AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

ETİBAR SƏDİ oğlu PƏNAHOV

DİFERENSİAL OPERATORLAR ÜÇÜN SPEKTRAL VƏ POTENSİAL NƏZƏRİYYƏNİN BƏZİ TƏRS MƏSƏLƏLƏRİ VƏ TƏTBİQLƏRİ

1211.01- Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2017

İş Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi Riyaziyyat Elmi Tədqiqat İnstitutunun "Tərs məsələlər və qeyri-xətti tənliklər" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi məsləhətçi:

akademik **F. Ə. Əliyev**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor **N.Ş. İsgəndərov**
(Bakı Dövlət Universiteti)
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor **R.X.Əmirov**
(Cümhuriyyət Universiteti, Türkiyə)
riyaziyyat üzrə elmləri doktoru, professor **A.R. Əliyev**
(Azərbaycan Neft və Sənaye Universiteti)

Aparıcı təşkilat: **L.N. Qumilyov adına Avrasiya Milli Universiteti**
"Fundamental riyaziyyat" kafedrası

Dissertasiyanın müdafiəsi 26 may 2017-ci il tarixində saat 14^{00} -də Azərbaycan MEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim olunan dissertasiyaların müdafiəsini keçirən D.01.111 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya ilə Azərbaycan MEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ1141, Bakı şəhəri, B. Vahazadə küç., 9

Avtoreferat 21 aprel 2017-ci il tarixində buraxılıb.

D.01.111 Dissertasiya
Şurasının elmi katibi **dos. Tamilla Həsənova**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Spektral analizin tərs məsələsi dedikdə bu və ya digər spektral xarakteristikalara əsasən xətti operatorun bərpa edilməsi nəzərdə tutulur. Bu xarakteristikalar müxtəlif sərhəd şərtlərinə uyğun spektrlər, spektral funksiyalar, nodal (düyün) nöqtələr, nodal uzunluqlar səpilmə verilənləri və s. ola bilər. Hal-hazırda adi differensial operatorların bəzi xüsusi sinifləri üçün tərs məsələlər yaxşı öyrənilmişdir. Belə operatorların ən sadəsi Şturm Liuvill operatorudur

$$l(y) = -y'' + q(x)y$$

Təqdim edilən dissertasiyada tərs məsələlərin bir neçə müxtəlif variantları araşdırılmış və həll edilmiş, spesifik sinqulyarlığa malik tənliklər üçün tərs məsələnin həlli verilmişdir. Analoji xüsusiyyətə malik spektral məsələlərin bəzi halları M.Coz, P.Roçus, B.M.Levitan, E.Titçmarş və s. işlərində baxılmışdır. Tərs məsələlər nəzəriyyəsinin inkişafına ciddi təkan vermiş ilk nəticə 1929-cu ildə V.A. Ambarsumyan tərəfindən alınmışdır. O, aşağıdakı teoremi isbat etmişdir:

$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ....$ ilə

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{1}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0,$$

Şturm-Liuvill məsələsinin məxsusi ədədlərini işarə edək. Burada $q(x)$ həqiqi kəsilməz funksiyadır. Əgər $\lambda_n = n^2$, $n = 0,1,2,...$, olarsa, onda $q(x) = 0$ olar.

Ambarsumyanın bu nəticəsinə diqqət edən ilk riyaziyyatçı İsveç riyaziyyatçısı Borq oldu. O ilk dəfə ən vacib tərs məsələlərdən birini, yəni klassik (1) Şrutm-Liuvill tənliyi üçün iki spektrə görə tərs məsələni sistematik olaraq araşdırdı. Borq göstərdi ki, ümumi halda bir spektr Şturm-Liuvill operatorunu təyin etmir. Yəni Ambarsumyanın nəticəsi xüsusi haldır. Bu işində Borq göstərdi ki, Şturm-Liuvill operatorunun müxtəlif sərhəd şərtlərinə uyğun iki spektri onu birqiymətli təyin edir. Daha dəqiqi Borq aşağıdakı teoremi isbat etmişdir:

$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ....$ ilə (1) tənliyinin

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

şərtlərinə uyğun (burada h və H məhdud həqiqi ədədlərdir), $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < ....$ ilə isə bu tənliyin

$$y'(0) - hy(0) = 0, \qquad y'(\pi) + H_1 y(\pi) = 0$$

şərtlərinə uyğun (burada H_1 - H -a bərabər olmayan məhdud həqiqi ədəddir) məxsusi ədədlərini işarə edək. Onda $\{\lambda_n\}_0^\infty$ və $\{\mu_n\}_0^\infty$ ardıcıllıqları $q(x)$ funksiyasını və h, H, H_1 ədədlərini birqiymətli təyin edir.

Borqun işlərindən sonra Levinson tərs məsələlər sahəsində vacib tədqiqatlar apardı. O, bu işlərində Borqun bəzi nəticələrinin daha sadə isbatlarını verdi.

Tərs məsələlər nəzəriyyəsində sonrakı ciddi uğurlar sovet riyaziyyatçıları V.A. Marçenko, M.Q. Kreyn, İ.M. Qelfand, B.M. Levitan, L.D. Faddeyev, M.G. Qasımov və başqaları tərəfindən əldə edildi.

Burada həlledici məqam o oldu ki, əvvəlcə V.A. Marçenko, sonra isə digər riyaziyyatçılar tərs məsələlərin həllinə çevirmə operatorlarını tətbiq etməyə başladılar. Bu operatorlar, əsası Fransiz riyaziyyatçısı J. Delsart tərəfindən qoyulmuş ümumiləşmiş sürüşdurmə operatorlarının ümumi nəzəriyyəsindən meydana çıxmışdı.

V.A. Marçenkonun fundamental əsərinin əsas nəticəsi belədir: Şturm-Liuvill operatorunun (ədəd oxunda və ya sonlu parçada) spektral funksiyası bu operatoru birqiymətli təyin edir.

1949-cu ildə V.A. Marçenkonun fundamental əsərinin çapından əvvəl A.N. Tixonov yeganəlik teoremini çap etdirdi. Bu teorem bəzi əlavə məhdudiyyətlər daxilində Marçenkonun teoreminə ekvivalentdir. A.N. Tixonovun yeganəlik teoremi belədir:

Tutaq ki, $u(x,\lambda)$ ($\lambda < 0$ olduqda)

$$-u'' + \lambda\rho^2(x)u(x,\lambda) = 0, \ x > 0, \ u(\infty) = 0$$

məsələsinin həllidir. Burada $\rho(x)$ hissə-hissə analitik funksiyadır, və $\rho(x) \ge \rho_0 > 0$. Fərz edək ki, $R(\lambda) = \dfrac{u'(0,\lambda)}{u(0,\lambda)}$. Onda $\lambda < 0$ olduqda $\rho(x)$ funksiyası $R(\lambda)$ funksiyasının qiymətləri ilə birqiymətli təyin olunur.

V.A.Marçenkonun işindən sonra M.Q.Kreyn Şturm-Liuvill operatorunun spektral funksiyaya və iki spektrə görə bərpa edilməsinin effektiv uüsulunu verən bir neçə məqalə çap etdirdi. B.M. Levitanın və M.G.Qasımovun məqaləsində Şturm-Liuvill tənliyinin iki spektrə görə bərpa edilməsi üçün effektiv üsul verilmişdir.

1951-ci ildə İ.M. Qelfand və B.M. Levitanın fundamental əsəri çap edildi. Burada Şturm-Liuvill operatorunun spektral funksiyaya görə bərpa edilməsi metodu verilidi və həmçinin verilən monoton funksiyanın Şturm-Liuvill operatorunun spektral funksiyası olması üçün (yarımoxda və ya sonlu parçada) kafi şərtlər tapıldı.

Sonralar İ.M. Qelfand və B.M.Levitanın bu əsəri həm Şturm-Luivill operatoru, həm də digər operatorlar (Şturm-Liuvill operatorunun diskret analoqu, xüsusi sinqulyar Şturm-Liuvill operatoru, matris Şturm-Liuvill məsələsi, differensial tənliklər sistemi, Dirak tip sistemlər, diffuziya tənlikləri və s.) üçün tərs məsələlərin effektiv həllində nümunəyə çevrildi.

Qeyd etmək lazımdır ki, səpilmə nəzəriyyəsinin müxtəlif tərs məsələlərinin effektiv həllində B.Y. Levin tərəfindən kəşf edilən və üzərinə sonsuzluqda şərt qoyulan çevirmə operatorları ciddi rol oynadılar.

İşin məqsədi. İşin məqsədi spektral və potensial nəzəriyyənin tərs məsələləri ilə bağlı aşağıdakı problemləri araşdırmaqdan ibarətdir:

1.Spektral analizin tərs məsələlərinin iki və qismən üst-üstə düşməyən iki spektrə görə araşdırılması. Spektral analizin tərs məsələsinin bir spektrə və qismən üst-üstə düşməyən potensiala görə araşdırılması, sinqulyar operatorlar üçün Xoxştat-Liberman və Maçozuku- Troşin tipli teoremlərin isbat edilməsi.

2.Dirak və diffuziya operatorları üçün tərs məsələlərin dayanaqlılığının araşdırılması.

3.İzospektral tərs məsələlərin tədqiqi.

4.Spektral məsələlərin baxılan intervalın daxili nöqtəsində kəsilmə olduqda tədqiqi.

5.Düz və tərs məsələlərin nodal nöqtələrə və nodal uzunluqlara görə tədqiqi.

6.Dirak və diffuziya operatorları üçün spektral Dirixle məsələsinin məxsusi ədədlərinin asimptotik ayrılışlarının tədqiqi.

7.Hidrogen atomunun tənliyi, inteqro-diferensial tənlikər və Kulon potensiallı Şturm-Liuvill tənliyi üçün Xoxştat teoreminin araşdırılması.

8.Loqarifmik potensiallar üçün aprior qiymətləndirmələrin alınması.

Tədqiqat metodu. Dissertasiya işində operatorların spektral nəzəriyyəsi, həqiqi və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi, funksional analiz, adi differensial tənliklər, riyazi fizika tənlikləri və klassik momentlər probleminin metodlarından istifadə edilmişdir.

Elmi yeniliklər. Dissertasiya işində aşağıdakı elmi nəticələr alınmışdır:

1. Bessel, Kulon tipli məxsusiyyəti olan ikinci tərtib differensial operatorlar, hidrogen atomu tənliyi, Dirak sistemi və diffuziya tənliyi üçün potensiallrın fərqi üçün düsturlar alınmışdır.
2. Tərs məsələlərin yeganəlik teoremləri isbat edilmişdir.
3. Çevirmə operatorunun və tərs məsələnin əsas inteqral tənliyinin nüvəsinin ümumiləşmiş cırlaşması araşdırılmış və Xoxştat teoreminə analoji nəticələr alınmışdır.
4. Sinqulyar və diffuziya tənliyi üçün Xoxştat-Liberman tipli teoremlər isbat edilmişdir.
5. Dirak sistemi və diffuziya tənliyi üçün qoyulmuş tərs məsələlərin dayanaqlılığı üçün zəruri şərtlər tapılmışdır.
6. Dirak operatoru və diffuziya tənliyi üçün Dirixle məsələsi öyrənilmiş, məxsusi ədədlər üçün asimptotik düsturlar alınmışdır.
7. İlk dəfə olaraq sinqulyar differensial tənliklər, kanonik Dirak opratoru və diffuziya operatoru üçün nodal nöqtələrə və nodal uzunluqlara görə tərs məsələlər öyrənilmişdir.
8. Mənbələrin sıxlıqlarının məhdudluğu şərti daxilində loqarifmik potensial üçün tərs məsələnin həllinin varlığı üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.

İşin nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Kulon və Bessel məxsusiyyətli birölçülü Şredinger operatoru, Dirak operatoru, diffuziya operatoru və hidrogen atomunun tənliyi üçün müxtəlif spektral məsələlərin (düz və tərs məsələlərin) araşdırılması üçün riyazi metodlar verilmişdir. Tərs məsələlərin həllinin yeganəliyi və dayanaqlılığı haqqında teoremlərin yeni isbatı verilmişdir. İlk dəfə məxsusiyyəti olan tənliklər üçün nodal nöqtələrə və nodal uzunluqlara görə tərs məsələlər tədqiq olunmuşdur. Loqarifmik potensialın tərs məsələsinin həllinin aprior qiymətləndirilməsi alınmışdır.

Dissertasiyada alınmış nəticələr spektral analizin düz və tərs məsələləri nəzəriyyəsində, riyazi və kvant fizikasında, inteqral tənliklər nəzəriyyəsində tətbiqlərini tapa bilər. Sonuncu fəsildə alınan nəticələr potensial sahələrin müşahidə verilənlərinin harmonik sıralarla ədədi aproksimasiyasının dayanıqlığını artırılması üçün istifadə edilə bilər.

İşin aprobasiyası. Dissertasiyanın nəticələri aşağıdakı seminar və konfranslarda məruzə edilmişdir:

- Moskva Dövlət Universiteti, Mexanika Riyaziyyat Fakultəsi, Funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analiz kafedrası, B.M. Levitan, A.Q. Kostyuçenko, V.A. Sadovnicinin sədrliyi ilə keçirilən elmi seminarlar;
- Rusiya Elmlər akademiyasının Yer Fizikası İnstitutu, Tərs məsələlər şöbəsi, V.N. Straxov, M.A. Brodskinin sədrliyi ilə keçirilən elmi seminarlar;
- Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası, Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu, Funksional analiz şöbəsi, F.Q. Maqsudovun sədrliyi ilə keçirilən elmi seminarlar;
- Bakı Dövlət Universiteti, Tətbiqi Riyaziyyat kafedrası, M.G. Qasımovun sədrltyi ilə keçirilən elmi seminarlar;
- Dehli Universiteti, Madras Riyaziyyat İnstitutu, Bangalor Tətbiqi Riyaziyyat İnstitutu (Hindistan,1989);
- Şərif Universiteti, Tehran (İran);
- İqtisadiyyat və Texnologiya Universiteti, Budapeşt, (Macarıstan);
- Fırat Universiteti, Elaziğ (Turkiyə);
- Bakı Dövlət Universiteti Tətbiqi Riyaziyyat ETİ-nin F.Ə. Əliyevin sədrliyi ilə keçirilən elmi seminarlar;
- Al-Farabi Qazaxıstan Milli Universiteti, Almatı, (Qazaxıstan);
- Yaxın Şərq Texniki Universiteti, (Turkiyə) O. Celebi, A. Zafer sədrliyi ilə keçirilən elmi seminarlar;
- Türkiyənin Universitetlərində seminarlar: TOBB İqtisadiyyat və Texnologiya Universiteti, Cankaya Universiteti, Yıldız Txniki Universiteti, Atatürk Universiteti, İnönü Universiteti, Anadolu Universiteti, Izmir Ege Universiteti

  Bundan başqa dissertasiyanın əsas nəticələri 40-dan çox Beynəlxalq Konfrans və Konqreslərdə məruzə olunmuşdur.
- Monpelye (Fransa) Tərs məsələlərin Fənlərarası aspektləri, (P.S. Sabatye, J. Leon, 1991);

- Berlin (Almanya), 1998, Beynəlxalq riyaziyyat konqresi;
- Pekin (Çin, 2002), Beynəlxalq riyaziyyat konqresi;
- Bakı (Azərbaycan) "Riyaziyyat və Mexanika" 10-cu Beynəlxalq Konfransı (2004);
- Honqkonq (Çin, 2010) Tərs məsələlər Beynəlxalq Konfransı, Honqkonq, Siti Universiteti;
- İzmir (Turkiyə, 2009) Dinamik Sistemlər 9-cu simpozium;
- I (Elazığ, Türkiyə, 1999), II (Sakarya, Turkiyə, 2007), III (Almata, Qazaxıstan, 2009), IV (Bakı, Azərbaycan 2011), V (Bişkek, Qırğızıstan, 2014) Türk Dünyası Riyaziyyat Cəmiyyətinin Konqresləri;
- Putra (Malayziya, 2000) Riyaziyyat və onun yeni minillikdə tətbiqləri adlı Beynəlxalq Konfrans;
- Brno (Çexiya, 1997), Masarık Universiteti, Ekuadif 9;
- Moskva (Rusiya,1996) Tərs və korrekt olmayan məsələlər;
- Novosibirsk (Rusiya);
- "Riyaziyyat və onun tətbiqləri"ı Beynəlxalq Avrasiya Konfransı.

Dissertasiyanın həcmi və strukturu. Dissertasiya işi girişdən, beş fəsildən və 186 adda istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiyanın həcmi ədəbiyyat istisna olmaqla 271 səhifədir.

DISSERTASIYANIN QISA MƏZMUNU

Birinci fəsildə tərs məsələlərin bir variantı tədqiq olunur və həll edilir. Burada xüsusi sinqulyarlığa malik tənlik üçün tərs məsələnin həlli verilir. Analoji məxsusiyyətə malik spektral məsələlərin həlli bir çox müəlliflər tərəfindən tədqiq edilmişdir: Karlson R., Şadan K., Kram M., Qasımov M., Volk V., Staşevskaya V. Birinci və ikinci yarımfəsillərdə sıfırda məxsusiyyəti olan Şturm-Liuvill tənliyi üçün 2 qismən üst-üstə düşməyən spektrə görə tərs məsələnin həlli verilmişdir. Burada tərs məsələlərin həllində xüsusi əhəmiyyəti olan $q(x)-\tilde{q}(x)$ potensiallar fərqi üçün Xoxştat teoremi isbat olunmuşdur.

Teorem 1. Aşağıdakı məsələyə baxaq

$$Lu = -u'' + \left(q(x) + l(l+1)/x^2\right)u, \quad 0 < x \le 1 \tag{1}$$

$$u(0,\lambda)=0 \tag{2}$$

$$u(1,\lambda)\cos\beta+u'(1,\lambda)\sin\beta=0 \quad . \tag{3}$$

Burada $q(x)$ [0,1] parçasında kvadratı ilə cəmlənən funksiyadır. Tutaq ki, $\{\lambda_i\}$ L operatorunun (2) və (3) sərhəd şərtlərinə uyğun spektridir. (3) şərtini yeni

$$u(1,\lambda)\cos\gamma+u'(1,\lambda)\sin\gamma=0 \tag{4}$$

şərti ilə əvəz etsək, L operatorunun (2),(4) şərtlərinə uyğun $\{\lambda_i'\}$ spektrini alarıq.

Yeni

$$\tilde{L}u=-u''+\left(\tilde{q}(x)+l(l+1)/x^2\right)u, \tag{5}$$

operatoruna baxaq. Burada $\tilde{q}(x)$ [0,1] parçasında kvadratı ilə cəmlənən funksiyadır.

Tutaq ki, $\tilde{\lambda}_i$, $\tilde{L}$ operatorunun (2) və (3) şərtlərinə uyğun spektridir və sonlu sayda i indeksini çıxmaq şərtilə yerdə qalan indekslər üçün $\lambda_i=\tilde{\lambda}_i$ şərti ödənilir. Tutaq ki, $\{\lambda_i'\}$ $\tilde{L}$ operatorunun (2) və (4) şərtlərinə uyğun spektridir. Λ_0 ilə $\lambda_i\neq\tilde{\lambda}_i$ şərtini ödəyən indekslərin sonlu çoxluğunu, Λ ilə isə $\lambda_i'=\tilde{\lambda}_i$ şərtini ödəyən indekslərin sonsuz çoxluğunu işarə edək.

Yuxarıda qoyulan şərtlərdən alırıq ki,

$$q-\tilde{q}=\sum_{\Lambda_0}\left(\tilde{y}_n w_n\right)',\left('=\frac{d}{dx}\right). \tag{6}$$

Burada $\tilde{y}_n$ və w_n uyğun olaraq (1) və (5) tənliklərinin həlləridir. Xüsusi halda, əgər Λ_0 boş çoxluqdursa, onda sanki hər yerdə $q=\tilde{q}$.

Üçüncü yarımfəsildə bir tərs məsələ həll olunur. Burada xüsusi məxsusiyyətə malik tənlik üçün yarım-tərs məsələnin həlli verilir. Qeyd edək ki, yarım-tərs məsəslə ilə bağlı ilk nəticə Xoxştat və Liberman tərəfindən alınmışdır.

Bu yarımfəsildə məxsusiyyətə malik diferensial operator üçün yarım-tərs məsələ həll edilir. Göstərilir ki, əgər $q(x)$ potensialı (1/2,1] yarım-parçasında verilibsə, onda $q(x)$ potensialının (0,1/2] yarım-parçasında təyin olunması üçün bir spektrin verilməsi kifayətdir. Burada (1) tənliyi üçün (3) sərhəd şərtləri və

$$\lim_{x\to 0}\frac{u(x,\lambda)}{x^{l}}=\frac{1}{2^{l+1}\Gamma\left(l+(3/2)\right)} \tag{7}$$

şərti daxilində yarım-tərs məsələyə baxılır. Fərz edilir ki, $q(x)$ kvadratı ilə inteqrallanan həqiqi qiymətli funksiyadır. L operatoru $L_2[0,1]$ -də öz-özünə qoşmadır. (1),(2),(7) məsələsinin spektri həqiqi və sadə $\{\lambda_n\}$ məxsusi ədədlərindən ibarətdir. Əgər (3) şərtini (4) şərti ilə əvəz etsək, onda L operatorunun yeni $\{\lambda_n'\}$ spektrini alarıq. Burada fərz edilir ki, $\sin(\beta-\gamma)\neq 0$. Bu informasiya $\{\lambda_n\}$ spektri və (1), (2), (7) məsələsinin spektri ilə birlikdə (0,1] intervalında $q(x)$ funksiyasını birqiymətli təyin edir. Beləliklə, aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 2. Tutaq ki, $\{\lambda_n\}$ həm (1),(2),(3), həm də (5),(2),(3) məsələsinin spektridir. Əgər (1/2,1]-də $q(x)=\tilde{q}(x)$ olsa, onda bütün $x\in(0,1]$ üçün sanki hər yerdə $q(x)=\tilde{q}(x)$ olar.

Diferensial operator üçün daxili spektral verilənlərə görə tərs məsələ məxsusi ədədlərə və məxsusi funksiyalar üzərinə qoyulan şərtlərə görə parçanın daxili nöqtələrində operatorun bərpa edilməsindən ibarətdir. Requlyar Şturm-Liuvill operatoru və kəsilən Şturm-Liuvill məsələsi üçün belə tərs məsələ müxtəlif müəlliflər tərəfindən araşdırılmışdır.

Dördüncü yarımfəsildə belə məsələ sinqulyar Şturm-Liuvill operatoru üçün baxılmışdır. (1),(2),(3) və (5),(2),(3) sinqulyar məsələlərinə baxaq. Burada $q(x)$ və $\frown{q}(x)$ həqiqi qiymətli funksiyalardır, $q\in L_2(0,1)$, $\frown{q}\in L_2(0,1)$, λ spektral parametrdir, $\ell\in \mathrm{N}_0$, $\beta\in\mathrm{R}$. L ($\frown{L}$) operatoru öz-özünə qoşmadır və $\{\lambda_n\}$ ($\{\frown{\lambda}_n\}$) diskret spektrinə malikdir. (1)-(3) məsələsinin məxsusi ədədləri (3) tənliyinin kökləridir və aşağıdakı asimptotik düstur doğrudur

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = \pi\left[n + \frac{\ell+1}{2}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (7)$$

$b = \frac{1}{2}$ halında aşağıdakı nəticə isbat edilir.

Teorem 3. Tutaq ki, bütün $n \in \mathrm{N}$ üçün

$$\lambda_n = \widehat{\lambda}_n, \ \frac{y_n'(\frac{1}{2})}{y_n(\frac{1}{2})} = \frac{\widehat{y}_n'(\frac{1}{2})}{\widehat{y}_n(\frac{1}{2})} \qquad (8)$$

ödənilir. Onda $(0,1]$ intervalında sanki hər yerdə $q(x) = \widehat{q}(x)$.

$b \neq \frac{1}{2}$ olduqda $q(x)$ -in yeganəliyi ikinci spektrə aid əlavə informasiya verməklə isbat edilə bilər.

Tutaq ki, $\{m(n)\}_{n\in \mathrm{N}}$

$$m(n) = \frac{n}{\sigma}(1+\varepsilon_n), \ 0 < \sigma \leq 1, \varepsilon_n \to 0 \qquad (9)$$

şərtini ödəyən natural ədədlər ardıcıllığıdır.

Lemma 1. Fərz edək ki, $\{m(n)\}_{n\in \mathrm{N}}$ natural ədədlər ardıcıllığı (9) şərtini ödəyir və $b \in (0, \frac{1}{2}), \sigma > 2b.$Əgər bütün $n \in \mathrm{N}$ üçün

$$\lambda_{m(n)} = \widehat{\lambda}_{m(n)}, \ \frac{y_{m(n)}'(b)}{y_{m(n)}(b)} = \frac{\widehat{y}_{m(n)}'(b)}{\widehat{y}_{m(n)}(b)} \qquad (10)$$

olarsa, onda (0,b] intervalında sanki hər yerdə $q(x) = \widehat{q}(x)$.

Tutaq ki, $\{l(n)\}_{n\in \mathrm{N}}$ və $\{r(n)\}_{n\in \mathrm{N}}$ elə ardıcıllıqlardır ki,

$$l(n) = \frac{n}{\sigma_1}(1+\varepsilon_{1,n}), \ 0 < \sigma_1 \leq 1, \varepsilon_{1,n} \to 0 \qquad (11)$$

$$r(n) = \frac{n}{\sigma_2}(1+\varepsilon_{2,n}), \ 0 < \sigma_2 \leq 1, \varepsilon_{2,n} \to 0 \qquad (12)$$

və μ_n (1), (2), (4) məsələsinin, $\widehat{\mu}_n$ isə (5), (2), (4) məsələsinin məxsusi ədədləridir.

Maçozuku-Troşin metodundan, Lemma 1 və Teorem 3-dən istifadə etməklə aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 4. Tutaq ki, $\{l(n)\}_{n\in \mathrm{N}}$ və $\{r(n)\}_{n\in \mathrm{N}}$ natural ədədlər ardıcıllığı (11) və (12) şərtlərini ödəyir və $\sigma_1 > 2b-1, \sigma_2 > 2-2b$. Əgər hər bir $n \in \mathrm{N}$ üçün

$$\lambda_n = \widehat{\lambda}_n,\ \mu_{l(n)} = \widehat{\mu}_{l(n)} \text{ and } \frac{y'_{r(n)}(b)}{y_{r(n)}(b)} = \frac{\widehat{y}'_{r(n)}(b)}{\widehat{y}_{r(n)}(b)} \tag{13}$$

ödənirsə, onda (0,1] intervalında sanki hər yerdə $q(x) = \widehat{q}(x)$.

5-ci yarımfəsildə

$$Ly \equiv -y'' + \left[\frac{A}{x} + q(x)\right], \tag{14}$$

Kulon tipli məxsusiyyətə malik Şturm-Liuvil operatoru üçün tərs məsələnin əsas inteqaral tənliyinin ümumiləşmiş cırlaşan olduğu göstərilir. 6-cı yarımfəsildə isə inteqral diferensial tənliklər üçün

$$\tilde{\varphi}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)\varphi(t,\lambda)dt. \tag{15}$$

çevirmə operatorunun nüvəsinin ümumiləşmiş cırlaşan olduğu isbat edilir. Son illərdə inteqro-diferensial operatorlar üçün spektral məsələlərin araşdırılması böyük maraq doğurur (Yurko, Buterin, Kudryaşova, Frelinq və digərləri). Requlyar və sinqulyar Şturm-Liuvil və dirak operatorları üçün ümumiləşən cırlaşma məsələləri B.M. Levitan və E.S. Pənahovun işlərində ətraflı araşdırılmışdır. Xüsusi halda, bu işlərdə Xoxştat teoreminin sadə isbatı verilmişdir. İnteqro-diferensial operatorlar üçün əsas nəticəni aşağıdakı teorem ilə ifadə edək.

Teorem 5. Aşağıdakı məsələyə baxaq.

$$Ly(x) \equiv -y''(x) + q(x)y(x) + \int_0^x M(x-t)y(t)dt = \\ = \lambda^2 y(x),\ 0 \le x \le \pi, \tag{16}$$

$$y'(0) - \lambda y(0) = 0, \tag{17}$$

$$y'(\pi,\lambda) + Hy(\pi,\lambda) = 0. \tag{18}$$

(16),(17),(18) məsələsinin spektrini $\{\lambda_n\}$ ilə işarə edək. (18) şərtinin yerinə

$$y'(\pi,\lambda) + H_1 y(\pi,\lambda) = 0, \tag{19}$$

şərtini götürək. Bu halda L operatorunun yeni $\{\mu_n\}$ spektrini alarıq. İndi isə ikinci məsələyə baxaq:

$$\tilde{L}y(x) \equiv -y''(x) + \tilde{q}(x)y(x) + \int_0^x \tilde{M}(x-t)y(t)\,dt = \\ = \lambda^2 y(x),\ 0 \le x \le \pi. \tag{20}$$

$$y'(0) - \lambda y(0) = 0,$$
$$y'(\pi,\lambda) + \tilde{H}y(\pi,\lambda) = 0, \tag{21}$$

Hər bir n üçün $\{\lambda_n\}$ ilə üst-üstə düşən (20), (17), (21) məsələsinin spektri $\{\tilde{\lambda}_n\}$ olsun. (21) şərtini (22) ilə əvəz edək.

$$y'(\pi,\lambda) + \tilde{H}_1 y(\pi,\lambda) = 0, \tag{22}$$

(20),(17),(22) məsələsinin spektrini $\{\tilde{\mu}_n\}$ ilə göstərək. Burada H, H_1; $H \ne H_1$ и $\tilde{H}$, $\tilde{H}_1$ sonlu həqiqi ədədlərdir. Əgər $\{\lambda_n\}$ və $\{\tilde{\lambda}_n\}$ spektrləri üst-üstə düşürlərsə, $\{\mu_n\}$ və $\{\tilde{\mu}_n\}$ spektrləri isə sonlu sayda hədlər üçün fərqlidirsə: $n \in \Lambda_0 = 1,2,....,N,$ onda $K(x,t)$ nüvəsi ümumiləşmiş cırlaşandır, yəni

$$K(x,t) = \sum_{\Lambda_0} c_n \tilde{\varphi}_n(x)\varphi_n(t), \tag{23}$$

burada φ_n və $\tilde{\varphi}_n$ (16) və (20) tənliklərinin həlləridir.

Qeyd edək ki, (23) düsturu həyəcanlanmanın sonlu ölçülü olması ilə əlaqədardır.

İkinci fəsildə kanonik Dirak operatorları üçün spektral analizin düz və tərs məsələlərinin bəzi aspektləri araşdırılır. Bu tip məsələlərə ilk dəfə fiziklər Mozes, Prats, Toll, Verde və başqaları baxmışlar. Dirak operatoru üçün çevirmə operatorunun qurulması fransız riyaziyyatçıları J. Delsart və J. Loins tərəfindən baxılmışdır. Daha sonrakı illərdə Dirak sistemi üçün spektral məsələlərin araşdırılmasına fizik və riyaziyyatçıların çox sayda işləri həsr olunmuşdur. M.G. Qasımov, B.M. Levitanın yarım-oxda spektral funksiyaya görə və M.G. Qasımov, C.Cəbiyevin isə sonlu intervalda iki spektrə görə tərs məsələlərin həllinə aid işləri həsr edilmişdir. İki qismən üst-üstə düşməyən spekrə görə tərs məsələ ilk dəfə E.Pənahovun işlərində baxılmışdır və əsas inteqral tənliyin ümumiləşən cırlaşan olması isbat edilmişdir. 1-ci yarımfəsildə kanonik Dirak operatorları üçün $Q(x)-\tilde{Q}(x)$ potensiallar fərqinə aid Xoxştat teoremi isbat edilmişdir.

Teorem 6. Fərz edək ki, $\{\lambda_i\}$ $(i=0,\pm1,\pm2,...)$ aşağıdakı məsələnin spektridir

$$Ly = By' + Q(x)y = \lambda y, x \in [0,\pi] \tag{24}$$

$$y_2(0,\lambda)\cos\alpha + y_1(0,\lambda)\sin\alpha = 0 \tag{25}$$

$$y_2(\pi,\lambda)\cos\beta + y_1(\pi,\lambda)\sin\beta = 0 \tag{26}$$

harada ki,

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix},$$

və *p(x), q*(x) $[0,\pi]$ də həqiqi qiymətli inteqrallanan funksiyalardır. Əgər (26) şərtini

$$y_2(\pi,\lambda)\cos\gamma + y_1(\pi,\lambda)\sin\gamma = 0, \tag{27}$$

əvəz etsək L operatorunun yeni $\{\lambda_i'\}$ spektrini alarıq.

İndi isə ikinci Dirak tənliyinə baxaq

$$\tilde{L}y = \lambda y, \left(\tilde{L} = B\frac{d}{dx} + \tilde{Q}(x)\right) \tag{28}$$

$\{\tilde{\lambda}_i\}_{-\infty}^{\infty}$ və $\{\tilde{\lambda}'_i\}_{-\infty}^{\infty}$ ilə uyğun olaraq (28), (25), (26) və (28), (25), (27) məsələlərinin spektrlərini işarə edək. Əgər $\{\lambda_i'\} = \{\tilde{\lambda}_i'\}$ $(i=0,\pm1,\pm2,...)$ və $\{\lambda_i\} \neq \{\tilde{\lambda}_i\}, i=1,2,....,N;$ $\{\lambda_i\} = \{\tilde{\lambda}_i\}, i=N+1,N+2,.....;$ onda

$$\begin{aligned} q(x)-\tilde{q}(x) &= \sum_{\Lambda_0} P_n(x), \\ p(x)-\tilde{p}(x) &= \sum_{\Lambda_0} S_n(x), \end{aligned} \tag{29}$$

harada ki $P_n(x)$, $S_n(x)$ funksiyaları $\tilde{y}_n(x,\lambda), w_n(x,\lambda)$ və onların törəmələrinin xətti kombinasiyalarından ibarətdir. $w_n(x,\lambda), \tilde{y}_n(x,\lambda)$ sıra ilə (24) və (28) tənliklərinin həlləridir. Xüsusi halda əgər ikinci məxsisi ədədlər tamamilə üst-üstə düşərsə, onda $Q(x) = \tilde{Q}(x)$.

İkinci yarımfəsildə Dirak operatoru üçün dayanıqlıq məsələsinin bir variantı araşdırılır. Tütaq ki, $\{\lambda_n, \rho_n\}$ və $\{\mu_n, \sigma_n\}$ uyğun olaraq (24),(25),(26) və (28),(25),(26) məsələlərin spektral xarakteristikalarıdır, burada $\{\lambda_n\}(\{\mu_n\})$ məxsusi ədədlərdir, $\{\rho_n\}(\{\sigma_n\})$ isə normallaşdırıcı ədədlərdir.

Bu hissədəki əsas nəticə aşağıdakı teoremlə ifadə edilr.

Teorem 7. Əgər

$$M \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |\sigma_n - \alpha_n| + |\mu_n - \lambda_n| \right\} \tag{30}$$

kifayət qədər kiçikdirsə, onda

$$\begin{aligned} &\max_{0 \le x \le \pi} \left| \widehat{p}(x) - p(x) \right| \le C'M \\ &\max_{0 \le x \le \pi} \left| \tilde{q}(x) - q(x) \right| \le C''M \end{aligned} \tag{31}$$

burada $C' > 0$ və $C'' > 0$ sabit ədədlərdir.

İzospektral məsələlər skalyar halda bir çox riyaziyyatçılar tərəfindən araşdırılmışdır (Borq, Trubovits, Poşçel). Daha sonra Jodeyt, Levitan və Çern skalyar və vektorial halda bu məsələlərin həlli üçün yeni metodlar tətbiq etmişlər. Bektor halında Şturm-Liuvill tənliyi üçün izospektral məsələ Çern tərəfindən baxılmışdır.

Tərs məsələnin əsas inteqral tənliyinə baxaq:

$$K(x,y) + F(x,y) + \int_0^x K(x,t)F(t,y)dt = 0, \ 0 \le y \le x \le \pi, \tag{32}$$

3-cü yarımfəsildə alınan əsas nəticələr aşağıdakılardır.

Teorem 8. (32) inteqral tənliyinin həlli

$$B\frac{\partial K}{\partial x} + Q(x)K(x,y) = -\frac{\partial K}{\partial y}B + Q_0(y)K(x,y). \tag{33}$$

tənliyini ödəyir.

Əlavə olaraq aşağıdakı ifadə ödənilir

$$Q(x) = Q_0(x) + BK(x,x) - K(x,x)B. \tag{34}$$

Eyni zamanda $K(x,y)$

$$BK(x,x) - K(x,x)B = Q(x) - Q_0(x), \tag{35}$$

$$K_{21}(x,0) = K_{11}(x,0) = 0. \tag{36}$$

şərtlərini ödəyir.

Teorem 9. Əgər $K(x,y)$ funksiyası (32) tənliyinin həllidirsə, onda (33),(35),(36) məsələsinin də həlli olur, bu zaman

1) hər kompleks qiymətli λ üçün

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)dt, \tag{37}$$

funksiyası

$$By'+Q(x)y=\lambda y,\ 0\le x\le\pi, \tag{38}$$

tənliklər sisteminin həllidir. Burada (34) şərti ödənilir.

2) Vektor qiymətli $\varphi(x,\lambda)$ funksiyası

$$\varphi_1(0,\lambda)=1, \varphi_2(0,\lambda)=h_0=h. \tag{39}$$

şərtini ödəyir. 4-cü yarımfəsildə parçanın daxili nöqtəsində kəsilmə olan halda Dirak operatoru üçün spektral məsələ araşdırılır. Xüsusi halda varlıq və yeganəlik teoremləri isbat edilmişdir. Aşağıdakı Dirak tənliklər sisteminə

$$\begin{aligned} &u_2'(x)+\left[p(x)u_1(x)+q(x)u_2(x)\right]=\lambda u_1(x),\\ &u_1'(x)-\left[q(x)u_1(x)-p(x)u_2(x)\right]=-\lambda u_2(x), \end{aligned} \tag{40}$$

özündə λ parametrini saxlayan

$$l_1u:=\lambda u_1(-1)+\left(\lambda-a\right)u_2(-1)=0, \tag{41}$$

$$l_2u:=u_1(1)-u_2(1)=0 \tag{42}$$

və sıfırda kəsilmə olan halda

$$\begin{aligned} &l_3u:=u_1(0^-)=\delta u_1(0^+),\\ &l_4u:=u_2(0^-)=\delta u_2(0^+). \end{aligned} \tag{43}$$

sərhəd şərtlərinə baxaq. Burada $p(x)$ və $q(x)$ uyğun olaraq, [-1,0) və (0,1] intervallarında həqiqi qiymətli kəsilməz və aşağıdakı şəkildə sonlu limitləri olan funksiyalardır:

$$p(0^{\pm})=\lim_{x\to0^{\pm}}p(x),\ q(0^{\pm})=\lim_{x\to0^{\pm}}q(x);\ a,\delta\in\mathbb{R}, a>0, \delta\ne0.$$

Qeyd edək ki, $\mathbb{C}^2=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$, $L=L_2\left(-1,0\right)\oplus L_2\left(0,1\right)$ olan halda $H=L_2\left(-1,0\right)\oplus L_2\left(0,1\right)\oplus\mathbb{C}^2$ Hilbert fəzasında

$$U(x)=\left(u_1(x),u_2(x),u_3\right)^{\mathrm{T}},\ V(x)=\left(v_1(x),v_2(x),v_3\right)^{T}\in H$$

elementlərinin skalyar hasili aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$\langle U,V\rangle_H := \int_{-1}^{0} u^T(x)\overline{v}(x)dx + \delta^2\int_{0}^{1} u^T(x)\overline{v}(x)dx + \frac{1}{a}u_3\overline{v}_3, \tag{44}$$

harada ki, $u_i, v_i \in L_2(-1,1),\ i=1,2,\ u_3, v_3 \in \mathbb{C}$.

$A: D(A) \subseteq H \to H$. operatorunu aşağıdakı şəkildə təyin edək:

$U(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3)^{\mathrm{T}} \in D(A)$, burada $u_{1(i)}, u_{2(i)} (i=1,2)$ funksiyaları uyğun olaraq [-1,0) və (0,1] yarım-intervallarında mütləq kəsilməz funksiyalardır və sonlu $u_i(0^{\pm}), l(u) \in H,\ l_1u = l_3u = l_4u = 0$ limitləri vardır.

$$AU = \left(u_2' + p(x)u_1 + q(x)u_2,\ u_1' - q(x)u_1 - p(x)u_2,\right.$$
$$\left.-R_{-1}(u),\ u_1(1) - u_2(1)\right)^T U \in D(A)$$

Beləliklə (40)-(43) məsələsini $AU = \lambda U$ operator şəklində yaza bilərik.

A operatoru üçün klassik nəticələr ödənir: A simmetrikdir, məxsusi ədədləri həqiqidir, müxtəlif məxsusi ədədlərə uyğun gələn məxsusi funksiyalar ortoqonaldır:

$$\int_{-1}^{0} u^T(x,\lambda_1)\overline{v}(x,\lambda_2)dx + \delta^2\int_{0}^{1} u^T(x,\lambda_1)\overline{v}(x,\lambda_2)dx + \tag{44}$$
$$+\frac{1}{a}\tilde{R}_{-1}(u)\tilde{R}_{-1}(\overline{v}) = 0.$$

(40)-(43) məsələsinin məxsusi ədədləri sadədirlər və

$$\begin{aligned} w_i(\lambda) &= W(\varphi(x,\lambda), \psi(x,\lambda)) \\ &= \varphi_{1i}(x,\lambda)\psi_{2i}(x,\lambda) - \varphi_{2i}(x,\lambda)\psi_{1i}(x,\lambda), \\ & x \in [-1,0)\ (x \in (0,1]), \end{aligned} \tag{45}$$

funksiyasının kökləridir. Eyni zamanda $w_i(\lambda)$ ($i=1,2$) funksiyalarının sıfırları üst-üstə düşürlər.

Teorem 10. (40)-(43) məsələsinin λ_n məxsusi ədədləri aşağıdakı asimptotik düsturu ödəyir:

$$\lambda_n = \frac{a(1+n\pi)}{2(a+1)} + O\left(\frac{1}{n}\right),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{46}$$

Sonuncu yarımfəsildə Dirak operatorunun ikinci kanonik şəklinə baxılıb və aşağıdakı nəticə alınıb.

Teorem 11. Dirixle məsələsinin

$$\varphi_1' + \{\lambda + q(x)\}\varphi_2 = 0, \tag{47}$$

$$\varphi_2' - \{\lambda + p(x)\}\varphi_1 = 0, \tag{48}$$

$$\varphi_2(0,\lambda) = 0, \quad \varphi_2(1,\lambda) = 0 \tag{49}$$

məxsusi ədədləri üçün aşağıdakı asimptotik düstur doğrudur:

$$\mu_n = n\pi - \frac{1}{2}\left[\int_0^1 p(t)dt + \int_0^1 q(t)dt\right] + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{50}$$

burada $p(x), q(x) \in L^2[0,1]$.

3-cü fəsil diffuziya operatoru üçün spektral məsələlərin araşdırılmasına həsr edilmişdir. Şturm-Liuvill tənliyindən kifayət qədər fərqli olan diffuziya tənliyi üçün spektral analizin düz və tərs məsələlərinin öyrənilməsinə maraq son illərdə artmışdır. Qeyd edək ki, stasionar Kleyn-Qordon tənliyində

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)^2 - \left(\frac{1}{i}\nabla - e\vec{A}\right)^2\right]\psi = m^2\psi, \tag{51}$$

dəyişənlərin əvəzləməsindən istifadə edərək sferik koordinatlarda diffuziya tənliyini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik

$$\psi''(r) + \left[V^2 - 2KV\right]\psi(r) = -K^2\psi, \tag{52}$$

burada $E = K$. (52) tənliyi klassik Şredinger tənliyidir.

Bu tənlik üçün səpilmə məsələsini ilk dəfə 1972-ci ildə fransız riyaziyyatçıları Jolan (Jaulent) və Jan (Jean) tərəfindən baxılmışdır. Sonlu parçada iki spektrə görə tərs məsələ M.G. Qasımov və H.Ş. Hüseynovun işində həll edilmişdir. Bundan sonra diffuziya operatoru üçün spektral məsələlərin araşdırılmasına bir çox məqalələr həsr edilmişdir. Xüsusi halda E.S. Pənahov və onun tələbələri (H.Koyunbakan, M. Şat, T.Gülşən, A.Duman, İ.Ulusoy) tərs məsələyə müxtəlif qoyuluşlarda baxmışlar. Birinci yarımfəsildə sferik kordinatlardan istifadə edərək (5) Kleyn-Qordon tənliyinini diffuziya tənliynə gətirilməsi ətraflı şəkildə göstərilmişdir. İkinci fəsil

$$Ly = -y'' + [q(x) + 2\lambda p(x)]y = \lambda^2 y, \quad x \in [0,\pi] \tag{53}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{54}$$

$$y'(\pi,\lambda) + Hy(\pi,\lambda) = 0 \tag{55}$$

sərhəd məsələsi üçün yarımtərs məsələyə həsr edilmişdir.

Burada $q(x)$ və $p(x)$ həqiqi qiymətli funksiyalar və $q(x) \in W_2^m[0,\pi]$, $p(x) \in W_2^{m+1}[0,\pi]$ $(m \geq 1)$, h, H sonlu həqiqi ədədlərdir. (53),(54),(55) məsələsinin $\{\lambda_n\}$ məxsusi ədədləri həqiqidirlər, sadədirlər və aşağıdakı asimptotik düsturu ödəyirlər

$$\lambda_n = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_{1,n}}{n}. \tag{56}$$

Burada

$$c_0 = \tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi p(x)\,dx, \quad c_1 = \tfrac{1}{\pi}\left\{h + H + \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \left[q(x) + p^2(x)\right]dx\right\},$$

və $\sum_n \left|c_{1,n}\right|^2 < \infty$.

(55) şərtini aşağıdakı şərtlə əvəz etsək

(57)

L operatoru üçün yeni $\{\lambda_n'\}$ spektrini alarıq. M.G. Qasımov və H.Ş. Hüseynovun işində iki spektrə görə $q(x)$ potensialının birqiymətli təyin edilməsi göstərilmişdir. Digər bir diffuziya operatoruna

$$-y'' + [\tilde{q}(x) + 2\lambda p(x)]y = \lambda^2 y, \qquad x \in [0,\pi] \tag{58}$$

eyni (54),(55) və (54),(57) sərhəd şərtləri ilə baxaq. Burada $\tilde{q}(x) \in W_2^m[0,\pi]$ $(m \geq 1)$. (53), (54), (55) və (53), (54), (57) sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədlərini uyğun olaraq $\{\tilde{\lambda}_n\}$ və $\{\tilde{\lambda}_n'\}$ ilə işarə edək. Onda, aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 12. Tutaq ki, (53),(54),(55) və (58),(54),(55) məsələlərinin spektrləri üst-üstə düşür, yəni $\{\tilde{\lambda}_n\} = \{\lambda_n\}$. Əgər на $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ parçasında

$[0,\pi]$

$q(x) = \tilde{q}(x)$ olarsa, onda parçasında sanki hər yerdə $q(x) = \tilde{q}(x)$ olar.

(53),(54),(55) və (53),(54),(57) məsələlərinin həlləri uyğun olaraq aşağıdakı inteqral formaya malikdirlər:
(59)

$$\tilde{y}(x,\lambda) = cos[\lambda x - a(x)] + \int_0^x \tilde{A}(x,t)cos\lambda t dt + \int_0^x \tilde{B}(x,t)sin\lambda t dt \quad (60)$$

harada ki,

$$a(x) = x.p(0) + 2\int_0^x [A(\zeta,\zeta)sina(\zeta) - B(\zeta,\zeta)cosa(\zeta)]d\zeta.$$

və , $\tilde{A}(x,\cdot)$ və $\tilde{B}(x,\cdot)$ nüvələri bu məsələlərin həlləridir

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} - 2p(x)\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} - q(x)A(x,t) = \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} \quad (61)$$

$$\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} + 2p(x)\frac{\partial A(x,t)}{\partial t} - q(x)B(x,t) = \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2}$$

$$q(x) = -p^2(x) + 2\frac{d}{dx}[A(x,x)cosa(x) + B(x,x)sina(x)] \quad (62)$$

$$A(0,0) = h, B(x,0) = 0, \left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, a(x) = \int_0^x p(t)dt.$$

Tutaq ki,

$$\beta_n = \int_0^\pi y^2(x,\lambda_n)dx + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^\pi p(x)y^2(x,\lambda_n)dx,$$

$$\tilde{\beta}_n = \int_0^\pi \tilde{y}^2(x,\widehat{\lambda}_n)dx + \frac{1}{\widehat{\lambda}_n}\int_0^\pi p(x)\tilde{y}^2(x,\widehat{\lambda}_n)dx, \quad (63)$$

və

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n<\lambda}\frac{1}{\beta_n}, \quad \tilde{\rho}(\lambda) = \sum_{\lambda_n<\lambda}\frac{1}{\tilde{\beta}_n}. \quad (64)$$

β_n, $\tilde{\beta}_n$ normallaşdırıcı ədədlər, $\rho(\lambda)$, $\tilde{\rho}(\lambda)$ isə uyğun olaraq (53),(54),(55) və (58),(54),(55) məsələlərinin spektral funksyalarıdır.

Üçüncü yarımfəsildə diffuziya operatorları üçün çevirmə operatorlarının nüvələri fərqinin ümumiləşmiş cırlaşması tədqiq edilmişdir. Burada aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 13. Fərz edək ki, $\{\lambda_n\}$ və $\{\lambda_n'\}$ spektrləri bütün $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ üçün üst-üstə düşür və $\{\lambda_n'\} \neq \{\tilde{\lambda}_n'\}, n = 1, 2, 3, , \ldots N$; qalan n-lər üçün $\{\lambda_n'\} = \{\tilde{\lambda}_n'\}$. Onda $\tilde{A}(x,t) - A(x,t)$ və $\tilde{B}(x,t) - B(x,t)$ fərqləri ümumiləşmiş cırlaşan olurlar, yəni

$$\tilde{A}(x,t) - A(x,t) = \frac{1}{\tilde{H}_1 - \tilde{H}} \sum_{n=0}^{N} \frac{\tilde{\varphi}(\pi, \mu_n) + \tilde{H}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n)}{\left\| \cos \mu_n t \right\|^2} \times \left[\tilde{c}(x, \mu_n) - \tilde{H} \tilde{s}(x, \mu_n) \right] \cos \mu_n t, \qquad (65)$$

$$\tilde{B}(x,t) - B(x,t) = \frac{1}{\tilde{H}_1 - \tilde{H}} \sum_{n=0}^{N} \frac{\tilde{\varphi}'(\pi, \mu_n) + \tilde{H}_1 \tilde{\varphi}(\pi, \mu_n)}{\left\| \sin \mu_n t \right\|^2} \times \left[\tilde{c}(x, \mu_n) - \tilde{H} \tilde{s}(x, \mu_n) \right] \sin \mu_n t. \qquad (66)$$

Dördüncü yarımfəslin əsas nəticəsi aşağıdakı teoremdir.

Teorem 14. Əgər $M \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left| \lambda_n \left(\rho_n - \sigma_n \right) \right| + \left| \mu_n - \lambda_n \right| \right\}$ kifayət qədər kiçik olsa, onda

$$\max_{0 \le x \le \pi} \left| \tilde{q}(x) - q(x) \right| \le CM \;, \qquad (67)$$

harada ki, $C > 0$ sabit ədəddir .
6-cı yarımfəsildə (53) tənliyi

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \,. \qquad (68)$$

Dirixle sərhəd şərti ilə baxılır və məxsusi ədədlər üçün asimptotik düstur alınır. Son nəticəni almaq üçün aşağıdakı lemma isbat edilir.

Лемма 2. Tutaq ki, $p(x), q(x) \in L^2[0,1]$ və $N > 2\|q\|$ tam ədəddir. Onda $\operatorname{Re} \lambda < (N + 1/2)\pi$ oblastında $\varphi(1, \lambda)$ həlli hər bir $n > N$ üçün N kökə, $|\lambda - n\pi| < \pi / 2$ oblastında isə yalnız bir kökə malikdir.

Bu lemmadan istifadə edərək aşağıdakı əsas nəticə isbat edilmişdir:

Teorem 15. $p(x), q(x) \in L^2[0,1]$ olduqda (53), (75) sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri aşağıdakı asimptotik düsturu ödəyir

$$\mu_n(q) = \frac{\mathrm{n}\pi + \alpha}{2} \pm \frac{\left((n\pi+\alpha)^2 + 2\beta\right)^{1/2}}{2} + O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) \tag{69}$$

harada ki, $\alpha = \int_0^1 p(t)dt, \quad \beta = \int_0^1 q(t)dt$.

Dördüncü fəsil nodal nöqtələrə və nodal uzunluqlara görə sıfırda məxsusiyyətə malik Şturm-Liuvill tənlikləri, diffuziya tənliyi, Dirak sistemi üçün spektral analizin düz və tərs məsələlərin araşdırılmasına həsr edilib.Kulon növlü məxsusiyyətə malik Şturm-Liuvill operatoru üçün nodallara görə tərs məsələyə baxaq.

Singulyar Şturm-Liuvill məsələsinə baxaq

$$-y'' + \left[\frac{A}{x} + q(x)\right] y = \lambda y, \ (0 < x \le \pi), \ \ \lambda = s^2, \tag{70}$$

$$y(0) = 0, \tag{71}$$

$$y'(\pi) - Hy(\pi) = 0, \tag{72}$$

harada ki, $q(x) \in L^1[0,\pi]$, $A,\ H$ -məhdud ədədlər və $\frac{y(x)}{x} \in C[0,\pi]$. Дaha sonra (70) tənliyinin

$$\phi(0,s) = 0,\ \phi'(0,s) = s. \tag{73}$$

başlanğıç şərtləri ödəyən həllini $\phi(x,s)$ ilə göstərək.

λ_n, n -ci məxsusi ədəd və $0 < x_1^n < x_2^n < \cdots < x_i^n < \pi, \ \ i = 1,2,\ldots,n-1$ n-ci məxsusi funksiyanın nodal(düyün) nöqtələri, $I_i^n = [x_i^n, x_{i+1}^n]$ n-ci nodal parça və $l_i^n = \left|l_i^n\right| = x_{i+1}^n - x_i^n$ - nodal uzunluq olsun. $j_n(x)$ ilə $j_n(x) = \max\left\{i \ : \ x_i^n < x\right\}$.funksiyasını göstərək Onda aşağıdakı lemma isbat edilir.

Лемма 3. (70),(71),(72) məsələsinin həlli aşağıdaki şekildədir

$$\phi(x,s) = \sin sx + \int_0^x \frac{\sin s(x-t)}{s} \left\{\frac{A}{t} + q(t)\right\} \phi(t,s)dt, \tag{74}$$

harada ki, $\frac{\phi(t,s)}{t}\in C[0,\pi]$.

Лемма 4. (70),(71),(72) məsələsinin məxsusi ədədləri (72) tənliyinin kökləridir. Bu məxsusi ədədlər üçün aşağıdakı asimptotik düsturu ödənir

$$s_n=\sqrt{\lambda_n}=n+\frac{1}{2}+\frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+\frac{1}{2})}{(n+\frac{1}{2})}+\frac{c_0}{(n+\frac{1}{2})}+O(\frac{\ln n}{n^2}), \tag{75}$$

harada ki,

$$c_0=\frac{1}{\pi}\left(AM_1-H+\frac{A\ln\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right),\ \beta(x)=AM_1+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt,$$

$$M_1=M+\frac{\sin 2}{2}\ ,\quad M=\int_0^1\frac{\sin^2\xi}{\xi}d\xi\ .$$

Лемма 5. Tutaq ki, $q\in L^1(0,\pi)$. Onda, $n\to\infty$ üçün

$$x_i^n=\frac{\pi i}{s_n}+\frac{1}{2s_n^2}\int_0^{x_i^n}\left(1-\cos 2s_n t\right)\left\{\frac{A}{t}+q(t)\right\}dt+o\left(\frac{1}{s_n^3}\right), \tag{76}$$

$$l_i^n=\frac{\pi}{s_n}+\frac{1}{2s_n^2}\int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n}\left(1-\cos 2s_n t\right)\left\{\frac{A}{t}+q(t)\right\}dt+o\left(\frac{1}{s_n^3}\right). \tag{77}$$

$$c_0=\frac{1}{\pi}\left(AM_1-H+\frac{A\ln\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right),\ \beta(x)=AM_1+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt,$$

$$M_1=M+\frac{\sin 2}{2}\ ,\quad M=\int_0^1\frac{\sin^2\xi}{\xi}d\xi\ .$$

Beləliklə aşağıdaki mühüm teorem doğrudur

Теорема 16. $q(x)\in L^1(0,\pi)$ potensial funksiyası üçün

$$q(x)=\lim_{n\to\infty}\left[2s_n^2\left(\frac{s_n l_j^n}{\pi}-1\right)-s_n A\ln\left(\frac{x_{j+1}^n}{x_j^n}\right)+\frac{s_n A}{\pi}\int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n}\frac{\cos 2s_n t}{t}dt\right]\ .$$

sanki hər yerdə $x\in(0,\pi)$, $\quad j=j_n(x)$.

Beşinci fəsildə $\frac{2}{r}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$ tip məxsusiyyətə malik tənlik üçün spektral analizin düz və tərs məsələsinin bəzi problemləri öyrənilir. Aşağıdakı tənliyə baxaq

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R+\left(E+\frac{2}{r}\right)R=0 \quad (0<r<\infty). \tag{78}$$

Burada ℓ tam müsbət ədəddir ya da sıfıra bərabərdir. Kvant fizikasında hidrogen atomunun enerji səviyyələrinin öyrənilməsi bu tənliyə gətirilir. $R=y/r$ əvəzetməsi ilə (78) tənliyi bu şəklə gətirilir:

$$\frac{d^2y}{dr^2}+\left\{E+\frac{2}{r}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right\}y=0. \tag{79}$$

Bessel tənliyi halında olduğu kimi burada da göstərmək olar ki, sonlu [0,b] parçasında bu tənliyin spektri diskretdir. Göstərilir ki, mənfi E ($\lambda=\sqrt{-E}$) üçün spektr yenə də diskret olaraq qalır. Məlumdur ki, (79) tənliyinin sıfırda məhdud həlləri üçün $\lambda\to\infty$ olduqda belə asimptotika doğrudur

$$\begin{gathered}\phi(r,\lambda)=\frac{e^{\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}}}{\left|\Gamma\left(\ell+1+\frac{i}{\sqrt{\lambda}}\right)\right|}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\times\\ \times\cos\left[\sqrt{\lambda}r+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ln\sqrt{\lambda}r-(\ell+1)\frac{\pi}{2}+\alpha\right]+o(1)\end{gathered} \tag{80}$$

harada ki, $\alpha=\arg\Gamma\left(\ell+1+\frac{i}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

1,2 və 3 yarımfəsillərində aşağıdakı məsələlərə baxılır

$$-y''+\left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-\frac{2}{r}+q(r)\right]y=\lambda y \quad (0<r\le\pi), \tag{81}$$

$$y(0)=0,\ y'(\pi)+H_iy(\pi)=0, i=1,2. \tag{82}$$

$$-y''+\left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-\frac{2}{r}+\tilde{q}(r)\right]y=\lambda y \quad (0<r\le\pi), \tag{83}$$

$$y(0)=0,\ y'(\pi)+\tilde{H}_iy(\pi)=0, i=1,2. \tag{84}$$

Burada $q(x)$, $\tilde{q}(x) \in L^2[0,\pi]$ həqiqi qiymətli funksiyalardır və $H_i, \tilde{H}_i (H_1 \neq H_2; \tilde{H}_1 \neq \tilde{H}_2; i=1,2.)$ sonsuzluğa bərabər olmayan həqiqi ədədlərdir. Bu halda 2,3,4,5 teoremlərinə analoji teoremlər isbat edilir.

Aşağıdakı sinqulyar tənliyə baxaq

$$-y''+\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}\right)y+q(x)y=\lambda y, \quad x\in(0,1]. \tag{85}$$

Bu tənliyin həlli bu düsturlarla yazılır

$$\varphi(x,\lambda,q)=x^2+\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)\varphi(t,\lambda,q)dt,$$

$$\psi(x,\lambda,q)=c_1x^2+c_2x^{-1}-\frac{1}{3}\int_x^1\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)\psi(t,\lambda,q)dt$$

Dördüncü yarımfəsildə məxsusi ədədlər üçün bəzi qiymətləndirmələr alınmışdır. Tutaq ki, $0<x_1<x_2\leq 1$. Onda aşağıdakı teoremlər doğrudur:

Teorem 17. Əgər y

$$-y''+\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}\right)y+q(x)y=\lambda y \tag{86}$$

$$y(x_1)=y'(x_2)+by(x_2)=0, \tag{87}$$

məsələsinin trivial olmayan həllidirsə, onda

$$\lambda \geq -\left(\frac{2}{x_1}+\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx\right]^2\right) \tag{88}$$

harada ki, $b \in \square$ и $q(x)\in L^2[0,1]$

Teorem 18. Əgər y (86) tənliyinin

$$y(x_1)=y(x_2)=0, \tag{89}$$

şərhəd şərtləri ilə trivial olmayan həllidirsə, onda $q(x)\in L^2[0,1]$ üçün

$$\lambda \geq -\left(\frac{2}{x_1} + 4\left(\int_{x_1}^{x_2} |q|\, dx\right)^2\right).$$

Teorem 19. Əgər y

$$-y'' + \left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x}\right)y + q(x)y = 0$$

tənliyinin

$$y'(x_1) = y'(x_2) = 0$$

şərhəd şərtləri ilə trivial olmayan həllidirsə, onda

$$\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_2} \leq 2\left[\int_{x_1}^{x_2} |q| dx\right]^2 + \left[1/2\left(x_2 - x_1\right)\right]\int_{x_1}^{x_2} |q| dx$$

Burada $q(x) \in L^2\left[0,1\right]$.

Beşinci yarımfəsil mənbələrin sıxlıq modullarının məhdudluğu şərti daxilində loqarifmik potensial üçün tərs məsələdə həllin valığı üçün zəruri və kafi şərtlərin konstruktiv təsvirinə həsr edilib. Bu şərtlərin nəticəsi bu potensialın mənbəyinin sıxlığının və lokallaşşması oblastının qiymətləndirilməsidir. Alınan nəticələr aprior qiymətləndirmələrin məsələnin həllinə tətbiqi imkanlarını və triqonomtrik L moment probleminin potensiallar nəzəriyyəsinə tətbiqi perspektivini nümayiş etdirir. Bu yarımfəslin əsas nəticələri aşağıdakılardır.

Teorem 20. Sabit $\rho_0 > 0$ sıxlıqlı, potensialı

$$\Phi\left(r,\phi\right) = -c_0 \log r + \sum_{m=1}^{n} \frac{a_m^1 \cos m\phi + a_m^2 \sin m\phi}{r^m} \tag{90}$$

şəklində təyin edilən $\Phi\left(r,\phi\right)$ funksiyası olan kutlə ilə dolmuş birrabitəli D oblastının varlığı üçün zəruri şərt aşağıdakıların ödənilməsidir:

$$c_0 > 0, \quad \left|\frac{c_k}{c_0}\right| \leq \left(\frac{c_0}{\rho_0}\right)^{k/2} l_k^n, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{91}$$

Burada $c_k = \left(ka_k^1 + ika_k^2\right)$ - $\Phi\left(r\right)$ funksiyasının harmonik momenti; l_k^n -hər n bir n və k üçün hesablana bilən sabitlərdir.

Bundan başqa (2) şəklində olan $\Phi(r)$ funksiyası üçün belə D oblastı varsa, onda onun sərhəddi

$$\sqrt{\frac{c_0}{\rho_0}}\cdot\frac{1}{4\sigma(n)}\le r\le\sqrt{\frac{c_0}{\rho_0}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)^{1/2} \qquad (92)$$

halqasındadır. Burada $\sigma(n)$ hər bir n üçün hesablana bilər.

Tərif 1. Əgər B-də mənfi olmayan harmonik $T_n(r,\phi)$ polinomu üçün

$$T_n(r,\phi)=b_0+\sum_{m=1}^{n} r^m\left(b_m^1\cos m\phi+b_m^2\sin m\phi\right)\ge 0,\quad r\in B \qquad (93)$$

olarsa, onda $\left\{d_m : d_m=\left(a_m^1+ia_m^2\right)\right\}$, $m=0,1,2,\ldots;\ a_0^2=0$ ardıcıllığı B oblastında mənfi olmayan harmonik adlanır. Burada $b_0,\ b_m^1,\ b_m^2$ həqiqi sabitlərdir və

$$U\left(T_n\right)=a_0^1 b_0+\sum_{m=1}^{n}\left(a_m^1 b_m^1+a_m^2 b_m^2\right)\ \ge\ 0.$$

S_0^r dairəsindən kənarda harmonik olan və sonsuzluqda $M\ln r$ ifadəsindən sürətlə atrmayan hər bir $\Phi(r)$ funksiyası bu dairədən kənarda aşağıdakı sıraya ayrılır

$$\Phi(r,\phi)=-a_0\ln r+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m^1\cos m\phi+a_m^2\sin m\phi}{r^m}. \qquad (94)$$

Teorem 21. Tutaq ki, $\Phi(\vec r)$ funksiyası bu şərti ödəyir: $\Phi(\vec r)$ S_0^1, vahid dairəsindən kənarda harmonkdir, bu dairənin sərhədlərində öz törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdir və sonsuzluqda $M\ln r$ kəmiyyətindən daha sürətlə artmır. Əgər $\Phi(\vec r)$ S_0^1-də cəmlənmiş və $\rho(\vec r)$ sıxlığa malik olan kütlənin xarici potensialıdırsa, harada ki, $\rho(\vec r)$ ölçülən funksiyadır və $\left|\rho(\vec r)\right|\le L$, onda bu şərtlər ödənilir

1) $-\pi L\le c_0\le\pi L$

2) $B(z)$ funksiyasının $z=0$ nöqtəsi ətrafında

$$B(z)=\exp\left\{\frac{i}{L}\left(\frac{c_0}{2}+c_1 z+c_2 z^2+\cdots+c_n z^n+\cdots\right)\right\}=$$

$$=\gamma+\gamma_1 z+\cdots+\gamma_n z^n+\cdots; \qquad (95)$$

$$\gamma_0=\gamma+\bar{\gamma}=2\cos\frac{c_0}{2L} \;;$$

$$c_n=\int\limits_D \rho(r,\phi)e^{in\phi}\,r^{n+1}\,dr\,d\phi, \quad n=0,1,2,\ldots \qquad (96)$$

Teylor sırasının $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\ldots$ əmsalları S_0^1 -də harmonuk mənfi olmaydırlar.

NƏTİCƏLƏR

Dissertasiya işi singulyar diferensial tənliklər üçün spektral analizin və potensiallar nəzəriyyəsinin tərs məsələlərinin araşdırılmasına həsr edilib. Dissertasiya işində aşağıdakı yeni elmi nəticələr alınmışdır:

– İki fərqli potensiala malik sinqulyar Şturm-Liuvill operatorları, hidrogen atomunun tənlikləri, Kulon potensiallı Sturm-Liuvill operatorları, kanonik Dirak operatorları və integro-diferensiyal tənliklər üçün tərs məsələlər yeni metodlarla araşdırılıb, potensiallar fərqi üçün vacib düsturlar yazılıb və yeganəlik teoremləri isbat edilib.
– Çevirmə operatorunun nüvəsinin və tərs məsələnin əsas inteqral tənliyinin ümumiləşmiş cırlaşan olduğu göstərilib və xüsusi halda yeni üsulla Xoxştat teoreminin isbatı verilmişdir.
– Sinqulyar diferensial operatorlar üçün bir spektr kəsişdikdə və potensiallar parçanın yarısında və ya parçanın müəyyən alt hissəsində üst-üstə düşdukdə bütün parçada potensialların üst-üstə düşməsinə aid Xoxştat-Liberman və Moçozuki-Troşin teoremləri sinqulyar halda isbat edilmişdir.

- Dirak, diffuziya operatorları üçün tərs məsələnin dayanıqlı olmasına aid zəruri şərtləri saxlayan teoremlər isbat edilmişdir.
- Spektral verilənlər nodal nöqtələr və nodal uzunluqlar olduğu halda ilk dəfə spektral analizin düz və tərs məsələlərinə aid klassik nəticələr-nodal nöqtələr və nodal uzunluqlar üçün asimptotik düsturlar alınmış və yeganəlik teoremləri isbat edilmişdir. Bu nəticələr xüsusi olaraq sinqulyar diferensial operatorlar və Dirak operatoru üçün göstərilmişdir.
- Dirak, diffuziya və hidrogen atomunun tənlikləri üçün Dirixle məsələsi araşdırılmış və məxsusi ədədlər üçün asimptotik düsturlar alınmışdır.
- Mənbənin sıxlıq modulu məhdud olduqda, loqarifmik potensiallı tərs məsələlərin həllinin varlığı üçün zəruri və kafi şərtlərin konstruktiv yazılışı verilmişdir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri müəllifin aşağıdakı əsərlərində çap edilmişdir:

1. Panakhov E.S., The definition of differential operator with peculiarity in zero on two spectrum, J.Spectral Theory of Operators, 1987, vol.VIII, pp.177-188.
2. Panakhov E.S., Some questions of the inverse problems for diffusion operator by two incompletely given spectra.Sbornik trudov I Resbublikanskoy konferentsii po mexanike i matematike,1995,vol.2, pp.186-187.
3. Brodsky M., Panakhov E.S. Concerning a priori estimates of solution of the inverse logarithmic potential problem, J. Inverse Problems,vol.6,1990, pp.321-330.
4. Panakhov E.S. Cauchy and Goursat problem for the second order hyperbolic equations with discontinues cofficients, Izv. AN Azerb., 1995,vol.6, No 3,pp.63-66.

5. Panakhov E.S.,Koyunbakan H. Inverse problem for singular Sturm-Liouville operator, IMM of NAS of Azerb., 2003, vol. XVII, pp.113-126.
6. Koyunbakan H., Panakhov E.S., Transformation oper inverseator for singular Sturm-Liouville equations. International, Journal of Applied Mathematics, 2003, vol.14, No.2, pp.135-143.
7. Panakhov E.S., Iç Ü., On the determination of the Dirac operator from two spectra, Transactions NAS of Azerb., 2003, vol.XXIII, No.4, pp.159-172.
8. Koyunbakan H., Panakhov E.S., Half inverse problem for singular differential operator, Applicable Analysis, 2005, vol. 84, No.3, pp.247-252.
9. Panakhov E.S., On inverse problem for singular Sturm-Liouville operator from two spectra, Transactions NAS of Azerb., 2005, vol. XXV, No.1, pp.125-134.
10. Koyunbakan H., Panakhov E.S., Solution of discontinuous inverse nodal problem on a finite interval, Mathematical and Computer Modeling, 2006, vol.44, pp.204-209.
11. Panakhov E.S., Yılmazer R. On inverse problem for singular Sturm-Liouville operator from two spectra, Ukrainian Math. Journal, 2006, vol. 58, No.1, pp.147-154.
12. Panakhov E.S.,Koyunbakan H. İnverse Nodal Problem for the Second Order Differential Operator Having Regular Singularity, İnternational Journal of Difference Equations and Dynamical Systems, 2006, pp.241-247.
13. Koyunbakan H., Panakhov E.S., A uniqueness theorem for inverse nodal problem, Inverse Problems in Science and Engineering (İPSE), 2007, vol.15, no.6, pp.517-524.
14. Koyunbakan H., Panakhov E.S. Half inverse problem for diffusion operators on the finite interval, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, vol. 326, pp.1024-1030.
15. Koyunbakan H., Panakhov E.S. Half İnverse Problem for Operators with Singuler Potentials, Integral Transforms and Spesial Functions, 2007,vol.18,no.10, pp.765-770.

16. Koyunbakan H., Panakhov E.S., Inverse problem for a singular diffferential operator, Mathematical and Computer Modeling, 2008, vol.47, iss.1-2, pp.178-185.
17. Panakhov E.S., H.Koyunbakan and Ü. İç. Reconstruction of potential in the Sturm-Liouville problem with a boundary condition depending spectral parameter, Inverse Problem in Science and Engineering, 2009, vol.18, no.1, 2009, pp.173-180.
18. Panakhov E.S., E.Yılmaz.,Koyunbakan H. Inverse nodal problem for Dirac operator, World Applied Sciences Journal, 2010, vol.11, no.8, pp.906-911.
19. Panakhov E.S., Yilmazer R. On the determination of the hydrogen atom equation from two spectra, World Applied Sciences Journal, 2011, vol.13, no.10, pp.2203-2210.
20. Panakhov E.S., Yilmazer R. A Hochstadt-Liberman theorem for hydrogen atom equation, Appl. Comput. Math., vol.11, no.1, 2012, pp.74-80,
21. Panakhov E.S., Sat M. On the determination of the singular Sturm-Liouville operator from two spectra, CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2012,vol. 84, no. 1, pp.1-12.
22. Panakhov E.S., Sat M. On an inverse spectral problem for a integro-differential operator, World Applied Sciences Journal, vol.18, no.1, 2012, pp.1571-1575.

23. Panakhov E.S., The definition of differential operator with peculiarity in zero on two spectrum, J.Spectral Theory of Operators, 1987, vol.VIII, pp.177-188.
24. Brodsky M., Panakhov E.S. Concerning a priori estimates of solution of the inverse logarithmic potential problem, J. Inverse Problems,vol.6,1990, pp.321-330.
25. Panakhov E.S. Some aspects inverse problem for Dirac operator with peculiarity, Trans. IMM Akad. Sc. Azerb.,1995, vol. III(ZI), pp.39-44.
26. Panakhov E.S. Cauchy and Goursat problem for the second order hyperbolic equations with discontinues cofficients, Izv. AN Azerb., vol.6, No 3,1995.

27. Panakhov E.S. Inverse problem for diffusion operator in two partially non-coincided spectrum,Trans. IMM Akad. Sci. Azerb.,1996, vol. III(XII).
28. Panakhov E.S.,Koyunbakan H. Inverse problem for singular Sturm-Liouville operator, IMM of NAS of Azerb., 2003, vol. XVII, pp.113-126.
29. Koyunbakan H., Panakhov E.S., Transformation operator for singular Sturm-Liouville equationsInternational, Journal of Applied Mathematics, 2003, vol.14, No.2, pp.135-143.
30. Panakhov E.S., İç Ü. On the determination of the Dirac operator from two spectra, Transactions NAS of Azerb., 2003, vol.XXIII, No.4, pp.159-172.
31. Koyunbakan H., Panakhov E.S., Half inverse problem for singular differential operator, Applicable Analysis, 2005, vol. 84, No.3, pp.247-252.
32. Panakhov E.S., On inverse problem for singular Sturm-Liouville operator from two spectra, Transactions NAS of Azerb., 2005, vol. XXV, No.1, pp.125-134.
33. Koyunbakan H., Panakhov E.S., Solution of discontinuous inverse nodal problem on a finite interval, Mathematical and Computer Modeling, 2006, vol.44, pp.204-209.
34. Panakhov E.S., Yılmazer R. On inverse problem for singular Sturm-Liouville operator from two spectra, Ukrainian Math. Journal, 2006, vol. 58, No.1, pp.147-154.
35. Panakhov E.S., Ulusoy I. Asymtotic behavior of eigenvalues of hydrogen atom equation, Boundary Value Problems, 2015, DOİ 10.1186/s 13661-015-0347-z.pp.1-12.
36. Şat M.,Panakhov E.S., Taş K., Şat M. Inverse problem for the quadratic of the Sturm-Liouville equations. AIP Conf. Proc., 2015, 1648, 260003, pp.370010:1-9.
37. Panakhov E.S., Ulusoy I., Inverse spectral theory for a singular Sturm-Liouville operator with Coulomb potential,Advances in Pure Mathematics. 2016, vol.41, pp.1-12.

ЭТИБАР САДИ оглы ПАНАХОВ

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОЙ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

Диссертационная работа посвящена изучению обратных задач спектрального анализа и теории потенциала для сингулярных дифференциальных операторов. В работе получены следующие основные результаты:

- Получены формулы для разности потенциалов дифференциальных операторов второго порядка содержащих особенности типа Бесселя, Кулона, атома водорода, системы Дирака и оператора диффузии.
- Изучены теоремы единственности обратных задач
- Изучена обобщенно вырожденность ядра оператора преобразования и так же основного интегрального уравнения обратной задачи и, как следствие в частности, получены результаты анологичные теореме Хохштадта
- Доказаны теоремы типа Хохштадт-Либермана для сингулярных операторов и для уравнения диффузии.
- Найдены необходимые условия для устойчивости обратных задач для системы уравнения Дирака и уравнения дифуузии.
- Были изучены задачи Дирихле для оператора Дирака и диффузии. А так же получена асимптотическая формула для собственных значений
- Впервые были изучены обратные задачи для сингулярных дифференциальных операторов, канонических операторов Дирака и оператора диффузии по нодальным точкам и нодальным длинам.
- Описаны необходимые и достаточные условия существования решения обратной задачи логарифмического потенциала при условии ограниченности модуля плотности источников.

ETIBAR SADI PANAHOV

SOME INVERSE PROBLEMS OF THE SPECTRAL AND POTENTIAL THEORY FOR THE DIFFERENTIAL OPERATORS AND THEIR APPLICATIONS

SUMMARY

The dissertation is devoted to the investigation of the inverse problems of the spectral analysis and theory of potentials for the singulyar differential operators.

The following main results have been obtained in the dissertation:

- Formulas are obtained for the difference of potentials of the second order differential operators, including Bessel and Coulomb type singularities and hydrojen atom equations, canonical Dirac systems and diffusion operators.
- Theorem of uniqueness of the inverse problem is proved.
- Generally degenerated kernels of the transformation operator, as well as fundamental integral equations of the inverse problem are studied. In particular, the analogous to Hochstadt's results theorems are obtained.
- Hochstadt-Lieberman's type theorems for the singular operators and diffusion operators are proved.
- Necessary conditions for the stability of the inverse problem for the system of Dirac equations and diffusion equations are obtained.
- Dirichlet problems have been studied for Dirac and diffusion operators. Moreover, asymptotic behavior of the eigenvalues has been investigated.
- For the first time, inverse problems for the singular differential operators, canonical Dirac and diffusion operators on nodal points and nodal lenghts have been studied.
- A description of necessary and sufficient conditions for the existence of a solution to the inverse logarithmic potential problem subject to constraints on the source density are obtained.

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ЭТИБАР САДИ оглы ПАНАХОВ

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОЙ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1211.01- Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук по математике

Баку-2017