1,1)}(G)} = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j,k=0}^{1} \left\| D_x^i D_y^j D_z^k u \right\|_{L_p(G)}.$$

В этом параграфе исследуется фундаментальное решение одной трехмерной задачи Гурса для псевдопараболического уравнения с доминирующей производной четвертого порядка (20) в анизотропном пространстве С.Л.Соболева $W_p^{(2,1,1)}(G)$ (теорема 3.5, теорема 3.6, теорема 3.7, теорема 3.8).

Теорема 3.5. *Трехмерные задачи Гурса классического и неклассического вида для уравнения (20) эквивалентны.*

Теорема 3.6. *Оператор задачи Гурса неклассического вида есть гомеоморфизм из $W_p^{(2,1,1)}(G)$ на $E_p^{(2,1,1)}$.*

Теорема 3.7. *Оператор $\omega_{2,1,1} : L_q(G) \to L_q(G)$ есть гомеоморфизм.*

Теорема 3.8. *Задача Гурса неклассического вида имеет единственное θ-фундаментальное решение $f(x,y,z)$. При этом решение $u \in W_p^{(2,1,1)}(G)$ задачи Гурса неклассического вида может быть представлено посредством θ-фундаментального решения в виде:*

$$u(x,y,z) = \varphi_{0,0,0} f_{0,0,0}(x,y,z) +$$

$$\varphi_{1,0,0} f_{1,0,0}(x,y,z) + \int_{x_0}^{x_1} \varphi_{2,0,0}(\alpha) f_{2,0,0}(\alpha; x,y,z) d\alpha +$$

$$+ \int_{y_0}^{y_1} \varphi_{0,1,0}(\beta) f_{0,1,0}(\beta; x,y,z) d\beta + \int_{y_0}^{y_1} \varphi_{1,1,0}(\beta) f_{1,1,0}(\beta; x,y,z) d\beta +$$

$$+ \int_{z_0}^{z_1} \varphi_{0,0,1}(\gamma) f_{0,0,1}(\gamma; x,y,z) d\gamma + \int_{z_0}^{z_1} \varphi_{1,0,1}(\gamma) f_{1,0,1}(\gamma; x,y,z) d\gamma +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\varphi_{2,1,0}(\alpha,\beta)f_{2,1,0}(\alpha,\beta;x,y,z)d\alpha d\beta+$$

$$+\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}\varphi_{0,1,1}(\beta,\gamma)f_{0,1,1}(\beta,\gamma;x,y,z)d\beta d\gamma+$$

$$+\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}\varphi_{1,1,1}(\beta,\gamma)f_{1,1,1}(\beta,\gamma;x,y,z)d\beta d\gamma+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\int_{z_0}^{z_1}\varphi_{2,0,1}(\alpha,\gamma)f_{2,0,1}(\alpha,\gamma;x,y,z)d\alpha d\gamma+$$

$$+\iiint_G\varphi_{2,1,1}(\alpha,\beta,\gamma)f_{2,1,1}(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z)dG.$$

Теперь рассмотрим другое трехмерное уравнение:

$$(V_{2,1,2}u)(x)\equiv D_1^2D_2D_3^2u(x)+a_{2,0,2}(x)D_1^2D_3^2u(x)+$$
$$+a_{2,1,1}(x)D_1^2D_2D_3u(x)+a_{1,1,2}(x)D_1D_2D_3^2u(x)+$$
$$+\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3<4\\ i_1,i_3=\overline{0,2},\ i_2=\overline{0,1},}} a_{i_1,i_2,i_3}(x)D_1^{i_1}D_2^{i_2}D_3^{i_3}u(x)= \tag{21}$$
$$=Z_{2,1,2}(x)\in L_p(G),$$

здесь $u(x)=u(x_1,x_2,x_3)$ искомая функция, определенная на G; $a_{i_1,i_2,i_3}=a_{i_1,i_2,i_3}(x)$ заданные измеримые функции на $G=G_1\times G_2\times G_3$, где $G_\xi=(0,h_\xi)$, $\xi=\overline{1,3}; Z_{2,1,2}(x)$ заданная измеримая функция на $G; D_\xi=\dfrac{\partial}{\partial x_\xi}-$ оператор обобщенного дифференцирования в смысле С.Л.Соболева.

В параграфе 3.4 для дифференциального уравнения (21) гиперболического типа с L_p коэффициентами в трехмерном пространстве рассмотрена задача Гурса с неклассическими краевыми условиями, не требующими условий согласования. Обоснована эквивалентность этих условий классическим краевым условиям в случае, если решение поставленной задачи ищется в анизотропном пространстве С.Л.Соболева(теорема 3.9).

Теорема 3.9. *Трехмерные задачи Гурса классического и неклассического вида для уравнения (21) эквивалентны.*

Кроме того, доказывается корректная разрешимость задачи Гурса методом интегральных уравнений (теорема 3.10).

Теорема 3.10. *Оператор задачи Гурса неклассического вида есть гомеоморфизм из* $W_p^{(2,1,2)}(G)$ *на* $E_p^{(2,1,2)}$.

Пусть R^3 – трехмерное евклидовое пространство векторов $x=(x_1,x_2,x_3), \|x\|=\sum\limits_{i=1}^{3}|x_i|$; $R^1=R$;

Далее, пусть

$$G_i=(x_0{}^i, x^i),\ \ i=\overline{1,3};\quad G=G_1\times G_2\times G_3$$

ограниченная область из R^3; $l=(l_1,l_2,l_3)$ – целочисленный вектор с положительными компонентами;

$W_p^{(l_1,l_2,l_3)}(G),\ \ 1\le p\le\infty$, – пространство всех $u\in L_P(G)$, имеющих в смысле С.Л.Соболева обобщенные производные $D_{x_1}^{i_1}D_{x_2}^{i_2}D_{x_3}^{i_3}u\in L_p(G)$ для всех $i_k=0,...,l_k, k=1,...,3$;

$$\|u\|_{W_p^{(l_1,l_2,l_3)}(G)}=\sum_{i_1=0}^{l_1}\sum_{i_2=0}^{l_2}\sum_{i_3=0}^{l_3}\left\|D_{x_1}^{i_1}D_{x_2}^{i_2}D_{x_3}^{i_3}u(x)\right\|_{L_p(G)}.$$

Рассмотрим трехмерное уравнение в пространстве С.Л.Соболева $W_p^{(l_1,l_2,l_3)}(G)$:

$$V_{l_1,l_2,l_3}u\equiv D_{x_1}^{l_1}D_{x_2}^{l_2}D_{x_3}^{l_3}u(x)+\left(\hat{V}_{l_1,l_2,l_3}u\right)(x)=\varphi_{l_1,l_2,l_3}(x),\quad x\in G, \tag{22}$$

где оператор $\hat{V}_{l_1,l_2,l_3}:W_p^{(l_1,l_2,l_3)}(G)\to L_p(G)$ линеен и ограничен.

В параграфе 3.5 рассматривается трехмерное уравнение (22) при общих трехмерных нелокальных условиях в операторном виде.

В этом параграфе выявлены общие классы трехмерных локальных и нелокальных краевых задач для гиперболических уравнений в анизотропных пространствах С.Л.Соболева $W_p^{(l_1,l_2,l_3)}(G)$ (теорема 3.11).

Теорема 3.11. *Пусть оператор* $\hat{V}: W_p^{(l_1,l_2,l_3)}(G) \to E_p^{(l_1,l_2,l_3)}$, $1 \le p \le \infty$ *по норме достаточно мал, а в случае* $p = \infty$ *имеет сопряженный, действующий в* $E_1^{(l_1,l_2,l_3)}$. *Тогда эта трехмерная нелокальная задача везде корректно разрешима.*

Теперь рассмотрим четырехмерное уравнение:

$$
\begin{aligned}
&(V_{1,1,2,2}u)(x) \equiv D_1 D_2 D_3^2 D_4^2 u(x) + a_{1,0,2,2}(x) D_1 D_3^2 D_4^2 u(x) + \\
&+ a_{0,1,2,2}(x) D_2 D_3^2 D_4^2 u(x) + \\
&+ a_{1,1,1,2}(x) D_1 D_2 D_3 D_4^2 u(x) + a_{1,1,2,1}(x) D_1 D_2 D_3^2 D_4 u(x) + \\
&+ \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3+i_4<5 \\ i_\xi=\overline{0,1},\ \xi=\overline{1,2}; \\ i_\eta=\overline{0,2},\ \eta=\overline{3,4}}} a_{i_1,i_2,i_3,i_4}(x) D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} D_4^{i_4} u(x) = \varphi_{1,1,2,2}(x) \in L_p(G), \quad (23)
\end{aligned}
$$

здесь $u(x) = u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ искомая функция, определенная на G; $a_{i_1,i_2,i_3,i_4} = a_{i_1,i_2,i_3,i_4}(x)$ заданные измеримые функции на $G = G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4$, где $G_\xi = (0, h_\xi)$, $\xi = \overline{1,4}; \varphi_{1,1,2,2}(x)$ заданная измеримая функция на $G; D_\xi = \dfrac{\partial}{\partial x_\xi}$ – оператор обобщенного дифференцирования в смысле С.Л.Соболева.

В параграфе 4.1 обоснована четырехмерная задача Гурса с неклассическими краевыми условиями для уравнения (23) (теорема 4.1).

Теорема 4.1. *Четырехмерные задачи Гурса классического и неклассического вида для уравнения(23) эквивалентны.*

В современной теории дифференциальных уравнений особое значение имеет вопрос о выявлении классов задач ,операторы которых осуществляют гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств.Такие гомеоморфизмы выявлены в работах автора [24,41,54] и др.

Отметим,что в этом параграфе выявлен гомеоморфизм (теорема 4.2) между определенными парами банаховых пространств при исследовании четырехмерной задачи Гурса для дифференциального уравнения (23) с доминирующей производной шестого порядка с негладкими коэффициентами (L_p – коэффициентами) на основе сведения этой задачи к эквивалентному интегральному уравнению .

Теорема 4.2. *Оператор задачи Гурса неклассического вида для уравнения(23) задает гомеоморфизм из* $W_p^{(1,1,2,2)}(G)$ *на* $E_p^{(1,1,2,2)}$.

В параграфе 4.2 рассматривается четырехмерная задача оптимального управления для вольтерро- гиперболических интегро-дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами при условиях Гурса. Для простоты это продемонстрировано для одного модельного случая (теорема 4.3).

Теорема 4.3. *Пусть* $f_{1,1,1,1}(x,y,z,t) \in L_q(G)$ *решение сопряженного уравнения. Тогда для оптимальности некоторого допустимого управления* $v(x,y,z,t)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие максимума*

$$\max_{\hat{v}\in\Omega_\partial} H(x,y,z,t,f_{1,1,1,1}(x,y,z,t),\hat{v}) = H(x,y,z,f_{1,1,1,1}(x,y,z,t),v(x,y,z,t))$$

почти для всех $(x,y,z,t)\in G$, *где* $H(x,y,z,t,f_{1,1,1,1},v) = f_{1,1,1,1}\cdot\varphi(x,y,z,t,v)$ *функция Гамильтона-Понтрягина.*

В параграфе 4.3 выявлены общие классы корректно поставленных многомерных локальных и нелокальных краевых задач для гиперболических уравнений высокого порядка в анизотропных пространствах С.Л.Соболева(теорема 4.4, теорема 4.5).

Теорема 4.4. *Пусть оператор* $\hat{V}: W_p^{(1,1,1,1)}(G) \to E_p^{(1,1,1,1)}$, $1 \le p \le \infty$ *по норме достаточно мал, а в случае* $p=\infty$ *имеет сопряженный, действующий в* $E_1^{(1,1,1,1)}$. *Тогда эта задача везде корректно разрешима.*

Теорема 4.5. *Пусть оператор* $\hat{V}: W_p^{(l_1,l_2,l_3,l_4)}(G) \to E_p^{(l_1,l_2,l_3,l_4)}$, $1 \le p \le \infty$ *по норме достаточно мал, а в случае* $p=\infty$ *имеет сопряженный, действующий в* $E_1^{(l_1,l_2,l_3,l_4)}$. *Тогда эта задача везде корректно разрешима.*

В заключении автор выражает искреннюю благодарность проф. С.С.Мирзоеву и проф. Т.К.Меликову за ценные советы и полезные замечания в получении результатов диссертационной работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Мамедов И.Г. Задача оптимального управления в процессах, описываемых нелокальной задачей с нагружениями для гиперболического интегро-дифференциального уравнения // Известия НАН Азерб, сер. Физ.-техн. и мат.наук, 2004, т. XXIV, № 2, с. 74-79.
2. Мамедов И.Г. Многоточечная краевая задача для нагруженных гиперболических интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка / Труды II Респуб. научной конф. «Современные проблемы информатизации, Кибернетики и информациионных технологий», Баку, 26-28 октября, 2004, с.14-16.
3. Мамедов И.Г. Об одной схеме построения сопряженного оператора // Известия НАН Азерб., сер. Физ.-техн. и мат. наук, 2004,т. XXIV, № 2, с.90-95.
4. Мамедов И.Г. О новой постановке задачи Гурса для одного нагруженного вольтерро-гиперболического интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка / Тезисы Межд. конф. по математике и механике, посвящённой 50-летию со дня рождения чл. корр. НАНА, проф. И.Т.Мамедова, Баку, 2005, с.123.
5. Мамедов И.Г. Смешанная задача с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе-Самарского и Самарского-Ионкина для системы псевдопараболических уравнений четвёртого порядка / Тезисы научн. конф., посвящ.75-летию чл.- корр. НАНА, заслуженного деятеля науки, лауреата Гос. Премии, д.ф.-м.н, проф. Яхьи Джафар оглы Мамедова, Баку, 2006, с.85-86.
6. Мамедов И.Г. Задача Коши нового типа для псевдо-параболического уравнения с доминирующей производной четвёртого порядка с негладкими коэффициентами / Тезисы XII Международной конференции по математике и механике, посвящённой 70-летному юбилею чл. корр. НАН Азербайджана, профессора Б.А.Искендерова, Баку, 2006, с.108.

7. Мамедов И.Г. О выявлении гомеоморфизма при исследовании задачи Гурса для псевдопараболического уравнения четвёртого порядка / Azərbaycan MEA-nın həqiqi üzvü,əməkdar elm xadimi,f.-r.e.d.,prof. Məcid Lətif oğlu Rəsulovun 90 illiyinə həsr olunmuş «Riyazi fizikanın üsulları» elmi konfransının materialları, Bakı, 2006,səh. 118-124.
8. Мамедов И.Г. Задача Гурса нового типа для нагруженных вольтерро-гиперболических интегро-дифференциальных векторных уравнений четвертого порядка с негладкими матричными коэффициентами // Известия НАН Азерб., сер. Физ.-техн. и матем.наук, 2006, т. XXVI, № 2, с. 74-79.
9. Мамедов И.Г. Смешанная задача с нелокальными краевыми услoвиями типа Бицадзе-Самарского и Самарского-Ионкина, возникающая при моделировании фильтрации жидкости в трещиноватых средах // Известия НАН Азерб., сер. Физ.- техн. и матем.наук, 2006, т. XXVI, № 3, с.32-37.
10. Мамедов И.Г. Трехмерная задача Гурса нового типа для псевдо-параболического уравнения четвертого порядка в анизотропном пространстве С.Л.Соболева $W_p^{(2,1,1)}(G)$ / Əməkdar elm xadimi, akademik Əşrəf Hüseynovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konfransın tezisləri,Bakı,2007,səh.97.
11. Мамедов И.Г. Обобщение комбинированной задачи типа Коши-Гурса-Дарбу в виде задачи с интегральными краевыми условиями / «Riyaziyyat, mexanika və informatikanın müasir problemləri» beynəlxalq simpoziumun tezisləri, Naxçıvan,2007,səh.59.
12. Мамедов И.Г. Исследование задачи с интегро-многоточечными краевыми условиями для обобщенного уравнения влагопереноса // Известия НАН Азерб., сер. Физ.- техн. и матем. наук, 2007, т. XXVII, № 2-3, с. 121-126.
13. Мамедов И.Г. Обобщение формулы Ньютона-Лейбница в изотропном пространстве Соболева-Слободецкого $W_p^{(1,1,1,1)}(G)$ / Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları respublika elmi konfransı,Sumqayıt, 2007,səh.129.
14. Мамедов И.Г. Четырехмерная начально-краевая задача нового типа для гиперболического уравнения с чисто смешанными производными четвертого порядка / Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları respublika elmi

konfransı,Sumqayıt, 2007,səh. 127-129.
15. Мамедов И.Г. Корректно поставленная многоточечная начально-краевая задача для систем обобщенных уравнений Манжерона / AMEA-nın həqiqi üzvü, əməkdar elm xadimi, professor A.C. Hacıyevin 70 illik yubileyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika üzrə XIII Beynəlxalq konfransın tezisləri,Bakı,2007, səh.98.
16. Мамедов И.Г. О корректной разрешимости нелокальной задачи с операторно-нагруженными краевыми условиями для систем псевдопараболических функционально-дифференциальных уравнений четвертого порядка / AMEA-nın müxbir üzvü, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru,professor Q.T.Əhmədovun anadan olmasının 90 illiyinə həsr olunmuş respublika elmi konfransının tezisləri,Bakı,2007,səh.43.
17. Мамедов И.Г. О корректной разрешимости задачи с нагруженными краевыми условиями для псевдопараболического уравнения четвертого порядка / Azərbaycanın ümummilli lideri Heydər Əliyevin 85 illik yubileyinə həsr olunmuş respublika elmi konfransının materialları, BDU. Mexanika-riyaziyyat fakultəsi, Bakı, 2008, səh. 72-75.
18. Мамедов И.Г. Фундаментальные решения операторных уравнений в банаховых пространствах типа С.Л.Соболева $W_p^{(3,1)}(G)$ при исследовании задачи Гурса / Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 85-ci ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyat, informatika və iqtisadiyyatın müasir problemləri” mövzusunda respublika elmi konfransının materialları, BDU Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakultəsi, Bakı, 2008, səh. 74-77.
19. Мамедов И.Г. Сопряженный оператор интегрального вида задачи Коши для псевдопараболического уравнения четвертого порядка // Известия НАН Азербайджана, серия ФТМН, 2008, том XXVIII, № 3, с.70-75.
20. Мамедов И.Г. О корректной разрешимости одной нелокальной задачи / Математический институт им. В.А.Стеклова Российской Академии наук, Самарский Государственный Университет, Международная конференция по математической физике и ее приложениям. Самара, Россия, 8-13 сентября 2008 г., с. 124-126.
21. Мамедов И.Г. Об одном интегральном представлении для функции трехпеременных в пространстве С.Л.Соболева / Международная конференция «Дифференциальные уравнения.

Функциональные пространства. Теория приближений», посвященная 100-летию со дня рождения С.Л.Соболева. институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск, 5-12 октября 2008 г., с. 171.
22. Мамедов И.Г. Неклассическая начально-краевая задача для трехмерного обобщенного уравнения Манжерона в изотропном пространстве С.Л.Соболева $W_p^{(2,2,2)}(G)$ / Naxşıvan Dövlət Universiteti, AMEA fizika-riyaziyyat və texnika elmləri bölməsi, AMEA Naxçıvan müəllimlər institutunun birgə təşkilatçılığı ilə fizika, riyaziyyat və texnika elmləri üzrə beynəlxalq konfrans, Naxçıvan, 7-8 noyabr 2008-ci il,s.114.
23. Мамедов И.Г. Условия оптимальности некоторых процессов, описываемых псевдопараболическим уравнением при нелокальных краевых условиях // Сборник«Математическое и компьютерное моделирование. Серия: физико-математические науки», Каменец-Подольский Национальный Университет, Институт Кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, Украина, 2008,с.133-141.
24. Мамедов И.Г. Фундаментальное решение задачи Коши, связанной с псевдопараболическим уравнением четвертого порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики, Москва, 2009, том 49, № 1, с.99-110.
25. Мамедов И.Г. Трехмерная характеристическая задача нового типа для одного гиперболического уравнения с L_p коэффициентами / Тезисы Международной Конференции по математике и механике, посвященной 50-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана, Баку, 2009, с. 196-197.
26. Мамедов И.Г. Интегральные представления функций в одном анизотропном пространстве С.Л.Соболева с доминирующей смешанной производной / Тезисы Международной Конференции по математике и механике, посвященной 50-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана, Баку, 2009, с. 198-199.
27. Мамедов И.Г. Корректно поставленная трехмерная неклассическая начально-краевая задача для одного неклассического гиперболического уравнения четвертого порядка / VIII Международная FAM’2009 конференция по финансово-актуарной математике и смежным вопросам 24-26 апреля 2009 г.,

Красноярск, Сибирский Федеральный Университет, с. 82-83.

28. Мамедов И.Г. О новой постановке четырехмерной задачи Гурса для одного псевдопараболического уравнения с негладкими коэффициентами / VIII Международная FAM'2009 конференция по финансово-актуарной математике и смежным вопросам 24-26 апреля 2009 г., Красноярск, Сибирский Федеральный Университет, с. 81-82.
29. Мамедов И.Г. Об одной трехмерной задаче Гурса нового типа для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами / Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи», секция «Дифференциальные уравнения и краевые задачи»,часть3, г.Самара, Самарский Государственный Технический Университет,1-4 июня 2009г.,с.158-160.
30. Мамедов И.Г. О новых трехмерных интегральных представлениях функций в одном анизотропном пространстве С.Л.Соболева / Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи», секция «Дифференциальные уравнения и краевые задачи»,часть3, г.Самара, Самарский Государственный Технический Университет,1-4 июня 2009г., с.155-157.
31. Мамедов И.Г. Об одном новом трехмерном интегральном представлении функций в пространстве С.Л.Соболева с доминирующей смешанной производной / Международный Российско-Абхазский Симпозиум "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики",г.Нальчик, 17-22мая, 2009, с. 158-159.
32. Мамедов И.Г. О новой постоновке трехмерной задачи Гурса для гиперболического уравнения четвертого порядка в анизотропном пространстве С.Л.Соболева $W_p^{(1,1,2)}(G)$ / Международная конференция.,«Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», памяти академика А.А.Самарского к 90-летию со дня рождения, секция «Дифференциальные уравнения и математическая физика», тезисы докладов, г. Москва, 16-18 июня 2009 года.,с.208-209.
33. Мамедов И.Г. О новой постановке четырехмерной задачи Гурса для одного псевдопараболического уравнения с негладкими

коэффициентами / Труды восьмой международной конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Часть первая, Красноярск, Сибирский федеральный университет, 2009,с.171-175.
34. Мамедов И.Г. Корректно поставленная трехмерная неклассическая начально-краевая задача для одного неклассического гиперболического уравнения четвертого порядка / Труды восьмой международной конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Часть первая, Красноярск, Сибирский федеральный университет,2009,с.176-178.
35. Мамедов И.Г. Фундаментальное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения четвертого с негладкими коэффициентами // Владикавказский математический журнал,2010, Том12, выпуск1 ,с.17-32.
36. Мамедов И.Г. Интегральные представления функций при помощи функции Хевисайда в одном изотропном пространстве С.Л.Соболева / Тезисы Международной конференции посвященной 80- летному юбилею академика Ф.Г.Максудова, Спектральная теория и ее приложения.Баку,2010, с.210-212.
37. Мамедов И.Г. Задача Гурса с неклассическими условиями для одного четырехмерного уравнения со старшей частной производной / Тезисы Международной конференции посвященной 80- летному юбилею академика Ф.Г.Максудова, Спектральная теория и ее приложения. Баку,2010, с.208-210.
38. Мамедов И.Г. Неклассическая трехмерная задача Гурса для одного гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Вестник Самарского Государственного Технического Университета, Серия физико-математические науки,2010,№1(20), С.209-213.
39. Мамедов И.Г. Задача Гурса нового типа для одного четырехмерного уравнения со старшей частной производной / «Математическое моделирование и краевые задачи».Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. 2-6 июня 2010, часть 3, секция «Дифференциальные уравнения и краевые задачи», Самарский Гос. Технический Университет,с.167-170.
40. Мамедов И.Г. Об одном новом четырехмерном интегральном представлении функций в анизотропном пространстве С.Л.Соболева с доминирующей смешанной производной //

«Математическое моделирование и краевые задачи». Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. 2-6 июня 2010, часть 3, секция «Дифференциальные уравнения и краевые задачи», Самарский Гос. Технический Университет, с.164-167.

41. Мамедов И.Г. Об одной задаче Гурса в пространстве Соболева // Известия высших учебных заведений. Математика, 2011,№2,с.54-64.
42. Мамедов И.Г. Корректно поставленная финально-краевая задача для одного псевдопараболического уравнения с разрывными коэффициентами / Görkəmli alim və ictimai xadim, AMEA-nın müxbir üzvü, Dövlət mükafatı laureatı, Əməkdar elm xadimi,BDU-nun sabiq rektoru ,fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Yəhya Məmmədovun anadan olmasının 80 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı Beynəlxalq konfransın materialları,Bakı,27 dekabr 2010-cu il,səh.25-27.
43. Мамедов И.Г. О неклассической постановке контактно-краевой задачи для одного уравнения со старшей частной производной / Görkəmli alim və ictimai xadim, AMEA-nın müxbir üzvü, Dövlət mükafatı laureatı, Əməkdar elm xadimi,BDU-nun sabiq rektoru ,fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Yəhya Məmmədovun anadan olmasının 80 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı Beynəlxalq konfransın materialları,Bakı,27 dekabr 2010-cu il,səh.27-28.
44. Мамедов И.Г. Неклассическая начально-краевая задача для одного гиперболического уравнения с кратными характеристиками / Görkəmli alim və ictimai xadim, AMEA-nın müxbir üzvü, Dövlət mükafatı laureatı, Əməkdar elm xadimi,BDU-nun sabiq rektoru ,fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor Yəhya Məmmədovun anadan olmasının 80 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı Beynəlxalq konfransın materialları,Bakı,27 dekabr 2010-cu il,səh.42.
45. Мамедов И.Г. Контактно-краевая задача для одного гиперболического уравнения с кратными характеристиками / Функциональный анализ и его приложения. Материалы Международной конференции, посвященной 100-летнему юбилею академика З.И.Халилова, Баку-2011,с.230-232.
46. Мамедов И.Г. Финально-краевая задача для одного гиперболического уравнения с кратными характеристиками /

Функциональный анализ и его приложения. Материалы Международной конференции, посвященной 100-летнему юбилею академика З.И.Халилова, Баку-2011,с.232-234.

47. Мамедов И.Г. Обобщение комбинированной задачи типа Коши-Гурса-Дарбу для одного псевдопараболического уравнения четвертого порядка / Восьмая Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи», посвященная 75-летию Ю.П.Самарина.15-17 сентября 2011г., г.Самара,Россия,с.116-119.
48. Мамедов И.Г. Трехмерная нелокальная краевая задача с интегральными условиями для нагруженных гиперболических интегро-дифференциальных уравнений / Восьмая Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи», посвященная 75-летию Ю.П.Самарина.15-17 сентября 2011г., г.Самара,Россия,с.119-122.
49. Мамедов И.Г. Формула интегрирования по частям неклассического типа при исследовании задачи Гурса для одного псевдопараболического уравнения // Владикавказский. математический журнал, 2011, том 13, № 4, с. 40–51.
50. Мамедов И.Г. Трёхмерная интегро-многоточечная краевая задача для нагруженных вольтерро-гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа Бианки // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2012, 1(26), 8–20.
51. Мамедов И.Г. О корректной разрешимости задачи Дирихле для обобщенного уравнения Манжерона с негладкими коэффициентами / IV Международная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» и XI Школа молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик-Терскол , 4-8 декабря 2013 года, с.170-173.
52. Мамедов И.Г. О неклассической трактовке задачи Дирихле для одного псевдопараболического уравнения четвертого порядка // Дифференциальные уравнения,2014, том 50, №3,с.417-420.
53. Мамедов И.Г. Нелокальная комбинированная задача типа Бицадзе-Самарского и Самарского-Ионкина для системы псевдопараболических уравнений // Владикавказский математический журнал,2014, Том 16, Выпуск 1, С. 30-41.

54. Мамедов И.Г. Неклассический аналог задачи Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной // Математические заметки, 2014,Том 96,Выпуск 2 ,С.251-260.
55. Mamedov I. G. Generalization of multipoint boundary-value problems of Bitsadze–Samarski and Samarski–Ionkin type for fourth order loaded hyperbolic integro-differential equation and their operator generalization // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2005, volume XXIII, pp.77–84.
56. Mamedov I. G. Three-dimensional nonlocal boundary-value problem with integral conditions for loaded volterra-hyperbolic integro-differential equations // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan 2006, volume XXIV, pp.153-162.
57. Mamedov I. G. A new type Cauchy problem for a pseudoparabolic equation with a fourth order dominating derivative with non-smooth coefficients // Mathematics, 5 (2007), 34–40.
58. Mamedov I. G. On correct solvability of a problem with loaded boundary conditions for a fourth order pseudoparabolic equation // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, volume 43, 2008, pp. 107-118. Georgian Academy of Sciences A.Razmadze mathematical institute. Tbilisi.
59. Mamedov I. G. An optimal control problem for a fourth order pseudoparabolic equation with separated multipoint conditions / Abstracts the 2nd International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Baku, june, 2-4, 2008, p.117.
60. Mamedov I. G. Non-local optimal control problem for Manjeron generalized equation with non-smooth coefficients under separated multi-point initial boundary conditions / The Second International Conference "Problems of Cybernetics and Informatics", September 10-12, 2008, Baku, Azerbaijan. Section 5 "Control and Optimization", pp. 62-65.
61. Mamedov I. G. Integral form adjoint operator of the Goursat problem for a pseudoparabolic equation of fourth order // International Eco-energy Academy, Mathematics Scientific journal, 2008, pp.25-35.
62. Mamedov I. G. On a new three-dimensional characteristic problem for a pseudo-parabolic equation in S.L.Sobolev anisotropic space $W_p^{(1,2,2)}(G)$ / Abstracts of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries, Almaty, Kazakhstan, 30June-4July, 2009, volume1,p.251.

63. Mamedov I. G. On non-classic statement of Goursat four-dimensional problem for a pseudoparabolic equation / PCI'2010, The Third International Conference «Problems of Cybernetics and Informatics»,Volume III, Section 5. «Control and Optimization», pp.170-173.
64. Mamedov I. G. Neumann problem in the non-classical treatment for a fourth order pseudoparabolic equation / IV International Conference "Problems of Cybernetics and Informatics" (PCI'2012), September 12-14, 2012, pp.149-151.
65. Mamedov I. G. Nonlocal problem with Bitsadze-Samarsky and Samarsky-Ionkin type conditions for a system of pseudoparabolic equations / IV International Conference "Problems of Cybernetics and Informatics" (PCI'2012), September 12-14, 2012, pp.152-154.
66. Mamedov I. G. Final-boundary value problem in the non-classical treatment for a sixth order pseudoparabolic equation // Science Publishing Group, USA. Applied and Computational Mathematics, 2013,Vol.2, №3, pp. 96-99.
67. Mamedov I. G. On a problem with conditions on all boundary for a pseudoparabolic equation // Scientific and Academic Publishing, USA. American Journal of Operational Research. 2013,Vol.3, №2, pp.51-56.
68. Mamedov I. G. Goursat problem in the non-classical treatment for a sixth order pseudoparabolic equation // Horizon Research Publishing, USA. Universal Journal of Computational Mathematics, 2013,Vol.1, №1, pp.15-18.
69. Mamedov I. G. Cauchy problem in the non-classical treatment for one pseudoparabolic equation // Horizon Research Publishing, USA. Universal Journal of Computational Mathematics, 2014,Vol.2, №1, pp.1-5.
70. Mamedov I. G. Contact-Boundary Value Problem in the Non-Classical treatment for one pseudo- parabolic equation // Science and Education Publishing, USA. Applied Mathematics and Physics, 2014,Vol. 2, № 2, pp.49-52.