AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

YAQUB YAQUB OĞLU MƏMMƏDOV

DANKL OPERATORU İLƏ BAĞLI VƏ HEYZENBERQ QRUPUNDA FUNKSİYALAR FƏZASINDA İNTEQRAL OPERATORLAR

1202.01 –Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı -2015

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ЯГУБ ЯГУБ оглы МАМЕДОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРОМ ДАНКЛЯ И НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

1202.01 - Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени доктора наук по математике

Баку – 2015

Работа выполнена в отделе **«Математический анализ» Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный консультант:

чл. корр.НАНА проф. **Вагиф С.Гулиев**

Официальные оппоненты:

чл. корр.НАНА проф. **Билал Т. Билалов**

(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана);

доктор физико-математических наук, проф. **Ильхам А.Алиев**

(Турция, Анталья, Акденизский Университет);

доктор физико-математических наук, проф. **Меликмамед С. Джабраилов**

(Азербайджанский Государственный Педагогический Университет).

Ведущая организация:

Бакинский Государственный Университет,

кафедра «Математический анализ»

Защита диссертации состоится 201 г. В 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотека Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 201 года.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета

Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “Riyazi analiz”** şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi məsləhətçi:

AMEA-nın müxbir üzvü, prof. **Vaqif S. Quliyev**

Rəsmi opponentlər:

AMEA-nın müxbir üzvü, prof. **Bilal T. Bilalov**

(AMEA riyaziyyat və Mexanika İnstitutu);

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **İlham Ə. Əliyev**

(Türkiyə, Antalya, Ağdəniz Universiteti);

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Məlikməmməd S. Cəbrayılov**

(Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti).

Aparıcı təşkilat: **Bakı Dövlət Universiteti**

“Riyazi analiz” kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 22 05 2015 -ci il tarixdə saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şıhıri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 2015 –ci il.

AMEA RMİ-nin D 01.111

Dissertasiya Şurasının

Elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория вложения классов функций многих действительных переменных помимо самостоятельного интереса с точки зрения теории функций, имеет многочисленные и эффективные применения в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Развитие функционального анализа и потребность теории дифференциальных уравнений привело к исследованию функциональных пространств.

Одно из основных достижений последних десятилетий, повлиявших на облик гармонического анализа, состоит в успешном привлечении идей и техники теории максимальных операторов и интегральных операторов типа потенциала. Эти идеи и методы применяются в теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории функций, функциональном анализе, теории вероятностей, в задачах теории приближений, гармоническом анализе на однородных группах и других разделах математики. Применение метода теории потенциала к решению многочисленных краевых задач, встречающихся в теории дифференциальных уравнений в частных производных, в задачах теории аналитических функций, а также в задачах механики имеет богатую историю и успешную практику. Различные свойства потенциалов Рисса были исследованы в работах М. Рисса, Г.Х. Харди, Дж.Е. Литтлвуда, С.Л. Соболева, И. Стейна, Г. Вейса, О.В. Бесова, П.И. Лизоркина, С.Г. Самко, В.М. Кокилашвили, А.Д. Гаджиева, Б. Рубина, С.К. Абдуллаева, В.С. Гулиева, И.А. Алиева, А. Гогатишвили, Р.М. Рзаева и др. Изложение ряда свойств потенциалов Рисса содержатся в монографиях И. Стейна (1972), С.Г. Самко, А.А. Килбас и О.И. Маричев (1987) и Б. Рубина (1996).

Известно, что интегральные представления функций, заданных в областях евклидовых пространств, имеют значительные применения в теории функциональных пространств, теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории кубатурных формул и др. вопросах. Начало интенсивного изучения этих направлений было заложено в фундаментальных работах С.Л. Соболева 1936-1938 гг. Теория пространств функций с обобщенными производными нашла свое отражение в монографии С.Л. Соболева (1974), а также в монографиях С.М. Никольского (1969), О.В.Бесова, В.П. Ильина, С.М. Никольского (1975), Ю.Г. Решетняка (1982), В.Г. Мазьи (1985), И.М.

Стейна (1993), Д.Р. Адамса и Л.И. Хедберга (1996), В.И. Буренкова (1998) и в монографиях других авторов.

В теории уравнений с частными производными наряду с весовыми пространствами $L_{p,w}(\mathrm{R}^n)$, важную роль играют пространства Морри $L_{p,\lambda}(\mathrm{R}^n)$. Пространства Морри ввел в 1938 году Ч.Б. Морри, в связи с некоторыми проблемами эллиптических уравнений и вариационных исчислений. Далее, пространства Морри нашли важные применения в уравнениях Навье-Стокса, Шредингера, в эллиптических уравнениях с разрывными коэффициентами и в теории потенциала. Отметим, что Р.В.Гусейнов (1992), применяя теоремы вложения Соболева-Морри, полученные в работе В.П.Ильина (1970), изучил гладкость решений квазиэллиптических уравнений, не требуя никакой гладкости коэффициентов, даже их непрерывности. А.М. Наджафов (2005), применяя теоремы вложения типа Соболева–Морри, полученные им, также изучил гладкость решений квазиэллиптических уравнений. Более подробную информацию о пространствах Морри можно найти в монографии А. Куфнера, О. Джон и С. Фучика (1977) и У. Юан, В. Зикел и Д. Янга (2010).

Во многих задачах гармонического анализа на действительной прямой важную роль играют операторы сдвига $f(x) \to f(x+h),\ x, h \in \mathrm{R}$. Операторы сдвига обладают многими замечательными свойствами, так например, они образуют однопараметрическую группу изометрий для банаховых пространств $L_p(\mathrm{R})$, преобразование Фурье представляет собой разложение по собственным функциям операторов сдвига, через операторы сдвига определяется свертка функций и т.д. В современной математике существует много различных аналогов операторов сдвига.

Оператор обобщенного сдвига, порожденный дифференциальным оператором Бесселя в одномерном случае, введен и изучен Б.М. Левитаном (1951). Дальнейшие исследования сингулярных эллиптических краевых задач, связанных дифференциальным оператором Бесселя, принадлежат И.А. Киприянову и его ученикам. Некоторые проблемы гармонического анализа Фурье–Бесселя из азербайджанских математиков впервые были исследованы А.Д.Гаджиевым и его учеником И.А.Алиевым. Дальнейшие исследования в этом направлении принадлежат С.К. Абдуллаеву, В.С. Гулиеву и их ученикам.

В последние годы в математической литературе появился и стал использоваться новый класс обобщенных сдвигов – обобщенные сдвиги Данкля. Обобщенные сдвиги Данкля строятся по некоторым дифференциально-разностным оператором (оператором Данкля), которые широко используются в математической физике. С оператором Данкля связаны интегральные преобразования Фурье–Данкля, которые по своим свойствам во многом аналогичны классическим преобразованиям Фурье, но имеют и много особых свойств. В связи с этим большой интерес представляет получение аналогов различных классических задач гармонического анализа для преобразования Фурье–Данкля.

Настоящая диссертация посвящена исследованиям теории гармонического анализа Фурье-Данкля, т.е. гармонического анализа, ассоциированного с преобразованием Фурье–Данкля. Как известно, объектами классического гармонического анализа Фурье служат трансляционно–инвариантные операторы, т.е. операторы типа свертки, порожденные обычным сдвигом $\tau^h, h \in R^n$, действующим как $\tau^h\varphi(x) = \varphi(x-h)$. Мы же, рассматриваем сверточные структуры, порожденные не обычным, а некоторым специальным сдвигом (так называемым, обобщенным сдвигом или D–сдвигом), приспособленным к преобразованию Фурье–Данкля. Принципиальное отличие рассмотренных нами D–интегральных операторов и D–пространств от обычных заключается в том, что сингулярность дифференциально-разностного оператора Данкля D_α "заставляет" нас работать в пространстве $\mathbb{R}$ с весом $|x|^{2\alpha+1}dx$ и использовать некоторый сдвиг, приспособленный к оператору Данкля.

Цель работы. Исследование дробно-максимальных операторов и интегральных операторов типа потенциала , порожденных дифференциально-разностным оператором Данкля

$$D_\alpha f(x) = \frac{df}{dx}(x) + (\alpha + \frac{1}{2})\frac{f(x)-f(-x)}{x}, \quad \alpha > -1/2$$

и на группе Гейзенберга $\mathbb{H}^n$.

Научная новизна. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Впервые введены и изучены аналоги классических интегральных операторов, порожденных оператором Данкля (D-интегральные операторы) – D-максимальный оператор, D-дробно-максимальный оператор, и D-по-тенциал Рисса в пространстве $L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$ (L_p-пространства, порожден-ные оператором Данкля).

Доказана ограниченность D-максимального оператора и D-интеграла Пуассона в пространстве $L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$.

Впервые получены аналоги теоремы Харди-Литтлвуда-Соболева об $L_{p,\alpha}$-$L_{q,\alpha}$ ограниченности D-дробно-максимального оператора, D-потенциала Рисса и D- потенциала Бесселя.

2. Доказаны ограниченность D-максимального оператора и D-интеграла Пуассона в весовых пространств $L_{p,w,\alpha}(\mathbb{R})$ с весом из класса Макенхаупта $A_{p,\alpha}$. Получен аналог теоремы Велланда весовых оценок для D- потенциала Рисса.

3. Установлены два неравенства типа Стейна-Вейсса для D-потенциала Рисса и найдены необходимые и достаточные условия на параметрах для ограниченности D- потенциал Рисса из весового L_p-пространства $L_{p,|x|^\sigma,\alpha}(\mathbb{R})$ в $L_{q,|x|^{-\lambda},\alpha}(\mathbb{R})$ и из пространства $L_{1,|x|^\sigma,\alpha}(\mathbb{R})$ в слабое пространство $WL_{q,|x|^{-\lambda},\alpha}(\mathbb{R})$.

4. Получены необходимые и достаточные условия на параметрах для ограниченности D-дробно-максимального оператора и D-потенциала Рисса из D- Морри пространства $L_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ в $L_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < p < q < \infty$ и из пространства $L_{1,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ в слабое пространство $WL_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < q < \infty$.

5. Установлены необходимые и достаточные условия на параметры для ограниченности D-дробно-максимального оператора и D-потенциала Рисса из модифицированного D- Морри пространства $\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ в $\tilde{L}_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < p < q < \infty$ и из пространства $\tilde{L}_{1,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ в слабое пространство $W\tilde{L}_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < q < \infty$.

6. Доказаны аналоги теоремы Адамса для дробно-максимального оператора и дробного интегрального оператора в пространствах Морри и в модифицированных пространствах Морри на группе Гейзенберга.
7. Найдены достаточные условия для ограниченности дробно-максимального и дробного интегрального оператора на группе Гейзенберга в обобщенных пространствах Морри.

Общая методика исследований. В работе использованы методы теории функций вещественной переменной, теории функциональных пространств, гармонического анализа, теории операторов, теоремы вложения и функционального анализа. При этом используются методы получения оценок образа оператора через прообраз в терминах локальных характеристик.

Теоретическая и практическая ценность. Теоретическая и практическая значимость исследований, проведенных в диссертационной работе, заключается в том, что полученные новые результаты представляют самостоятельный интерес в теории функциональных пространств, кроме того имеют применения в теории дифференциальных уравнений в частных производных при решении граничных задач и при исследовании дифференциальных свойств обобщенных решений квазиэллиптических и гипоэллиптических дифференциальных уравнений и в теории субэллиптических уравнений.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на общегородском семинаре «Современные проблемы гармонического анализа» (рук. академик НАНА, проф. А.Д.Гаджиев); на семинарах отдела "Математический анализ" ИММ НАН Азербайджана (рук. член-корр. НАНА, проф. В.С. Гулиев); на семинарах отдела "Функциональный анализ" ИММ НАН Азербайджана (рук. д.ф.-м.н., проф. Г.Ш. Асланов); на семинарах отдела "Дифференциальные уравнения" ИММ НАНА (рук. д.ф.-м.н., проф., А.Б. Алиев); на семинарах отдела "Негармонический анализ" ИММ НАНА (рук. член-корр. НАНА, проф. Б.Т. Билалов); на семинарах отдела "Теория функций" ИММ НАН Азербайджана (рук.док.н.по мат. В.А. Исмаилов); на общеинститутских семинарах ИММ НАНА; на семинарах кафедры "Математический анализ" в БГУ (рук. д.ф.-м.н., проф. С.К. Абдуллаев), на семинарах кафедры "Теория функций и функциональный анализ" в БГУ (рук. д.ф.-м.н., проф. А.М. Ахмедов). Основные результаты диссертации также докладывались на семинаре

Математического Отделения Акденизского Университета (Анталия - Турция) и на семинаре д.ф.-м.н., проф. И.А. Алиева.

Результаты диссертации докладывались на международной конференции по физическим, математическим и техническим наукам (Нахчыван, 2008); на международной конференции по астрономии, физике и математике, посвященной международному году астрономии (Нахчыван, 2009); на международной конференции, посвященной 90-летию Бакинского государственного университета (Баку, 2009); на международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию ИММ НАНА (Баку, 2009); на международной конференции, посвященной 80-летнему юбилею акад. Ф. Максудова (Баку, 2010); на международной конференции, посвященной 100- летнему юбилею акад. З. Халилова (Баку, 2011); и на международной конференции, посвященной 100- летнему юбилею акад. И. Ибрагимова (Баку, 2012), на международной конференции по математике и механике, посвященной 55-летию ИММ НАНА (Баку, 2014).

Некоторые результаты диссертации доложены на 7-ом международном конгресе ISAAC (2009 г., Лондон, Англия); на 3-ем международном симпозиуме по математике, посвященном турко-язычным математикам мира (2009, Алма-Ата, Казакстан); на международной конференции по математике "Integral and Differential Operators and Their Applicatons" , посвященной 70-летнему юбилею проф. С.Самко (2011 г., Авейро, Португалия); на международной конференции по математике "Operators in Morrey-type Spaces and Applications", посвященной 70-летнему юбилею проф. В. Буренкова (2011 г., Киршеир, Турция); а также на международной конференции по математике "Functional Analysis and its Applications", (2012, Астана, Казакстан).

Результаты диссертации обсуждались с профессорами О.В. Бесовым, Х. Трибелем, В.И. Буренковым, С.Г. Самко, В.М. Кокилашвили, А.Д. Гаджиевым, М. Отелбаевым, Г.А. Калябиным, С.К. Абдуллаевым, И.А. Алиевым, А. Щербетчи, Р.М. Рзаевым, А. Гогатишвили, которым я, пользуясь случаем, выражаю свою глубокую благодарность за обсуждения, ценные замечания и поддержку.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 41 научных работах автора,приведенных в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 247 страницах, из введения, четырех глав и списка литературы, содержащих из 271 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит их четырех глав. В первой главе диссертации определяются и исследуются интегральные операторы, в том числе, максимальный оператор, интеграл Пуассона, дробно-максимальный оператор, потенциал Рисса, потенциал Бесселя, а также метагармоническая полугруппа Данкля, порожденный оператором Данкля. Первая глава состоит их восьми параграфов. В первом параграфе изложены элементы гармонического анализа, порожденные оператором Данкля.

Пусть $\alpha > -1/2$ фиксированное число и μ_α весовая Лебеговая мера на $\mathbb{R}$, заданная по

$$d\mu_\alpha(x) := \frac{1}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}|x|^{2\alpha+1}dx.$$

Для каждого $1 \le p \le \infty$ обозначим через $L_{p,\alpha}(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R}; d\mu_\alpha)$ пространства комплексно-значных функций f, измеримых на $\mathbb{R}$ таких, что

$$\|f\|_{p,\alpha} \equiv \|f\|_{L_{p,\alpha}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\mu_\alpha(x)\right)^{1/p} < \infty, \text{ если } p \in [1, \infty),$$

и

$$\|f\|_{\infty,\alpha} \equiv \|f\|_{L_{\infty,\alpha}} = ess \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \text{ если } p = \infty.$$

Для $1 \le p < \infty$ обозначим через $WL_{p,\alpha}(\mathbb{R})$ слабое пространство $L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$, определяемое как множество локально интегрируемых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{WL_{p,\alpha}} = \sup_{r>0} r\left(\mu_\alpha\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > r\}\right)^{1/p}, \text{ где } \mu_\alpha A = \int_A d\mu_\alpha(x).$$

Для $x, y \in \mathbb{R}$ оператор обобщенного сдвига Данкля определяется следующим образом

$$\tau_x f(y) = c'_\alpha \int_0^\pi f_e\left(\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\theta}\right)h_1(x,y,\theta)(\sin\theta)^{2\alpha}d\theta$$
$$+ c'_\alpha \int_0^\pi f_o\left(\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\theta}\right)h_2(x,y,\theta)(\sin\theta)^{2\alpha}d\theta, \qquad (1)$$

где $f = f_e + f_o$, f_o и f_e четная и нечетная часть f соответственно, с $c'_\alpha = \Gamma(\alpha+1)/(\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2))$, $h_1(x,y,\theta) = 1 - sgn(xy)\cos\theta$,

$$h_2(x,y,\theta) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)[1-sgn(xy)\cos\theta]}{\sqrt{x^2+y^2-2|xy|\cos\theta}}, & \text{если} \quad xy \ne 0, \\ 0, & \text{если} \quad xy = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

В первой главе диссертации, в 1.2, определена и изучена максимальная функция, порожденная оператором Данкля следующим образом

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu_\alpha B(0,r)} \int_{B(0,r)} \tau_x |f|(y) d\mu_\alpha(y).$$

В [17] нами доказана следующая теорема (см. также [18]).

Теорема 1. *1. Если* $f \in L_{1,\alpha}(\mathbb{R})$, *тогда для каждого* $\beta > 0$

$$\mu_\alpha\{x \in \mathbb{R} : M_\alpha f(x) > \beta\} \le \frac{C_1}{\beta}\int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu_\alpha(x),$$

где $C_1 > 0$ *не зависит от* f.

2. Если $f \in L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < p \le \infty$, *тогда* $M_\alpha f \in L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$ *и*

$$\|M_\alpha f\|_{p,\alpha} \le C_2 \|f\|_{p,\alpha},$$

где $C_2 > 0$ *не зависит от* f.

Теорема 2. *Для любого* $r > 0$ *и любой измеримой на* $\mathbb{R}$ *функции* f, *для которой* $suppf \subset B(0,r)$ *имеет место следующая оценка*

$$\|M_\alpha f\|_{L_{1,\alpha}(B(0,r))} \le \mu_\alpha B(0,r) + C\int_{B(0,r)} |f(x)|(1+\ln^+|f(x)|)d\mu_\alpha(x),$$

где C *не зависит от* f.

В первой главе диссертации, в 1.3, изучен интеграл Пуассона, порожденный оператором Данкля на $\mathbb{R}$, которое будем называть D-интегралом Пуассона, определяемое следующим образом

$$P_\alpha f(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(y)(\tau_x P_{t,\alpha})(-y))d\mu_\alpha(y), t > 0, x \in \mathbb{R},$$

где ядро Пуассона, порожденное преобразованием Данкля, определяется равенством

$$P_\alpha(x,t) = P_{t,\alpha}(x) = m_\alpha t(t^2 + |x|^2)^{-\frac{2\alpha+3}{2}}, t > 0, x \in \mathbb{R},$$

где $m_\alpha = 2^{\alpha+1}\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)\pi^{-1/2}$ (3)

Известно, что $U_\alpha(x,t) = (P_{t,\alpha} * f)(x)$ является решением следующей задачи

$$\begin{cases} D_\alpha U_\alpha(x,t) = 0\,,\ x \in R\,,\ t > 0 \\ U_\alpha(x,0) = f(x) \end{cases}.$$

Лемма 1. *Пусть* $f \in L_{1,\alpha}^{loc}(\mathrm{R})$*. Тогда существует постоянная* A*, не зависящая от функции* f *такая, что для любого* $x \in \mathrm{R}$ *справедливо неравенство*

$$\sup_{t>0} \left| U_\alpha(x,t) \right| \le A M_\alpha f(x).$$

Лемма 2. *Пусть* $f \in L_{1,\alpha}^{loc}(\mathrm{R})$*. Тогда существует постоянная* $C \ge 0$ *не зависящая от функции* f *такая, что для любого* $x \in \mathrm{R}$ *справедливо неравенство*

$$M_\alpha f(x) \le C \sup_{t>0} | U_\alpha(x,t) |.$$

Лемма 3. *Пусть* $f \in L_{1,\alpha}^{loc}(\mathrm{R})$,

$G_\beta(x_0) = \{(x,t) : x \in \mathrm{R}, t > 0, | x - x_0 | < \beta t\}$, $x_0 \in \mathrm{R}$, $t > 0$*. Тогда*

$$\sup_{(x,t)\in G_\beta(x_0)} | U_\alpha(x,t) | \le C_\beta M_\alpha f(x_0),$$

где постоянная $C_\beta \ge 0$ *не зависит от функции* f.

Лемма 4. *Пусть* $f \in L_{1,\alpha}^{loc}(\mathrm{R})$,

$G_\beta(x_0) = \{(x,t) : x \in \mathrm{R}, t > 0, | x - x_0 | < \beta t\}$, $x_0 \in \mathrm{R}$, $t > 0$*. Тогда существует предел*

$$\lim_{G_\beta(x_0) \ni (x,t) \to (x_0,0)} U_\alpha(x,t) = f(x_0)$$

почти всюду в R.

В 1.4 главы I изучена $L_{p,\alpha}(\mathrm{R})$ ограниченность метагармонической полугруппы Данкля.

В первой главе диссертации, в 1.5, для дробно-максимальной функции, порожденный оператором Данкля

$$M_{\beta,\alpha} f(x) = \sup_{r>0} (\mu_\alpha B(0,r))^{\frac{\beta}{2\alpha+2}-1} \int_{B(0,r)} \tau_x | f | (y) d\mu_\alpha(y), \quad 0 \le \beta < 2\alpha + 2,$$

доказана следующая теорема, в которой получены необходимые и достаточные условия ограниченности дробно-максимального оператора $M_{\beta,\alpha}$ из пространства $L_{p,\alpha}(\mathrm{R})$ в $L_{q,\alpha}(\mathrm{R})$, $1 < p < q < \infty$ и из пространства $L_{1,\alpha}(\mathrm{R})$ в слабое пространство $WL_{q,\alpha}(\mathrm{R})$, $1 < q < \infty$.

Теорема 3. 1) *Если* $p = 1$*, тогда условие* $1 - \frac{1}{q} = \frac{\beta}{2\alpha + 2}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности* $M_{\beta,\alpha}$ *из* $L_{1,\alpha}(\mathrm{R})$ *в* $WL_{q,\alpha}(\mathrm{R})$.

2) *Если* $1 < p < \frac{2\alpha + 2}{\beta}$*, тогда условие* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\beta}{2\alpha + 2}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности* $M_{\beta,\alpha}$ *из* $L_{p,\alpha}(\mathrm{R})$ *в* $L_{q,\alpha}(\mathrm{R})$.

3) *Если* $p = \frac{2\alpha + 2}{\beta}$*, тогда* $M_{\beta,\alpha}$ *ограничена из* $L_{p,\alpha}(\mathrm{R})$ *в* $L_\infty(\mathrm{R})$.

В первой главе диссертации, в 1.6, для оператора $(-D_\alpha^2)^{-\frac{\beta}{2}}$, $\beta > 0$ показано, что при $0 < \beta < 2\alpha + 2$ этот оператор реализуется как интегральный оператор со слабой особенностью (который обозначаем $I_{\beta,\alpha}$ и называем потенциал Рисса, порожденный операторам Данкля или D - потенциал Рисса).

Модифицированный D-дробный интеграл $\widetilde{I}_{\beta,\alpha} f$

$$\widetilde{I}_{\beta,\alpha} f(x) = \int_{\mathrm{R}} \left(\tau_y | x |^{\beta - 2\alpha - 2} - | y |^{\beta - 2\alpha - 2} \chi_{\complement B_1}(y) \right) f(y) d\mu_\alpha(y).$$

А именно справедлива следующая теорема

Теорема 4. *Пусть*

$$I_{\beta,\alpha} \varphi(x) = c_{\alpha,\beta} \int_{\mathrm{R}} \varphi(y) \cdot \tau_x(| y |^{\beta - 2\alpha - 2}) d\mu_\alpha(y), \quad где$$

$$c_{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + 1 - \beta / 2)}{2^{\alpha + 1 - \beta / 2} \Gamma(\beta / 2)}.$$

Тогда для любых $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathrm{R})$ *и* $0 < \beta < 2\alpha + 2$ *справедливо равенство*

$$I_{\beta,\alpha} \varphi(x) = (-D_\alpha^2)^{-\frac{\beta}{2}} \varphi(x).$$

Обозначим через $BMO_{\alpha}(\mathbb{R})$ (BMO пространство типа Данкля) множество локально интегрируемых функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{*,\alpha} = \sup_{r>0,\, x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\mu_\alpha B_r}\int_{B_r} |\tau_x f(y) - f_{B_r}(x)|d\mu_\alpha(y) < \infty,$$

где $f_{B_r}(x) = \dfrac{1}{\mu_\alpha B_r}\displaystyle\int_{B_r}\tau_x f(y)d\mu_\alpha(y).$

Для D- потенциала Рисса имеет место следующий аналог теоремы Харди-Литтлвуда-Соболева, являющийся основным результатом, в котором получены необходимые и достаточные условия для D- потенциала Рисса $I_{\beta,\alpha}$ типа Данкля, действующего ограниченно из пространства $L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$ в $L_{q,\alpha}(\mathbb{R})$, $1<p<q<\infty$ и из пространства $L_{1,\alpha}(\mathbb{R})$ в слабое пространство $WL_{q,\alpha}(\mathbb{R})$, $1<q<\infty$.

Теорема 5. 1) *Если* $p=1$, *тогда условие* $1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{\beta}{2\alpha+2}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности* $I_{\beta,\alpha}$ *из* $L_{1,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $WL_{q,\alpha}(\mathbb{R})$.

2) *Если* $1<p<\dfrac{2\alpha+2}{\beta}$, *тогда условие* $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{\beta}{2\alpha+2}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности* $I_{\beta,\alpha}$ *из* $L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $L_{q,\alpha}(\mathbb{R})$.

3) *Если* $p=\dfrac{2\alpha+2}{\beta}$, *тогда оператор* $\tilde{I}_{\beta,\alpha}$ *ограниченно действует из* $L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $BMO_{\alpha}(\mathbb{R})$.

Пространства Бесова для оператора Данкля изучались С.Абделкефи и М. Сифи, Р.Боугуила, М.Лазхари и М.Ассал, Л.Камоун. В следующей теореме доказана ограниченность дробного интегрального оператора типа Данкля $I_{\beta,\alpha}$ в пространствах Бесова типа Данкля.

Для $1\le p,\theta\le\infty$ и $0<s<1$, пространство $B^s_{p\theta,\alpha}(\mathbb{R})$ Бесова для оператора Данкля на $\mathbb{R}$ (пространство Бесов-Данкла) состоит из всех функций f в $L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$ с конечной нормой

$$\|f\|_{B^s_{p\theta,\alpha}} = \|f\|_{p,\alpha} + \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\tau_x f(\cdot) - f(\cdot)\|^\theta_{p,\alpha}}{|x|^{2\alpha+2+s\theta}} d\mu_\alpha(x)\right)^{1/\theta} < \infty.$$

Теорема 6. *Для* $1<p<q<\infty$, $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{\beta}{2\alpha+2}$, $1\le\theta\le\infty$ *и* $0<s<1$ D *- потенциал Рисса* $I_{\beta,\alpha}$ *является ограниченным из* $B^s_{p\theta,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $B^s_{q\theta,\alpha}(\mathbb{R})$. *Более того, существует такая константа* $C>0$, *что*

$$\|I_{\beta,\alpha} f\|_{B^s_{q\theta,\alpha}} \le C\|f\|_{B^s_{p\theta,\alpha}}$$

удовлетворяется для всех $f\in B^s_{p\theta,\alpha}(\mathbb{R})$.

В первой главе диссертации, в 1.7, доказана следующая неравенства, которая является основной для поточечных оценок для D- потенциала Рисса $I_{\beta,\alpha}f(x)$.

Теорема 7. *Пусть* $0<\beta<2\alpha+2$, $1\le p<\dfrac{2\alpha+2}{\beta}$ *и* $f\in L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$. *Тогда для любого* $x\in\mathbb{R}$ *верна следующая оценка*

$$|I_{\beta,\alpha}f(x)| \le (C_1+C_3)\|f\|^{\frac{\beta p}{2\alpha+2}}_{L_{p,\alpha}} \left(M_\alpha f(x)\right)^{1-\frac{\beta p}{2\alpha+2}}, \quad \text{где}$$

$$C_3 = 4\left(\frac{p(2\alpha+2)d_\alpha}{p'(2\alpha+2-p\beta)}\right)^{1/p'}.$$

Теорема 8. *Пусть* $0<\beta<2\alpha+2$. *Тогда для любой измеримой функции* $f\ge 0$ *и* $0<\theta<1$ *верны оценки*

$$I_{\beta\theta,\alpha}f(x) \le (C_4+1)\left(I_{\beta,\alpha}f(x)\right)^\theta \left(M_\alpha f(x)\right)^{1-\theta},$$

$$I_{\beta\theta,\alpha}f(x) \le (C_4+C_5)\left(M_{\beta,\alpha}f(x)\right)^\theta \left(M_\alpha f(x)\right)^{1-\theta},$$

для всех $x\in\mathbb{R}$, *где* $C_4 = 1+d_\alpha\dfrac{2^{2\alpha+2}}{2^{\beta\theta}-1}$, $C_5 = \dfrac{2^{2\alpha+2-\beta}d_\alpha^{1-\frac{\beta}{2\alpha+2}}}{1-2^{\beta\theta-\beta}}$.

Теорема 9. *Пусть* $0<\beta<\lambda$, $1<p<\dfrac{\lambda}{\beta}$, $1\le r\le\infty$, *и* $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\beta}{\lambda}+\dfrac{\beta p}{\lambda r}$. *Тогда для любого* $f\in L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$ *и* $M_{\frac{\lambda}{p},\alpha}f\in L_{r,\alpha}(\mathbb{R})$ *верна следующая оценка*

$$\|I_{\beta,\alpha} f\|_{L_{q,\alpha}} \le (C_1 + C_2) A_p^{1-\frac{\beta p}{\lambda}} \|M_{\lambda/p,\alpha} f\|_{L_{r,\alpha}}^{\frac{\beta p}{\lambda}} \|f\|_{L_{p,\alpha}}^{1-\frac{\beta p}{\lambda}}.$$

Теорема 10. *Пусть* $0 < \beta < 2\alpha + 2$, $f \in L_{p,\alpha}(\mathrm{R})$, $1 < p < \frac{2\alpha + 2}{\beta}$. *Тогда*

$$\|I_{\beta\theta,\alpha} f\|_{L_{r,\alpha}} \le (C_4 + 1) A_p^{1-\theta} \|I_{\beta,\alpha} |f|\|_{L_{q,\alpha}}^{\theta} \|f\|_{L_{p,\alpha}}^{1-\theta}$$

и

$$\|I_{\beta\theta,\alpha} f\|_{L_{r,\alpha}} \le (C_4 + C_5) A_p^{1-\theta} \|M_{\beta,\alpha} f\|_{L_{q,\alpha}}^{\theta} \|f\|_{L_{p,\alpha}}^{1-\theta},$$

где $0 < \theta < 1$, $0 < q \le \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{p}$.

В первой главе диссертации, в 1.8, определен и изучен потенциал Бесселя, порожденный оператором Данкля ($\equiv D$-потенциала Бесселя). А именно, рассмотрен оператор $(I - D_\alpha^2)^{-\frac{\beta}{2}}$, определенный в образах Данкля как

$$(I - D_\alpha^2)^{-\frac{\beta}{2}} f = F_\alpha^{-1}(1+\xi^2)^{-\frac{\beta}{2}} F_\alpha f.$$

Показано, что он реализуется в виде интегрального оператора типа свертки, порожденной оператором обобщенного сдвига Данкля.

Следовательно, D-потенциал Бесселя определен следующим образом.

$$J_{\beta,\alpha} f(x) = (G_{\beta,\alpha} * f)(x) = \int_{\mathrm{R}} \tau_x(G_{\beta,\alpha}(y)) \cdot f(y) d\mu_\alpha(y),$$

где ядро D-потенциала Бесселя

$$G_{\beta,\alpha}(x) = c_\alpha \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{\beta}{2})} \int_0^\infty e^{-t-\frac{|x|^2}{t}} \cdot t^{\beta/2-\alpha-1} \frac{dt}{t}, \quad x \in \mathrm{R},$$

где $c_\alpha = (2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1))^{-2}$.

Из определения оператора $(I - D_\alpha^2)^{-\frac{\beta}{2}}$ следует, что

$$J_{\beta,\alpha} f(x) = (I - D_\alpha^2)^{-\frac{\beta}{2}} f, \quad f \in \mathfrak{D}(\mathrm{R}), \ \beta > 0,$$

т.е. оператор $J_{\beta,\alpha}$ реализует отрицательные степени оператора $I - D_\alpha^2$.

Отметим, что для D-потенциала Бесселя имеет место следующее полугрупповое свойство

$$J_{\beta,\alpha} J_{\gamma,\alpha} = J_{\beta+\gamma,\alpha}, \quad \beta > 0, \gamma > 0.$$

Для D-потенциала Бесселя имеет место следующий аналог теоремы Харди-Литтлвуда-Соболева, являющийся основным результатом, в котором получены достаточные условия для D-потенциала Бесселя $J_{\beta,\alpha}$, действующего ограниченно из пространства $L_{p,\alpha}(\mathrm{R})$ в $L_{q,\alpha}(\mathrm{R})$, $1 < p < q < \infty$ и из пространства $L_{p,\alpha}(\mathrm{R})$ в пространство $L_{p,\alpha}(\mathrm{R})$, $1 \le p \le \infty$.

А именно доказана следующая теорема.

Теорема 11. *1) Если* $1 \le p \le \infty$, *то оператор* $J_{\beta,\alpha}$ *ограниченно действует из* $L_{p,\alpha}(\mathrm{R})$ *в* $L_{p,\alpha}(\mathrm{R})$. *Более того,*

$$\|J_{\beta,\alpha} f\|_{L_{p,\alpha}} \le \|f\|_{L_{p,\alpha}}.$$

2) Если $0 < \beta < 2\alpha + 2$, $1 < p < \frac{2\alpha + 2}{\beta}$ *и* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\beta}{2\alpha + 2}$, *тогда оператор* $J_{\beta,\alpha}$ *ограниченно действует из* $L_{p,\alpha}(\mathrm{R})$ *в* $L_{q,\alpha}(\mathrm{R})$. *Более того,*

$$\|J_{\beta,\alpha} f\|_{L_{q,\alpha}} \le C_1 \|f\|_{L_{p,\alpha}}.$$

3) Если $p = 1$, $1 - \frac{1}{q} = \frac{\beta}{2\alpha + 2}$, *тогда оператор* $J_{\beta,\alpha}$ *ограниченно действует из* $L_{1,\alpha}(\mathrm{R})$ *в* $WL_{q,\alpha}(\mathrm{R})$. *Более того,*

$$\|J_{\beta,\alpha} f\|_{WL_{q,\alpha}} \le C_1 \|f\|_{L_{1,\alpha}}.$$

4) Если $p = \frac{2\alpha + 2}{\beta}$, $q = \infty$, *тогда оператор* $J_{\beta,\alpha}$ *ограниченно действует из* $L_{p,\alpha}(\mathrm{R})$ *в* $L_\infty(\mathrm{R})$. *Более того,*

$$\|J_{\beta,\alpha} f\|_{L_\infty} \le C_2 \|f\|_{L_{p,\alpha}}.$$

5) *Если* $1 \le p \le q \le \infty$, $\beta > (2\alpha + 2)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, *тогда оператор* $J_{\beta,\alpha}$ *ограниченно действует из* $L_{p,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $L_{q,\alpha}(\mathbb{R})$. *Более того,*

$$\|J_{\beta,\alpha} f\|_{L_{q,\alpha}} \le C_1 \|f\|_{L_{p,\alpha}}.$$

Вторая глава, посвященная весовым оценкам интегральных операторов, порожденных оператором Данкля, состоит из четырех параграфов. В первом и втором параграфе получены весовые оценки для D-максимальных операторов и D-дробно-максимальных операторов соответственно. В третьем параграфе доказан аналог теоремы Велланда весовых оценок для D- потенциала Рисса.

Через $L_{p,w,\alpha}(\mathbb{R})$ обозначим множество измеримых на $\mathbb{R}$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{p,w,\alpha}} \equiv \|f\|_{p,w,\alpha;\mathbb{R}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(x) d\mu_\alpha(x)\right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty.$$

Определение 1. *Скажем, что весовая функция* w *принадлежит классу* $A_{p,\alpha}$ *для* $1 < p < \infty$, *если*

$$\sup_{x,r}\left(|B(x,r)|_\alpha^{-1} \int_{B(x,r)} w(y) d\mu_\alpha(y)\right)\left(|B(x,r)|_\alpha^{-1} \int_{B(x,r)} w^{-\frac{1}{p-1}}(y) d\mu_\alpha(y)\right)^{p-1} < \infty$$

и w *принадлежит классу* $A_{1,\alpha}$, *если существует положительная постоянная* C *такая, что для любого* $x \in \mathbb{R}$ *и* $r > 0$

$$|B(x,r)|_\alpha^{-1} \int_{B(x,r)} w(y) d\mu_\alpha(y) \le C \operatorname{ess\,inf}_{y \in B(x,r)} w(y).$$

Отметим, что класс $A_{p,\alpha}$ является аналогом класса Макенхаупта и обладает свойствами аналогичные классам Макенхаупта. Следующая теорема для D-максимальной функций $M_\alpha f$ является аналогом теоремы Макенхаупта.

Теорема 12. 1. *Если* $f \in L_{1,w,\alpha}(R)$ *и* $w \in A_{1,\alpha}$, *тогда* $M_\alpha f \in WL_{1,w,\alpha}(R)$ *и* $\|M_\alpha f\|_{WL_{1,w,\alpha}} \le C_{1,w,\alpha}\|f\|_{L_{1,w,\alpha}}$,

где $C_{1,w,\alpha}$ *зависят только от* w, α.

2. *Если* $f \in L_{p,w,\alpha}(R)$ *и* $w \in A_{p,\alpha}$, $1 < p < \infty$, *тогда* $M_\alpha f \in L_{p,w,\alpha}(R)$ *и*

$$\|M_\alpha f\|_{L_{p,w,\alpha}} \le C_{p,w,\alpha}\|f\|_{L_{p,w,\alpha}},$$

где $C_{p,w,\alpha}$ *зависят только от* w, p, α.

Из теоремы 12, как приложение, получаем следующее следствие об ограниченности метагармонических полугрупп Данкля M_t^α и интеграла Пуассона $P_{t,\alpha} * f$ в весовых пространтствах $L_{p,w,\alpha}(\mathbb{R})$:

Следствие 1. *1. Если* $f \in L_{1,w,\alpha}(R)$ *и* $w \in A_{1,\alpha}$, *тогда для каждого* $t > 0$ $M_t^\alpha, P_{t,\alpha} * f \in WL_{1,w,\alpha}(R)$ *и*

$$\left\|\sup_{t>0} |M_t^\alpha f|\right\|_{WL_{1,w,\alpha}} \le C\left\|\sup_{t>0} |P_{t,\alpha} * f|\right\|_{WL_{1,w,\alpha}} \le C_1\|f\|_{L_{1,w,\alpha}},$$

где C *и* C_1 *зависят только от* w, α.

2. Если $f \in L_{p,w,\alpha}(R)$ *и* $w \in A_{p,\alpha}$, $1 < p < \infty$, *тогда* $M_t^\alpha, P_{t,\alpha} * f \in L_{p,w,\alpha}(R)$ *и*

$$\left\|\sup_{t>0} |M_t^\alpha f|\right\|_{L_{p,w,\alpha}} \le C\left\|\sup_{t>0} |P_{t,\alpha} * f|\right\|_{L_{p,w,\alpha}} \le C_2\|f\|_{L_{p,w,\alpha}},$$

где C *и* C_2 *зависят только от* w, p, α.

В главе II, в 2.1, получены ограниченность метагармонической полугруппы Данкля M_t^α в весовых пространтствах $L_{p,w,\alpha}(\mathbb{R})$. А также для D-потенциала Бесселя $J_{\beta,\alpha} f$ имеет место следующая теорема, которая дает интегральное представление через метагармонические полугруппы Данкля M_t^α в весовых пространтствах $L_{p,w,\alpha}(\mathbb{R})$:

Теорема 13. *Пусть* $f \in L_{p,w,\alpha}(\mathrm{R})$ *и* $w \in A_{p,\alpha}$, $1 \le p < \infty$. *Тогда для каждого* $x \in \mathrm{R}$,

$$J_{\beta,\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\beta-1} M_t^\alpha f(x) \mathrm{d}t. \qquad (4)$$

В силу теоремы 13 из (4) получаем следующий результат.

Следствие 2. *Пусть* $f \in L_{p,w,\alpha}(\mathrm{R})$ *и* $w \in A_{p,\alpha}$, $1 \le p < \infty$. *Тогда для каждого* $x \in \mathrm{R}$, *имеет место следующее равенство:*

$$J_{\beta,\alpha}(M_t^\alpha f)(x) = M_t^\alpha (J_{\beta,\alpha} f)(x), t > 0.$$

Определение 2. *Скажем, что весовая функция* w *принадлежит классу* $A_{p,q,\alpha}$ *для* $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, *если*

$$\sup_{x,r} (|B(x,r)|_\alpha^{-1} \int_{B(x,r)} w(y)^q d\mu_\alpha(y))^{1/q} (|B(x,r)|_\alpha^{-1} \int_{B(x,r)} w^{-p'}(y) d\mu_\alpha(y))^{1/p'} < \infty$$

и w *принадлежит классу* $A_{1,q,\alpha}$, *если существует положительная постоянная* C *такая, что для любого* $x \in \mathrm{R}$ *и* $r > 0$

$$(|B(x,r)|_\alpha^{-1} \int_{B(x,r)} w(y)^q d\mu_\alpha(y))^{1/q} (\operatorname*{ess\,sup}_{y \in B(x,r)} \frac{1}{w(y)}) \le C.$$

Отметим, что класс $A_{p,q,\alpha}$ является аналогом класса Макенхаупта-Уидена и обладает свойствами аналогичными классам Макенхаупта-Уидена. Следующая теорема для D-дробно-максимальной функции $M_{\beta,\alpha} f$ является аналогом теоремы Макенхаупта-Уидена.

Теорема 14. 1. *Пусть* $0 < \beta < 2\alpha + 2$, $q = \dfrac{2\alpha + 2}{2\alpha + 2 - \beta}$ *и* $w \in A_{1,\alpha}(\mathrm{R})$. *Тогда имеет место следующее неравенство*

$$\int_{\left\{x \in \mathrm{R} : M_{\beta,\alpha}(fw^\beta)(x) > \lambda\right\}} w(x)\, d\mu_\alpha(x) \le C\lambda^{-q} \left(\int_{\mathrm{R}} |f(x)|\, w(x)\, d\mu_\alpha(x) \right)^q,$$

где постоянная C *не зависит от* f *и* $\lambda > 0$.

2. *Пусть* $0 < \beta < 2\alpha + 2$, $1 < p < \dfrac{2\alpha + 2}{\beta}$, $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\beta}{2\alpha + 2}$, $w \in A_{1+\frac{q}{p'},\alpha}(\mathrm{R})$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$, $f \in L_{p,w,\alpha}(\mathrm{R})$. *Тогда имеет место следующее неравенство*

$$\left(\int_{\mathrm{R}} \left(M_{\beta,\alpha}(fw^\beta)(x) \right)^q w(x) d\mu_\alpha(x) \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_{\mathrm{R}} |f(x)|^p\, w(x) d\mu_\alpha(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

где постоянная C *не зависит от* f.

В главе II, в 2.3, с помощью аналога теоремы Велланда получены весовые оценки для D-потенциала Рисса.

Теорема 15. *Положим, что* $1 < p < \dfrac{2\alpha + 2}{\beta}$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\beta}{2\alpha + 2}$. *Тогда неравенство*

$$\left(\int_{\mathrm{R}} \left| I_{\beta,\alpha}(fw^\beta)(x) \right|^q w(x) d\mu_\alpha(x) \right)^{\frac{1}{q}} \le c \left(\int_{\mathrm{R}} |f(x)|^p\, w(x) d\mu_\alpha(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

справедливо для всех $f \in L_{p,w,\alpha}(\mathrm{R})$ *с постоянной* $c > 0$, *не зависящей от* f *тогда и только тогда если*

$$w \in A_{\beta,\alpha}(\mathrm{R}), \qquad \beta = 1 + \frac{q}{p'}.$$

В 2.4 второй главы установлены два неравенства типа Стейна-Вейса для D- потенциала Рисса $I_{\beta,\alpha} f$ и получены необходимые и достаточные условия на параметры для ограниченности $I_{\beta,\alpha}$ из пространства $L_{p,|x|^\sigma,\alpha}(\mathrm{R})$ в $L_{q,|x|^{-\lambda},\alpha}(\mathrm{R})$, $1 < p \le q < \infty$, и из пространства $L_{1,|x|^\sigma,\alpha}(\mathrm{R})$ в слабое пространство $WL_{q,|x|^{-\lambda},\alpha}(\mathrm{R})$, $1 < q < \infty$. В предельном случае $p = \dfrac{Q}{\beta}, Q = 2\alpha + 2$ доказано, что модифицированный D-потенциал Рисса $\tilde{I}_{\beta,\alpha}$ ограничен из пространства $L_{p,|x|^\sigma,\alpha}(\mathrm{R})$ в весовое *BMO* пространство $BMO_{|x|^{-\lambda},\alpha}(\mathrm{R})$. Как применение, получена ограниченность оператора $I_{\beta,\alpha}$ из D-

пространства Бесова $B^s_{p\theta,\beta,\alpha}(\mathrm{R})$ в $B^s_{q\theta,-\lambda,\alpha}(\mathrm{R})$, $1<p<q<\infty$, $1/p-1/q=(\beta-\sigma-\lambda)/Q$, $1\le\theta\le\infty$ и $0<s<1$.

Теорема 16. *Пусть* $0<\beta<Q$, $1\le p\le q<\infty$, $\sigma<Q/p'$ ($\sigma\le 0$, *если* $p=1$), $\lambda<Q/q$ ($\lambda\le 0$, *если* $q=\infty$), $\beta\ge\sigma+\lambda\ge 0$ ($\sigma+\lambda>0$, *если* $p=q$).

1) Если $1<p<Q/(\beta-\sigma-\lambda)$, *тогда условие* $1/p-1/q=(\beta-\sigma-\lambda)/Q$ *является необходимым и достаточным для ограниченности оператора* $I_{\beta,\alpha}$ *из* $L_{p,|x|^\sigma,\alpha}(\mathrm{R})$ *в* $L_{q,|x|^{-\lambda},\alpha}(\mathrm{R})$.

2) Если $p=1$, *тогда условие* $1-1/q=(\beta-\sigma-\lambda)/Q$ *является необходимым и достаточным для ограниченности оператора* $I_{\beta,\alpha}$ *из* $L_{1,|x|^\sigma,\alpha}(\mathrm{R})$ *в* $WL_{q,|x|^{-\lambda},\alpha}(\mathrm{R})$.

3) Если $1<p=Q/(\beta-\sigma-\lambda)$, *тогда оператор* $\widetilde{I}_{\beta,\alpha}$ *ограничен из* $L_{p,|x|^\sigma,\alpha}(\mathrm{R})$ *в* $BMO_{|x|^{-\lambda},\alpha}(\mathrm{R})$.

В теореме 16 взяв $p=q$, $\sigma=0$ или $p=q$, $\lambda=0$ получим следующее

Следствие 3. *1) Пусть* $0<\beta<Q/p$, $1<p<\infty$, *тогда* $I_{\beta,\alpha}$ *ограничен из* $L_{p,\alpha}(\mathrm{R})$ *в* $L_{p,|x|^{-\beta},\alpha}(\mathrm{R})$.

2) Пусть $0<\beta<Q/p'$, $1<p<\infty$, *тогда* $I_{\beta,\alpha}$ *ограничен из* $L_{p,|x|^\beta,\alpha}(\mathrm{R})$ *в* $L_{p,\alpha}(\mathrm{R})$.

Третья глава, посвященная Морри оценкам интегральных операторов, порожденных оператором Данкля, состоит из пяти параграфов. В первом параграфе главы III изучены некоторые вложения между D - Морри пространствами и модифицированными D - Морри пространствами.

Определение 3. *Пусть* $1\le p<\infty$, $0\le\lambda\le 2\alpha+2$ *и* $[t]_1=\min\{1,t\}$, $t>0$. *Обозначим через* $L_{p,\lambda,\alpha}(\mathrm{R})$ *пространство Морри (*$\equiv$ D *-Морри пространство) и через* $\widetilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathrm{R})$ *модифицированное пространство Морри (*$\equiv$ *модифицированное* D *-Морри пространство), порожденный оператором Данкля, как множество локально интегрируемых функций* $f(x)$, $x\in\mathrm{R}$, *с конечной нормой*

$$\|f\|_{L_{p,\lambda,\alpha}}:=\sup_{x\in\mathrm{R},t>0}\left(t^{-\lambda}\int_{B(0,t)}\tau_x\,|f|^p\,(y)d\mu_\alpha(y)\right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{\widetilde{L}_{p,\lambda,\alpha}}:=\sup_{x\in\mathrm{R},t>0}\left([t]_1^{-\lambda}\int_{B(0,t)}\tau_x\,|f|^p\,(y)d\mu_\alpha(y)\right)^{1/p},$$

соответственно.

Лемма 11. *Пусть* $1\le p<\infty$, $0\le\lambda\le 2\alpha+2$. *Тогда*

$$\widetilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathrm{R})=L_{p,\lambda,\alpha}(\mathrm{R})\cap L_{p,\alpha}(\mathrm{R}),$$

и

$$\max\left\{\|f\|_{L_{p,\lambda,\alpha}},\|f\|_{L_{p,\alpha}}\right\}\le\|f\|_{\widetilde{L}_{p,\lambda,\alpha}}\le\max\left\{\|f\|_{L_{p,\lambda,\alpha}},4\|f\|_{L_{p,\alpha}}\right\}.$$

В D -Морри пространствах и модифицированных D -Морри пространствах верны следующие вложения.

Лемма 12. *Пусть* $0\le\lambda<2\alpha+2$ *и* $0\le\beta<2\alpha+2-\lambda$. *Тогда для* $p=\dfrac{2\alpha+2-\lambda}{\beta}$

$$L_{p,\lambda,\alpha}(\mathrm{R})\subset L_{1,2\alpha+2-\beta,\alpha}(\mathrm{R}) \quad \text{и} \quad \|f\|_{L_{1,2\alpha+2-\beta,\alpha}}\le b_\alpha^{1/p'}\|f\|_{L_{p,\lambda,\alpha}},$$

где $1/p+1/p'=1$.

Лемма 13. *Пусть* $0\le\lambda<2\alpha+2$ *и* $0\le\beta<2\alpha+2-\lambda$. *Тогда для* $\dfrac{2\alpha+2-\lambda}{\beta}\le p\le\dfrac{2\alpha+2}{\beta}$

$$\widetilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathrm{R})\subset_{\succ} L_{1,2\alpha+2-\beta,\alpha}(\mathrm{R}) \quad \text{и} \quad \|f\|_{L_{1,2\alpha+2-\beta,\alpha}}\le b_\alpha^{1/p'}\|f\|_{\widetilde{L}_{p,\lambda,\alpha}}.$$

Определение 4. *Пусть* $1\le p<\infty$, $0\le\lambda\le 2\alpha+2$. *Обозначим через* $WL_{p,\lambda,\alpha}(\mathrm{R})$ *слабое* D *-Морри пространство и через* $W\widetilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathrm{R})$ *слабое модифицированное* D *-Морри пространство, как множества локально интегрируемых функций* $f(x)$, $x\in\mathrm{R}$ *с конечной нормой, соответственно*

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda,\alpha}}:=\sup_{r>0} r\sup_{x\in\mathrm{R},t>0}\left(t^{-\lambda}\mu_\alpha\{y\in B(0,t):\tau_x\,|f|\,(y)>r\}\right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{W\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}} := \sup_{r>0} r \sup_{x\in\mathbb{R},t>0} \left([t]_1^{-\lambda} \mu_\alpha \{y \in B(0,t) : \tau_x |f|(y) > r\}\right)^{1/p}.$$

Заметим, также

$WL_{p,\alpha}(\mathbb{R}) \subset_{\succ} W\tilde{L}_{p,0,\alpha}(\mathbb{R}) = WL_{p,0,\alpha}(\mathbb{R})$,

$\|f\|_{W\tilde{L}_{p,0,\alpha}} = \|f\|_{WL_{p,0,\alpha}} \le 4\|f\|_{WL_{p,\alpha}}$.

$W\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R}) \subset_{\succ} WL_{p,\alpha}(\mathbb{R})$ и $\|f\|_{WL_{p,\alpha}} \le \|f\|_{W\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}}$,

$W\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R}) \subset_{\succ} WL_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ и $\|f\|_{WL_{p,\lambda,\alpha}} \le \|f\|_{W\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}}$.

В третьей главе, в 3.2, получена ограниченность D-дробно-максимального оператора в D - Морри пространствах.

Предложение 1. *Пусть* $0 \le \lambda < 2\alpha + 2$ *и* $0 \le \beta < 2\alpha + 2 - \lambda$. *Тогда оператор* $M_{\beta,\alpha}$ *ограничен из* $L_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $L_\infty(\mathbb{R})$ *для* $p = \frac{2\alpha+2-\lambda}{\beta}$.

Кроме того,

$$\|M_{\beta,\alpha} f\|_{L_\infty} = b_\alpha^{\frac{\beta}{2\alpha+2}-1} \|f\|_{L_{1,2\alpha+2-\beta,\alpha}} \le b_\alpha^{\frac{\beta}{2\alpha+2}-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,\lambda,\alpha}}.$$

Следующая теорема является основным результатом параграфа 3.2, в котором получены необходимые и достаточные условия для дробно-максимального оператора $M_{\beta,\alpha}$ типа Данкля об ограниченности из пространства $L_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ в $L_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < p < q < \infty$ и из пространства $L_{1,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ в слабое пространство $WL_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < q < \infty$.

Теорема 17. *Пусть* $0 \le \beta < 2\alpha + 2$, $0 \le \lambda < 2\alpha + 2$ *и* $1 \le p \le \frac{2\alpha+2-\lambda}{\beta}$.

1) *Если* $p = 1$, *тогда условие* $1 - \frac{1}{q} = \frac{\beta}{2\alpha+2-\lambda}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности* $M_{\beta,\alpha}$ *из* $L_{1,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $WL_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$.

2) *Если* $1 < p < \frac{2\alpha+2-\lambda}{\beta}$, *тогда условие* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\beta}{2\alpha+2-\lambda}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности* $M_{\beta,\alpha}$ *из* $L_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $L_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$.

3) *Если* $p = \frac{2\alpha+2-\lambda}{\beta}$, *тогда* $M_{\beta,\alpha}$ *является ограниченным из* $L_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $L_\infty(\mathbb{R})$.

В третьей главе, в 3.3, получена ограниченность D-дробно-максимального оператора в модифицированных D-Морри пространствах.

Предложение 2. $1 \le p < \infty$, $0 \le \lambda < 2\alpha + 2$, $0 \le \beta < 2\alpha + 2 - \lambda$. *Тогда оператор* $M_{\beta,\alpha}$ *ограничен из* $\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $L_\infty(\mathbb{R})$ *для* $\frac{2\alpha+2-\lambda}{\beta} \le p \le \frac{2\alpha+2}{\beta}$. *Кроме того,*

$$\|M_{\beta,\alpha} f\|_{L_\infty} = b_\alpha^{\frac{\beta}{2\alpha+2}-1} \|f\|_{\tilde{L}_{1,2\alpha+2-\beta,\alpha}} \le b_\alpha^{\frac{\beta}{2\alpha+2}-\frac{1}{p}} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}}.$$

Теорема 18. *Пусть* $0 \le \lambda < 2\alpha + 2$, $1 \le p < \infty$ *и* $f \in \tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$.

1) *Если* $1 < p < \infty$, *то* $M_\alpha f \in \tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *и*

$\|M_\alpha f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}} \le \overline{C}_{p,\lambda,\alpha} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}}$,

где постоянная $\overline{C}_{p,\lambda,\alpha}$ *зависит только от* p, α *и* λ.

2) *Если* $p = 1$, *то* $M_\alpha f \in W\tilde{L}_{1,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *и*

$\|M_\alpha f\|_{W\tilde{L}_{1,\lambda,\alpha}} \le \overline{C}_{\lambda,\alpha} \|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda,\alpha}}$,

где постоянная $\overline{C}_{\lambda,\alpha}$ *зависит только от* α *и* λ.

Следующая теорема является основным результатом параграфа 3.3, в котором получены необходимые и достаточные условия дробно-максимального оператора $M_{\beta,\alpha}$ типа Данкля для ограниченности из пространства $\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ в $\tilde{L}_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < p < q < \infty$ и из пространства $\tilde{L}_{1,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ в слабое пространство $W\tilde{L}_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < q < \infty$.

Теорема 19. *Пусть* $0 \le \beta < 2\alpha + 2$, $0 \le \lambda < 2\alpha + 2$, $1 \le p \le \frac{2\alpha + 2 - \lambda}{\beta}$ *и* $f \in \tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$.

1) *Если* $1 < p < \frac{2\alpha + 2 - \lambda}{\beta}$, *тогда условие* $\frac{\beta}{2\alpha + 2} \le \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \le \frac{\beta}{2\alpha + 2 - \lambda}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности* $M_{\beta,\alpha}$ *из* $\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $\tilde{L}_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$.

2) *Если* $p = 1$, *тогда условие* $\frac{\beta}{2\alpha + 2} \le 1 - \frac{1}{q} \le \frac{\beta}{2\alpha + 2 - \lambda}$, *является необходимым и достаточным для ограниченности* $M_{\beta,\alpha}$ *из* $\tilde{L}_{1,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $W\tilde{L}_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$.

3) *Если* $\frac{2\alpha + 2 - \lambda}{\beta} \le p \le \frac{2\alpha + 2}{\beta}$, *тогда* $M_{\beta,\alpha}$ *является ограниченным из* $\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $L_\infty(\mathbb{R})$.

Следующая теорема является основным результатом параграфа 3.4, в котором получены необходимые и достаточные условия для D-потенциала Рисса $I_{\beta,\alpha}$ из пространства $L_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ в $L_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < p < q < \infty$ и из пространства $L_{1,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ в слабое пространство $WL_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < q < \infty$.

Теорема 20. *Пусть* $0 < \beta < 2\alpha + 2$, $0 \le \lambda < 2\alpha + 2$ *и* $1 \le p \le \frac{2\alpha + 2 - \lambda}{\beta}$.

1) *Если* $p = 1$, *тогда условие* $1 - \frac{1}{q} = \frac{\beta}{2\alpha + 2 - \lambda}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности* $I_{\beta,\alpha}$ *из* $L_{1,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $WL_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$.

2) *Если* $1 < p < \frac{2\alpha + 2 - \lambda}{\beta}$, *тогда условие* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\beta}{2\alpha + 2 - \lambda}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности* $I_{\beta,\alpha}$ *из* $L_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $L_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$.

3) *Если* $p = \frac{2\alpha + 2 - \lambda}{\beta}$, *тогда* $\tilde{I}_{\beta,\alpha}$ *является ограниченным из* $L_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $BMO_\alpha(\mathbb{R})$.

Следующая теорема является основным результатом параграфа 3.5, в котором получены необходимые и достаточные условия для D-потенциала Рисса $I_{\beta\alpha}$ из пространства $\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ в $\tilde{L}_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < p < q < \infty$ и из пространства $\tilde{L}_{1,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ в слабое пространство $W\tilde{L}_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$, $1 < q < \infty$.

Теорема 21. *Пусть* $0 < \beta < 2\alpha + 2$, $0 \le \lambda < 2\alpha + 2$ *и* $1 \le p \le \frac{2\alpha + 2 - \lambda}{\beta}$.

1) *Если* $p = 1$, *тогда условие* $\frac{\beta}{2\alpha + 2} \le 1 - \frac{1}{q} \le \frac{\beta}{2\alpha + 2 - \lambda}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности* $I_{\beta,\alpha}$ *из* $\tilde{L}_{1,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $W\tilde{L}_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$.

2) *Если* $1 < p < \frac{2\alpha+2-\lambda}{\beta}$, *тогда условие* $\frac{\beta}{2\alpha+2} \le \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \le \frac{\beta}{2\alpha+2-\lambda}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности* $I_{\beta,\alpha}$ *из* $\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $\tilde{L}_{q,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$.

3) *Если* $\frac{2\alpha + 2 - \lambda}{\beta} \le p \le \frac{2\alpha + 2}{\beta}$, *то* $\tilde{I}_{\beta,\alpha}$ *является ограниченным из* $\tilde{L}_{p,\lambda,\alpha}(\mathbb{R})$ *в* $BMO_\alpha(\mathbb{R})$.

Четвертая глава, посвященная Морри оценкам интегральных операторов, определенных на группе Гейзенберга, состоит из семи параграфов. В первом параграфе изложены элементы гармонического анализа и функционального пространства на группе Гейзенберга.

Пусть H^n $2n+1$-мерная группа Гейзенберга $\mathrm{H}^n = \mathrm{C}^n \times \mathrm{R}$, с произведением

$$(z,t)\cdot(w,s) = (z+w, t+s+2Im\ (z\cdot\overline{w})),$$

где $z\cdot\overline{w} = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j$. Обратный элемент от $u=(z,t)$ определяется как $u^{-1}=(-z,-t)$ в H^n. Определим однопараметрическую дилатацию на H^n для $r>0$, при $\delta_r(z,t)=(rz,r^2t)$. Эта дилатация является группой автоморфизмов и $Q=2n+2$ является однородной размерностью в H^n. Однородная норма H^n задается по

$$|(z,t)| = (|z|^2 + |t|)^{1/2}.$$

С этой нормой определим шар Гейзенберга с центром в $u=(z,t)$, с радиусом r при $B(u,r)=\{v\in\mathrm{H}^n : |u^{-1}v|<r\}$ и обозначим через $B_r = B(0,r) = \{v\in\mathrm{H}^n : |v|<r\}$ открытый шар с радиусом r и центром в $0=(0,\ldots,0)\in\mathrm{R}^{2n+1}$, являющийся единичным элементом на группе Гейзенберга H^n. Объем шара $B(u,r)$ равен $C_Q r^Q$, где C_Q объем шара B_1.

Применим координаты $u=(z,t)=(x+iy,t)$ для точек в H^n. Левоинвариантные векторные поля X_j, Y_j и T на H^n равен $\frac{\partial}{\partial x_j}$, $\frac{\partial}{\partial y_j}$ и $\frac{\partial}{\partial t}$ задаются соответственно следующим образом

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j\frac{\partial}{\partial t},\ Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2x_j\frac{\partial}{\partial t},\ T = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Эти $2n+1$ векторные поля являются базисом для алгебр Ли в H^n с соотношением коммутации $[Y_j, X_j] = 4T$ для $j=1,\ldots,n$, и все другие коммутаторы равны 0. Определим Лебеговы пространства на H^n

$$L_p \equiv L_p(\mathrm{H}^n) = \left\{ f : \|f\|_p = \left(\int_{\mathrm{H}^n} |f(u)|^p\ dV(u) \right)^{1/p} < \infty \right\},\ 1\le p<\infty.$$

Если $p=\infty$, $\quad L_\infty(\mathrm{H}^n) = \{f : \|f\|_\infty = ess \sup_{u\in\mathrm{H}^n} |f(u)| < \infty\}$.

Отметим, что мера Лебега $dV(u) = dzdt$ является мерой Хаара на H^n. Слабое L_p пространство $WL_p(\mathrm{H}^n)$, $1\le p<\infty$ определяется как множество локально интегрируемых функций f с конечной нормой $\|f\|_{WL_p} = \sup_{r>0} r \left| \{u\in\mathrm{H}^n : |f(u)|>r\} \right|^{1/p}$.

Определение 5. *Пусть* $1\le p<\infty$, $0\le\lambda\le Q$, $[t]_1 = \min\{1,t\}$. *Обозначим через* $L_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *пространство Морри и через* $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *модифицированное пространство Морри, т.е. множество локально интегрируемых функций* $f(u)$, $u\in\mathrm{H}^n$ *с конечной нормой*

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}} = \sup_{u\in\mathrm{H}^n, t>0} \left(t^{-\lambda} \int_{B(u,t)} |f(v)|^p\ dV(v) \right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} = \sup_{u\in\mathrm{H}^n, t>0} \left([t]_1^{-\lambda} \int_{B(u,t)} |f(v)|^p\ dV(v) \right)^{1/p},$$

соответственно.

Определение 6. *Пусть* $1\le p<\infty$, $0\le\lambda\le Q$. *Обозначим через* $WL_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *слабое пространство Морри и через* $W\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *слабое модифицированное пространство Морри, пространства локально суммируемых функций* $f(u)$, $u\in\mathrm{H}^n$ *с конечной нормой*

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}} = \sup_{r>0} r \sup_{u\in\mathrm{H}^n, t>0} \left(t^{-\lambda} \left| \{v\in B(u,t) : |f(v)|>r\} \right| \right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{W\tilde{L}_{p,\lambda}} = \sup_{r>0} r \sup_{u\in\mathrm{H}^n, t>0} \left([t]_1^{-\lambda} \left| \{v\in B(u,t) : |f(v)|>r\} \right| \right)^{1/p},$$

соответственно.

В 4.2 четвертой главы изучен дробно-максимальный оператор на группе Гейзенберга в пространствах Морри.

В пространствах Морри $L_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ верно следующее вложение.

Лемма 14. *Пусть* $0 \le \lambda < Q$ *и* $0 \le \beta < Q-\lambda$. *Тогда для* $p = \dfrac{Q-\lambda}{\beta}$

$$L_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n) \subset L_{1,Q-\beta}(\mathrm{H}^n) \text{ и } \| f \|_{L_{1,Q-\beta}} \le v_n^{1/p'} \| f \|_{L_{p,\lambda}},$$

где $1/p + 1/p' = 1$.

Пусть функция $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{H}^n)$, т.е. интегрируема на любом шаре $B(u,r) \subset \mathrm{H}^n$. Дробно-максимальная функция $M_\beta f$, $0 \le \beta < Q$ от f определяется следующим образом

$$M_\beta f(u) = \sup_{r>0} |B(u,r)|^{-1+\frac{\beta}{Q}} \int_{B(u,r)} |f(v)|\, dV(v),$$

где $dV(v)$ мера Хаара на H^n. Дробно-максимальная функция $M_\beta f$ совпадает для $\beta = 0$ с максимальной функцией Харди-Литтлвуда $Mf \equiv M_0 f$. Дробно-максимальный оператор M_β играет важную роль в действительном и гармоническом анализе.

Обозначим

$$M_{p,\beta} f(u) := \left(M_\beta |f|^p\right)^{1/p}(u),\ u \in \mathrm{H}^n.$$

В случае $\beta = 0$, обозначим $M_{p,0} f$ через $M_p f$. Заметим, что $M_1 f = Mf$.

Лемма 15. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $0 \le \beta < Q$ *и* $f \in L_{p,Q-\beta}(\mathrm{H}^n)$. *Тогда* $M_{p,\beta} f \in L_\infty(\mathrm{H}^n)$ *и верно следующие равенство*

$$\left\| M_{p,\beta} f \right\|_{L_\infty} = v_n^{(\frac{\beta}{Q}-1)\frac{1}{p}} \| f \|_{L_{p,Q-\beta}}.$$

Следующая теорема является основным результатом параграфа 4.2, в котором получены необходимые и достаточные условия для дробно-максимального оператора M_β об ограниченности из пространства $L_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ в $L_{q,\lambda}(\mathrm{H}^n)$, $1 < p < q < \infty$ и из пространства $L_{1,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ в слабое пространство $WL_{q,\lambda}(\mathrm{H}^n)$, $1 < q < \infty$.

Теорема 22. *Пусть* $0 \le \beta < Q$, $0 \le \lambda < Q-\beta$ *и* $1 \le p \le \dfrac{Q-\lambda}{\beta}$.

1) Если $1 < p < \dfrac{Q-\lambda}{\beta}$, *то равенство* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\beta}{Q-\lambda}$ *является необходимым и достаточным условием для ограниченности оператора* M_β *из* $L_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *в* $L_{q,\lambda}(\mathrm{H}^n)$.

2) Если $p = 1 < \dfrac{Q-\lambda}{\beta}$, *то равенство* $1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{\beta}{Q-\lambda}$ *является необходимым и достаточным условием для ограниченности оператора* M_β *из* $L_{1,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *в* $WL_{q,\lambda}(\mathrm{H}^n)$.

3) Если $p = \dfrac{Q-\lambda}{\beta}$, *тогда оператор* M_β *ограничен из* $L_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *в* $L_\infty(\mathrm{H}^n)$.

В 4.3 четвертой главы изучен дробно-максимальный оператор на группе Гейзенберга в модифицированных пространствах Морри.

Теорема 23. *1. Если* $f \in \tilde{L}_{1,\lambda}(\mathrm{H}^n)$, $0 \le \lambda < Q$, *тогда* $Mf \in W\tilde{L}_{1,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *и* $\|Mf\|_{W\tilde{L}_{1,\lambda}} \le C_{1,\lambda} \|f\|_{\tilde{L}_{1,\lambda}}$,

где $C_{1,\lambda}$ *зависит только от* λ.

2. Если $f \in \tilde{L}_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$, $1 < p < \infty$, $0 \le \lambda < Q$, *тогда* $Mf \in \tilde{L}_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *и* $\|Mf\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} \le C_{p,\lambda} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}$,

где $C_{p,\lambda}$ *зависит только от* p *и* λ.

Доказана

Лемма 16. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $0 \le \lambda \le Q$. *Тогда*

$$\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n) = L_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n) \cap L_p(\mathrm{H}^n) \text{ и } \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}} = \max\left\{\|f\|_{L_{p,\lambda}}, \|f\|_{L_p}\right\}.$$

Для модифицированного пространства Морри $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ имеет место следующее вложение.

Лемма 17. *Пусть* $0 \le \lambda < Q$ *и* $0 \le \beta < Q - \lambda$. *Тогда для* $\frac{Q-\lambda}{\beta} \le p \le \frac{Q}{\beta}$

$$\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n) \subset_{\succ} L_{1,Q-\beta}(\mathrm{H}^n) \text{ и } \|f\|_{L_{1,Q-\beta}} \le v_n^{1/p'} \|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}.$$

Лемма 18. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $0 \le \beta < Q$ *и* $f \in \tilde{L}_{p,Q-\beta}(\mathrm{H}^n)$. *Тогда* $M_{p,\beta} f \in L_\infty(\mathrm{H}^n)$ *и верно следующее равенство*

$$\|M_{p,\beta} f\|_{L_\infty} = v_n^{\left(\frac{\beta}{Q}-1\right)\frac{1}{p}} \|f\|_{\tilde{L}_{p,Q-\beta}}.$$

А также получена теорема об ограниченности дробно-максимального оператора в модифицированном пространстве Морри на группе Гейзенберга.

Теорема 24. *Пусть* $0<\beta<Q$, $0\le\lambda<Q-\beta$ *и* $1 \le p < \frac{Q-\lambda}{\beta}$.

1) *Если* $p = 1 < \frac{Q-\lambda}{\beta}$, *тогда условие* $\frac{\beta}{Q} \le 1 - \frac{1}{q} \le \frac{\beta}{Q-\lambda}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности оператора* M_β *из* $\tilde{L}_{1,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *в* $W\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathrm{H}^n)$.

2) *Если* $1 < p < \frac{Q-\lambda}{\beta}$, *тогда условие* $\frac{\beta}{Q} \le \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \le \frac{\beta}{Q-\lambda}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности оператора* M_β *из* $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *в* $\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathrm{H}^n)$.

3) *Если* $\frac{Q-\lambda}{\beta} \le p \le \frac{Q}{\beta}$, *тогда* M_β *является ограниченным из* $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *в* $L_\infty(\mathrm{H}^n)$.

В 4.4 четвертой главы доказан следующий аналог теоремы Адамса для дробного интеграла I_β в пространстве Морри на группе Гейзенберга.

Теорема 25. *Пусть* $0<\beta<Q$, $0\le\lambda<Q-\beta$ *и* $1 \le p \le \frac{Q-\lambda}{\beta}$.

1) *Если* $1 < p < \frac{Q-\lambda}{\beta}$, *то равенство* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\beta}{Q-\lambda}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности оператора* I_β *из* $L_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *в* $L_{q,\lambda}(\mathrm{H}^n)$.

2) *Если* $p = 1 < \frac{Q-\lambda}{\beta}$, *то равенство* $1 - \frac{1}{q} = \frac{\beta}{Q-\lambda}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности оператора* I_β *из* $L_{1,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *в* $WL_{q,\lambda}(\mathrm{H}^n)$.

В следующей теореме получено условие ограниченности оператора $\tilde{I}_\beta$ из пространства $L_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ в пространство $BMO(\mathrm{H}^n)$.

Теорема 26. *Пусть* $0<\beta<Q$, $0 \le \lambda < Q-\beta$, *и* $p = \frac{Q-\lambda}{\beta}$, *тогда оператор* $\tilde{I}_\beta$ *ограничен из* $L_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *в* $BMO(\mathrm{H}^n)$.

В 4.5 четвертой главы доказан следующий аналог теоремы Адамса для дробного интеграла I_β в модифицированном пространстве Морри на группе Гейзенберга.

Теорема 27. *Пусть* $0<\beta<Q$, $0\le\lambda<Q-\beta$ *и* $1 \le p < \frac{Q-\lambda}{\beta}$.

1) *Если* $1 < p < \frac{Q-\lambda}{\beta}$, *тогда условие* $\frac{\beta}{Q} \le \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \le \frac{\beta}{Q-\lambda}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности оператора* I_β *из* $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *в* $\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathrm{H}^n)$.

2) *Если* $p = 1 < \frac{Q-\lambda}{\beta}$, *тогда условие* $\frac{\beta}{Q} \le 1 - \frac{1}{q} \le \frac{\beta}{Q-\lambda}$ *является необходимым и достаточным для ограниченности оператора* I_β *из* $\tilde{L}_{1,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ *в* $W\tilde{L}_{q,\lambda}(\mathrm{H}^n)$.

В следующей теореме получено условие ограниченности оператора $\tilde{I}_\beta$ из пространства $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathrm{H}^n)$ в пространство $BMO(\mathrm{H}^n)$.

Теорема 28. *Пусть* $0<\beta<Q,\ 0\le\lambda<Q-\beta$ *и* $\frac{Q-\lambda}{\beta}\le p\le\frac{Q}{\beta}$, *тогда оператор* $\tilde{I}_\beta$ *ограничен из* $\tilde{L}_{p,\lambda}(\mathsf{H}^n)$ *в* $BMO(\mathsf{H}^n)$.

Теорема 29. (Вложение Соболева-Стейна на модифицированном пространстве Морри). *Пусть* $0\le\lambda<Q$, $1<p<Q-\lambda$ *и* $\frac{1}{Q}\le\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\le\frac{1}{Q-\lambda}$. *Тогда существует положительная постоянная* C *такая, что*

$$\|u\|_{\tilde{L}_{q,\lambda}}\le C\|\nabla_{\mathsf{L}}u\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}},\ \text{для каждого}\ u\in C_0^\infty(\mathsf{H}^n).$$

Пространства Бесова $B^s_{p\theta}(\mathsf{H}^n)$ на множестве групп Ли были изучены многими авторами. В следующей теореме мы доказываем ограниченность оператора I_β в модифицированных пространствах Бесова-Морри на H^n

$$B\tilde{L}^s_{p\theta,\lambda}(\mathsf{H}^n)=\left\{f:\|f\|_{B\tilde{L}^s_{p\theta,\lambda}}=\|f\|_{\tilde{L}_{p,\lambda}}+\left(\int_{\mathsf{H}^n}\frac{\|f(x\cdot)-f(\cdot)\|^\theta_{\tilde{L}_{p,\lambda}}}{|x|^{Q+s\theta}}dx\right)^{\frac{1}{\theta}}\right\}<\infty,$$

где $1\le p,\theta\le\infty$ и $0<s<1$.

Теорема 30. *Пусть* $0<\beta<Q,\ 0\le\lambda<Q-\beta$ *и* $1\le p<\frac{Q-\lambda}{\beta}$. *Если* $\frac{\beta}{Q}\le\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\le\frac{\beta}{Q-\lambda}$, $1\le\theta\le\infty$ *и* $0<s<1$, *тогда оператор* I_β *ограничен из пространства* $B\tilde{L}^s_{p\theta,\lambda}(\mathsf{H}^n)$ *в* $B\tilde{L}^s_{q\theta,\lambda}(\mathsf{H}^n)$.

Из теоремы 30 получим следующее неравенство - вложение Соболева-Стейна на модифицированных пространствах Бесов-Морри.

Теорема 31. *Пусть* $0\le\lambda<Q-1$, $1<p<Q-\lambda$, $1\le\theta\le\infty$ *и* $0<s<1$. *Тогда существует положительная постоянная* C *такая, что*

$$\|u\|_{B\tilde{L}^s_{q\theta,\lambda}}\le C\|\nabla_{\mathsf{L}}u\|_{B\tilde{L}^s_{p\theta,\lambda}}\ \text{для каждого}\ u\in C_0^\infty(\mathsf{H}^n),$$

где $1/Q\le 1/p-1/q\le 1/(Q-\lambda)$.

Решение задачи Дирихле для Кон-Лапласиана на H^n принадлежит Джерисону. В частности, из наших результатов следуют априорные оценки для уравнения суб-Лапласиана $\mathsf{L}f=g$.

В параграфе 4.6 найдены достаточные условия для ограниченности дробно-максимального оператора в обобщенных пространствах Морри на группе Гейзенберга.

Определение 7. *Пусть* $1\le p<\infty$. *Обобщенное пространство Морри* $M_{p,\varphi}(\mathsf{H}^n)$ *определим как множество всех функций* $f\in L_p^{loc}(\mathsf{H}^n)$ *с конечной нормой*

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}}=\sup_{u\in\mathsf{H}^n,r>0}r^{-\frac{Q}{p}}\varphi(g,r)^{-1}\|f\|_{L_p(B(g,r))}.$$

Теорема 32. *Пусть* $1\le p<\infty$, $0<\beta<\frac{Q}{p}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{Q}$, *и* (φ_1,φ_2) *удовлетворяют условию*

$$\int_r^\infty\frac{\operatorname{essinf}_{\tau<s<\infty}\phi_1(g,s)s^{\frac{Q}{p}}}{\tau^{\frac{Q}{q}+1}}d\tau\le C\phi_2(g,r),\qquad(5)$$

где C *не зависит от* g *и* r. *Тогда оператор* M_β *ограничен из* $M_{p,\varphi_1}(\mathsf{H}^n)$ *в* $M_{q,\varphi_2}(\mathsf{H}^n)$ *для* $p>1$ *и из* $M_{1,\varphi_1}(\mathsf{H}^n)$ *в* $WM_{q,\varphi_2}(\mathsf{H}^n)$ *для* $p=1$.

В параграфе 4.7 получена следующая

Теорема 33. *Пусть* $1\le p<\infty$, $0<\beta<\frac{Q}{p}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{Q}$, *и* (φ_1,φ_2) *удовлетворяют условию (5). Тогда оператор* I_β *ограничен из* $M_{p,\varphi_1}(\mathsf{H}^n)$ *в* $M_{q,\varphi_2}(\mathsf{H}^n)$ *для* $p>1$ *и из* $M_{1,\varphi_1}(\mathsf{H}^n)$ *в* $WM_{q,\varphi_2}(\mathsf{H}^n)$ *для* $p=1$.

Следующий результат является аналогом теоремы Адамса для дробного интеграла на группе Гейзенберга в обобщенных пространствах Морри.

Теорема 34. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $0 < \beta < \frac{Q}{p}$, $q > p$ *и пусть* $\varphi(g,r)$ *удовлетворяет условию*

$$\sup_{r<t<\infty} t^{-Q} \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi(g,s)s^{Q} \le C\varphi(g,r) \tag{6}$$

и

$$\int_r^{\infty} \tau^{\beta} \varphi(g,\tau)^{\frac{1}{p}} \frac{d\tau}{\tau} \le C r^{-\frac{\beta p}{q-p}}, \tag{7}$$

где C *не зависит от* $g \in \mathrm{H}^n$ *и* $r > 0$.

Тогда оператор I_β *ограничен из* $M_{p,\varphi^{1/p}}(\mathrm{H}^n)$ *в* $M_{q,\varphi^{1/q}}(\mathrm{H}^n)$ *для* $p > 1$ *и из* $M_{1,\varphi}(\mathrm{H}^n)$ *в слабое пространство* $WM_{q,\varphi^{1/q}}(\mathrm{H}^n)$.

Из Теоремы 33 можно получить неравенство, расширяющее классическую теорему вложения Соболева на группе Гейзенберга.

Теорема 35. (Вложение Соболева-Стейна на обобщенных пространствах Морри). *Пусть* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{Q}$, *и* (φ_1, φ_2) *удовлетворяют условию (5). Тогда*

$$\| u \|_{M_{q,\varphi_2}} \le C \| \nabla_{L} u \|_{M_{p,\varphi_1}}, \text{ для каждого } u \in C_0^{\infty}(\mathrm{H}^n).$$

Аналогично из Теоремы 34 получим следующую теорему.

Теорема 36. (Вложение Соболева-Стейна на обобщенных пространствах Морри). *Пусть* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{Q}$, *и* φ *удовлетворяет условиям (6) и (7). Тогда*

$$\| u \|_{M_{q,\varphi^{1/q}}} \le C \| \nabla_{L} u \|_{M_{p,\varphi^{1/p}}}, \text{ для каждого } u \in C_0^{\infty}(\mathrm{H}^n).$$

В следующей теореме доказываем ограниченность I_β в обобщенных пространствах Бесова-Морри на H^n

$$BM^{s}_{p\theta,\varphi}(\mathrm{H}^n) = \left\{ f : \|f\|_{BM^{s}_{p\theta,\varphi}} = \|f\|_{M_{p,\varphi}} + \left(\int_{\mathrm{H}^n} \frac{\|f(g\cdot) - f(\cdot)\|^{\theta}_{M_{p,\varphi}}}{|g|^{Q+s\theta}} dg \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty \right\},$$

где $1 \le p, \theta \le \infty$ и $0 < s < 1$.

Теорема 37. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \beta < \frac{Q}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\beta}{Q}$, *и* (φ_1, φ_2) *удовлетворяют условию (5). Если* $1 \le \theta \le \infty$ *и* $0 < s < 1$, *тогда оператор* I_β *ограничен из пространства* $BM^{s}_{p\theta,\varphi_1}(\mathrm{H}^n)$ *в* $BM^{s}_{q\theta,\varphi_2}(\mathrm{H}^n)$.

Теорема 38. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \beta < \frac{Q}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\beta}{Q}$, *и* φ *удовлетворяет условиям (6) и (7). Если* $1 \le \theta \le \infty$ *и* $0 < s < 1$, *тогда оператор* I_β *ограничен из пространства* $BM^{s}_{p\theta,\varphi^{1/p}}(\mathrm{H}^n)$ *в* $BM^{s}_{q\theta,\varphi^{1/q}}(\mathrm{H}^n)$.

Из Теоремы 37, 38 получим следующее вложение Соболева-Стейна на обобщенных пространствах Бесова-Морри.

Теорема 39. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{Q}$, (φ_1, φ_2) *удовлетворяют условию (5),* $1 \le \theta \le \infty$ *и* $0 < s < 1$. *Тогда*

$$\|u\|_{BM^{s}_{q\theta,\varphi_2}} \le C \|\nabla_{L} u\|_{BM^{s}_{p\theta,\varphi_1}}, \text{ для каждого } u \in C_0^{\infty}(\mathrm{H}^n).$$

Теорема 40. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{Q}$, φ *удовлетворяет условиям (6) и (7),* $1 \le \theta \le \infty$ *и* $0 < s < 1$. *Тогда*

$$\|u\|_{BM^{s}_{q\theta,\varphi^{1/q}}} \le C \|\nabla_{L} u\|_{BM^{s}_{p\theta,\varphi^{1/p}}}, \text{ для каждого } u \in C_0^{\infty}(\mathrm{H}^n).$$

Автор также выражает глубокую благодарность своему научному консультанту член-корр. НАНА, профессору В.С. Гулиеву за обсуждение полученных результатов и постоянное внимание к работе.

(8)

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Quliyev V.S., Mammadov Y.Y. Function spaces and inteqral operators for the Dunkl opeator on the real line, Khazar Journal of Mathematics, vol.4 , №.4 (2006), pp. 17-42.
2. Mammadov Y.Y. On maximal operator th the Dunkl operator on R., Khazar Journal of Mathematics, vol.4, №4 (2006), pp.59-70.
3. Mammadov Y.Y. On the boundedness of the maximal operator on Besov spaces for the Dunkl operator on the real line, Proc. of NASA, Embedding theorems. Harmonic analysis. 2007, Issue XIII. pp. 244- 257.
4. Mammadov Y.Y. Some embeddings into the Morrey spaces associatied with the Dunkl operator on R, Proc. of NASA, Embedding theorems. Harmonic analysis. 2007, Issue XIII. pp. 258- 269.
5. Mammadov Y.Y. Analog theorems of Welland for the Riesz potentials associated with the Dunkl operator on the real line, Proceedings of NAS of Azerbaijan, XXVII(XXXV) Baku, 2007 pp.47-56.
6. Quliyev V.S., Mammadov Y.Y. Some estimations for Riesz potentials in terms maximal and fractional maximal functions associated with the Dunkl operator on the real line, Transactions of NAS of Azerbaijan, series of physical-texnical and mathematical sciences, vol.XXVII, №7,2007, pp.71-76.
7. Guliyev V.S., Mammadov Y.Y. On fractional maximal operator associated with the Dunkl operator on R, Abstracts of international conference on physical, mathematical and technical sciences. Nakhchivan-2008, pp.69.
8. Mammadov Y.Y. On maximal operator associated with the Dunkl operator on R, Abstracts of international conference on physical , mathematical and technical sciences . Nakhchivan-2008, pp.126.
9. Guliyev V.S., Mammadov Y.Y. Pointwise and integral estimates for the Riesz potentials associated with the Dunkl operator on the real line, Indian Journal of Mathematics, 51 (2009), № 2, pp.239-254.
10. Mammadov Y.Y. On the boundedness of Riesz potential in Morrey spaces associated with Dunkl operator, Bakı Dövlət Universitetinin 90 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq elmi konf., oktyabr, 2009, pp.53.
11. Mammadov Y.Y. Fractional maximal function and fractional integrals associated with the Dunkl operator on the real line, III Turkish World Mathematics Symposium, Alma-Ata, 30 June-05 July, 2009 pp.1.
12. Guliyev V.S., Mammadov Y.Y. On fractional maximal function and fractional integrals associated with the Dunkl operator on the real line, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 353(2009) ,Issue 1 pp.449-459.

13. Mammadov Y.Y. On the boundedness of the maximal operator in Besov spaces associated with Dunkl's operator, Abstracts of Inter. conf. on math. and mech. devoted to the 50-th anniversary of the IMM of NASA,Baku-2009, pp. 231.
14.Mammadov Y.Y. Necessary and sufficient conditions for the boundedness of Riesz potential in Morrey spaces associated with the Dunkl operator ,7th International ISAAC Congress,London ,13-18 Jule,2009,pp.54.
15. Quliyev E.V., Mammadov Y.Y. Some embeddings into the D-Morrey spaces and modified D-Morrey spaces, Proceedings of Inter. conf. on astronomy, physics and mathem. devoted to Inter. Astronomy Year . Nakhchivan-2009, pp. 64-65.
16. Mammadov Y.Y. Some embeddings into the modified Morrey spaces associated with the Dunkl operator on the real line, Trans. of NASA, Ser.Phys-Tech. Math. Sc. XXIX (2009), №1, Mathematics and Mechanics,pp. 111-120.
17. Guliyev V.S., Mammadov Y.Y. $(L_p;L_q)$ boundedness of the fractional maximal operator associated with the Dunkl operator on the real line, Integral Transforms and Special Functions, 21(2010), № 8, pp.629-639.
18. Guliyev E.V., Mammadov Y.Y. Some embeddings into the Morrey and modified Morrey spaces associated with the Dunkl operator, Abstract and Applied Analysis, Volume 2010 , Article ID 291345, doi:10.1155/2010/291345, 10 pages.
19. Guliyev E.V., Mammadov Y.Y., Eroglu A. Necessary and sufficient conditions for the boundednes of Dunkl-type fractional maximal operator in the Dunkl-type Morrey spaces, Abstract and Applied Analysis, v.2010, Article ID976493, doi:10.1155/2010/976493, 10 p.
20. Mammadov Y.Y. On the boundedness of the maximal operator in Morrey spaces associated with the Dunkl operator on the real line, Trans. of NASA, Ser. Phys-Tech. Math. Sci. XXX, no.1, Mathematics and Mechanics, (2010), pp. 147-154.
21. Mammadov Y.Y. On the boundedness of the maximal operator in Besov-Morrey spaces associated with the Dunkl operator on the real line , Spectral theory and applications. Abstract of Inter. conf. devoted to the 80-th anniversary of acad. F.G.Magsudov, Баку, 2010, pp. 256-258.
22. Mammadov Y.Y. On the boundednes of Riesz potential in the Morrey spaces associated with Dunkl’s operator, Dokl. NASA.v. LXVI (2010), №3, pp. 13-19.
23. Guliyev V.S., Mammadov Y.Y. Subelliptic estimates for Kohn-Laplace operator on weighted Besov spaces, Functional analysis and its applications.

Proceedings of Inter. conf. devoted to the 100-th anniv. of acad. Z.I.Khalilov, Baku , 2011, pp. 128-130.
24. Guliyev E.V., Mammadov Y.Y. Embedding theorems on Dunkl-type Morrey and modified Morrey spaces, Functional analysis and its applications. Proc. of Inter. conf. devoted to the 100-th anniv. of acad. Z.I.Khalilov, Baku , 2011, Yanuary 11-12. pp. 281-282.
25. Mammadov Y.Y. Boundedness of the maximal and singular integral operators on Heisenberg groups on Morrey type speces, Inter. conf. in ho-nour of prof. V.I.Burenkov on the occasion of his 70th birthday to be held in Kirsehir, Turkey, from May 20 to may 27, 2011, pp. 34.
26. Kula L., Mammadov Y.Y. Boundedness of the fractional maximal and potential operators on Heisenberg group on generalized Morrey spaces , Inter. conf. in ho-nour of Professor V.I.Burenkov on the occasion of his 70th birthday to be held in Kirsehir, Turkey, from May 20 to may 27, 2011, pp. 31.
27. Kiymaz O.I., Mammadov Y.Y. Subelliptic estimates for Kohn-Laplace operator on generalized Besov-Morrey spaces, Inter. conf. in ho-nour of prof. V.I.Burenkov on the occasion of his 70th birthday to be held in Kirsehir, Turkey, from May 20 to may 27, 2011, pp. 29.
28. Kadakal M., Akbulut A., Mammadov Y.Y. Fefferman-Stein inequalities for the maximal operator over Chebli- Trimeche hypergroups, Inter. conf. in ho-nour of prof. V.I.Burenkov on the occasion of his 70th birthday to be held in Kirsehir, Turkey, from May 20 to may 27, 2011, pp. 26.
29. Guliyev V.S., Mammadov Y.Y. Riesz potential on the Heisenberg group and modified Morrey spaces, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta Seria Matem., 20(1), 2012, pp. 189-212.
30. Mammadov Y.Y. Some embeddings into the Morrey spaces on the Heisenberg group and some applications, Nakhchivan State University, Scientific Works, series of physical, mathematical and technical sciences, №1(43), 2012, pp. 38-43.
31. Mammadov Y.Y. Meda inequality for rearrangements of the convolutions associated with the Dunkl operator and some applications, “Functions theory and problems of harmonic analysis”. Proc.of the 100-th anniv.of acad. I.I.Ibrahimov. Baku, 2012, pp. 189-191.
32. Eroglu A., Guliyev V.S., Mammadov Y.Y. Riesz potential on the Heisenberg group and generalized Morrey spaces, “Functions theory and problems of harmonic analysis”. Proc. of the 100-th anniv.of acad. I.I.Ibrahimov. Baku, 2012, pp. 276-279.

33. Akbulut A., Guliyev V.S., Mammadov Y.Y. Boundednes of the fractional maximal operator in generalized Morrey spaces on Carnot groups, “Functions theory and problems of harmonic analysis”. Proc. of the 100-th anniv.of acad. I.I.Ibrahimov. Baku, from February 28 to March 01, 2012, pp. 37-40.
34. Akbulut A., Mammadov Y.Y. Boundedness of the fractional maximal operator in generalized Morrey spaces on Heisenberg groups, Abstracts of International Scientific Conference “Functional Analysis and its Applications” Astana, October 2-5, 2012, pp. 75-76.
35. Guliyev V.S., Eroglu A., Mammadov Y.Y. Riesz potential in generalized Morrey spaces on the Heisenberg group, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 189, № 3, March,2013, pp. 365-382.
36. Guliyev V.S., Mammadov Y.Y. Boundedness of the fractional maximal operator in generalized Morrey space on the Heisenberg group, Indian Journal Pure Applied Mathematics, 44(2):185-202, April 2013, pp.185-202.
37. Guliyev V.S., Akbulut A., Mammadov Y.Y. Boundedness of fractional maximal operator and their higher order commutators in generalized Morrey spaces on Carnot groups, Acta Mathematica Scientia, 2013, 33 B (5) pp. 1329-1346.
38. Mammadov Y.Y. On Dunkl –Poisson and Dunkl –Metaharmonic semigroups, Nakhchivan State University, Scientific Works, series of physical, mathematical and technical sciences, №2(56), 2013, pp. 32-39.
39. Мамедов Я.Я. Неравенства типа Стейна-Вейсса для *D*-дробного интеграла порожденной оператором Данкля на R, Нахчыванский Государственный Университет, Научные труды, серия физико-математических и технических наук, № 3(59), 2014, стр.15-22.
40. Mammadov Y.Y. Weihgted inequalities for Dunkl fractional maximal function and Dunkl fractional integrals, On actual problems of mathematics and mechanics. Proceedings of the Inter. conf. devoted to the 55-th anniversary of the IMM of NASA, Baku-2014, pp. 272-274.
41. Mammadov Y.Y. Weighted inequalities for Dunkl fractional maximal function and Dunkl fractional integrals, Proceedings of the IMM Nat.Acad. Sci. of Azerbaijan, vol.40, Number1,2014, pp. 93-103.

YAQUB YAQUB OĞLU MƏMMƏDOV

DANKL OPERATORU İLƏ BAĞLI VƏ HEYZENBERQ QRUPUNDA FUNKSİYALAR FƏZASINDA İNTEQRAL OPERATORLAR

XÜLASƏ

Dissertasiya işi Dankl diferensial-fərq operatoru ilə bağlı və Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr maksimal və kəsr inteqral operatorların funksional fəzalarda məhdudluğunun tədqiqinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiyada aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

1. İlk dəfə həqiqi oxda Dankl diferensial-fərq operatoru ilə bağlı kəsr maksimal, Puasson, Riss potensial və Bessel potensial operatorları daxil edilmiş və bu operatorların uyğun Lebeq fəzasında məhdudluğu isbat edilmişdir.
2. Dankl diferensial-fərq operatoru ilə bağlı kəsr maksimal operatorun uyğun çəkili Lebeq fəzasında məhdudluğu tədqiq edilmişdir. Bundan başqa, Dankl-Riss potensialı üçün Velland teoreminin analoqu isbat olunmuşdur.
3. Dankl-Riss potensialı üçün Steyn-Veys tipli iki bərabərsizlik isbat edilmiş və parametrlərin müəyyən aralığında və çəki funksiyasi qüvvət funksiyası olan halda Dankl-Riss potensialının çəkili Lebeq fəzasında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərt tapılmışdır.
4. Dankl operatoru ilə bağlı kəsr maksimal və Riss potensial operatorlarının Morri fəzasında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərt alınmışdır.
5. Dankl operatoru ilə bağlı kəsr maksimal və Riss potensial operatorlarının modifə edilmiş Morri fəzasında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərt alınmışdır.
6. Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr maksimal və kəsr inteqral operatorların modifə edilmiş Morri və ümumiləşmiş Morri fəzalarında məhdudluğu isbat olunmuşdur.

YAGUB YAGUB OGLU MAMMADOV

INTEGRAL OPERATORS CONNECTED WITH DUNKL OPERATOR AND DETERMINED IN HEISENBERG GROUP IN FUNCTIONAL SPACES

ABSTRACT

The dissertation work is devoted to investigation of boundedness of fractional maximal and fractional integral operators connected with Dunkl difference-differential operator and determined in Heisenberg group in functional spaces.

The following results were obtained:

1.The boundedness of fractional maximal, Poisson, Riesz potential and Bessel potential operators connected with Dunkl difference-differential operator in a real axis in appropriate Lebesque spaces is proved.
2.The boundedness of a fractional maximal operator connected with Dunkl difference-differential operator in appropriate weight Lebesque space was studied. Furthermore, the analogue of Velland theorem for Dunkl-Riesz potential was proved.
3.Stein-Weiss type two inequalities for Dunkl-Riesz type potential were proved, necessary and sufficient condition for boundedness of Dunkl-Riesz potential in weight Lebesgue space when the parameter is in a certain interval and when the weight function is a power function, was found.
4.Necessary and sufficient condition for boundedness of fractional maximal and Riesz potential operators connected with Dunkl operator in Morrey spaces was obtained.
5.Necessary and sufficient condition for boundedness of fractional maximal and Riesz potentials connected with Dunkl operator in modified Morrey spaces was obtained.
6.The boundedness of fractional maximal and fractional integral operators determined in Heisenberg group in modified Morrey and generalized Morrey spaces was proved.