НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ХАНЛАР РАШИД оглы МАМЕДОВ

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

1202.01-Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора наук по математике

Баку – 2014

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

XANLAR RƏŞID OĞLU MƏMMƏDOV

DİFERENSİAL OPERATORLARIN BƏRPASI VƏ BƏZİ SPEKTRAL XASSƏLƏRİ

1202.01-Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2014

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun** «Funksional analiz» şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi məsləhətçi:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Hidayət M.Hüseynov**

Rəsmi opponentlər:

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, prof. **Araz R.Əliyev**

(Bakı Dövlət Universiteti);

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, dos. **Nigar M. Aslanova**

(Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti);

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Rauf X.Əmirov**

(Türkiyə, Cumhuriyyət Universiteti).

Aparıcı təşkilat:

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

«Riyazi analiz» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 19 sentyabr 2014-cü il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 27 iyun 2014-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111

Dissertasiya Şurasının

elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена в отделе «Функциональный анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, проф. **Гидаят М.Гусейнов**

Официальные оппоненты:

доктор наук по математике, проф. **Араз Р.Алиев**

(Бакинский Государственный Университет);

доктор наук по математике, доц. **Нигяр М.Асланова**

(Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет);

доктор физико-математических наук, проф. **Рауф Х. Амиров**

(Турция, Респупликанский Университет)

Ведущая организация:

Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

кафедра «Математический анализ».

Защита диссертации состоится 19 сентября 2014 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 27 июня 2014 года.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета

Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящей диссертации рассматриваются задачи спектрального анализа двух видов: обратные задачи теории рассеяния для операторов Штурма-Лиувилля и Дирака со спектральным параметром в граничном условии, а также вопросы сходимости разложений в ряды по корневым функциям некоторых дифференциальных операторов.

К обратным задачам спектрального анализа приводят многие задачи физики и механики, в частности, некоторые вопросы квантовой механики, гидромеханики, нелинейной оптики и др. Многочисленные достижения в этой области привлекли к себе внимание многих математиков, физиков и инженеров.

В зависимости от типа оператора, структуры его спектра и характера исходных спектральных данных обратные задачи спектрального анализа различаются своими постановками. Наибольший интерес представляют обратные задачи, которые допускают единственное решение. В связи с этим особое значение приобретают теоремы единственности.

Одним из важных направлений в теории обратных задач является обратная задача теории рассеяния, которая связана задачами квантовой механики. Задача о восстановлении потенциала по экспериментальным данным, точнее, задача о восстановлении потенциала по асимптотическому поведению всех волновых функций называется обратной задачей квантовой теории рассеяния.

Используя работу И.М.Гельфанда и Б.М.Левитана в случае системы уравнений типа Штурма-Лиувилля Р.Ньютон и Р.Йост дали метод восстановления потенциала, сведя задачу к построению спектральной меры по данным рассеяния. В.А.Марченко разработал другой метод, он получил интегральное уравнение с ядром, строящемся по данным рассеяния, обеспечивающие разрешимость обратной задачи. После этого полное решение этой задачи была обобщена на векторный случай в книге З.С.Аграновича и В.А.Марченко. М.Г.Крейн опубликовал серию работ, в которых дается эффективный метод построения оператора Штурма-Лиувилля. В несамосопряженном случае для оператора Штурма-Лиувилля обратная задача рассеяния на полуоси исследована в работе В.Э.Лянце.

Обратной задачей теории рассеяния на всей оси впервые занимались И.Кэй и Г.Мозес. Полное решение этой задачи для одного класса потенциалов впервые было дано Л.Д.Фаддеевым. Уточнение поведения коэффициента отражения и прохождения на крае непрерывного спектра для одномерного уравнения Шредингера получено И.М.Гусейновым. Решение обратной задачи по спектральной функции для системы уравнений типа Штурма-Лиувилля дано в работах Ф.С.Рофе-Бекетова.

Обратная задача теории рассеяния на полуоси для системы Дирака второго порядка также рассмотрена в работе М.Г.Гасымова и Б.М.Левитана, а для системы Дирака $2n$ порядка в работе М.Г.Гасымова. В работах И.С.Фролова, М.Абловица, Д.Каупа, А.Ньюелла и Х.Сигура, Ф.Г. Максудова и С.Г.Велиева, М.С.Замонова и А.Б.Хасанова, П.Дейфта и Х.Зона, Б.Герберта и других авторов в различных постановках исследованы обратные задачи рассеяния для системы уравнений Дирака.

В работах М.Жолана и К.Жана, М.Г.Гасымова, Ф.Г.Максудова и Г.Ш.Гусейнова, В.Н. Пивоварчика, В.А.Юрко, И.М.Набиева, Э. Г.Оруджева и других авторов исследованы некоторые варианты обратных спектральных задач для операторных пучков.

Интерес к обратным задачам значительно возрос из-за связей обратных задач с некоторыми нелинейными уравнениями математической физики. В 1967 г. К.Гарднером, Дж.Грином, М.К. Крускалом и Р.Миуры были открыты глубокие связи между уравнением Кортевега-де Фриса и спектральными свойствами операторов Штурма-Лиувилля, порождаемых решением этого уравнения. Основная идея их работы была развита в работе П.Лакса, в которой указан метод конструирования интегрируемых уравнений. Кроме уравнения Кортевега-де Фриса были найдены другие уравнения, имеющие физические смыслы и интегрируемые аналогичными методами В.Е.Захарова и А.Б. Шабата. Отметим, что решение нелинейных эволюционных уравнений посредством метода обратной задачи рассеяния можно найти лишь в том случае, когда соответствующая задача рассеяния может быть эффективно решена аналитечески.

Результаты, относящиеся к обратным задачам спектрального анализа отражены в монографиях З.С.Аграновича и В.А.Марченко, Б.М.Левитана, В.А.Марченко, М. А.Наймарка, К. Шадана и П.Сабатье, В.Е.Захарова, С.В.Манакова, С.П.Новикова и Л.П.Питаевского, Б.Н.Захарьева и А.А.Сузько, Б.М.Левитана и И.С.Саргсяна, М.Абловица и Х.Сигура, Ф.Колоджеро и А.Дегаспериса, М.Тоды, Л.Д.Фаддеева, Л.А.Тахтаджяна и Л.Д.Фаддеева, Р.Додда, Дж.Эйлбека, Дж.Гиббона и Х. Морриса, В.А.Юрко и др. Тем не менее, вопросы об обратной задаче рассеяния для многих операторов пока недостаточно исследованы.

Восстановление потенциала по нулям собственных функций рассмотрены в работах П. Брауна и Б.Слимона, Л.А.Зорнитской и В.С.Серова, Дж.Р.Мак-Лаулина, О.Х.Хальда и Дж.Р.Мак-Лаулина и других авторов. Обратные задачи спектрального анализа в различных постановках для разностного уравнения второго порядка и систем разностных уравнений первого порядка исследованы в работах Г.Ш.Гусейнова, Е.М.Никишина, А.Б.Хасанова, И.М.Гусейнова и Г.А.Азимовой, Х.Р.Мамедова, Аг.Х.Ханмамедова и других авторов.

Некоторые вопросы теории колебаний в математической физике, а также задачи геофизики приводят к обратным задачам спектрального анализа для дифференциальных операторов со спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях. Поэтому естественно возникает необходимость изучения обратных задач со спектральным параметром в граничных условиях.

А.В.Штраус, Е.А.Почейкина-Федотова исследовали обратные задачи на полуоси по спектральной функции для дифференциального уравнения второго порядка с граничным условием, зависящим от спектрального параметра. В.А.Юрко рассмотрел обратную задачу на полуоси для пучка дифференциальных операторов второго порядка со спектральным параметром в граничном условие. Доказана, что заданием функции Вейля однозначно определяются коэффициенты пучка, установлена связь между обратной задачей для волнового уравнения и обратной спектральной задачей для рассматриваемого пучка.

В работах Ч.Фультона, Д.С.Кохена рассматривается на полуоси спектральная задача Штурма-Лиувилля с параметром в граничном условии и даётся применение к задачам диффузии. А.С. Алексеев и А.Г.Меграбов исследовали задачи об определении свойств неоднородного упругого слоя со свободной (закрепленной) границей. Решения этих задач приводят к решению обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля, содержащий спектральный параметр в граничных условиях. Поэтому изучение обратных задач рассеяния для дифференциальных уравнений со спектральным параметром в граничных условиях имеет как теоретические, так и прикладные значения.

Исследованию обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных посвящены монографии М.М.Лаврентьева, В.Г.Романова и С.П.Шишатского, М.М.Лаврентьева, К.Г.Резницкой и В.Г.Яхно, Ю.Е.Аниконова, В.Г.Романова, А.Л.Бухгейма, Л.П.Нижника, Н.Ш.Искендерова и других авторов.

В связи с некоторыми математическими проблемами электроразведки в 1949 г. А.Н.Тихоновым была доказана теорема единственности восстановления дифференциального уравнения с кусочно-аналитическим коэффициентом. Задачи с разрывными коэффициентами часто возникают в теории геофизических методов электроразведки, основанных на использовании электромагнитных полей, в различных прикладных задачах. Разрешимость обратных задач в различных постановках для уравнений с разрывными коэффициентами исследованы в работах М.Г.Крейна, Ю.М.Березанского, Ф.Аткинсона. В работах М.Г.Гасымова и его учеников решены обратные задачи теории рассеяния для дифференциального уравнения второго порядка и для системы уравнений Штурма-Лиувилля в случае, когда коэффициенты уравнений имеют разрывы. Следует отметить, что при решении этих задач важную роль сыграли операторы преобразования. Однако, далеко не для всех задач, связанных с разрывными дифференциальными уравнениями, операторы преобразования существуют. Поэтому в работе М.Г.Гасымова и в других работах решение обратной задачи рассеяния для уравнения второго порядка с разрывным коэффициентом сводится к решению двух обратных задач на промежутках $[0,a]$ и $[a,\infty)$ (здесь a-точка разрыва коэффициента), так как на соответствующих промежутках операторы преобразования хорошо известны. И.М.Гусейновым и Р.Т.Пашаевым получено интегральное представление для решения Йоста для одномерного уравнения Шредингера с разрывным коэффициентом. Несмотря на нетреугольность этого представления, свойства ядра показывают, что его можно использовать для решения обратной задачи. Применяя полученное интегральное представление для решения разрывного уравнения, в работах И.М.Гусейнова и Р.Т.Пашаева, Х.Р.Мамедова решены прямые и обратные задачи рассеяния для уравнения второго порядка при различных граничных условиях. Для разрывных операторов Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии задача рассеяния на полуоси исследовались в работах Х.Р.Мамедова. Отметим, что в данном случае вхождение спектрального параметра в граничное условие и наличие разрыва у коэффициента уравнения влияет на структуры представления решения Йоста и решению обратной задачи. В частности, полученное интегральное уравнения для ядра отличается от классического уравнения Марченко.

Обратная задача рассеяния для системы разрывных дифференциальных уравнений Дирака со спектральным параметром в граничном условии изучалась в работах Х.Р.Мамедова. В этих работах использовано интегральное представление решения Йоста систем разрывных уравнений типа Дирака, полученное И.М.Гусейновым и показано, что коэффициенты системы уравнений определяются однозначно по функции рассеяния. Изучены характеристические свойства функции рассеяния разрывного оператора Дирака.

Обратные задачи для краевых задач с разрывным коэффициентом и с разрывами во внутренней точке в различных формулировках изучены в работах Т.Актосуна, М.Клауса, К.Мее, Р.Карлсона, О.Х. Хальда, В.А.Юрко, И.М.Гусейнова, Р.Т.Пашаева, В.Н.Пивоварчика, Р.Х.Амирова, А.А.Дарвиша и других авторов.

При исследовании прямых и обратных задач спектрального анализа важное значение имеет разложения по собственным функциям. В несамосопряженном случае весьма актуальным стал вопрос о базисности системы корневых функций в пространстве L_2. В.П.Михайловым, Г.М.Кесельманом, Н.Данфордом и Дж. Т. Шварцом было доказано, что если обыкновенный дифференциальный оператор n-го порядка порождается регулярными (в смысле Биркгофа), причем в случае четного n усиленно регулярными условиями, то система корневых функций этого оператора образует базис Рисса в пространстве L_2. В этих работах показано, что существуют регулярные дифференциальные операторы, все собственные значения которых, за исключением конечного числа, простые, а система корневых функций вообще не является базисом в L_2. Другой подход к исследованию базисности систем корневых функций несамосопряженных дифференциальных операторов разработан В.А.Ильиным. Исследования базисности в L_p $(1 < p < \infty)$, систем корневых функций дифференциальных операторов проводились также в работах В.Д.Будаева, Н.Б.Керимова, В.М.Курбанова и других авторов.

Остался открытым вопрос базисности корневых функций дифференциального оператора, порожденного регулярными, но не усиленно регулярными граничными условиями. Н.И.Ионкин рассмотрел задачу, которая является несамосопряженным, граничные условия регулярны, но не усиленны регулярны. Он показал, что система функций, образованная специальным образом из корневых функций исходной задачи, образует базис в пространстве L_2. А.А.Шкаликовым было показано, что корневые функции обыкновенного дифференциального оператора при не усиленно регулярных граничных условиях образует базис Рисса со скобками в пространстве L_2.

В работах Н.Б.Керимова, Х.Р.Мамедова исследованы несамосопряженные краевые задачи, порожденные дифференциальным уравнением второго порядка с периодическими и с антипериодическими граничными условиями, которые являются не усиленными регулярными. Показано, что для этих задач свойства базисности в некоторых случаях определяются значениями потенциала в концевых точках отрезка. Далее, этот вопрос в разных постановках был изучен в работах А.С.Макина, А.А.Шкаликова и О.А. Велиева, П.Е.Джакова и Б.С.Митягина. Свойства базисности в L_p $(1<p<\infty)$ корневых функций периодических и антипериодических краевых задач изучены в работах В.М.Курбанова, Х.Р. Мамедова. Отметим, что в работе В.М.Курбанова свойства базисности в L_p корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов исследованы и в других постановках.

Краевые задачи со спектральным параметром в граничных условиях связано с конкретными физическими задачами. В книге А.Н.Тихонова и А.А.Самарского рассмотрена задача о колебаниях закрепленной струны в нескольких точках $x=x_i$ $\left(i=1,2,...,N\right)$, в которых помещены сосредоточенные массы. В случае, когда масса сосредоточена только на одном из концов выписаны асимптотические формулы собственных значений. В работе Ч.Т.Фултона рассматривалась задача о теплопроводности, получена формула разложения. О.О.Кравицким изучена задача Редже, которая возникает при изучении некоторых вопросов в теории рассеяния.

В отличие от спектральных задач, не содержащих спектральный параметр в граничных условиях, задачи со спектральным параметром в граничных условиях не могут быть линеаризованы в пространстве L_2, поэтому важным является выбор функциональных пространств. В работах Ж. Уолтера, А.А.Шнайдера, Ч.Т.Фултона, Б.Хинтона, А.К.Жордана, М.Клауса, Е.М.Руссаковского и др. изучены вопросы о распределении собственных значений и собственных функций в случае самосопряженности линеаризующего оператора в соответствующих гильбертовых пространствах. А.А.Шкаликов построил общую теорию краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений *n*-го порядка с параметром в граничных условиях и показал метод линеаризации в более подходящих пространствах. В работах А.П.Махмудова, Н.Б.Керимова, П.А.Байдинга, П.Дж.Брауна и К.Седдиги, Е.И.Моисеева, Н.Ю.Капустина, Х.Р.Мамедова и других авторов изучены осцилляционные и базисные свойства спектральных задач Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях. Этим вопросам, в более общей форме, посвящены работы

Б.Т.Билалова и Т.Р.Мурадова, Т.Б.Касумова и Т.З.Гараева, в которых найдены условия, обеспечивающие базисность систем корневых функций.

В работах А.Х.Амирова, О.Ш.Мухтарова, Н.Алтынышыка, М.Кадакала, Х.Р.Мамедова, А.Янга, Ж. Син, К.Хао и других авторов исследованы краевые задачи для уравнения Штурма-Лиувилля с разрывными коэффициентами в случае, когда спектральный параметр присутствует в граничных условиях и в условиях разрыва внутри интервала, получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций.

Вопросы об обратной задаче рассеяния для многих операторов пока недостаточно развиты, поэтому, актуальной задачей является изучение обратных задач теории рассеяния для операторов Штурма-Лиувилля и Дирака со спектральным параметром в граничном условии, а также вопросы сходимости разложений в ряды по корневым функциям некоторых дифференциальных операторов.

Цель работы. Целью диссертации является:

1. Исследование прямой и обратной задачи рассеяния для уравнения Штурма-Лиувилля с разрывным коэффициентом и со спектральным параметром в граничном условие. Доказательство единственности восстановления потенциала по данным рассеяния.
2. Исследование прямой и обратной задачи рассеяния для системы разрывных дифференциальных уравнений Дирака со спектрайльным параметром в граничном условие. Доказательство единственности восстановление коэффициента системы уравнения по данным рассеяния.
3. Изучение вопроса базисности в пространствах L_p $(1 < p < \infty)$ корневых функций дифференциального оператора, порожденного регулярными, но не усиленно регулярными граничными условиями.
4. Исследование распределение собственных значений на комплексной плоскости, изучение осцилляционных и базисных свойств корневых функций (разрывных) спектральнных задач Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях.

Научная новизна. Рассматриваемые в диссертации задачи и доказанные результаты новые. Получены следующие основные

результаты:
1. Изучены прямые и обратные задачи рассеяния для разрывных дифференциальных уравнений Штурма-Лиувилля и систем Дирака со спектральным параметром в граничном условие, при этом
а) найдено явное выражение резольвенты и выведена формула разложения по собственным функциям, изучен спектр;
б) введены данные рассеяния, изучены характеристические свойства данных рассеяния;
в) выведено основное уравнение типа Марченко;
д) изучен вопрос разрешимости основного уравнения;
е) доказана единственность решения обратной задачи и указан алгоритм для построения потенциала по данным рассеяния.
2. Найдены условия на коэффициент несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка с (не усиленно регулярными) периодическими и антипериодическими граничными условиями, при которых корневые функции оператора образуют базис в пространсве L_p $(1 < p < \infty)$, при этом получены уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций;
3. Изучены расположения собственных значений на комплексной плоскости, осцилляционные свойства собственных функций спектральных задач Штурма–Лиувилля с нелинейным спектральным параметром в граничных условиях, в этом случае получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций; исследованы вопросы базисности собственных функций краевых задач для уравнения Штурма-Лиувилля с разрывными коэффициентами. в случае, когда спектральный параметр присутствует в граничных условиях и в условиях разрыва внутри интервала.

Общая методика исследования. В работе применяются методы теории функций и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и математической физики, теории линейных операторов в гильбертовом пространстве, теории функций комплексной переменной.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы в различных вопросах спектральной теории дифференциальных операторов, при изучении различных задач прикладной математики и механики, в теории колебаний, в теории квантовой механики, гидромеханики, нелинейной оптики, в теории упругости. Обратные спектральные задачи также играют существенную роль при интегрировании нелинейных эволюционных уравнений математической физики.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на совместном семинаре академика Дж.Э.Аллахвердиева и академика М.Г.Гасымова “Функциональный анализ и его приложения”, на общеинститутском семинаре ИММ НАН Азерб., на объединенном семинаре отделов “Функциональный анализ” (рук. – проф. И.М.Гусейнов и проф. Н.Ш.Искендеров), "Дифференциальные уравнения" (рук. – чл.- корр. НАН Азерб., проф. Б.А.Искендеров и проф. А.Б.Алиев), "Негармонический анализ" (рук. – проф. Б.Т.Билалов), на конференции по математике и механике, посвященной 80-летию К.Т.Ахмедова (Баку, 30-31 октября, 1997 г.), на международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященной столетию И.Г.Петровского-XX совместные заседания семинара Петровского и Московского математического общества (Москва,-Россия, 22-27 мая 2001 г.), на международной конференции “ILL-Posed и обратные задачи”, посвященной 70-летнему юбилею проф. М.М.Лаврентьева (Новосибирск-Россия, 5-9 августа 2002 г.), на международной конференции “Анализ и их приложения” (Мерсин-Турция, 7-11 сентября 2004 г.), на 7-ой международной конференции “Геометрия, Интегрируемость и Квантование” (Болгарская Академия Наук, Варна-Болгария, 9-14 июня 2005 г.), на международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию со дня рождения чл. корр. НАН Азерб., проф. И.Т.Мамедова (Баку, 2005 г.), на 12-й международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летнему юбилею чл.- корр. НАН Азерб., проф. Б.А.Искендерова (Баку, 17-19 мая, 2006 г.), на международной конференции “Дифференциальные уравнения”, посвященной 100-летию со дня рождения Я.Б.Лопатинского (Львов-Украина, 12-17 сентября 2006 г.), на международной конференции “Математический анализ, дифференциальные уравнения и их приложения” (Ужгород-Украина, 18-23 сентября 2006 г.), на международной конференции “Математический анализ, дифференциальные уравнения и их приложения” (Фамагуста-Северный Кипр, 12-15 сентября 2008 г.), на 20-й международный конгресе математического общества Жангжеона (Бурса-Турция), 21-23 августа 2008 г.), на международной конференции “Современные проблемы вычислительной математики и математической физики”, посвященной 90-летию со дня рождения академика А.А.Самарского (Москва-Россия, 16-18 июня 2009 г.), на международной конференции “Математический анализ, дифференциальные уравнения и их приложения” (Солнечный Берег-Болгария, 15-20 сентября 2010 г.), на 8-й международный конгресе ISAAC (Москва-Россия, 22-27 августа 2011 г.) и в других научных конференциях.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 40 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 258 страницах, состоит из введения, четырех глав, включающих 37 параграфов и списка литературы, содержащего 244 наименований**.**

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

Первая глава диссертации посвящена исследованию обратной задачи по данным рассеяния для уравнения Штурма-Лиувилля с разрывными коэффициентами и со спектральным параметром в граничном условии. Она состоит из 8 параграфов.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$-u'' + q(x)u = \lambda^2 \rho(x)u, \quad 0 < x < \infty, \tag{1}$$

с граничным условием

$$-(\alpha_1 y(0) - \alpha_2 y'(0)) = \lambda^2 (\beta_1 y(0) - \beta_2 y'(0), \tag{2}$$

где λ-спектральный параметр, $q(x)$-вещественная функция удовлетворяющая условию

$$\int_0^{\infty}(1+x)|q(x)|dx<\infty \quad , \qquad (3)$$

а $\rho(x)$- положительная кусочно-постоянная функция

$$\rho(x)=\begin{cases}\alpha^2, & 0\le x<a,\\ 1, & x\ge a,\end{cases}$$

в которой $0<\alpha\ne 1$, при этом числа α_i,β_i $(i=1,2)$ вещественны и удовлетворяют условию

$$\gamma=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1>0\,. \qquad (4)$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$f_0(x,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^+(x)}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^-(x)},$$

где $\mu^{\pm}(x)=\pm x\sqrt{\rho(x)}+\alpha\left(1\mp\sqrt{\rho(x)}\right)$ является решением Йоста уравнения (1), когда $q(x)\equiv 0$. Известно, что при условии (3) уравнение (1) имеет единственное решение $f(x,\lambda)$, допускающее представление

$$f(x,\lambda)=f_0(x,\lambda)+\int_{\mu^+(x)}^{\infty}K(x,t)e^{i\lambda t}dt, \qquad (5)$$

причем $K(x,.)\in L_1(0,\infty)$ и имеется связь между потенциалом $q(x)$ и ядром $K(x,t)$:

$$\frac{d}{dx}K\left(x,\mu^+(x)\right)=-\frac{1}{4\sqrt{\rho(x)}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)q(x)\,. \qquad (6)$$

Изучена прямая задача рассеяния для краевой задачи (1), (2).

Обозначим через $\omega(x,\lambda)$ решение уравнения (1) при начальных данных $\omega(0,\lambda)=\alpha_2+\beta_2\lambda^2, \quad \omega'(0,\lambda)=\alpha_1+\beta_1\lambda^2.$

Имеет место следующая

Лемма 1.1. *При вещественных значениях* $\lambda \neq 0$ *справедливо тождество*

$$\frac{2i\lambda\omega(x,\lambda)}{\left(\alpha_2+\beta_2\lambda^2\right)f'(0,\lambda)-\left(\alpha_1+\beta_1\lambda^2\right)f(0,\lambda)}=\overline{f(x,\lambda)}-S(\lambda)f(x,\lambda),$$

где

$$S(\lambda)=\frac{\left(\alpha_2+\beta_2\lambda^2\right)\overline{f'(0,\lambda)}-\left(\alpha_1+\beta_1\lambda^2\right)\overline{f(0,\lambda)}}{\left(\alpha_2+\beta_2\lambda^2\right)f'(0,\lambda)-\left(\alpha_1+\beta_1\lambda^2\right)f(0,\lambda)},$$

причем $S(\lambda)=\overline{S(-\lambda)}=\left[S(-\lambda)\right]^{-1}$.

Функция $S(\lambda)$ называется функцией рассеяния краевой задачи (1), (2). Левая часть тождества является мероморфной в верхней полуплоскости $Im\lambda>0$ функцией с полюсами, лежащих в нулях функции $E(\lambda)=\left(\alpha_2+\lambda\beta_2\right)f'(0,\lambda)-\left(\alpha_1+\lambda\beta_1\right)f(0,\lambda)$. Показано, что функция $E(\lambda)$ может иметь в полуплоскости $Im\lambda>0$ только конечное число нулей $i\lambda_k$ $\left(k=1,2,...,n\right)$. Все эти нули простые и лежат на мнимой оси. Обозначим через

$$m_k^{-2}\equiv\int_0^\infty\rho(x)\left|f\left(x,i\lambda_k\right)\right|^2dx+\frac{1}{\gamma}\left|\beta_2f'\left(0,\,i\lambda_k\right)-\beta_1f\left(0,\,i\lambda_k\right)\right|^2,\quad\left(k=1,2,...,n\right)$$

нормировочные числа краевой задачи (1), (2).

Параграф 1.3 посвящен разложению по собственным функциям краевой задачи (1), (2). В первом пункте этого параграфа даётся операторная трактовка краевой задачи (1), (2) в гильбертовом пространстве $H_\rho=L_2\left(0,\infty\right)\times\mathrm{C}$ со скалярным произведением

$$\left(F,G\right)_{H_\rho}=\int_0^\infty F_1(x)\overline{G}_1(x)\rho\left(x\right)dx+\frac{1}{\gamma}F_2\overline{G}_2,$$

где γ определяется по формуле (4),

$$F=\begin{pmatrix}F_1(x)\\F_2\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}G_1(x)\\G_2\end{pmatrix}\in H_\rho.$$

Построен оператор L с областью определения $D(L) \subset H_\rho$ такой, что краевая задача (1), (2) эквивалентна операторному уравнению $LF = \lambda^2 F$ для $F \in D(L)$. Во втором пункте найдена явное выржение резолвенты $\left(L - \lambda^2 I\right)^{-1}$ (здесь через I обозначем единичный оператор).

Предположим, что λ^2 не является точкой спектра оператора L. Тогда резольвент оператор $R_{\lambda^2}(L) = (L - \lambda^2 I)^{-1}$ существует.

Теорема 1.2. *Все числа* λ^2 $(\operatorname{Im}\lambda > 0$ *и* $E(\lambda) \neq 0)$ *принадлежат резольвентному множество оператора* L *и резольвент оператор имеет вид*

$$R_{\lambda^2}(L)F = \begin{pmatrix} (\tilde{G}_{x,\lambda}, \bar{F})_{H\rho} \\ R_0^1[(\tilde{G}_{x,\lambda}, \bar{F})] \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{G}_{x,\lambda} \equiv \begin{pmatrix} G(x,\cdot,\lambda) \\ R_0^1[\tilde{G}(x,\cdot,\lambda)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(x,\cdot,\lambda) \\ \dfrac{\gamma}{E(\lambda)} f(x,\lambda) \end{pmatrix},$$

$$G(x,t,\lambda) = -\frac{1}{E(\lambda)} \begin{cases} \omega(x,\lambda) f(t,\lambda), & x \le t, \\ f(x,\lambda)\omega(t,\lambda), & t \le x. \end{cases}$$

В конце этого параграфа получена следующая формула разложения

$$F = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \left(F, U_j(x)\right)_{H_\rho} U_j(x) + \int_0^\infty T(F,\lambda) U(x,\lambda)\, d\lambda,$$

где

$$U_j(x) = m_j \begin{pmatrix} f(x, i\lambda_j) \\ \beta_2 f'(0, i\lambda_j) - \beta_1 f(0, i\lambda_j) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$U(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{pmatrix}\overline{f(x,\lambda)}-S(\lambda)f(x,\lambda)\\ -\frac{2i\lambda}{E(\lambda)}\gamma\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{pmatrix}\frac{2i\lambda}{E(\lambda)}\omega(x,\lambda)\\ -\frac{2i\lambda}{E(\lambda)}\gamma\end{pmatrix}.$$

Из формулы для обычных и обобщенных собственных функций оператора L следует, что при $x\to\infty$ их асимптотики определяют величины $\{S(\lambda)\ (-\infty<\lambda<\infty);\lambda_k;m_k\}$ которые являются данными рассеяния краевой задачи (1), (2). Набор величин $\{S(\lambda)(-\infty<\lambda<\infty);\lambda_k;m_k\}$ называется данными рассеяния краевой задачи (1), (2). Обратная задача рассеяния для краевой задачи (1), (2) состоит в восстановлении коэффициента $q(x)$ по данным рассеяния и в нахождении эффективного алгоритма для построения потенциала.

В параграфе 1.4 доказана следующая теорема

Теорема 1.3. *При каждом* $x\geq 0$ *ядро* $K(x,y)$, *входящее в представление (5) удовлетворяет уравнению*

$$F(x,y)+\int_{\mu^+(x)}^{\infty}K(x,t)F_0(t+y)dt+K(x,y)+\frac{1-\sqrt{\rho(x)}}{1+\sqrt{\rho(x)}}K(x,2a-y)=0, \quad (7)$$

$$y>\mu^+(x),$$

где

$$F_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]e^{i\lambda x}d\lambda+\sum_{k=1}^{n}m_k^2e^{-\lambda_k x},$$

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)F_0\left(\mu^+(x)+y\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)F_0\left(\mu^-(x)+y\right),$$

$$S_0(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\overline{f_0'(0,\lambda)}}{f_0'(0,\lambda)}=e^{-2i\lambda a}\dfrac{1-\tau e^{-2i\lambda a\alpha}}{e^{-2i\lambda a\alpha}-\tau}, & \text{если} \quad \beta_2\neq 0,\\ \dfrac{\overline{f_0(0,\lambda)}}{f_0(0,\lambda)}=e^{-2i\lambda a\alpha}\dfrac{1+\tau e^{-2i\lambda a\alpha}}{e^{-2i\lambda a\alpha}+\tau}, & \text{если} \quad \beta_2=0.\end{cases}$$

Уравнение (7) называется основным уравнением обратной задачи теории рассеяния для краевой задачи (1), (2). Основное уравнение (7) дает возможность решить обратную задачу. Действительно, чтобы составить основное уравнение (7), достаточно знать функцию $F_0(x)$ ($F(x,y)$ построится по $F_0(x)$). В свою очередь, чтобы найти функцию $F_0(x)$, достаточно знать данные рассеяния. По данным рассеяния можно написать основное уравнение (7). Если основное уравнение (7) имеет единственное решение $K(x,y)$, то найдем ядро специального решения, а значит, можно найти потенциал $q(x)$ из формулы (6).

В параграфах 1.5 и 1.6 изучены некоторые свойства данных рассеяния: доказана непрерывность функции рассеяния $S(\lambda)$ на всей оси, установлено связь между изменением аргумента функции рассеяния $S(\lambda)$ с числом отрицательных собственных значений краевой задачи (1), (2). В параграфе 1.7 изучен вопрос разрешимости основного уравнения. Доказана следующая теорема.

Теорема 1.6. *Основное уравнение (7) имеет единственное решение* $K(x,\cdot)\in L_1(\mu^+(x),\infty)$ *для всех* $x\geq 0$.

Используя теорему 1.6, доказана

Теорема 1.7. *По данным рассеяния краевой задачи (1), (2) потенциал* $q(x)$ *определяется однозначно.*

Используя основное уравнение (7), доказана непрерывность функции $S(\lambda)$ на вещественной оси $(-\infty,+\infty)$.

Теорема 1.4. *Функция* $S(\lambda)$ *непрерывна при всех вещественных* λ *и*

$$S(0)=\begin{cases} 1, & если \quad E(0)\neq 0, \\ -1, & если \quad E(0)=0. \end{cases}$$

Далее, получена формула Левинсона.

Теорема 1.5. *Имеет место*

$$\frac{\ln S(+0)-\ln S(+\infty)}{2\pi i}+C(\beta_2)-\frac{1-S(0)}{4}=n\ ,$$

где

$$C(\beta_2)=\begin{cases} \dfrac{3}{2} & если \quad \beta_2\neq 0, \\ 1 & если \quad \beta_2=0. \end{cases}$$

Параграф 1.8 посвящен обратной задаче рассеяния для уравнения (1) с граничным условием $y'(0)-hy(0)=0$. Выведено основное уравнение, изучены свойства данных рассеяния и доказано, что потенциал однозначно восстанавливается по данным рассеяния. Построен резолвентный оператор, получена формула разложения и равенство Парсеваля, изучен спектр. Доказана

Теорема 1.10. *При условии (3) краевая задача имеет лишь конечное число простых отрицательных собственных значений и непрерывный спектр, заполняющий положительную полуось.*

Установлена связь между изменением аргумента функции рассеяния с числом отрицательных собственных.

Вторая глава посвящена исследованию прямой и обратной задач теории рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля с нелинейным спектральным параметром в граничном условии. Отметим, что при решении обратной задачи рассеяния коэффициенты квадратичного полинома влияют определению данных рассеяния. Приводятся условия, налагаемые на коэффициенты в граничном условии и определены данные рассеяния, выведено основное уравнение, изучены свойства данных рассеяния и доказана единственность решения обратной задачи. Рассматриваются частные случаи и в каждом случае исследована задача рассеяния.

Параграфы 2.7-2.10 посвящены исследованию обратной задачи по данным рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля вида

$$-u'' + q(x)u = \lambda^2 u,\ 0 < x < \infty, \quad (8)$$

$$-(\alpha_1 u(0) - \alpha_2 u'(0)) = \lambda(\beta_1 u(0) - \beta_2 u'(0)), \quad (9)$$

где числа $\alpha_i,\ \beta_i$ $(i = 1,2)$ вещественные, причем $\alpha_1\alpha_2 > 0,\ \beta_1\beta_2 < 0$. Отметим, что граничное условие (9) не является частным случаем предыдущих граничных условий и оказывается, что в данном случае вещественность коэффициента при λ сильно влияет на определение данных рассеяния. Поэтому обратная задача по данным рассеяния ведет себя как несамосопряженная задача.

Известно, что уравнение (8) имеет решение, представимое в виде

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_0^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt.$$

При этом имеется связь между потенциалом $q(x)$ и ядром $K(x,t)$: $K(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)dt$, которая при восстановлении потенциала имеет важное значение. Параграф 2.2 посвящен изучению прямой задачи рассеяния для краевой задачи (8), (9). Показано, что функция рассеяния этой краевой задачи определяется по формуле

$$S(\lambda) = \frac{(\alpha_2 + \beta_2\lambda)\overline{e'(0,-\lambda)} - (\alpha_1 + \beta_1\lambda)\overline{e(0,-\lambda)}}{(\alpha_2 + \beta_2\lambda)e'(0,\lambda) - (\alpha_1 + \beta_1\lambda)e(0,\lambda)}.$$

Доказана

Теорема 2.5. *В верхней полуплоскости* $Im\lambda > 0$ *функция* $E(\lambda) = (\alpha_2 + \beta_2\lambda)e'(0,\lambda) - (\alpha_1 + \beta_1\lambda)e(0,\lambda)$ *имеет конечное число нулей* λ_k $(k = 1,2,\dots,n)$, *а функция* $\lambda[E(\lambda)]^{-1}$ *ограничена в некоторой окрестности нуля.*

Функцию $E(\lambda)$ будем называть (по терминологии В.Э.Лянце) знаменателем, а нули знаменателя, расположенные в верхней полуплоскости $Im\lambda > 0$ сингулярными числами рассмотренной краевой задачи (8),(9). Из теоремы 2.5. следует, что множество сингулярных чисел конечно. Кратность m_k нуля λ_k функции $E(\lambda)$ называется кратностью сингулярного числа λ_k $(k=1,2,...,n)$. Получено

Следствие 2.1. *Нули функций,* $E(\lambda)$, $E_1(\lambda)=(\alpha_2+\beta_2\lambda)e'(0,-\lambda)-(\alpha_1+\beta_1\lambda)e(0,-\lambda)$ *комплексно сопряженны и число нулей этих функций равны между собой.*

Введены функции $f_k(x)=i\operatorname*{Res}\limits_{\lambda=\lambda_k} s\dfrac{\check{E}(\lambda)}{E(\lambda)}e^{i\lambda x}$, $(k=1,2,...,n)$, где

$\check{E}(\lambda)=(\alpha_2+\lambda\beta_2)\check{e}'(0,\lambda)-(\alpha_1+\lambda\beta_1)\hat{e}(0,-\lambda)\,,\hat{e}(x,\lambda)$ вспомогательное решение уравнения (9), определенное в верхней полуплоскости $Im\lambda\geq 0$. Следуя работе В.Э.Лянце, многочлены $M_k(x)=e^{-i\lambda_k x}f_k(x),\ k=1,2,...,n,$ называются нормировочными многочленами. Функция $S(\lambda)$, невещественные сингулярные числа $\lambda_1,...,\lambda_n$ и нормировочные многочлены $M_1(x),...,M_n(x)$ называются данными рассеяния краевой задачи (8), (9). Обратная задача рассеяния для краевой задачи (8), (9) состоит в однозначном восстановлении потенциала по данным рассеяния и в нахождении эффективного алгоритма для построения потенциала. С этой целью выведено основное уравнение

$$F(x+y)+K(x,y)+\int_x^{\infty}K(x,t)F(t+y)dt=0,\quad x<y<\infty\,, \tag{10}$$

где

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n}f_j(x)+\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0-S(\lambda)\right]e^{i\lambda x}d\lambda,\ S_0(\lambda)=\begin{cases}-1, & если\ \ \beta_2\neq 0,\\ \dfrac{\beta_1+i\alpha_2}{\beta_1-i\alpha_2}, & если\ \ \beta_2=0.\end{cases}$$

Доказана однозначная разрешимость основного уравнения (10).

Теорема 2.8. *Данные рассеяния краевой задачи (8) ,(9) однозначно определяют потенциал* $q(x)$.

Далее, используя основное уравнение, изучены некоторые характеристические свойства данных рассеяния. Доказана непрерывность функции рассеяния в нуле, причем $S(0)=-1$, откуда следует непрерывность на всей оси. В параграфе 2.10 получена формула типа Левинсона, которая устанавливает связь между изменением аргумента функции рассеяния $S(\lambda)$ с числом m_k, т.е. имеет место следующая формула

$$-\frac{1}{2\pi}\arg S(\lambda)\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1-S(0)}{4}+C(\beta_2)=2\left[m_1+m_2+\ldots+m_n\right] \quad ,$$

где

$$C(\beta_2)=\begin{cases}1, & \text{\textit{если}}\ \ \beta_2\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{\textit{если}}\ \ \beta_2=0.\end{cases}$$

Далее, в параграфе 2.11 получены двукратные формулы разложения по собственным функциям.

Глава 3, состоящая из 9 параграфов, посвящена изучению решению обратной задачи теории рассеяния для системы дифференциальных уравнений первого порядка, заданного на положительной полуоси.

В первом параграфе рассматривается краевая задача, порожденная уравнением

$$BY'+\Omega(x)Y=\lambda\rho(x)Y, \qquad (0<x<\infty) \qquad (11)$$

и граничным условием, содержащим спектральный параметр

$$-\left(\alpha_1Y_1(0)-\alpha_2Y_2(0)\right)=\lambda\left(\beta_1Y_1(0)-\beta_2Y_2(0)\right), \qquad (12)$$

где

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \Omega(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}Y_1(x)\\ Y_2(x)\end{pmatrix},$$

$$\rho(x)=\begin{cases}1, & \text{\textit{при}}\quad x\geq a,\\ \sigma, & \text{\textit{при}}\quad 0\leq x<a,\end{cases}$$

$p(x)$, $q(x)$- вещественнозначные измеримые функции, при этом евклидова норма матричной функции $\Omega(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty \|\Omega(x)\| dx < \infty, \qquad (13)$$

λ –спектральный параметр, числа α_i, β_i $(i=1,2)$ вещественные и $\gamma = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 > 0$. Легко проверить, что функция

$$f_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda\mu(x)}, \quad \text{где} \qquad \mu(x) = \begin{cases} a + \alpha(x-a), 0 \le x < a, \\ x, \qquad\qquad x > a, \end{cases}$$

является решением Йоста уравнения (11), когда $\Omega(x) \equiv 0$. Известно, что если выполнено условие (13) и $\Omega(x)$ непрерывная матрица-функция, то уравнение (11) имеет единственное решение $f(x,\lambda)$, представимое в виде

$$f(x,\lambda) = f_0(x,\lambda) + \int_{\mu(x)}^\infty K(x,t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda t} dt, \qquad (14)$$

причем матрица-функция $K(x,\cdot)$, элементы которой принадлежат $L_1(0,\infty)$, обладает следующим свойством

$$\rho(x)\left\{BK(x,\mu(x)) - K(x,\mu(x))B\right\} = \Omega(x). \qquad (15)$$

Обозначим через

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

решение уравнения (11) при начальных данных $\varphi_1(0,\lambda) = \alpha_2 + \lambda\beta_2$, $\varphi_2(0,\lambda) = \alpha_1 + \lambda\beta_1$.

Имеет место следующая

Лемма 3.1. *При вещественных значениях λ справедливо тождество*

$$\frac{2i\varphi(x,\lambda)}{(\alpha_1+\lambda\beta_1)f_1(0,\lambda) - (\alpha_2+\lambda\beta_2)f_2(0,\lambda)} = \overline{f(x,\lambda)} - S(\lambda)f(x,\lambda),$$

где

$$S(\lambda)=\frac{(\alpha_1+\lambda\beta_1)\overline{f_1(0,\lambda)}-(\alpha_2+\lambda\beta_2)\overline{f_2(0,\lambda)}}{(\alpha_1+\lambda\beta_1)f_1(0,\lambda)-(\alpha_2+\lambda\beta_2)f_2(0,\lambda)},$$

причем $|S(\lambda)|=1$.

Функция $S(\lambda)$ называется функцией рассеяния краевой задачи (11), (12).

Доказано, что функция

$$E(\lambda)\equiv(\alpha_1+\lambda\beta_1)f_1(0,\lambda)-(\alpha_2+\lambda\beta_2)f_2(0,\lambda)$$

является аналитической функцией в верхней полуплоскости $Im\lambda>0$ и непрерывной вплоть до вещественной оси, и не имеет нулей в $Im\lambda\geq 0$. Далее, изучены некоторые характеристические свойства функции рассеяния $S(\lambda)$ и показана, что функция $S_0(\lambda)-S(\lambda)$, квадратично интегрируема в окрестности $\infty\,(-\infty)$, где $S_0(\lambda)=\dfrac{\beta_1-i\beta_2}{\beta_1+i\beta_2}e^{-2i\lambda a(1-\alpha)}$. В параграфе 3.3 найдено явное выражение резольвенты и выведена формула разложения. С этой целью рассматривается гильбертово пространство $H_\rho=L_{2,\rho}\left(0,\infty;\mathbb{C}^2\right)\times\mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$(F,G)_H=\int_0^\infty\left\{f_1(x)\overline{g_1(x)}+f_2(x)\overline{g_2(x)}\right\}\rho(x)dx+\frac{1}{\gamma}f_3g_3,$$

для

$$F=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\\ f_3\end{pmatrix},\qquad G=\begin{pmatrix}g_1(x)\\ g_2(x)\\ g_3\end{pmatrix}.$$

Далее, обозначим

$$l(f)\equiv\frac{1}{\rho(x)}\left\{Bf'+\Omega(x)f\right\},\qquad f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}.$$

Определен оператор $L: F \to \begin{pmatrix} f(x) \\ \beta_1 f_1(0) - \beta_2 f_2(0) \end{pmatrix}$ с областью определения $D(L) := \left\{ F \mid F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_3 \end{pmatrix} \in H_\rho, \right.$ $f(x)$ *абсолютно непрерывна на каждом отрезке* $[0, b] \subset [0, \infty),\ l(f) \in L_{2,\rho}\left(0, \infty; \mathrm{C}^2\right),\ f_3 = \beta_1 f_1(0) - \beta_2 f_2(0) \Big\}$. Очевидно, что краевая задача (11),(12) эквивалентна операторному уравнению $LF = \lambda F$ для $F \in D(L)$.

Допустим, что λ не является точкой спектра оператора L. Тогда резольвента $R_\lambda(L) = (L - \lambda I)^{-1}$ существует.

Имеет место

Лемма 3.3. *При* $\operatorname{Im}\lambda > 0$, *матричная функция*

$$G(x,t,\lambda) = -\frac{1}{E(\lambda)} \begin{cases} \varphi(x,\lambda) \quad \tilde{f}(t,\lambda), & x < t, \\ f(x,\lambda)\tilde{\varphi}(t,\lambda), & x > t, \end{cases}$$

является ядром резольвенты оператора L.

Получена следующая формула разложения по собственным функциям оператора L:

$$F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_3 \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} T(F,\lambda) U(x,\lambda) d\lambda,$$

где

$$T(F,\lambda) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{E(\lambda)} \varphi(t,\lambda) f(t) \rho(t) dt - i \frac{f_3}{E(\lambda)} \right],$$

$$U(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \overline{f(x,\lambda)} - S(\lambda) f(x,\lambda) \\ \dfrac{2i\gamma}{E(\lambda)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \dfrac{2i\varphi(x,\lambda)}{E(\lambda)} \\ \dfrac{2i\gamma}{E(\lambda)} \end{pmatrix}.$$

Из формулы разложения следует, что функция рассеяния определяет поведение на бесконечности собственных функций. Обратная задача рассеяния для краевой задачи (11), (12) формулируется следующим образом: зная функцию рассеяния $S(\lambda)$, найти потенциал $\Omega(x)$. При решении этой задачи важную роль играет интегральное уравнение для ядра $K(x,t)$, входящее в представление (14) специального решения $f(x,\lambda)$.

Доказана следующая

Теорема 3.2. *При каждом* $x \ge 0$ *ядро* $K(x,y)$ *специального решения (14) удовлетворяет основному уравнению*

$$K(x,y)+F(\mu(x)+y)+\int_{\mu(x)}^{\infty} K(x,t)F(t+y)dt=0,\ (y>\mu(x)), \qquad (16)$$

где

$$F(x)=Re\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_0(\lambda)-S(\lambda)\right]\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & -1\end{pmatrix}e^{i\lambda x}d\lambda.$$

В параграфе 3.5 доказывается, что при фиксированном x основное уравнение (16) имеет единственное решение из $L_2(\mu(x),\infty)$. Пусть задана функция рассеяния $S(\lambda)$. Тогда можно найти $F(x)$. Следовательно, можно построить уравнение (16). Так как основное уравнение (16) имеет единственное решение $K(x,y)$, то потенциал $\Omega(x)$ можно найти из формулы (15). Аналогичные результаты верны также и для других видов краевых условий.

В параграфе 3.6 рассматривается разрывное уравнение (11), когда граничное условие содержит спектральный параметр нелинейно:

$$-[\alpha_0 Y_1(0)-\beta_0 Y_2(0)]=[\alpha_1 Y_1(0)-\beta_1 Y_2(0)]\lambda+[\alpha_2 Y_1(0)-\beta_2 Y_2(0)]\lambda^2, \qquad (17)$$

где λ-спектральный параметр, числа α_i, β_i, $(i=0,\ 1,\ 2)$ веществен-ные и удовлетворяют условиям $\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0<0,\ \ \alpha_0\beta_2-\alpha_2\beta_0=0$,

$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 > 0$. Показана, что по функции рассеяния $S(\lambda)$ краевой задачи (11), (17) коэффициент $\Omega(x)$ определяется однозначно.

В следующих параграфах исследуется обратная задача рассеяния для системы уравнений Дирака (с массой), когда граничное условие содержит спектральный параметр нелинейно. Изучена задача рассеяния, выведено основное уравнение обратной задачи, позволяющее решить обратную задачу, изучены свойства данных рассеяния и доказано, что потенциал однозначно восстанавливается по данным рассеяния. Используя решения основного уравнения, получаем алгоритм рещения обратной задачи.

Четвертая глава, состоит из 9 параграфов и посвящена изучению некоторых базисных и осцилляционных свойств систем корневых функций оператора Штурма-Лиувилля.

В первой части этой главы в параграфах 4.1 и 4.4 мы рассматриваем дифференциальный оператор

$$\ell(y) = y'' + q(x)y\,, \tag{18}$$

либо с периодическими краевыми условиями

$$y(1) = y(0), \quad y'(1) = y'(0)\,, \tag{19}$$

либо с антипериодическими краевыми условиями

$$y(1) = -y(0), \quad y'(1) = -y'(0)\,. \tag{20}$$

Установлено, что для периодических и антипериодических краевых задач свойства базистности в пространсве $L_p\left(0,1\right)$ $\left(1 < p < \infty\right)$ в некоторых случаях определяется значениями потенциала в концевых точках отрезка. В параграфе 4.1 доказана теорема о базисности Рисса в пространстве $L_2\left(0,1\right)$. Получены следующие асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций периодических и антипериодических краевых задач. Именно справедлива

Лемма 4.1. *Пусть* $q(x)$ *- комплекснозначная функция из класса* $C^{(4)}\left[0,1\right]$, $q(1) - q(0) \neq 0$, $\int\limits_0^1 q(x)dx = 0$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) все собственные значения краевой задачи (18), (19,) начиная с некоторого, простые и образуют две бесконечные последовательности, $\lambda_{k,1}$, $\lambda_{k,2}$ *(* $k = N, N+1, \ldots$*), где* N *- некоторое натуральное число и*

$$\lambda_{k,1} = -(2k\pi)^2 + \frac{q(1) - q(0)}{4k\pi} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$\lambda_{k,2} = -(2k\pi)^2 - \frac{q(1) - q(0)}{4k\pi} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

соответствующие собственные функции имеют вид

$$y_{k,1}(x) = \sin 2k\pi x - \cos 2k\pi x + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$y_{k,2}(x) = \sin 2k\pi x + \cos 2k\pi x + O\left(\frac{1}{k}\right);$$

б) все собственные значения краевой задачи (18), (20,) начиная с некоторого, простые и образуют две бесконечные последовательности $\lambda_{k,1}$, $\lambda_{k,2}$, $(k = N, N+1, \ldots)$*, где* N *-некоторое натуральное число и*

$$\lambda_{k,1}(x) = -\left(\left(2k+1\right)\pi\right)^2 - \frac{q(1) - q(0)}{2\left(2k+1\right)\pi} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$\lambda_{k,2}(x) = -\left(\left(2k+1\right)\pi\right)^2 + \frac{q(1) - q(0)}{2\left(2k+1\right)\pi} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

соответствующие собственные функции имеют вид

$$y_{k,1}(x)=\sin(2k+1)\pi x-\cos(2k+1)\pi x+O\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$y_{k,2}(x)=\sin(2k+1)\pi x+\cos(2k+1)\pi x+O\left(\frac{1}{k}\right).$$

При выполнении условия леммы 4.1 доказана

Теорема 4.1. *Корневые функции краевой задачи (18), (19), а также антипериодических краевой задачи (18), (20) образуют базис Рисса пространства* $L_2(0,1)$.

В параграфе 4.2 установлены, что корневые функции краевых задач (18), (19) и (18), (20) образуют базис в банаховом пространстве $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$. При этом используем результаты, полученные в параграфе 4.1. В случае, когда $q(0)=q(1)$, $q'(0)\neq q'(1)$, выводятся асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций краевых задач (18), (19) и (18), (20). Далее, в параграфе 4.3 устанавливается базисность корневых функций в банаховом пространстве $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$.

Второй часть этой главы посвящена изучению осцилляционных и базисных свойств корневых функций спектральнных задач Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях. Вначале рассмотрены граничные условия, зависящие от спектрального параметра нелинейно. В параграфах 4.5-4.9 изучаются осцилляционные свойства собственных функций задачи применением метода полярных координат, в этом случае получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций. Исследована краевая задача

$$-u''+q(x)u=\lambda^2 u,\ \ 0<x<1, \tag{21}$$

$$(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)u(0)+u'(0)=0, \tag{22}$$

$$(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)u(0)+u'(0)=0, \tag{23}$$

где λ-спектральный параметр, $q(x)$-вещественная непрерывная функция на промежутке $[0,1]$, α_i, β_i, $(i=0,1,2)$ действительные числа, которые удовлетворяют условиям $\alpha_2 \ge 0_1$, $\beta_2 \le 0$, $|\alpha_1|+|\beta_1| \ne 0$. Изучая свойства собственных значений краевой задачи (21)-(23), доказано следующее утверждение.

Лемма 4.13. *Собственные значения краевой задачи (21)-(23)*

а) образуют не более чем счетное число множество, не имеющее конечной предельной точки;

в) вещественные и простые, за исключением конечного их числа.

Дальше исследуются осцилляционные свойства собственных функций краевой задачи (21)-(23).

Теорема 4.7. *Пусть* $u(x)$*-решение уравнения* $u'' + g(x)u = 0$, *удовлетворяющее начальным условиям* $u(0)=1$, $u'(0) = -\alpha_0 - \alpha_1\lambda' - \alpha_2\lambda'^2$, *а* $\upsilon(x)$*–решение уравнения* $\upsilon'' + h(x)\upsilon = 0$, *удовлетворяющее начальным условиям* $\upsilon(0)=1$, $\upsilon'(0) = -\alpha_0 - \alpha_1\lambda'' - \alpha_2\lambda''^2$. *Кроме того, пусть* $g(x) < h(x)$ *и выполняется одно из следующих условий: а)* $\alpha_2 > 0$ *и либо* $\lambda'' > \lambda' \ge \max\left\{0; -\dfrac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right\}$, *либо* $\lambda'' < \lambda' \le \min\left\{0; -\dfrac{\alpha_1}{2\alpha_2}\right\}$*; в)* $\alpha_2 = 0, \alpha_1 > 0$ *и* $\lambda'' > \lambda'$, *с)* $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$. *Тогда если* $u(x)$ *в интервале* $0 < x \le 1$ *имеет m нулей, то* $\upsilon(x)$ *в том же интервале имеет не меньше чем m нулей и* k *-й нуль* $\upsilon(x)$ *меньше k- го нуля.* $u(x)$.

Используя эти результаты, получены следующие утверждения.

Теорема 4.8. *Краевая задача (21)-(23) имеет конечное число невещественных собственных значений. Существуют неограниченно убывающая последовательность отрицательных собственных значений* $\{\lambda_{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ *и неограниченно возрастающая последовательность положительных собственных значений* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$\cdots < \lambda_{-n} < \lambda_{-n+1} < \cdots < \lambda_{-1} < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \cdots .$$

Кроме того, существуют такие числа $n_*,\, n^* \in \mathrm{N}$ *и* $k_*,\, k^* \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, *что собственные функции, соответствующие собственным значениям* λ_{-n} $(n \ge n_*)$ *и* λ_n $(n \ge n^*)$, *имеют соответственно* $n + k_* - n_*$ *и* $n + k^* - n^*$ *простых нулей в интервале* $(0,1)$.

Пусть $\upsilon_m(x)$-собственная функция краевой задачи (21)-(23), имеющая $|m|$ нулей в интервале $(0,1)$. Через μ_m обозначим собственное значение, соответствующее собственной функции $\upsilon_m(x)$. Нули функции $\upsilon_m(x)$ обозначим через: $x_{m,k}$: $0 < x_{m,1} < x_{m,2} < \ldots < x_{m,|m|} < \pi$.

Теорема 4.9. *Справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\mu_m = \pi\left(m - \operatorname{sgn} m\right) + \frac{1}{\pi m}\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 q(x)dx + \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\beta_2}\right\} + O\left(m^{-1}\omega\left(m^{-1}\right)\right),$$

$$\upsilon_m(x) = \sin\pi\left(|m| - 1\right)x + O\left(\frac{1}{m}\right),\ \ x_{m,k} = \frac{k-1}{|m|-1}O\left(\frac{1}{m}\right),\ \left(1 \le k \le |m| - 1\right),$$

где $\omega(\delta) = \delta + \omega_1(\delta)$ *и* $\omega_1(\delta)$*-модуль непрерывности функции* $q(x)$ *на отрезке* $[0,1]$. *Кроме того, если* $q(x) \ne const$, *то функция* $\omega(\delta)$ *в формуле для* μ_m *может быть заменена функцией* $\omega_1(\delta)$.

В параграфе 4.8 рассматривается краевая задача с одним тем же спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях. Установлены базисности системы собственных функций краевых задач в гильбертовом пространстве $H = L_2(a,b) \oplus C^3$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту профессору И.М.Гусейнову за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Мамедов Х.Р. О спектральности дифференциального оператора второго порядка // Труды ИММ АН Азерб., 1996, т.5, №13, с. 179-181.
2. Мамедов Х.Р. Об одной краевой задаче с параметром в граничных условиях // Спектральная теория операторов и ее приложения, 1997, №11, с. 117-121.
3. Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р. Об одной краевой задаче / Труды конференции, посвященной 80-летию К.Т. Ахмедова, 1997 г., Баку, с.146-148.
4. Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р. О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач // Матем. заметки, 1998, т.64, №4, с. 558-563.
5. Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р. Об одной краевой задаче со спектральным параметром в граничных условиях // Сиб.матем.жур.,1999, т.40, №2, с. 325-335.
6. Kerimov N.B., Mamedov Kh. R. The Sturum–Liouville problem with non-linear spectral parameter in the boundary conditions // Trans. of NAS of Azerb., 2001, v.21, №1, p. 100-103.
7. Mamedov Kh.R. Inverse problem of Scattering Theory for Strum-Liouville equation with a parameter in the boundary condition / International Conference. Differential Equation and Related Topics dedicated to the Centenary Anniversary of Ivan G. Petrovskii, XX joint sessions of Petrovski Seminar and Moscow Mathematical Society, 2001, Moscow-Russia, p. 254.
8. Mamedov Kh.R. On an inverse problem of scattering theory for Sturm-Liouville operator with a spectral parameter in the boundary conditions / International Conference ILL-Posed and Inverse Problems dedicated to Prof.M.M.Lavrent'ev, 2002, Novosibirsk-Russia, p. 114,
9. . Мамедов Х.Р. Единственность решения обратной задачи теории рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии // Матем. заметки, 2003, т.74, №1, с. 142-146.

10. Mamedov Kh.R., Menken H. Levinson's type formula for a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary condition / International Workshop on Analysis and its Applications, 2004, Mersin-Turkey, Abstracts, p. 38-39.
11. Mamedov Kh.R., Menken H. On one scattering problem with a spectral parameter in the boundary condition // North-Holland Mathematics Studies, 2004, v.197, p. 185-195.
12. Mamedov Kh.R. On a basis problem for a second order differential equation with a discontinuous coefficient and a spectral parameter in the boundary conditions // Geometry, Integrability and Quantization , Sofia, 2005, v.7, p. 218-225.
13. Menken H., Mamedov Kh.R.,. On the inverse problem of the scattering theory for a boundary value problem // Geometry, Integrability and Quantization, Sofia, 2005, v.7, p. 226-236.
14. Mamedov Kh.R. On the direct problem of the scattering theory for Sturm-Liouville operator with discontinuous coefficient / Международная Конференция по Математике и Механике, посвященной 50-летию со дня рождения чл. корр. НАН Азерб., проф. И.Т.Мамедова, 2005, Баку, Тезисы, p. 126.
15. Gulmamedov V.Y., Mamedov Kh.R. On basis property for a boundary-value problem with a spectral parameter in the boundary condition // Journal of Arts and Sciences, University of Çankaya, 2006, №5, p. 9-17.
16. Mamedov Kh.R. Uniqueness of the Solution of the Inverse Problem of Scattering Theory for Sturm–Liouville Operator with Discontinuous Coefficient, Spectral Parameter in The Boundary Condition // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2006 V. XXIV (XXXII), p.163-172.
17. Mamedov Kh.R., On the inverse problem scattering theory for a differential operator with a spectral parameter in the boundary condition / İnternational Conference on Differential Equations, Dedicated to the 100 th Anniversary of Ya.B.Lopatynsky, 2006, Lviv, Ukraine, Book of Abstracts, p.124-127.
18. Mamedov Kh.R. On the inverse problem of scattering theory for Dirac equations system, International Scientfific Conference

Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications, 2006, Uzhgorod-Ukraine, Absracts, p. 162.
19. Mamedov Kh.R. On the inverse problem of scattering theory for Dirac system of equations with discontinuous coefficient and spectral parameter in the boundary condition / 12-й Международной Конференции по Математике и Механике, посвященной 70-летнему юбилею чл.-корр. НАН Азерб., проф. Б.А.Искендерова, 2006, Баку, Тезисы, p. 99.
20. Mamedov Kh.R. On the inverse problem for a class of Dirac equations system with a discontinuous coefficient and with a spectral parameter in the boundary condition // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb., Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 2008, v.28, №4, p. 65-72.
21. Mamedov Kh.R., Col A. On the inverse problem for a class of system of Dirac equations with discontinuous coefficient // European Journal of Pure and Applied Mathematics, 2008, v.1, №3, p. 21-32.
22. Mamedov Kh.R. On the inverse problem for Strum-Liouville operator with a non-linear spectral parameter in the boundary condition // Journal of the Korean Mathematical Society, 2009, v.46, №6, p. 1243-1254.
23. Mamedov Kh.R. On the inverse problem for Sturum–Liouville operator with discontinuous coefficient and with a spectral parameter in the boundary condition // Rap. NAS Azerb., Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 2009,v.115, №1, p. 18-21.
24. Mamedov Kh.R., Col A. On the expansion formula for a class of Dirac operator with discontinuous coefficient // International Journal of Computational Cognition, 2009, v.7, №4, p. 20-24.
25. Mamedov Kh.R., Kosar N.P. On a direct problem of scattering theory for a class of Sturm - Liouville operator // Proceedings of the Jangjeon Math.Society, 2009, v.12, №2, p. 243-251.
26. Mamedov Kh.R., Menken H. On the basis ness in $L_2(0,1)$ of the root functions in non-strongly regular boundary conditions // European Journal of Pure and Applied Mathematics, 2008, v.1, №2, p. 51-60.
27. Mamedov Kh.R., Kosar N. P. The direct and inverse problem of scattering theory with a non-linear spectral parameter in the boundary condition / International Conference Mathematical Analysis,

Differential Equations and their Applications, 2008, Famagusta-North Cyprus, Absracts p. 36.
28. Mamedov Kh.R., Menken H. Asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of a non-self-adjoint Sturum–Liouville operator // Further Progress in Analysis, 2009, p.798-806.
29. Mamedov Kh.R., Menken H. The Levinson type formula for a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary condition // The Arabian Journal for Science and Engineering, 2009, v. 34, №1 A, p. 119-216.
30. Mamedov Kh.R. On the inverse problem of scattering theory for Sturm-Liouville operator / Международная конференция современные проблемы вычислительной математики и математической физики, памяти академика А.А.Самарского к 90-летию со дня рождения, 2009, Москва-Россия, Тезисы Докладов, с. 210-211.
31. Mamedov Kh.R., Kosar N.P. Continuity of the scattering function and Levinson type formula of a boundary value problem // Internatıonal Journal of Contemporary Mathematıcal Scıences, 2010, v. 5, №4, p. 159-170.
32. Mamedov Kh.R. On an inverse scattering problem for a discontinuous Sturum–Liouville equation with a spectral parameter in the boundary condition // Boundary Value Problems, v. 2010, ID 171967, p. 1-17.
33. Mamedov Kh.R. On the basis property in $L_p(0,1)$ on the root functions of a class non self adjoint Sturum–Liouville operators // European Journal of Pure and Applied Mathematics, 2010, v.3, №5, p. 831-838.
34. Mamedov Kh.R., Col A. On an inverse problem for a class Dirac operator with discontinuous coefficient and a spectral parameter in the boundary condition // Applied Mathematical Sciences, 2010, v.4, №26, p. 1273-1287.
35. Mamedov Kh.R., Col A. On the problem of scattering theory for a class of Dirac operator with discontinuous coefficient and quadratic polynomial to spectral parameter in the boundary condition / Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific Conference Mathematical

Analysis, Differential Equations and their Applications, 2010, Sunny Beach, Bulgaria, p.32-33.
36. Menken H., Mamedov Kh.R. Basis property in $L_p(0,1)$ of the root functions corresponding to a boundary–value problem // Journal of Applied Functional Analysis, 2010, v.5, №4, p. 351-356.
37. Mamedov Kh.R., Kosar N.P. Inverse scattering problem for Strum-Liouville operator with a non-linear dependence on the spectral parameter in the boundary condition // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2011, v. 34, №2, p. 231-241.
38. Mamedov Kh.R. On a scattering problem for a class of Sturm-Liouville operator with discontinuous coefficient / 8-th International Society for Analysis, ifs Applications and Computation-ISAAC Congress, 2011, Moscow-Russia, Absracts, p.298.
39. Col A., Mamedov Kh.R. On an inverse scattering problem for a class of Dirac operators with spectral parameter in the boundary condition // J.Math.Anal.Appl., 2012, v.393, p.470-478, doi: 10.1016/j.jmaa.2012.03.009.
40. Mamedov Kh.R. Col A. On an inverse scattering problem for a class Dirac operator with discontinuous coefficient and nonlinear dependence the spectral parameter in the boundary condition // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2012, v.35, p.1712-1720 .

XANLAR RƏŞİD oğlu MƏMMƏDOV

DİFERENSİAL OPERATORLARIN BƏRPASI VƏ BƏZİ SPEKTRAL XASSƏLƏRİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi sərhəd şərtlərinə spektral parametr qeyri xətti daxil olan kəsilən əmsalli ikinci tərtib tənlik və birinci tərtib Dirak təhliklər sistemi üçün yarımoxda səpilmənin düz və tərs məsələlərinə həsr olunmuşdur. Qüvvətli requlyar olmayan periodik və anti periodik sərhəd şərtlərinin əmələ gətirdiyi öz-özünə qoşma olmayan Şturm-Lyuvill operatoruna baxılmışdır. Potensial kompleks qiymətli funksiya olduqda məxsusi ədədlər və məxsusi funksiyalar üçün asimptotik düsturlar alınmışdır Bu asimptotik düsturlardan istifadə edərək məxsusi və qoşma funksiyalar sisteminin $L_p, (1 < p < \infty)-$də bazisliyi göstərilmişdir. Bundan sonra sərhədə spektral parametr qeyri-xətti daxil olan Şturm-Lyuvill məsələsinə baxılmışdır. Bu məsələnin əmsalı $C[0,1]$ sinfindən həqəqi qiymətli funksiya olduqda məxsusi ədəd və məxsusi funksiyaların sıfırları üçün asimptotik düsturlar alinib, məxsusi funksiyalarinin ossilyasiya xassələri öyrənilmişdir. Sərhəd şərtlərinə və interval daxilində kəsilmə nöqtəsində verilən şərtə spektral parametr daxil olan məsələnin məxsusi funksıyalarinin hilbert fəzalarinda bazisliyi tədqiq edilmişdir.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas yeni nəticələr alınmışdır:

1.İkinci tərtib diferensial tənlik və birinci tərtib diferensial tənliklər sisteminin sərhəddə spektral parametr saxlayan şərtlər ilə əmələ gətirdiyi sərhəd məsələsi üçün:

a) rezoventin aşkar ifadəsi tapılmış və ayrılış düsturu çıxardılmış, spektr öyrənilmişdir;

b) səpimə verilənləri daxil edilmiş, onların xarakteristik xassələri öyrənilmişdir;

c) Marçenko tipli əsas tənlik çıxardılmışdır;

d) əsas tənliyin həll olunması öyrənilmişdir;

e) tərs məsələnin həllinin yeganəliyi isbat edilmişdir.

2. İkinci tərtib differensial operatorun əmsalı üçün periodik və antiperiodik sərhəd məsələsinin məxsusi və qoşma funksiyalar sisteminin $L_p, (1 < p < \infty) -$ də bazisliyini təmin edən şərtlər tapılmışdır. Məxsusi ədədlər və məxsusi funksiyalar üçün asimptotik düsturlar alınmışdır
3. Sərhəddə qeyri-xətti spektral parametr saxlayan Şturm-Lyuvill spektral məsələsinin məxsusi ədədlərinin kompleks müstəvidə yerləşməsi və məxsusi funksiyalarin ossilyasiya xassələri öyrənilmiş, məxsusi ədədler və məxsusi funksiyalar üçün asimptotik düsturlar alınmışdır. İnterval daxilində kəsilmə şərtində spektral parametr olan hal üçün kəsilən əmsallı Sturm-Liuvill operatorunun məxsusi funksiyalarının bazisliyi tədqiq edilmişdir.

KHANLAR RASHİD oglu MAMMADOV

THE RECOVERED OF DIFFERENTIAL OPERATORS AND THIS SPECTRAL PROPERTIES

ABSTRACT

The dissertation is devoted to the direct and inverse problem of scattering theory for a second order differential operator with a discontinuous coefficient and for a class of one dimensional Dirac operators on the semi-infinite interval with boundary condition depending nonlinearly on the spectral parameter. The non-self adjoint Sturm-Liouville operators with periodic and anti-periodic boundary conditions which are not strongly regular considered. The asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of these problem, when the potential is complex-valued function.Then using these asumptotic formulas the basisness in $L_p(0,1)$ $1 < p < +\infty$, of the root functions are proved. Also the Sturm-Liouville problem containing non-linear spectral parameter in the equation and the boundary conditions is considered. Supposing that coefficient is any real valued function from the class $C[0,1]$ allocation of eigenvalues is studied, the theorem on number of zeros of eigenfunctions is proved, the asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions fort he boundary value problem are found. The basic properties of the eigenfunctions of one discontinuous Sturm-Liouville problem with a spectral parameter in boundary conditions and transmission conditions.

1. For the second order differential operator and first order differential equations system with boundary condition depending problem with boundary condition depending on the spectral parameter:
   a) the resolvent operator is constructed and the expansion formula is obtained, the spectrum is examined;
   b) the scattering data is defined, its properties are investigated;
   c) the Marchenko type fundamental equation is derived;
   d) the solvability of the fundamental equation is proved;
   e) the uniqueness of the solution of the inverse problem is proved.

2. The sufficient conditions are obtained for the coefficient of non-self adjoint Sturm-Liouville operators with periodic and anti-periodic boundary conditions (not strongly regular); the asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of these problem are obtained;

3. The general characteristic of the localization in the complex plane of the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem with boundary condition nonlinearly depending on the spectral parameter are obtained; asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions are found; the basisness of eigenfunctions of the discontinuous Sturm-Liouville equation with a spectral parameter in boundary conditions and discontiniouty conditions inside of the interval are proved;