**AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI**
**RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU**

*Əlyazması hüqüqündə*

**TOĞRUL RAFAEL oğlu MURADOV**

# APPROKSİMASİYANIN BƏZİ QARIŞIQ MƏSƏLƏLƏRİ VƏ ÜMUMİLƏŞMİŞ LEBEQ FƏZALARINDA BAZİSLƏR

1202.01 –Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

**A V T O R E F E R A T I**

Bakı -2018

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Qeyri-harmonik analiz"** şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

**Elmi məsləhətçi:** AMEA-nın müxbir üzvü, prof. **Bilal Bilalov**

**Rəsmi opponentlər:**

- fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Nizaməddin İsgəndərov** (Bakı Dövlət Universiteti);
- fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Həmidulla Aslanov** (AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu);
- fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Heybətqulu Mustafayev** (Yüzüncü İl Universiteti, Türkiyə).

**Aparıcı təşkilat:**
**Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin** "Ümumi və tətbiqi riyaziyyat" kafedrası**.**

Dissertasiyanın müdafiəsi 06 iyul 2018-ci il saat $14^{00}$-da Azərbaycan MEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim olunan dissertasiyaların müdafiəsini keçirən D.01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat 04 iyun 2018-ci il tarixində buraxılıb.

**D.01.111 Dissertasiya Şurasının elmi katibi** **dos. Tamilla Həsənova**

## İŞİN ÜMUMİ XARAKTERSİTİKASI

**Mövzunun aktuallığı.** Bazislər nəzəriyyəsi approksimasiyanın nisbətən müasir və müstəqil istiqamətidir. Onun əsasını xətti topoloji fəzanın ixtiyari elementinin verilmiş sistem üzrə (yeganə şəkildə) ayrılış təşkil edir. Başqa sözlə, xətti əməliyyatlar və topologiyanın köməyi ilə verilmiş sistem fəzanı doğurur. Ayrılışın əsas əlaməti ayrılışın əmsallarını müəyyən şəkildə tapmaqdan ibarətdir.

Approksimasiya nəzəriyyəsində verilmiş sistemin bazislik məsələsi çox vacibdir və riyaziyyat, mexanika və fizikanın bir çox sahələrinə tətbiqlə əlaqədar olaraq, böyük elmi maraq kəsb edir. Verilmiş xətti operatorun məxsusi və qoşma elementindən ibarət sistemin uyğun xətti topoloji fəzada bazisliyi operator tənliklərin həllində məxsusi rol oynayır.

Eyni bir fəzanın bütün bazisləri bu fəza ilə münasibətdə eynihüquqludur, belə ki, onların hamısı müəyyən mənada verilən fəzanı doğurur. Digər tərəfdən onlar əmsallar fəzaları ilə fərqlənə bilirlər. Baxılan fəzanın hər bir bazisinə müəyyən əmsallar fəzası birqiymətli olaraq uyğun gəlir.

Son zamanlar (keçən əsrin sonlarından başlayaraq) mexanika və riyazi fizikanın konkret məsələlərinə tətbiqlə əlaqədar olaraq, $p(\cdot)$ dəyişən dərəcəli $L_{p(\cdot)}$ Lebeq və $W_{p(\cdot)}^{k}$ Sobolev fəzalarında müxtəlif məsələlərin öyrənilməsinə olan maraq xeyli artmışdır.

Dissertasiya işi ümumilikdə ümumiləşmiş Lebeq və Sobolev fəzalarında bazsilik məsələlərinə həsr olunmuşdur. Qeyd etmək lazımdır ki, oxşar fəzalarda approksimasiya nəzəriyyəsinin məsələləri kifayət qədər yaxşı öyrənilməmişdir. Bir çox klassik nəticələrin analoqlarını almaq istəyi müəyyən çətinliklərlə qarşılaşır. Ona görə də hesab edirik ki, dissertasiya işinin mövzusu çox aktualdır və xüsusi elmi maraq kəsb edir.

Qeyd etmək lazımdır ki, Bessel və Hilbert sistemləri Riss bazisi anlayışları N.K.bari tərəfindən daxil edilmişdir. Abstrakt Banax fəzası halına bu anlayışlar B.T.Bilalov tərəfindən ümumiləşdirilmişdir. Həyəcanlanmış triqonometrik sistemlərin Lebeq fəzalarında bazislik xassələri N.Levinson, Peli-Vinerin işlərində öyrənilməyə başlanmışdır. Bu istiqamətdə mühüm nəticələr M.N.Kadetsin, A.M.Sedletskinin, Y.İ.Moiseyevin, B.T.Bilalovun və digərlərinin işlərində alınmışdır. Klassik eksponent sistemin və onun həyəcanlanmalarının ümumiləşmiş Lebeq fəzalarında bazislik xassələri N.İ.Şarapudinovun və B.T.Bilalovun işlərində öyrənilməyə başlanmışdır. Yu.A.kazminin işlərində tam olmayan indeksli kosinus və sinus sistemlərinin Riss bazisliyi öyrənilir. Həmçinin, qeyd edək ki, həyəcanalnmış triqonometrik sistemlərin bazislik xassələrinin analitik funksiyalar üçün sərhəd məsələləri metodları ilə öyrənilməsi ideyası A.V.Bitsadzeyə məxsusdur. Sonralar bu ideya S.M.Ponomaryovun, Y.İ.Moiseyevin və B.T.Bilalovun işlərində əhəmiyyətli dərəcədə inkişaf etdirilmişdir. Diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsi nöqteyi-nəzərindən həyəcanlanmış triqonometrik sistemlər A.A.Şkalikovun işlərində meydana gəlmişdir. Bu istiqamətdə V.A.Ditkin, K.Şaydukov, A.Q.Tumarkin, R.P.Faynerman, D.J.Nyuman, C.J.Tranter, S.Martin, B.Nobl, J.K.Vaytman kimi müəlliflərin işlərini də qeyd etmək lazımdır. Bu sahədən olan tədqiqatlara Yu.A.Kazminin, A.N.Barmenkovun, V.A.Tkaçenkonun, Yu.İ.Lyubarskinin, B.T.Bilalovun işlərini aid etmək olar.

**İşin məqsədi.** Dəyişən dərəcəli çəkili Lebeq fəzalarında müxtəlif eksponensial sistemlərin bazislik xassələrinin (tamlıq, minimallıq, bazislik) öyrənilməsidir. Buna görə əvvəlcə uyğun çəkili ümumiləşmiş Hardi sinifləri təyin olunur və bu siniflərdə analitik funksiyalar nəzəriyyəsinin Riman məsələsi öyrənilir.

**Elmi yenilik.** Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

-$L_{p(\cdot)}$ fəzasının alt fəzaları olaraq $H^{+}_{p(\cdot)}$ və ${}_{m}H^{-}_{p(\cdot)}$ Hardi fəzalarına baxılır, bu fəzalarda eksponent sisteminin müəyyən hissələrinin bazisliyi öyrənilir;

-isbat olunmuşdur ki, əgər $\left\{A(t)e^{\mathrm{int}};B(t)e^{-i(n+1)t}\right\}_{n=0}^{\infty}$ ikiqat eksponent sistemi $p(\cdot)$ dəyişən dərəcəli $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$ fəzasında bazis təşkil edirsə, onda o, bu fəzada $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$ klassik eksponent sisteminə izomorfdur.;

-ilk dəfə olaraq $L_{p(\cdot)}$ ümimiləşmiş Lebeq fəzasında həyəcanlanmış eksponent sisteminin bazisliyi, eləcə də həyəcan müəyyən asimptotikaya malik olduqda ümumiləşmiş çəkili Lebeq fəzasında vahidə malik həyəcanlanmış eksponent sisteminin bazisliyi öyrənilmişdir;

-ümumiləşmiş Hardi siniflərində hissə-hissə kəsilməz əmsala malik Riman sərhəd məsələsi öyrənilmiş və bu nəticələrdən istifadə edərək $L_{p(\cdot)}$ fəzasında hissə-hissə kəsilməz fazaya malik eksponent sisteminin bazisliyi isbat olunmuşdur;

-Banax fəzalarında operator əmsallı ikiqat sistemin bazisliyinə baxılmış, bu sistemin bazisliyi və uyğun operator tənliyin həllolunanlığı arasında əlaqə qurulmuşdur;

-ilk dəfə olaraq abstrakt ikiqat sistemin bazisliyi üçün zəruri şərt alınmışdır və məlum eksponent sistemlərə tətbiq olunmuşdur;

-Hilbert fəzalarının Hilbert tenzor hasilinə baxılmış, Hilbert tenzor hasili ilə təyin olunan bixətti inikasın doğurduğu $t$-ayrılış anlayışı daxil edilmiş, Hilbert fəzasının ixtiyari elementinin sonlu sayda element atıldıqdan sonra, alınmış sistem üzrə $t$-ayrılışı haqqında teorem isbat olunmuşdur;

-müəyyən xassələrə malik xətti metrik fəzaya baxılır, cırlaşmayan sistem anlayışı daxil edilir, belə sistemlərin kanonik bazisə malik tam metrik əmsallar fəzasına malik olması isbat olunur, əmsal operatoru dilində bazsilik meyarı verilmişdir;

-$J$-örtük, $J$-tamlıq, $J$-minimallıq və $J$-bazis, $J$-əmsallar fəzası və bu fəzada $J$-kanonik sistem kimi approksimativ anlayışlar daxil edilmiş, $J$-əmsal operatoru dilində operatorlar ailəsinin $J$-bazislik kriteriyası əldə edilmişdir;

- $L_{p(\cdot)}$ fəzalarında ikiqat sistem və uyğun birqat sistemlərin bazisilik xassələri arasında əlaqə qurulmuşdur;

-ilk dəfə olaraq klassik Peli-Viner teoreminin kəsilməz analoqu alınmışdır;

- $p(\cdot)$ dəyişən dərəcəli $W^1_{p(\cdot)}$ Sobolev fəzasında bazisin qurulması üçün bir metod təklif olunmuşdur;

-Banax fəzalarında multiplikator mənada yaxın sistemlərin bazisliyi isbat edilmişdir və $L_{p(\cdot)}$ fəzasında həyəcanlanmış eksponent sisteminə tətbiq olunmuşdur. Multiplikator dilində eksponent, kosinus və sinus sistemləri üçün «$\frac{1}{4}-$Kadets» teormeinin $p(\cdot)$-analoqu alınmışdır;

-Şturm-Liuvill operatoru üçün spektral parametrə malik Koşi məsələsinə baxılmışdır. İsbat olunmuşdur ki, spektral parametr üçün qiymətlər ardıcıllığını elə seçmək olar ki, uyğun həllər sistemi dəyişən dərəcəli Lebeq fəzasında klassik triqonometrik sistemə izomorf bazis təşkil etsin.

**Tədqiqat metodikası**. İşdə həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin, diferensial tənliklər nəzəriyyəsi, funksional analizin, xüsusi halda Hilbert və Banax fəzalarında xətti operatorlar nəzəriyyəsinin, bazislər nəzəriyyəsi və approksimasiya nəzəriyyəsinin metodları tətbiq olunur.

**Nəzəri və təcrübi əhəmiyyəti.** Dissertasiyanın nəticələri nəzəri xarakter daşıyır. Onlardan diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsində, riyazi fizika və mexanikanın müxtəlif məsələlərinin həlli zamanı Furye metodunun əsaslandırılmasında istifadə oluna bilər. Nəticələrdən həmçinin approksimasiya nəzəriyyəsində istifadə etmək olar.

**İşin aprobasiyası.** Dissertasiyanın əsas nəticələri AMEA RMİ-nin ümuminstitut seminarında, «Qeyri-harmonik analiz» (AMEA-nın müxbir üzvü, prof. B.T.Bilalov), «Funksional analiz» (prof. H.İ.Aslanov), «Funksiyalar nəzəriyyəsi» (AMEA-nın professoru, r.e.d. V.E.İsmayılov) şöbələrinin seminarlarında, AMEA-nın müxbir üzvü, prof. İ.T.Məmmədovun 50 illiyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika adlı beynəlxalq konfransında (Bakı 2005), AMEA-nın müxbir üzvü, prof. B.A.İsgəndərovun 70 illiyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika adlı beynəlxalq konfransında (Bakı 2006), akademik A.Hacıyevin 70 illiyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika adlı beynəlxalq konfransında (Bakı 2007), akademik Z.İ.Xəlilovun 100-illik yubileyinə həsr olunmuş «Funksional analiz və onun tətbiqləri» beynəlxalq konfransda (Bakı, 2011), L.DF.Kudryavtsevin 85 illiyinə həsr olunmuş "Funksional **, diferensial operatorlar, riyazi təhsilin ümumi topoloji problemləri" beynəlxalq konfransda (Moskva 2008), MADEA-7 beynəlxalq konfransda (Bakı 2015).

**Nəşrləri.** Dissertasiya işinin əsas nəticələri, avtoreferatın sonunda siyahısı verilmiş, 39 işdə nəşr edilmişdir.

**Dissertasiyanın strukturu və həcmi.** Dissertasiya işi giriş, beş fəsil və 184 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiya işinin həcmi 258 səhifədir.

## DİSSERTASİYANIN MƏZMUNU

Dissertasiya giriş, beş fəsil və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Girişdə dissertasiya işinin aktuallığı əsaslandırılmış, məzmunu ilə bağlı nəticələrin qısa xülasəsi verilmiş və əsas nəticələr şərh olunmuşdur.

**Birinci fəsil** bir çox münasibətlərə görə dissertasiyanın sonrakı nəticələrinin alınmasında və ifadə olunmasında çox mühüm rol oynayır.

Burada dissertasiyada istifadə olunacaq əsas işarələmələr, anlayışlar və faktlar təsvir olunmuşdur. Oxunaqlı olması və şərhin tamlığı məqsədilə dəyişən dərəcəli çəkili Lebeq fəzalarında klassik eksponent sisteminin bazisliyinin isbatı tam verilmişdir. Dəyişən dərəcəli Lebeq fəzaları nəzəriyyəsindən də məlumatlar daxil edilmişdir. Ümumiləşmiş çəkili Hardi sinifləri təyin edilmiş və bu siniflərdə eksponent sisteminin hissəsinin bazisliyi isbat olunmuşdur. Kompleks əmsallı ikiqat eksponent sisteminə baxılmış və əmsal üzərinə müəyyən şərtlər qoymaqla isbat olunmuşdur ki, bu sistem ümumiləşmiş Lebeq fəzalarında bazisdirsə, onda o, bu fəzada klassik eksponent sisteminə izomorfdur. Bu fəslin nəticələrindən dissertasiyanın növbəti hissələrində əhəmiyyətli dərəcədə istifadə olunur.

**1.1-də** Şauder bazisi nəzəriyyəsindən zəruri anlayış və faktlar daxil edilir. Aşağıdakı standart işarələmələri qəbul edək:

$R-$ həqiqi ədədlər; $C-$ kompleks ədədlər; $N-$ natural ədədlər; $Z-$ tam ədədlər; $Z_+ = \{0\} \cup N$ ;

$B-$ fəza – Banax fəza; $H-$ fəza – Hilbert fəza;

$X^*-$ $X$ fəzasına qoşma fəza; $T^*-$ $T$ operatoruna qoşma operatordur;

$L[M]-$ uyğun fəzada $M$ çoxluğunun xətti örtüyüdür; $\overline{M}-$ uyğun fəzada $M$ çoxluğunun qapanmasıdır;

$\delta_{ij}$ $-$ Kroneker simvoludur: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$

$\exists!-$ yeganə var; $\Rightarrow -$ alınır; $\Leftrightarrow -$ yalnız və yalnız onda.

Tutaq ki, $X$ müəyyən $B-$ fəza və $M \subset X$ . $L(X;Y)-$ $X$ -dan $Y$ -yə təsir edən məhdud operatorların $B$ -fəzasıdır; $L(X;X) \equiv L(X)$.

***Tərif 1****. Tutaq ki, $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ müəyyən sistemdir. Əgər $\overline{L[\{x_n\}_{n\in N}]} \equiv X$ , onda bu sistem $X$ fəzasında tam sistem adlanır.*

Aşağıdakı hökm məlumdur.

***Hökm 1.*** *$\{x_n\}_{n\in N}$ sistemi $X$ fəzasında tamdır $\Leftrightarrow$ $x^*(x_n) = 0, \forall n \in N$, olmasından $x^* = 0$ alınır.*

***Tərif 2****. Əgər*

$$x_n^*(x_m) = \begin{cases} \neq 0, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \quad \forall n, m \in N, \end{cases}$$

*onda* $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ *və* $\{x_n^*\}_{n\in N}\subset X^*$ *sistemləri biortoqonal sistemlər adlanır.* $x_n^*(x_m)=\delta_{nm}$, $\forall n,m\in N$, *olduqda onlar biortonormal sistemlər adlanır.*

***Tərif 3***. $\forall r\in N$ *üçün* $x_r\notin \overline{L[\{x_n\}_{n\neq r}]}$, *olduqda* $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ *sistemi* $X$ *fəzasında minimal sistem adlanır.*

Aşağıdakı hökm doğrudur

***Hökm 2.*** $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ *sistemi* $X$ *fəzasında minimaldır* $\Leftrightarrow$ *bu sistemə biortoqonal sistem var.*

***Tərif 4***. *Əgər* $\forall x\in X$, $\exists!\{\lambda_n\}_{n\in N}\subset C$ *üçün:*

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n .$$

*onda* $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ *sistemi* $X$ $B$*-fəzasında bazis adlanır.*

Aşağıdakı bazislik kriteriyası doğrudur.

***Bazilik kriteriyası.*** $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ *sistemi* $X$ *fəzasında bazis təşkil edir yalnız və yalnız o zaman ki, aşağıdakı şərtlər ödənsin:*

*1.* $\{x_n\}_{n\in N}$ *sistemi* $X$*-da tamdır;*

*2.* $\{x_n\}_{n\in N}$ $X$*-da minimaldır və tutaq ki,* $\{x_n^*\}_{n\in N}\subset X^*$ *ona qoşma sistemdir;*

*3.* $\{P_n\}_{n\in N}\subset L(X)$ *proyektorları müntəzəm məhduddur, harada ki*

$$P_m x=\sum_{n=1}^{m}x_n^*(x)x_n .$$

İkiqat bazis anlayışından istifadə edəcəyik. Tutaq ki, $X$ $B$-fəza və $\{x_n^+;x_n^-\}_{n\in N}\subset X$ müəyyən ikiqat sistemdir.

***Tərif 5.*** *Əgər* $\forall x\in X$, $\exists!\{\lambda_n^+;\lambda_n^-\}_{n\in N}\subset C$ *:*

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^+x_n^+ +\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^-x_n^- ,$$

*onda* $\{x_n^+;x_n^-\}_{n\in N}$ *sistemi* $X$ *fəzasında ikiqat bazis adlanır.*

***Tərif 6.*** *Əgər*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x_n=0\Rightarrow a_n=0,\ \forall n\in N,$$

*onda* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *sistemi* $X$ $B$*- fəzasında* $\omega$*-xətti asılı olmayan sistem adlanır.*

Aşağıdakı lemma doğrudur.

***Lemma 1.*** *Tutaq ki,* $X$ $\{x_n\}_{n\in N}$ *bazisinə malik* $B$*-fəzadır və* $F: X \to X$ *Fredholm operatorudur. Onda* $X$ *fəzasında* $\{y_n = Fx_n\}_{n\in N}$ sistemi üçün *aşağıdakı xassələr ekvivalentdir:*

*1)* $\{y_n\}_{n\in N}$ *sistemi tamdır;*

*2)* $\{y_n\}_{n\in N}$ *sistemi minimaldır;*

*3)* $\{y_n\}_{n\in N}$ $\omega$*-xətti asılı deyil;*

*4)* $\{y_n\}_{n\in N}$ $\{x_n\}_{n\in N}$ *sisteminə izomorf bazis təşkil edir.*

Bu lemmadan bilavasitə aşağıdakı lemma alınır.

***Lemma 2.*** *Tutaq ki,* $\{x_n\}_{n\in N}$ *ardıcıllığı müəyyən* $B$ *Banax fəzasında bazis təşkil edir. Onda əgər* $M = card\{n : x_n \neq y_n\} < +\infty$*, harada ki,* $\{y_n\}-$*müəyyən ardıcıllıqdır, aşağıdakı hökmlər ekvivalentdir:*

*1.* $\{y_n\}_{n\in N}$ $B$ *fəzasında* $\{x_n\}_{n\in N}$ *sisteminə izomorf bazis təşkil edir;*

*2.* $\{y_n\}_{n\in N}$ *sistemi* $B$ *fəzasında tamdır;*

*3.* $\{y_n\}_{n\in N}$ *sistemi* $B$ *fəzasında minimaldır;*

*4.* $\{y_n\}_{n\in N}$ *sistemi* $B$ *fəzasında* $\omega -$*xətti asılı deyil.*

Həmçinin aşağıdakı anlayışlardan istifadə edəcəyik.

***Tərif 7.*** *Əgər* $\sum_n \|x_n - y_n\|^p < +\infty$*, onda* $\{x_n\}_{n\in N}$ *və* $\{y_n\}_{n\in N}$ *sistemləri* $\|\cdot\|$ *normasına malik* $X$ $B$*-fəzasında* $p$*-yaxın sistem adlanır.*

***Tərif 8.*** *Əgər* $\forall x \in X$ *üçün* $\{x_n^*(x)\}_{n\in N} \in l_p$, onda *,* $X$ $B$*- fəzasında* $\{x_n^*\}_{n\in N} \subset X^*$ *qoşmasına malik minimal* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *sistemi* $p$*-sistem adlanır, burada* $l_p$ $\left\|\{a_n\}_{n\in N}\right\|_{l_p} = \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ *normasına malik adi* $\{a_n\}_{n\in N}$ *skalyar ardıcıllıqlar fəzasıdır.*

*Bazis halında belə sistemi* $p$*-bazis adlandıracağıq.*

Bu anlayışlar haqında daha ətraflı I.Singer, R.Young və B.T.Bilalov, S.H.Vəliyevin monoqrafiyalarından tanış olmaq olar.

Dəyişən dərəcəli Lebeq fəzaları nəzəriyyəsindən bəzi zəruri anlayış və faktları daxil edək.

Tutaq ki, $E \subset R$ Lebeq mənada ölçülən çoxluqdur. $P(E)$ ilə bütün (Lebeq mənada) ölçülən $p : E \to [1, \infty)$ funksiyalar ailəsini işarə edəcəyik. $p \in P(E)$ götürək və fərz edək

$$p^{+} = \sup_{E_0} vrai\, p(x)\ ;\ \ p^{-} = \inf_{E_0} vrai\, p(x).$$

$C$ meydanı üzərində $E$-də Lebeq mənada ölçülən bütün funksiyaların xətti fəzasını $L_0(E)$ ilə işarə edək və tutaq ki

$$I_p(f) = \int_{E|E_\infty} |f(t)|^{p(t)} dt + \sup_{E_\infty} vrai |f(t)|.$$

Qəbul edək

$$\|f\|_{L_{p(\cdot)}} = \inf\left\{\lambda > 0 : I_p\left(\frac{f}{\lambda}\right) \le 1\right\}.$$

Qarşıda fərz edəcəyik ki, $p \in L_{+}^{\infty}(E)$, daha doğrusu, $1 \le p^{-} = \inf_{E} vrai\, p(x) \le p^{+} = \sup_{E} vrai\, p(x) < +\infty$.

Aşağıdakı vacib nəticə həmçinin doğrudur.

***Teorem 1.*** *Əgər $E$ açıq çoxluqdursa, onda $C_0^{\infty}(E)$ $L^{p(\cdot)}(E)$-da sıxdır.*

$L^{p(\cdot)}$ fəzalarında bazislik məsələlərində tez-tez aşağıdakı teoremlərdən istifadə olunur.

***Teorem 2.*** *Əgər $p^{-} > 1, p^{+} < +\infty$, onda $L^{p(\cdot)}(E)$ refleksiv fəzadır.*

Aşağıdakı daxilolma doğrudur.

***Teorem 3.*** *Tutaq ki, $p_1, p_2 \in L_0(E)$. Onda*

$$L^{p_2(\cdot)}(E) \subset L^{p_1(\cdot)}(E) \Leftrightarrow p_1(x) \le p_2(x),\ s.h.y.\ x \in E,$$

*Bu halda daxilolma kəsilməzdir.*

Fərz edək

$$q(x) : \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1.$$

Aşağıdakı teorem doğrudur.

***Teorem 4.*** $\left(L^{p(\cdot)}(E)\right)^* = L^{q(\cdot)}(E)$.

**1.2**

$$e_n(t) \equiv e^{int}, \qquad n = 0; \pm 1; \ldots, \tag{1}$$

sisteminin ümumiləşmiş çəkili $L_{p(\cdot),\rho}$ Lebeq fəzalarında bazislik məsələlərinə həsr olunmuşdur. Biz bu nəticələrin yeniliyini iddia etmirik. Şərhin tamlığı üçün xüsusi elmi maraq doğuran sərbəst tədqiqat sxemi təklif edirik.

Çəkili $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$ fəzasına baxaq. Tutaq ki, $\rho : [-\pi, \pi] \to [0, +\infty)$ ölçülən funksiyadır. $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$ fəzası ilə adətən $[-\pi, \pi]$-da ölçülən $f(x)$ funksiyalarının sonlu

$$\|f\|_{p(\cdot),\rho(\cdot)} \stackrel{def}{\equiv} \|\rho f\|_{p(\cdot)},$$

normasına malik Banax fəzasını işarə edəcəyik.

Çəkili halda aşağıdakı mühüm nəticə doğrudur.

***Hökm 3.*** *Tutaq ki,* $1 \le p^- \le p^+ < +\infty$, $\rho(\cdot)$ *çəki funksiyasıdır,* $mes\{x \in [-\pi, \pi] : \rho(x) = 0\} = 0$ *və* $|\rho(x)|^{p(x)} \in L_1$. *Onda* $C_0^\infty[-\pi, \pi]$, *və eyni zamanda* $C[-\pi, \pi]$ $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$ *-da doludur.*

Qarşıda bizə aşağıdakı fakt lazım olacaqdır.

***Hökm 4.*** *Tutaq ki,* $1 < p^- \le p^+ < +\infty$ *və* $p(\cdot) \in WL_\pi$. $\rho(\cdot)$ *çəki funksiyası aşağıdakı şəkildədir.*

$$\rho(t) \equiv \prod_{k=1}^{l} |t - t_k|^{\alpha_k}, \{t_k\}_{k=1}^{l} \subset [-\pi, \pi]. \tag{2}$$

*Əgər*

$$-\frac{1}{p(t_k)} < \alpha_k < \frac{1}{q(t_k)}, \quad k = \overline{1,l}; \tag{2}$$

*bərabərsizlikləri ödənərsə, onda* $\Gamma$ *operatoru* $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$ *fəzasından* $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$ *fəzasına məhdud təsir edir, burada* $\Gamma$ *Hilbert çüvirməsidir:*

$$\Gamma f = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(y)dy}{y - x}.$$

Bu yarımfəsildə aşağıdakı teorem isbatt olunmuşdur.

***Teorem 5.*** *Tutaq ki,* $1 < p^- \le p^+ < +\infty$ *və* $p(\cdot) \in WL_\pi$. *Əgər (2), düsturu ilə təyin olunan* $\rho(\cdot)$ *çəki funksiyası (3) bərabərsizliklərini ödəyərsə, onda (1) eksponent sistemi çəkili* $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$ fəzasında bazis təşkil edir.

**1.3-**də $L_{p(\cdot)}$ fəzasının alt fəzaları olaraq $H^+_{p(\cdot)}$ və ${}_mH^-_{p(\cdot)}$ Hardi siniflərinə baxılır. Bu alt fəzalarda eksponent sisteminin müəyyən hissələrinin bazisliyini öyrənəcəyik.

$H^+_{p(\cdot)}$ sinfindən olan funksiyaların vahid dairəyə daralmasını $L^+_{p(\cdot)}$ ilə işarə edək, daha doğrusu

$$L^+_{p(\cdot)} \equiv \left\{ f : \exists g \in H^+_{p(\cdot)},\ f \equiv g/_{\partial\omega} \right\}.$$

Qeyd edək ki, əgər $f \in H^+_{p(\cdot)}$, onda $\|f\|_{H^+_{p(\cdot)}} = \|f^+\|_{p(\cdot)}$, burada $f^+ = f/_{\partial\omega}$. Bu münasibətlərdən bilavasitə alınır ki, $H^+_{p(\cdot)}$ və $L^+_{p(\cdot)}$ fəzalarını eyniləşdirmək olar. Aşağıdakı teorem doğrudur

***Teorem 6.*** *Tutaq ki,* $1 < p^- \le p^+ < +\infty$ *və* $p \in WL_\pi$. *Onda* $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z_+}$ *sistemi* $L^+_{p(\cdot)}$ *alt fəzasında* $L^+_{p(\cdot)}$ *(və ya* $H^+_{p(\cdot)}$*-da) bazis təşkil eiddir.*

Oxşar hökm ${}_mH^-_{p(\cdot)}$ fəzasına nəzərən də doğrudur. Fərz edək

$${}_mL^-_{p(\cdot)} \equiv \left\{ f : \exists g \in {}_mH^-_{p(\cdot)},\ f = g/_{\partial\omega} \right\}.$$

Doğrudur

***Teorem 7.*** *Tutaq ki,* $1 < p^- \le p^+ < +\infty$ *və* $p \in WL_\pi$. *Onda* $\left\{e^{-\mathrm{int}}\right\}_{n\ge m}$ *sistemi* ${}_mL^-_{p(\cdot)}$ *altfəzasında bazis təşkil edir.*

Oxşar nəticələr çəkili halda da alınmışdır.

Tutaq ki, $\nu^{\pm}(\cdot) \ge 0$ çəki funksiyasıdır. Aşağıdakı çəkili siniflərə baxaq

$$L^+_{p(\cdot),\nu^+} \equiv \left\{ f \in L^+_1 : \|f\|_{p(\cdot),\nu^+(\cdot)} < +\infty \right\},$$

$${}_mL^-_{p(\cdot),\nu^-} \equiv \left\{ f \in_m L^-_1 : \|f\|_{p(\cdot),\nu^-(\cdot)} < +\infty \right\}.$$

Aşağıdakı teorem doğrudur.

***Teorem 8.*** *Tutaq ki,* $p \in WL_{\pi}$, $1 < p^{-} \le p^{+} + \infty$, *və* $\rho(\cdot)$ *çəkisi (12) ifadəsi ilə təyin olunmuşdur. Əgər (13) bərabərsizlikləri ödənilərsə, onda* $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n \in Z_{+}}$ $\left(\left\{e^{-\mathrm{int}}\right\}_{n \ge m}\right)$ *sistemi* $L^{+}_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$ $\left({}_{m}L^{-}_{p(\cdot),\rho(\cdot)}\right)$, $1 < p < +\infty$ *alt fəzasında bazis təşkil edir.*

**1.4-də** isbat olunmuşdur ki, əgər $\left\{A(t)e^{\mathrm{int}};\ B(t)e^{-i(n+1)t}\right\}_{0}^{\infty}$ ikiqat eksponent sistemi $p(\cdot)$ dəyişən dərəcəli $L_{p(\cdot)}(-\pi, \pi)$ fəzasında bazis təşkil edirsə, onda o, bu fəzada $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n \in Z}$ klassik eksponent sisteminə izomorfdur.

**1.5-də** ümumiləşmiş $L_{p(\cdot)}$ Lebeq fəzasında həyəcanlanmış eksponent sisteminin bazisliyi öyrənilir.

Mexanikanın konkret məsələlərinə tətbiqlə əlaqədar aşağıdakı kosinus və sinus sistemlərinin bazislik xassələri öyrənilir

$$\left\{\cos\sqrt{n^2 + \alpha}\, x\right\}_{n \ge 0} \cup \left\{\sin\sqrt{n^2 + \alpha}\, x\right\}_{n \ge 0}, \tag{4}$$

burada $\alpha \in C -$ kompleks parametrdir, müxtəlif funksional fəzalarda xüsusi elmi maraq doğurur.

$L_{p(\cdot)}$ fəzasında (4) sisteminin aşağıdakı ümumiləşmələrinə baxacağıq:

$$1 \cup \left\{e^{\pm i\sqrt[m]{P_m(n)}x}\right\}_{n \in N}, \tag{5}$$

burada $P_m(n) - m$ dərəcəli $\alpha_i \in C$, $i = \overline{0, m-1}$ kompleks əmsallı çoxhədlidir

$$P_m(n) \equiv a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_0,\ a_m \ne 0, a_m > 0.$$

$\sqrt[m]{z}$ kimi o budaq başa düşülür ki, hansı ki, $\sqrt[m]{1} = 1$.

Hər zaman fərz edəcəyik ki, aşağıdakı şərt ödənilir

$$k \ne l \text{ olduqda } P_m(k) \ne P_m(l) \text{ və } P_m(k) \ne 0,\ \forall k \in N. \tag{6}$$

Qeyd edək ki, (5) sisteminin $L_p$ fəzasında bazisliyi əvvəllər T.R.Muradovun işlərində öyrənilmişdir.

***Teorem 9***. *Tutaq ki,* $p^{-} > 1, p \in WL_{\pi}, a_m = 1$ *və*

$$-\frac{1}{p(\pi)} < a_{m-1} < \frac{1}{q(\pi)},$$

*bərabərsizliyi doğrudur. Əgər (6) şərti ödənərsə, onda (5) sistemi* $p(\cdot)$ *dəyişən dərəcəli* $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$ *fəzasında bazis təşkil edir.*

**Daha ümumi hal.** Aşağıdakı **e**ksponent sisteminə baxaq:

$$\left\{e^{i\lambda_n t}\right\}_{n\in Z}, \tag{7}$$

burada $\{\lambda_n\}\subset R-$ həqiqi ədədlər ardıcıllığıdır, $Z-$ tam ədədlərdir. $\{\lambda_n\}$ ardıcıllığı

$$\lambda_n = n-\alpha\, sign\, n + O\left(|n|^{-\beta}\right),\ |n|\to\infty, \tag{8}$$

asimptotikasına malik olduqda (7) sisteminin bazsilik xassələrini (bazislik, tamlıq, minimallıq) öyrənəcəyik, burada $\lambda,\beta\in R-$ müəyyən həqiqi parametrlərdir. Aşağıdakı teoremin doğruluğu isbat olunmuşdur.

***Teorem 22.*** *Tutaq ki, (8) asimptotikası doğrudur və*

$$-\frac{1}{2p(\pi)}<\alpha<\frac{1}{2q(\pi)},\ \beta>\frac{1}{\tilde{p}},$$

*bərabərsizliyi ödənilir, burada* $\tilde{p}=\min\{p^-;2\}$. *Onda (7) sisteminin* $L_{p(\cdot)}$ *fəzasında aşağıdakı xassələri ekvivalentdir:*

1. *(7) sistemi tamdır;*
2. *(7) sistemi minimaldır;*
3. *(7) sistemi* $\omega$ *-xətti asılı deyil;*
4. *(7) sistemi* $\left\{e^{int}\right\}_{n\in N}$ *sisteminə izomorf bazisdir;*
5. $i\neq j$ *olduqda* $\lambda_i\neq\lambda_j$.

**1.6-da** ümumiləşmiş çəkili Lebeq fəzasında vahidə malik həyəcanlanmış eksponent sisteminin bazisliyi öyrənilir.

**Xətti hal.** Vahidə malik aşağıdakı eksponent sisteminə baxaq

$$1\bigcup\left\{e^{i\omega_n(t)}\right\}_{n\neq 0}, \tag{9}$$

burada $\omega_n(t)$

$$\omega_n(t)=\gamma_n(t)+\underline{\underline{O}}\left(|n|^{-\nu}\right),\ |n|\to\infty,$$

asimptotikasına malikdir, belə ki, $\gamma_n(\cdot)$ baş hissə

$$\gamma_n(t)\equiv(n-\alpha\, sign\, n)t-\beta\, sign\, n\, sign\, t,$$

ifadəsi ilə təyin olunmuşdur, $\alpha,\beta\in R-$ həqiqi parametrlərdir.

Bu yarımfəsildə (9) sisteminin $\rho:[-\pi,\pi]\to R_+\equiv(0,+\infty)$ çəkisinə malik ümumiləşmiş çəkili $L_{p(\cdot),\rho}$ Lebeq fəzasında bazisliyinin isbatı üçün iki üsul təklif olunur.

Qarşıda hər yerdə fərz edəcəyik ki, aşağıdakı daxil olmalar doğrudur

$$\rho(\cdot)\in L_{p(\cdot)} \ \ \& \ \ \rho^{-1}(\cdot)\in L_{q(\cdot)}.$$

**I üsul.** Установления аналога утверждения Левинсона относительно системы

$$\left\{e^{i\lambda_n t}\right\}_{n\in Z}, \tag{10}$$

а в последующем применение Леммы 2 §1.1.

**II üsul**. $\left\{e^{i\omega_n(t)}\right\}_{n\in Z}$ sisteminə biortoqonal olan sistemin qurulması və $L_{p(\cdot),\rho}$ fəzasından olan hər bir funksiyanın biortoqonal ayrılışının yığılmasının isbatı.

Qeyd etmək lazımdır ki, I üsul yalnız (10) şəklində olan sistemə uyğundur, II üsul daha ümumidir. Ona görə də biz (9) sisteminin $L_{p(\cdot),\rho}$ fəzasında isbatı üçün hər iki üsulu verəcəyik.

Aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur.

***Teorem 11.*** *Tutaq ki,* $p\in WL_\pi$, $p^->1$ *və (2) çəkisi (3) şərtini ödəyir.* $1\bigcup\left\{e^{i(n-\alpha\, sign\, n)t}\right\}_{n\neq 0}$ *sistemi* $L_{p(\cdot),\rho}$ *fəzasında yalnız və yalnız*

$$-\frac{1}{2p(\pi)}<\alpha<\frac{1}{2q(\pi)},$$

*bərabərsizliyi ödəndikdə bazis təşkil edir. Bu halda* $\alpha\geq-\dfrac{1}{2p(\pi)}$ *olduqda* $L_{p(\cdot),\rho}$ *fəzasında tam,* $\alpha<\dfrac{1}{2q(\pi)}$ *olduqda isə bu fəzada minimaldır.*

**Hissə-hissə xətti hal.** Bu bənddə daha çətin hala, eksponent sistem məhz

$$1\bigcup\left\{e^{i(nt+\lambda_n(t))}\right\}_{n\neq 0}, \tag{11}$$

şəkildə olduğu hala baxacağıq, burada $\lambda_n(t)\equiv -sign\, n(\alpha t+\beta signt)$, hissə-hissə xətti həyəcanlanmadır.

Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

***Teorem 12.*** *Tutaq ki,* $p \in WL_{\pi}$, $p^{-} > 1$ *və (2) çəkisi (3) şərtlərini ödəyir və* $\{t_k\}_{k=\overline{1,r}} \subset \{(-\pi,0) \cup (0,\pi)\}$. *Əgər*

$$-\frac{1}{2q(0)} < \frac{\beta}{\pi} < \frac{1}{2p(0)},$$

*onda (11) sistemi yalnız və yalnız* $-\frac{1}{2p(\pi)} < \alpha + \frac{\beta}{\pi} < \frac{1}{2q(\pi)}$ *bərabərsizliyi ödəndikdə* $L_{p(\cdot),\rho}$ *fəzasında bazis təşkil edir.*

**İkinci fəsildə** kəsilən difernsial operatorların məxsusi funksiyalar çoxluğu ola biləcək hissə-hissə kəsilməz fazaya malik eksponent sisteminə baxılır. Müəyəyn şərtlər daxilində bu sistemin dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarında bazisliyi isbat olunur.

**2.1-də** əsas fərziyyələr və köməkçi faktlar daxil edilir.

Aşağıdakı eksponent sisteminə baxılır

$$\left\{e^{i(nt-\alpha(t)sign\, n)}\right\}_{n\in Z},$$

burada $\alpha(t) - [-\pi;\pi]$ parçasında hissə-hissə kəsilməz funksiyadır.

**2.2-də** ümumiləşmiş Hardi siniflərində hissə-hissə kəsilməz əmsallara malik bircins Riman məsələsi öyrənilir.

**2.3-də** hissə-hissə kəsilməz əmsala malik qeyri-bircins Riman məsələsinə baxılır.

Əvvəlki yarımfəsildə alınmış nəticələrdən istifadə etməklə **2.4-də** $L_{p(\cdot)}$ fəzasında hissə-hissə kəsilməz fazaya malik eksponent sistemin bazisliyi isbat olunur.

Aşağıdakı sistemə baxaq

$$\left\{e^{i(nt-\alpha(t)sign\, n)}\right\}_{n\in Z}, \tag{12}$$

burada $\alpha : [-\pi,\pi] \to C -$ müəyyən hissə-hissə kəsilməz funksiyadır. Aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur.

***Teorem 13.*** *Tutaq ki,* $p \in WL_{\pi}$, $p^{-} > 1$, $\alpha(t)$ *funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir*

(a) $\alpha(t)$ $[-\pi,\pi]$*-da hissə-hissə Hölder funksiyadır,* $\{s_k\}_1^r : -\pi = s_0 < s_1 < \ldots < s_r < s_{r+1} = \pi -$ *onun* $(-\pi,\pi)$*-da kəsilmə nöqtələridir. Tutaq ki,* $\{h_k\}_1^r$ :

$$h_k = \alpha(s_k + 0) - \alpha(s_k - 0),\ k = \overline{1,r};$$

$\alpha(t)$ *funksiyasını* $s_k$ *nöqtələrində sıçrayışlarıdır və* $h_0 = \dfrac{\alpha(-\pi) - \alpha(\pi)}{\pi}$.

(b) $$\left\{\frac{h_k}{\pi} - \frac{1}{p(s_k)} : k = \overline{0,r}\right\} \cap Z = \varnothing .$$

*Aşağıdakı münasibətdən*

$$-\frac{1}{q(s_k)} < \frac{h_k}{\pi} + n_{k-1} - n_k < \frac{1}{p(s_k)},\ n_0 = 0,\ k = \overline{1,r},$$

$\{n_k\}_1^r \subset Z$ *ədədlərini təyin edək. Fərz edək ki,* $\omega_\pi = h_0 + n_r$.

*Əgər* $-\dfrac{1}{q(s_k)} < \dfrac{h_k}{\pi} < \dfrac{1}{p(s_k)},\ k = \overline{0,r}$, *bərabərsizlikləri ödənərsə, onda (12) eksponent sistemi* $L_{p(\cdot)}$ *fəzasında bazis təşkil edir.*

**2.5-də** faza müəyyən asimptotikaya malik olduqda həyəcanlanmış eksponent sisteminə baxılır.

Aşağıdakı

$$\left\{e^{i\lambda_n(t)}\right\}_{n \in Z}, \tag{13}$$

eksponent sisteminə baxaq, burada $\lambda_n(t)$

$$n \to \infty, \qquad \lambda_n(t) = \mu_n(t) + \beta_n(t),$$

asimptotikasına malikdir və $\mu_n(t) = (n - \alpha(t)\operatorname{sign} n)t,\ n \in Z$.

Aşağıdakı şərtin ödəndiyini fərz edəcəyik.

*(c)* $\beta_n(\cdot)$ *funksiyaları*

$$\beta_n(t) = O\left(\frac{1}{n^{\gamma_k}}\right),\ t \in (t_k, t_{k+1}),\ k = \overline{0,r};\ \{\gamma_k\}_1^r \subset (0, +\infty),$$

münasibətini ödəyir. Aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur.

***Teorem 14.*** *Tutaq ki,* $p \in WL_\pi$, $p^{-1} > 1$, *və* $n \to \infty$ olduqda, $\lambda_n(t) = \mu_n(t) + \beta_n(t)$ asimptotik düsturu doğrudur, burada $\mu_n(t) = (n - \alpha(t)\operatorname{sign} n)t,\ n \in Z$, *hansı ki,* $\alpha(t)$ *funksiyası 2.4* *yarımfəslindəki Teorem 13-ün bütün şərtlərini ödəyir və* $\beta_n(t)$ *funksiyasına nəzərən aşağıdakı münasibət doğrudur*

$$\beta_n(t) = O\left(\frac{1}{n^{\gamma_k}}\right),\ t \in (t_k, t_{k+1}),\ k = \overline{0,r};\ \{\gamma_k\}_1^r \subset (0, +\infty).$$

*Fərz edək ki, aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur*

$$-\frac{1}{q(\pi)} < \omega_\pi < \frac{1}{p(\pi)},\ \gamma > \frac{1}{\widetilde{p}},$$

*burada* $\gamma = \min_k \gamma_k$ , $\widetilde{p} = \min\{p^-; 2\}$ *və* $\omega_\pi$ *kəmiyyəti (b) münasibətindən təyin olunur. Onda (13) sisteminə nəzərən* $L_{p(\cdot)}$ *fəzasında aşağıdakı xassələr ekvivalentdir.*

1) *tamdır;*
2) *minimaldır;*
3) $\omega$ *-xətti asılı deyil;*
4) *o* $\{e^{\mathrm{int}}\}_{n \in Z}$ *sisteminə izomorf bazis təşkil edir;*
5) $i \neq j$ *olduqda* $\lambda_i \neq \lambda_j$.

**2.6-də** Banax fəzalarında operator əmsallı ikiqat sistemdən ibarət bazislərə baxılır. Bu sistemlərin bazisliyi və operator tənliyin həllolunalığı arasında əlaqə qurulmuşdur. Bazislik üçün zəruri şərt alınır. Alınan nəticələr konkret misallara tətbiq olunur.

Beləlikl, tutaq ki, $\{x_n^+; x_n^-\}_{n \in N} \subset X$ müəyyən ikiqat sistemdir. *Əgər* $\forall x \in X$ *üçün* $\exists!\{\lambda_n^\pm\}_{n \in N} \subset C$: $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^+ x_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^- x_n^-$, *onda bu sistem* $X$ *fəzasında ikiqat bazis adlanır.*

$\{x_n^\pm\}_{n \in N}$ sisteminin $X$ fəzasında xətti örtüyünün qapanmasını $X^\pm$ ilə işarə edək. Digər halda bu tərif $\{x_n^\pm\}_{n \in N}$ sisteminin $X^\pm$ fəzasında bazis təçkil etdiyi, $X^+$ və $X^-$ altfəzaları $X$-da tamamlanma olduğu və aşağıdakı düz cəmə ayrılışın doğru olduğu mənasını verir

$$X = X^+ \dot{+} X^-. \tag{14}$$

Tutaq ki, $X$ $\{x_n^+; x_n^-\}_{n \in N}$ bazisinə malik Banax fəzasıdır və $T^\pm \in L(X)$ müəyyən avtomorfizmdir. Fərz edək ki, $\{T^+ x_n^+; T^- x_n^-\}_{n \in N}$ sistemi həmçinin $X$ fəzasında bazis təşkil edir. Beləliklə, $\forall y \in X$ üçün

$$T^+x^+ + T^-x^- = y \quad , \tag{15}$$
tənliyi $X^+ \times X^-$ fəzasında həll olunandır, daha doğrusu $\exists\left(x^+; x^-\right) \in X^+ \times X^-$, (15) münasibəti ödənilir. Tutaq ki, $X_0 \subset X$ müğyyən çoxobrazlıdır. Fərz edək ki, elə $A^\pm; B^\pm \in L(X)$ avtomorfizmi və $S: X_0 \to X$ xətti operatoru var ki, $\forall y \in X_0$ üçün (15) məsələsinin həlli
$$x^\pm = A^\pm y + B^\pm Sy , \tag{16}$$
Düsturu ilə ifadə olunur. Beləliklə, bu yarımfəsildə aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur.

***Teorem 15.*** *Tutaq ki, $X$ Banax fəzası (14) düz ayrılışına malikdir və $\left\{x_n^\pm\right\}_{n \in N}$ sistemi $X^\pm$ fəzasında bazis təşkil eidr. $T^\pm; A^\pm; B^\pm \in L(X)$ avtomorfizmdir və $S: X_0 \to X$ xətti operatordur hansı ki, (15) tənliyinin həllinə nəzərən (16) düsturu doğrudur, burada $X_0 \subset X -$ müəyyən çoxobrazlıdır. Onda əgər $\left\{T^+x_n^+; T^-x_n^-\right\}_{n \in N}$ sistemi $X$ fəzasında bazis təşkil edərsə, onda $S$ operatoru $X_0$ fəzasında məhduddur.*

**Üçüncü fəsildə** ümumilikdə müxtəlif riyazi strukturlarda cırlaşmayan sistemin doğurduğu əmsallar fəzası anlayışına həsr olunmuşdur.

Müəyyən xassələr malik xətti metrik fəzaya baxılmışdır. Cırlaşmayan sistem anlayışı daxil edilmişdir. İsbat olunmuşdur ki, belə sistemlər kanonik bazisli tam metrik əmsallar fəzasına malikdir Əmsal operatoru dilində bazislik kriteriyası verilmişdir.

Bu fəsildə müəyyən bixətti inikasın doğurduğu ümumiləşmiş $b$-bazis anlayışının bir konkret realizasiyası verilmişdir. Eləcə də Hilbert tenzor hasilində elementlərin tam sistem üzrə $t-$sıraya ayrılması haqqında bir əsas nəticə verilmişdir.

**3.1** -də zəruri işarələmələr və anlayışlar, eləcə də bixətti inikasın doğurduğu approksimativ anlayışlar daxil edilmişdir.

**3.1.1.** ***$b$-inikas. $b$-örtük. $b$-tamlıq. $b$-minimallıq. $b$-invariantlıq.*** Tutaq ki, $K$ meydanı üzərində $X, Y, Z -$xətti fəzalardır.

*Əgər* $\forall x \in X$ *və* $\forall y \in Y$ *üçün* $b(x,\cdot): Y \to Z$ *və* $b(\cdot, y): X \times Y \to Z$ *inikasları uyğun olaraq* $Y$ *və* $X$*-da xətti inikaslardırsa, onda* $b: X \times Y \to Z$ *inikası bixətti inikasdır.*

Tutaq ki, $X, Y, Z -$ uyğun $\|\cdot\|_x$, $\|\cdot\|_y$ və $\|\cdot\|_z$ normalı $B$-fəzalardır. Əgər

$$m\|x\|_x \|y\|_y \le \|b(x,y)\|_z \le M\|x\|_x \|y\|_y, \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y,$$

olarsa, onda $b: X \times Y \to Z$ bixətti inikası $b$-inikası adlanır, burada $m, M > 0 -$ sabitlərdir.

Sadəlik üçün $b(x,y)$ $b$-inikasını $xy \equiv b(x,y)$ ilə işarə edəcəyik. Tutaq ki, $M \subset Y$ müəyyən çoxluqdur. $\sum x_i m_i$ şəklində olan bütün mümkün sonlu xətti kombinasiyaları $M$ çoxluğunun $b$-örtüyü adlandıracağıq və $L^b[M]$ kimi işarə edəcəyik; burada $x_i \in X$, $m_i \in M$. $Z$ çoxluğunda $L^b[M]$ örtüyünün qapanmasını $\overline{L^b[M]}$ ilə işarə edəcəyik..

*Əgər* $\overline{L^b[\{y_n\}_{n\in N}]} = Z$ *olarsa, onda* $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ *sistemi* $b$*-tam sistem adlanır. Əgər* $\forall x \in X$*,* $x \ne 0$ *üçün* $xy_k \notin \overline{L^b[\{y_n\}_{n\ne k}]}$, $\forall k \in N$ *doğru olarsa, onda* $\{y_n\}_{n\in N}$ *sistemi* $b$*-minimal sistem adlanır.*

*Əgər* $\sum_n x_n y_n = 0$ *bərabərliyindən* $\sum_n f(y_n)x_n = 0$*,* $\forall f \in Y^*$ *ifadəsinin doğruluğu alınarsa, onda* $(X;Y;Z)$ *üçlüyü* $b_Y$*-invariant adlanır.*

*Tamamilə analoji olaraq* $b$*-asılı olmamaq anlayışı müəyyən edilir. Məhz əgər hər hansı bir sonlu* $\{x_n\}$ *seçimi üçün* $\sum_n x_n y_n = 0$ *bərabərliyi yalnız* $x_n = 0, \forall n$ *üçün doğru olduqda* $\{y_n\} \subset Y$ *sistemi* $b$*-asılı olmayan sistem adlanır.*

*Əgər* $\forall x \in X$*,* $\forall n, k \in N$ *üçün* $T_n(xy_k) = \delta_{nk} x$ *doğru olarsa, onda* $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ *sistemi* $\{T_n\}_{n\in N} \subset L(Z;X)$ *sisteminə* $b$*-biortoqonal sistem adlanır.*

*Nəhayət,* $b$*-bazis anlayışını daxil edək.*

*Əgər* $\forall z \in Z$ *üçün yeganə* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *ardıcıllığı varsa ki,* $z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ *, onda* $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ *sistemi* $(X;Y;Z)$ *üçlüyü üçün* $b$ *-bazis adlanır. Tutaq ki,* $(X;Y;Z)$ *üçlüyü və* $b : X \times Y \to Z$ $b$ *-inikası verilmişdir:* $b(x,y) = xy \in Z$ .

*Əgər* $x_k \in X$ *və* $y_k \in Y$ *üçün* $\sum_k x_k y_k$ *şəkilli sonlu xətti kombinasiyalar* $Z$ *- də doludursa, onda bu üçlük* $b$ *-dolu adlanır.*

**3.2-də** Hilbert fəzalarının Hilbert tenzor hasilinə baxılır. Hilbert tenzor hasili ilə təyin olunan bixətti inikasın doğurduğu $t$ -ayrılış anlayışı daxil edilir. İsbat olunmuşdur ki, əgər fəzanın ixtiyari elementi verilmiş sistem üzrə $t$ -ayrılışa malikdirsə və bir neçə həddi atdıqdan sonra bu sistem bu fəzada $t$ -tamdırsa, onda ixtiyari element də qalan sistem üzrə $t$ - ayrılışa malikdir.

Hilbert tenzor hasili ilə bağlı bəzi anlayış və faktları daxil edək. Tutaq ki, $X;Y$ $H$ -fəza və $Z = X \otimes Y$ onların Hilbert tenzor hasilidir. $x \in X$ və $y \in Y$ elementlərinin $x \otimes y$ tenzor hasilini sadəlik üçün $xy = x \otimes y$ ilə işarə edək. Tutaq ki, $M \subset Y$ müəyyən çoxluqdur. Tutaq ki

$$L_t[M] \equiv \left\{ z \in Z : \exists \{x_k; y_k\}_1^m \subset X \times M \Rightarrow z = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k \right\}.$$

$L_t[M]$ $M$ çoxluğunun $t$ *-örtüyü* adlanır. Tutaq ki, $\vec{y} \subset Y$ müəyyən sistemdir. Təyin edək

$$\Lambda^{(t)} \equiv \left\{ \vec{x} \subset X : \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right\},$$

sırası $Z$ -də yığılır.

*Əgər* $\forall z \in Z$ üçün $\exists \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{m_n} \subset X$ , $\forall n \in N$ :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} x_k^{(n)} y_k = z .$$

*onda* $\vec{y} \subset Y$ *sistemi* $Z$ *fəzasında* $t$*-tam sistem adlanır. Əgər* $\forall z \in Z$ *üçün yeganə* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *ardıcıllığı varsa ki,* $z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$*, onda* $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ *sistemi* $X;Y;Z$ *üçlüyünə nəzərən* $t$*-bazis adlanır.*

*Əgər sonlu* $\{x_n\}$ *seçimi üçün* $\sum_n x_n y_n = 0$ *bərabərliyi yalnız* $x_n = 0, \forall n$ *üçün doğrudursa, onda* $\{y_n\} \subset Y$ *sistemi* $t$*-asılı olamayan sistem adlanır.*

Beləliklə,

$$\left(x_1 \otimes y_1; x_2 \otimes y_2\right)_Z = \left(x_1; x_2\right)_X \left(y_1; y_2\right)_Y, \ \forall x_k \in X, \ \forall y_k \in Y, k = 1,2,$$

burada $\left(\cdot;\cdot\right)_Z$ $Z$-də skalyar hasildir və $\|\cdot\|_Z^2 = \left(\cdot;\cdot\right)_Z$.

$\left(y;z\right) \in Y \times Z$ cütünün $t$-*skalyar* hasili anlayışını daxil edək. $\forall x \in X$ götürək və $\vartheta_{(y;z)}(x) = \left(x \otimes y; z\right)_Z$ xətti funksionalına baxaq. Alarıq

$$\left|\vartheta_{(y;z)}(x)\right| \le \|x \otimes y\|_Z \|z\|_Z = \|y\|_Y \|z\|_Z \|x\|_X .$$

Beləliklə, $\vartheta_{(y;z)} \in X^* \equiv X$. Nəticədə $\exists! \, \tilde{x} \in X$: $\vartheta_{(y;z)}(x) = \left(x; \tilde{x}\right)_X$, $\forall x \in X$. $\tilde{x}$ elementi $y$ və $z$, elementlərinin $t$-*skalyar hasili* adlanır və onu $\tilde{x} = \langle y; z \rangle_X$ ilə işarə edəcəyik.

Tutaq ki, $X;Y$ $H$-fəza və $Z = X \otimes Y$ isə onların Hilbert tenzor hasilidir. Tutaq ki, $\vec{y} \subset Y$ müəyyən sistemdir. Əgər

$$\exists \vec{x} \subset X : z = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes y_k$$

münasibəti $Z$ fəzasında ödənərsə, onda deyəcəyik ki, $z \in Z$ elementi $\vec{y}$ sistemi üzrə $t$-ayrılır. Bu yarımfəslin əsas teoremini ifadə edək.

***Teorem 16.*** *Tutaq ki,* $z$ *fəzasının ixtiyari elementi* $\{y_n\}_{n\in Z_+} \subset Y$ *sistemi üzrə* $t$*-ayrılır və* $\vec{y}$ *sistemi* $z$ *fəzasında* $t$*-tam sistemdir. Onda* $z$ *fəzasının ixtiyari elementi həmçinin* $\vec{y}$ *sistemi üzrə* $t$*-ayrılır.*

**3.3-də** müəyyən xassələrə malik xətti metrik fəzaya baxılır. Cırlaşmayan sistem anlayışı daxil edilir. İsbat olunur ki, belə sistemlər kanonik bazisli tam metrik əmsallar fazasına malikdirlər. Əmsal operatoru dilində bazislik bazislik kriteriyası verilmişdir..

**3.3.1. Əsas fərziyyə və anlayışlar.** Aşağıdakı anlayışlardan istifadə edəcəyik.

***Tərif 9.*** *Əgər* $\forall n \in N$ *üçün* $x_n \neq 0$ *, onda* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *sistemi cırlaşmayan sistem adlanır.*

Fərz edəcəyik ki, $(X;\rho)$ xətti metrik fəzası açağıdakı xassələrə malikdir.

$\alpha$*)* $(X;\rho)$ *fəzasında toplama və skalyara vurma xətti əməlləri* $X$ *-da kəsilməzdirlər, daha doğrusu,* $\mathbb{C}$*-də* $\lambda_n \to \lambda, n \to \infty$ *və* $X$*-da* $x_n \to x$*,* $y_n \to y$ *,* $n \to \infty$ *olmasından* $X$ *fəzasında* $\lambda_n x_n \to \lambda x$*,* $x_n + y_n \to x + y, n \to \infty$ *alınır.*

$\beta$*) Tutaq ki,* $\tau_\rho$ $X$ *fəzasında* $\rho$ *metrikasının doğurduğu topologiyadır. Fərz edəcəyik ki,* $X$ *çoxluğunun* $\tau_\rho$ *topologiyasına və* $\rho$ *metrikasına nəzərən məhdudluğu ekvivalentdir, daha doğrusu bu anlayışlar* $(X;\tau_\rho)$ *və* $(X;\rho)$ *fəzalarında eynidir.*

Tutaq ki, $(X;\rho)$ $\alpha$ ), $\beta$ ) xassələrinə malik müəyyən xətti, metrik, tam fəzadır və $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ müəyyən cırlaşmayan sistemdir. Fərz edək ki

$$\mathscr{K}_{\bar{x}} \equiv \left\{\{\lambda_n\}_{n\in N} \subset K : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \text{ sırası } X\text{-da yığılır} \right\}.$$

Beləliklə, aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur.

***Teorem 17.*** *Tutaq ki,* $(X;\rho)$ $\alpha$*),* $\beta$*) xassələrinə malik metrik fəzadır,* $\rho$ *sürüşməyə nəzərən invariantdır və* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *cırlaşmayan sistemdir. Onda onun əmsallarına uyğun* $\left(\mathscr{K}_{\bar{x}};\rho_{\mathscr{K}_{\bar{x}}}\right)$ *əmsallar fəzası tamdır,* $\{e_n\}_{n\in N}$ *kakonik sistemi bu fəzada bazis təşkil edir. Bundan əlavə Более того, метрика* $\rho_{\mathscr{K}_{\bar{x}}}$ *metrikası sürüşməyə nəzərən invariantdır və xətti əməllər* $\mathscr{K}_{\bar{x}}$ *-da kəsilməzdir.*

Aşağıdakı teorem də doğrudur.

***Teorem 18.*** *Tutaq ki,* $(X;\rho)$ $\alpha$*),* $\beta$*) xassələrinə malik metrik fəzadır,* $\rho$ *sürüşməyə nəzərən invariantdır və* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *cırlaşmayan* *sistemi* $X$ *fəzasında tamdır. Onda bu sistem bu fəzada yalnız və yalnız uyğun* $T:\mathscr{K}_{\bar{x}} \to X$ *əmsal operatoru* $L(\mathscr{K}_{\bar{x}};X)$ *fəzasında izomorfizm olduqda bazis təşkil edir.*

**3.4-də** müəyyən məhdud operatorlar ailəsinin doğurduğu $J$-örtük, $J$-tamlıq, $J$-minimallıq və $J$-bazis kimi approksimativ anlayışlar daxil edilmişdir.

Tutaq ki, $X;Y$ müəyyən Banax fəzalarıdır. Tutaq ki, $\Gamma \subset C$ hissə-hissə hamar əyridir. $L_p(\Gamma;L(X))$, $(L_p(\Gamma;X))$ $p \geq 1$, ilə

$$\|f\|_p = \left( \int_\Gamma \|f(t)\|^p |dt| \right)^{\frac{1}{p}},$$

normasına malik $\Gamma$ əyrisi üzərində $L(X)(X)-$ qiymətli funksiyaların Lebeq fəzasını işarə edəcəyik, burada

$$f:\Gamma \to L(X) \quad (f:\Gamma \to X).$$

Tutaq ki, $M \subset L_p(\Gamma;L(X))$. B.T. Bilalovun işlərindən istifadə edərək approksimativ ümumiləşmiş anlayışları «$J$» hərfi ilə işarə edəcəyik.

$$L_J[M] \equiv \left\{ x(\cdot): x(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} T_k(\cdot)x_k, \{T_k(\cdot)\} \subset M, \{x_k\} \subset X \right\},$$

$M$ *çoxluğunun* $L_p(\Gamma;L(X))$ *fəzasında* $J$*-örtüyü adlanır.*

Banax fəzalarında sistemin tamlığı aşağıdakı şəklə düşür. ***Tərif 10.*** *Əgər*

$$\overline{L_J[\{T_n\}_{n\in N}]} \equiv L_p(\Gamma;X),$$

*onda* $\{T_n\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma;L(X))$ *sistemi* $L_p(\Gamma;X)$ *fəzasında* $J$*-tam sistem adlanır, burada* $\left(\overline{\cdot}\right)-$ $L_p(\Gamma;X)$ *fəzasında qapanmadır.*

Bizə həmçinin ümumiləşmiş $J$-asılı olmamazlıq anlayışı lazım olacaqdır.

***Tərif 11.*** *əgər*

$$\sum_{n=1}^{\infty} T(\cdot)f_n = 0 \text{ в } L_p(\Gamma;X),$$

*bərabərliyindən* $\bar{f}=0$, *alınarsa, onda*

$$\{T_n(\cdot)\}_{n\in N}\subset L_p(\Gamma;L(X)),$$

*sistemi* $\omega J$ *-asılı olmayan sistem adlanır, burada* $\bar{f}\equiv\{f_n\}_{n\in N}\subset X$ .

Bizim halda biortoqonal sistemin əvəzi

***Tərif 12.*** *Əgər*

$$T_n^*(T_k(\cdot)x)=\delta_{nk}x,\quad \forall x\in X,\ \forall n,k\in N,$$

*olarsa,*

$$\{T_n^*(\cdot)\}_{n\in N}\subset L(L_p(\Gamma;X);X),$$

*sistemi*

$$\{T_n(\cdot)\}_{n\in N}\subset L_p(\Gamma;L(X)),$$

*sisteminə* $J$ *-biortoqonal sistem adlanır, burada* $\delta_{nk}-$*Kronoker simvoludur.*

İndi isə əsas ümumiləşmiş bazislik anlayışını qəbul edək.

***Tərif 13.*** *Əgər* $\forall f\in L_p(\Gamma;X)$, *üçün* $\exists!\{f_n\}_{n\in N}\subset X$ : $L_p(\Gamma;X)$ *fəzasında* $f=\sum_{n=1}^{\infty}T_n f_n$ , *doğrudursa, onda* $\{T_n(\cdot)\}_{n\in N}\subset L_p(\Gamma;L(X))$ *sistemi* $L_p(\Gamma;X)$ *fəzasında* $J$ *-bazis adlanır, daha doğrusu*

$$\int_{\Gamma}\left\|f(\tau)-\sum_{n=1}^{m}T_n(\tau)f_n\right\|^p|d\tau|\to 0,\ m\to\infty .$$

$\{f_n\}_{n\in N}$ *koordinat əmsalları adlanır.*

Əsas nəticələrin alınmasında aşağıdakı əsas xassədən istifadə zərurəti yaranır.

***Xassə (A).*** *sistemi aşağıdakı şərti ödəyir:* $\exists T_n^{-1}(t)$, *s.h.y.* $t\in\Gamma$ , $\forall n\in N$ *və* $\{T_n^{-1}(\cdot)\}_{n\in N}\subset L_q(\Gamma;L(X))$, *burada* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

**3.5-də** $J$ -əmsallar fəzası anlayışı və bu fəzada $J$ -kanonik sistem anlayışı təyin olunur. Operatorlar ailəsi üzərinə müəyyən şərtlər qoymaqla bu fəzanın Banax fəzası olduğu və $J$ -kanonik sistemin bu fəzada $J$ -bazis təşkil etdiyi isbat olunmuşdur. $J$ -əmsal operatoru dilində $J$ -bazislik kriteriyası alınmışdır.

Aşağıdakı fəzalara baxılır

$$L_p(\Gamma; L(X)),\, L_p(\Gamma; X),\; p \geq 1.$$

Fərz edək ki

$$S_{\overline{T}} \equiv \{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X)),$$

müəyyən sistemdir. Təyin edək

$$K_{\overline{T}} \equiv \Big\{ \quad \{f_n\}_{n\in N} \subset X: \; \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\cdot) f_n \text{ sırası}$$

$L_p(\Gamma; X)$ fəzasında yığılır $\Big\}$.

Aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur.

***Teorem 19.*** *Tutaq ki,* $S_{\overline{T}} \equiv \{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X))$, $p \geq 1$, *sistemi (A) xassəsinə malikdir. Onda* $K_{\overline{T}}$ *Banax əmsallar fəzası və* $K \in L(K_{\overline{T}}; L_p(\Gamma; X)), \|K\| = 1$. *Bundan əlavə əgər* $S_{\overline{T}}$ *sistemi* $\omega J$ *-xətti asılı deyilsə və ya* $J$ *-biortoqonal sistemə malikdirsə, onda* $\exists K^{-1}$. *Bundan əlavə əgər* $\operatorname{Im} K$ *qapalıdırsa, onda* $K^{-1} \in L(\operatorname{Im} K; K_{\overline{T}})$.

Bizə həmçinin qarşıda $K_{\overline{T}}$ fəzasında $J$*-bazis* anlayışı da lazım olacaqdır.

***Tərif 14.*** *Əgər* $\forall \bar{f} \in K_{\overline{T}}$, *üçün* $\exists! \{f_n\}_{n\in N} \subset X : \bar{f} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n$ *(yığılma* $K_{\overline{T}}$ *fəzasında başa düşülür), onda* $\{A_n\}_{n\in N} \subset L(X; K_{\overline{T}})$ *sistemi* $K_{\overline{T}}$ *fəzasında* $J$ *-bazis adlanır.*

Aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur.

***Teorem 20.*** *Tutaq ki,* $S_{\overline{T}} \equiv \{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X))$, $p \geq 1$, *sistemi (A) xassəsinə malikdir. Onda* $\{E_n\}_{n\in N} \subset L(X; K_{\overline{T}})$ $J$ *-kanonik sistemi* $K_{\overline{T}}$ *əmsallar fəzasında* $J$ *-bazis təşkil edir.*

Aşağıdakı $J-$bazislik kriteriyası doğrudur.

***Teorem 21.*** *Tutaq ki,* $\{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X))$, $p \geq 1$ *sistemi (A) xassəsinə malikdir və* $K$ *uyğun əmsal operatorudur* $K: K_{\overline{T}} \to L_p(\Gamma; X)$. *Onda bu sistem* $L_p(\Gamma; X)$ *fəzasında yalnız və yalnız* $K$ $L(K_{\overline{T}}; L_p(\Gamma; X))$ *fəzasında izomorfizm olduqda* $J$ *-bazis təşkil edir.*

**3.6-də** məhdud operatorlar ailəsinin $J$-bazisliyi isbat olunmuşdur. Müəyyən şərtlər daxilində bu halda bazislik kriteriyasının analoqu isbat olunmuşdur.

**Dördüncü fəsildə** dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarında birqat sistem və onunla bağlı ikiqat sistemin bazislik xassələri (tamlıq, minimallıq, bazislik) isbat olunmuşdur. Tədqiqat sxemi əvvəllər birqat

$$\left\{a(t)e^{\mathrm{int}} \pm b(t)e^{-\mathrm{int}}\right\}_{n\in N}, \tag{17}$$

və ikiqat

$$\left\{A(t)e^{\mathrm{int}}; B(t)e^{-\mathrm{int}}\right\}_{n\in N}, \tag{18}$$

eksponent sistemlərinə nəzərən uyğun olaraq $L_p(0,\pi)$ və $L_p(-\pi,\pi)$, fəzalarında B.T.Bilalov tərəfindən tətbiq olunmuşdur, hansı ki, bu sistemlərə daxil olan funksiyalar təyin oblastlarında kompleksqiymətli funksiyalardır.

Bu fəsildə (17), (18) sistemlərinin bazisliyinin isbatı üçün B.T.Bilalov tərəfindən təklif olunmuş yuxarıda qeyd olunan sxem dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarında baxılan daha ümumi birqat və ikiqat sistem halına ümumiləşdirilmişdir. Alınan nəticələr həyəcanlanmış eksponent sistem üzərində nümayiş olunur.

**4.1-də** $p(\cdot)$ dəyişən dərəcəli $L_{p(\cdot)}(0,a)$ ümumiləşmiş Lebeq fəzasında birqat funksiyalar sisteminə baxılır. $L_{p(\cdot)}(-a,a)$ fəzasında bu sistemlə bağlı ikiqat sistem təyin olunur. $L_{p(\cdot)}$ fəzasında bu sistemlərin tamlığı və minimallığı arasında əlaqə isbat olunur.

Birqat sistemə baxaq

$$\vartheta_n^{\pm}(t) \equiv a(t)\omega_n^{+}(t) \pm b(t)\omega_n^{-}(t),\ \ n\in N. \tag{19}$$

Ümumiliyi pozmadan hesab edəcəyik ki, $\left\{\vartheta_n^{\pm}(t)\right\}_{n\in N}$ sistemi $[0,a]$ parçasında təyin olunmuşdur. Tutaq ki,

$$A(t) \equiv \begin{cases} a(t), & t\in[0,a], \\ b(-t), & t\in[-a,0). \end{cases}$$

Aşağıdakı ikiqat sistemə baxaq

$$V_{n;m} \equiv \left(A(t)W_n(t); A(-t)W_m(-t)\right),\ \ n,m\in N.$$

Növbəti teorem doğrudur

***Teorem 22.*** *Tutaq ki,* $1 \le p^- \le p^+ < +\infty$ *və* $p(-x) = p(x)$, $\forall x \in [-a, a]$. $\{V_{n;m}\}_{n;m \in N}$ *sistemi* $L_{p(\cdot)}(-a, a)$ *fəzasında yalnız və yalnız* $\{\vartheta_n^+\}_{n \in N}$ *və* $\{\vartheta_n^-\}_{n \in N}$ *sistemləri* $L_{p(\cdot)}(0, a)$ *fəzasında tam və minimal sistem olduqda tam və minimaldır.*

**4.2-də** qeyri simmetrik halda ümumiləşmiş Lebeq fəzalarında defektə malik birqat sistemin tamlıq və minimallığına baxılmışdır.

Aşağıdakı birqat sistemlərə baxaq

$$\vartheta_n^{\pm}(t) \equiv a(t)\varphi^n(t) \pm b(t)\overline{\varphi}^n(t), \quad n \in Z, \tag{20}$$

$a(t), b(t)$ və $\varphi(t)$, ümumiyyətlə desək, $[0, a]$ parçasında verilmiş kompleks qiymətli funksiyalardır. Aşağıdakı funksiyaları daxil edək

$$A(t) \equiv \begin{cases} a(t), & t \in (0, a), \\ b(-t), & t \in (-a, 0), \end{cases} \qquad W(t) \equiv \begin{cases} \varphi(t), & t \in (0, a), \\ \overline{\varphi}(-t), & t \in (-a, 0). \end{cases}$$

(20) birqat sistemi ilə yanaşı aşağıdakı ikiqat sistemə də baxılır

$$W_{n,k} \equiv \{A(t)W^n(t); A(-t)W^k(-t)\}, \quad n, k \in Z. \tag{21}$$

Aşağıdakı teorem doğrudur.

***Teorem 23.*** *Tutaq ki,* $p(-x) = p(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi] \wedge$ $1 < p^- \le p^+ < +\infty$, *və (21) ifadəsi ilə təyin olunan* $\{W_{n,k}\}_{n \ge 0,\, k \ge 1}$,*sistemi* $L_{p(\cdot)}(-a, a)$ *fəzasında tam və minimaldır. Onda aşağıdakılardan biri doğrudur:*

*1.* $\{\vartheta_n^-\}_{n \ge 1}$ *sistemi* $L_{p(\cdot)}(0, a)$ *fəzasında tam və minimaldır.*

*2.* $\{\vartheta_n^+\}_{n \ge 1}$ *sistemi* $L_{p(\cdot)}(0, a)$ *fəzasında tam və minimaldır.*

**4.3-də** $L_{p(\cdot)}$ fəzasında birqat və ikiqat sistemlərin bazisliyinə nəzərən analoji əlaqə isbat olunmuşdur.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

***Teorem 24.*** *Tutaq ki,* $1 < p^- \le p^+ < +\infty$ *və* $p(-x) = p(x)$, $\forall x \in [-a, a]$. $\{V_{n;n}\}_{n \in N}$ *ikiqat sistemi* $L_{p(\cdot)}(-a, a)$ *fəzasında yalnız və yalnız* $\{\vartheta_n^+\}_{n \in N}$ *və* $\{\vartheta_n^-\}_{n \in N}$ *birqat sistemlərinin hər birinin* $L_{p(\cdot)}(0, a)$ *fəzasında bazis təşkil etdiyi halda bazis təşkil edir.*

Oxşar nəticə vahidə malik sistemə nəzərən də doğrudur.

***Teorem 25.*** *$1\bigcup\{V_{n;n}\}_{n\in N}$ ikiqat sistemi $L_{p(\cdot)}(-a,a)$ fəzasında yalnız və yalnız $\{\vartheta_n^-\}_{n\in N}$ və $1\bigcup\{\vartheta_n^+\}_{n\in N}$ sistemlərinin hər biri $L_{p(\cdot)}(0,a)$ fəzasında bazis təşkil etdiyi halda bazis təşkil edir.*

Xüsusi halda, $\vartheta_n^{\pm}$ funksiyası olaraq $[0,\pi]$ parçasında

$$\omega_n^+(t)\equiv e^{i(\lambda_n t+\mu_n)};\ \omega_n^-(t)\equiv e^{-i(\lambda_n t+\mu_n)},$$

funksiyalarını götürsək, bu teoremlərdən aşağıdakı nəticələr alınır.

***Nəticə 1.*** *Tutaq ki, $\{\lambda_n;\mu_n\}_{n\in N}$ müəyyən kompleks ədədlər ardıcıllığıdır. $\left\{e^{\pm i(\lambda_n t+\mu_n sign t)}\right\}_{n\in N}$ eksponent sistemi $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$, fəzasında yalnız və yalnız o zaman tam, minimal və bazis təşkil edir ki, $\{\cos(\lambda_n t+\mu_n)\}_{n\in N}$ kosnus və $\{\sin(\lambda_n t+\mu_n)\}_{n\in N}$ sinus sistemlərinin hər biri uyğun olaraq $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$ fəzasında tam, miniaml olsun və bazis təşkil etsin.*

**Beşinci fəsil** bütövlükdə Banax fəzalarında və xüsusi halda dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarında bazislərin bəzi qarışıq məsələlərinə həsr olunmuşdur. Burada həyəcanlanmış eksponent sisteminin Riss bazisliyi haqqında klassik Peli-Viner teoreminin bir kəsilməz analoqu verilmişdir.

**5.1-də** Klassik Peli-Viner teoreminin bir kəsilməz analoqu alınmışdır.

Hilbert fəzalarında yaxın sistemlərin Riss bazisliyi haqqında klassik Peli-Viner teoremi yaxşı məlumdur. Sonralar bu teorem bir çox istiqamətlərdə ümumiləşdirilmişdir. Kəsilməz halda bu nəticənin analoqu varmı sualı meydana çıxır. Kəsilməz analoq dedikdə nə nəzərdə tutulur, sonrakı şərhdə izah edəcəyik.

Peli-Viner teoreminin aşağıdakı kəsilməz analoqu doğrudur.

***Teorem 26.*** *Tutaq ki, $\varphi(\lambda;x)$ funksiyası $e^{i\lambda x}$ sisteminə o mənada yaxın sistemdir ki, $\exists\theta\in[0,1)$, var ki, onun üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur*

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}\left|\int_A^B a(\lambda)\left[\varphi(\lambda;x)-e^{i\lambda x}\right]d\lambda\right|^2 dx\le 2\pi\theta^2\int_A^B|a(\lambda)|^2 d\lambda,$$

$\forall A,B\in(-\infty,+\infty)$, $A<B$ *və* $\forall a(\lambda)\in L_2^{loc}(-\infty,+\infty)$ .

*Onda elə* $K: L_2(-\sigma,+\sigma) \leftrightarrow L_2(-\sigma,+\sigma)$ *avtomorfizmi var ki,* $\forall f \in L_2(-\sigma,+\sigma)$ *üçün*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [FKf](\lambda)\varphi(\lambda;x)d\lambda \ ,$$

*«ayrılışı» doğrudur.*

Beləliklə, aşağıdakı nəticə doğrudur.

***Nəticə 2.*** *Tutaq k,* $|\alpha| < \frac{\ln 2}{\sigma}$. *Onda elə*

$$K_\alpha : L_2(-\sigma,\sigma) \leftrightarrow L_2(-\sigma,\sigma),$$

*avtomorfizmi var ki,* $\forall f \in L_2(-\sigma,\sigma)$ *üçün aşağıdakı yeganə «ayrılış» doğrudur*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [FK_\alpha f](\lambda)\varphi_\alpha(\lambda,x)d\lambda \, ,$$

*burada* $\varphi_\alpha(\lambda;x) \equiv e^{i(\lambda+\alpha \ sign\lambda)x}$ , $(\lambda;x) \in (-\infty,+\infty)\times(-\sigma,+\sigma)$ .

**5.2-də** $p(\cdot)$ dəyişən dərəcəli $W^1_{p(\cdot)}$ Sobolev fəzasında bazislərin qurulması üçün bir metod təklif olunur. $p(\cdot) \equiv const$ sabit funksiya olduqda cari yarımfəslin nəticələri K. Şaydukova məxsusdur. Şərhin tamlığı üçün uyğun faktların bizim halda isbatları tam verilmişdir.

**5.3-də** Banax fəzalarında multiplikator dilində yaxın sistemlərin bazisliyi isbat olunmuşdur. Bu nəticələr $L_{p(\cdot)}$ Lebeq fəzasında həyəcanlanmış eksponent sisteminə tətbiq olunmuşdur. Multiplikator dilində eksponent, kosinus və sinus sistemləri üçün «$\frac{1}{4}$ – Kadets» teoreminin $p(\cdot)$-analoqu alınmışdır.

**5.4-də** Şturm-Liuvill operatoru üçün spektral parametrə malik Koşi məsələsinə baxılmışdır. İsbat olunmuşdur ki, spektral parametr üçün qiymətlər ardıcıllığını elə seçmək olar ki, uyğun həllər sistemi dəyişən dərəcəli Lebeq fəzasında klassik triqonometrik sistemlərə izomorf bazis təşkil etsin. Bu yanaşmanı V.A. İlin mənada şərh etmək olar.

Sonda müəllif elmi məsləhətçisi AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., prof. Bilal T.Bilalova işə olan daimi diqqət və dəstəyinə görə öz dərin minnətdarlığını bildirir.

**Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:**

1. T.R.Muradov. On approximation properties of systems of exponents, cosines and sine's in $L_p$. Reports National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2007, №3, p.26-32
2. T.R.Muradov. Bases from unitary systems of cosines &sines. Sakarya Univ. Türk Dünyasi, Mathematic symposium 4-7 Temmuz 2007, p.246
3. Т.Р.Мурадов. Об аппроксимативных свойствах систем экспонент в $L_p$. Тезисы симп. «Совр. проблемы мат.,мех. и информ.», Нахичеван, 2007, с.71
4. Т.Р.Мурадов. О непрерывном аналоге теоремы из Пэли-Винера. Тезисы межд.конф.по физическим, матем.и техн.наукам, Нахичеван, 2008, с.124.
5. Т.Р.Мурадов. О непрерывном аналоге теоремы Пэли-Винера. «Дифф. уравнения и смежные пробл.» Труды межд. науч. конф. Стерлитамак, 2008, т.II, с.60-63.
6. Т.Р.Мурадов. О базисности некоторых одинарных систем косинусов и синусов. Тез. конф. «Функ. прост. диф. операторы, общая топ. пробл. мат. образов.» посв. 85- летию Л.Д.Куд-рявцева, М., 2008, с.159-160.
7. T.R.Muradov. On continuous analogue of Paley-Wiener theorem. "Math. An., diff. equat. and their appl." Famaguste, North Cyprus 2008, p.41-42.
8. T.R.Muradov. On basicity of perturbed system of exponents in Lebesque spaces with variable summability index. Abstr. of the 3-rd Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries. Almaty, 2009, v.I, p.118.
9. T.R.Muradov. On basicity of perturbed system of exponents in Lebesque spaces with variable summability index. Trans. of NASA, 2009, v.XXIX, №4, p.107-112.
10. Т.Р.Мурадов. О базисности возмущенной системы экспонент с переменным показателем суммируемости. Тезисы межд. конф. по мат. и мех. посв. 50-летию ИММ НАНА, 2009, с.222.
11. Т.Р.Мурадов. О базисности возмущенной системы экспонент с переменным показателем суммируемости. Матер. межд. конф. по

астрономии, физ. и мат. посв. Межд. Году Астрон. Нахчиван, 2009, с.129.
12. Т.Р.Мурадов. Базисы из возмущенной системы экспонент в пространстве Лебега с переменным показателем суммируемости. ДАН Азерб. 2009, №6, т. LXV, с.15-19
13. Т.Р.Мурадов, Гараев Т.З.О мультипликаторах и $P$-аналоге теоремы «$\frac{1}{4}$-Кадеца». Естественные и технические науки. Математика. Москва 2010, №4, с.16-23.
14. T.R.Muradov. Space with variable summability index. Abst. of Intern. conf. Devoted to the 80-th anniver.of academician F.G.Magsudov, Baku 2010, p.241.
15. T.R.Muradov. Bases from ekponent in Lebesque. Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific conf. “Math. Analysis Differential Equations and their applications” September 15-20 2010, p.33-34
16. T.R.Muradov, Farahani S. On basisty of some perturbed system of exponents in $L_p$. Trans. of NASA, 2010, №4, v.XXX, p.129-134
17. Т.Р.Мурадов, Садыгова С.Р. О банаховом обобщении теоремы Като о базисности близких систем. Proceedings of IMM of NASA, 2010, v.XXXIII, p.137-140.
18. Т.Р.Мурадов. О базисных свойствах некоторой возмущенной системы экспонент в пространстве Лебега с переменным показателем суммируемости. Материалы конф., посв. 100-летнему юбилею акад. З.И.Халилова Баку 2011, с.256-260
19. T.R.Muradov. Basicity of systems discontinuous phase exponents in generalized Lebesque spaces. Int. conf. “Continuum mechanics and related problems of analysis” dedicated to the 70-th anniv. of the Georgian NAS and 120 birth of N.Muskhlishvili Tbilisi, 2011, p.122-123.
20. Т.Р.Мурадов. О базисности возмущенной системы экспонент в пространстве Лебега с переменным показателем суммируемости. Доклады РАН, 2012, т.443, №3, с.290-292.
21. T.R.Muradov. On Riemann boundary value problem in Hardy classes with variable summability exponent. Intern. Journal of Math. Analysis, 2012, v.6, №15. p.743-751.
22. Т.Р.Мурадов. Базисность возмущенной системы экспонент в обобщенных пространствах Лебега. Матер. межд. конф. «Теория функций и проблемы гармоничес-кого анализа», посв. 100-летнему юбилею акад. И.И.Ибрагимова. Баку, 2012, с.175.

23. T.R.Muradov, S.R.Sadigova On basicity of double systems in Banach spaces. Journal of Contemporary Applied Mathematics. 2012, v.2, №1. p.8-14.
24. T.R.Muradov. Basicity of a perturbed system of exponents in generalized Lebesgue spaces. Mathematica Aeterna, v.2, 2012, №5, p.459-472.
25. T.R.Muradov. Frame properties of a part of the system of exponents in Hardy weighted classes. American journal of Mathematical Analysis, 2013, v.1, №1, p.1-7
26. Т.Р.Мурадов. Фреймовые свойства части системы экспонент в весовых классах Харди. Тезисы IV межд. конф. «Функцион. прост. Дифф. операторы. Проблемы мат. образов.», посв. 90-летию со дня рожд.чл.-корр. РАН Л.Д.Кудрявцева. Москва, 25-29 марта 2013, с.97-98
27. Т.Р.Мурадов. Базисность возмущенной системы экспонент в обобщенных пространствах Лебега. Тезисы межд. конф. «Актуальные проблемы матем. и информ.» посв. 90 летию Г.Алиева, 2013, стр.179-180
28. T.R.Muradov, Mamedova Z.V.On basis properties of degenerate exponential system. RMİ-nın 55 illiyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı beyn. konfransın tezisləri, 2014, 15-16 may c.275
29. T.R.Muradov. On bases from perturbed system of exponents in Lebesgue spaces with variable summability exponent. Journal of Inequalities and Applications 2014,2014:495 pp.1-8
30. Т.Р.Мурадов, Салманов В.Ф.О базисности тригонометрических систем с линейной фазой в весовом пространстве Соболева. Доклады РАН, 2014, т.458, №5, с.523-525
31. T.R.Muradov. Topological properties of the space of coefficients genera-ted by the non-degenerate system in metric spaces. Proceedings of IMM of NASA, v.40, special issue, 2014, p.308-314
32. T.R.Muradov, V.F.Salmanov Basicity of the system of exponents with a linear phase in Sobolev weight space. Journal of Mathematics Hindawi Publishing Corporation, v.2014 (2014), Article ID 481425, p.1-4
33. T.R.Muradov. On basicity of the system of solutions of the Cauchy problem for the Sturm-Liouville equation in the generalized Lebesque spaces. International Journal of Mathematical Analysis, 2015, №30, 1489-1498 HIKARI Ltd, www.m-hikari.com

34. T.R.Muradov. On basicity of the system of solutions of the Cauchy problem for the Sturm-Liouville equation in the generalized Lebesque spaces. 7-th Intern. conf. of "Mathematical analysis. Differential equation and Their application" MADEA 7, 8-13 september 2015, p.117
35. Т.Р.Мурадов. Свойства базисности систем в банаховых пространствах и их применения. LAMBERT Academik Publishing 2015, 86 p.
36. T.R.Muradov. On completeness and minimality of double and unitary systems in generalized Lebesgue spaces. Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics,2015, v.3, №1, pp.82-90
37. T.R.Muradov. On basicity of double and unitary systems in generalized Lebesgue spaces. Mathematica Aeterna 2015, v.5, №4, pp.657-666
38. T.R.Muradov. Basicity of system of exponents with complex coefficients in generalized Lebesque spaces. General Mathem. Notes 2015, v.30, №1, İSSN2219-7184, pp.12-20
39. T.R.Muradov, Hashimov Ch.M.On bases from cosines in Lebesgue spaces with variable summability index. Journal of Inequalities and Applications, (2016), 2016:3, DOI.10.1 186/s 13660-015-0951-6 7pp.
40. T.R.Muradov, On Basicity of the Systems of Cosines and Sines in the Generalized Lebesgue Space. International conference on mathematical advances and its applications. May, 11-13, 2018, Istanbul, Turkey
41. T.R.Muradov, Bases from sines and cosines in the generalized Sobolev space $W^1_{p(\cdot)}(0,\pi)$. Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения-XXIX. Материалы Международной конференции, посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина. Москва, 2018, с. 257
42. T.R.Muradov, On bases from cosines in Lebesgue spaces with variable summability index. "Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference", Khazar University, Baku, Azerbaijan, 21-24 may, 2018

**ТОГРУЛ РАФАЭЛЬ ОГЛЫ МУРАДОВ**

# НЕКОТОРЫЕ СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ АППРОКСИМАЦИИ И БАЗИСЫ В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

## АННОТАЦИЯ

Диссертационная работа, посвящена вопросам базисов в обобщенных пространствах Лебега и Соболева.

В диссертации получены следующие основные результаты:

- рассматриваются пространства Харди $H^{+}_{p(\cdot)}$ и ${}_{m}H^{-}_{p(\cdot)}$ в качестве подпространств пространства $L_{p(\cdot)}$, изучается базисность определенных частей системы экспонент в этих подпространствах;
- доказано, что если двойная система экспонент $\left\{A(t)e^{\mathrm{int}}; B(t)e^{-i(n+1)t}\right\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$ с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$, то она изоморфна в нем классической системе экспонент $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$;
- впервые изучена базисность возмущенной системы экспонент в обобщенном пространстве Лебега $L_{p(\cdot)}$, а также базисность из возмущенных систем экспонент с единицей в весовом обобщенном пространстве Лебега, когда возмущение имеет определенную асимптотику;
- изучается задача Римана с кусочно-непрерывным коэффициентом в обобщенных классах Харди и, применяя эти результаты, устанавливается базисность системы экспонент с кусочно – непрерывной фазой в $L_{p(\cdot)}$;
- рассматриваются базисы из двойных систем с операторными коэффициентами в банаховых пространствах, устанавливаются связи между базисностью этих систем и разрешимостью соответствующих операторных уравнений;

- рассматривается гильбертово тензорное произведение гильбертовых пространств, вводится понятие $t$-разложения, порожденное билинейным отображением, определяемым гильбертовым тензорным произведением, доказывается теорема о $t$-разложении произвольного элемента гильбертова пространства по заданной системе после исключения конечного числа элементов;
- рассматриваются линейные метрические пространства, обладающие определенным свойством, вводится понятие невырожденной системы, доказывается, что такие системы имеют полное метрическое пространство коэффициентов с каноническим базисом; на языке коэффициентного оператора приведен критерий базисности;
- устанавливаются связи между базисными свойствами двойных систем и соответствующими одинарными системами в пространствах $L_{p(\cdot)}$;
- впервые получен непрерывный аналог классической теоремы Пэли-Винера;
- рассматривается задача Коши со спектральным параметром для оператора Штурма-Лиувилля. Доказано, что последовательность значений для спектрального параметра можно выбирать таким образом, чтобы соответствующая система решений образовывала изоморфный, к классическим тригонометрическим системам, базис в пространстве Лебега с переменным показателем суммируемости.

**TOGRUL RAFAEL oglu MURADOV**

# SOME RELATED QUESTIONS OF APPROXIMATION AND BASISS IN GENERALIZED LEBEKE SPACES

## SUMMARY


The dissertation is devoted to the study of basis problems in Lebesgue and Sobolev spaces.

The following main results are obtained in dissertation:

$H^{+}_{p(\cdot)}$ and ${}_mH^{-}_{p(\cdot)}$ Hardy spaces are considered and the basis property of definite parts of the system of exponentials in these subspaces are studied;

It is proved that if a double system of exponents $\left\{A(t)e^{\mathrm{int}};B(t)e^{-i(n+1)t}\right\}_{n=0}^{\infty}$ forms a basis in a space $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$ with a variable exponent of summability $p(\cdot)$, then it is isomorphic in it to the classical system of exponentials $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$;

- the basis property of the perturbed system of exponentials in the generalized Lebesgue space $L_{p(\cdot)}$ is studied, as well as the basis property of the perturbed systems of exponentials with unit in the weighted generalized Lebesgue space;

-the Riemann problem with piecewise-continuous coefficient in generalized Hardy classes is studied and applying these results establishes the basis property of the system of exponentis with piecewise-continuous phase in $L_{p(\cdot)}$;

Bases are considered for binary systems with operator coefficients in Banach spaces, relations are established between the bases of these systems and the solvability of the corresponding operator equations, the necessary condition for the basis property is obtained;

the Hilbert tensor product of Hilbert spaces is considered, introduce the concept of $t$-decomposition generated by a bilinear mapping defined by a Hilbert tensor product, prove a theorem on the $t$-decomposition of an arbitrary element of a Hilbert space with respect to a given system after eliminating a finite number of elements;

linear metric spaces with a certain property is considered, the notion of a non-degenerate system is introduced, prove that such systems have a complete metric space of coefficients with a canonical basis; In the term of the coefficient operator, the basis property criterion is given;

- Relations are established between the basis properties of binary systems and the corresponding single systems in spaces $L_{p(\cdot)}$;

-One continuous analogue of the classical Paley-Wiener theorem is obtained;

-the Cauchy problem with the spectral parameter for the Sturm-Liouville operator is considered. It is proved that a sequence of values for a spectral parameter can be chosen in such a way that the corresponding system of solutions forms a basis isomorphic to classical trigonometric systems in the Lebesgue space with variable exponent of summability.