AZƏRBAYCAN MILLI ELMLƏR AKADEMIYASI
İDARƏETMƏ SISTEMLƏRI İNSTITUTU

===

Əlyazması hüququnda

ƏLİ BAQDAŞ OĞLU RAMAZANOV

DİSKRET STRUKTURLARDA QRADİYENT TİPLİ ALQORİTMLƏRİN XƏTALARININ KEYFİYYƏT ARAŞDIRILMASI VƏ BƏZİ QARIŞIQ MƏSƏLƏLƏR

3338.01 – Sistemli analiz, idarəetmə və informasiyanın işlənməsi (sahələr üzrə)

Riyaziyyat elmləri doktoru alimlik dərəcəsi almaq üçün dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2018

İş Bakı Dövlət Universitetində yerinə yetirilmişdir

Elmi məsləhətçilər: **AMEA-nın akademiki F.Ə. Əliyev,**
riyaziyyat elmləri doktoru,
professor K.Ş. Məmmədov

Rəsmi opponentlər: riyaziyyat elmləri doktoru, professor **F.G.Feyziyev**
(Sumqayıt Dövlət Universiteti)

f.-r.e.d., professor **В.М. Котов**
(Belarusiya Dövlət Universiteti)

riyaziyyat elmləri doktoru, professor **C.İ. Zeynalov**
(Naxçıvan Dövlət Universiteti)

Aparıcı təşkilat: Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti, ümumi və tətbiqi riyaziyyat kafedrası

Dissertasiyanın müdafiəsi 18 may 2018-ci il tarixində, saat 14.00-də Azərbaycan MEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim olunan dissertasiyaların müdafiəsini keçirən B/D01.121 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir

Dissertasiya ilə İdarəemə Sistemləri İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.
Ünvan: AZ1141 Bakı ş. B.Vahabzadə küçəsi 9

Avtoreferat 16 aprel 2018-ci il tarixində göndərilmişdir.

D01.121 Dissertasiya şurasının
elmi katibi, riyaziyyat üzrə
fəlsəfə doktoru, dosent Ə.B.Paşayev

İşin ümumi xarakteristikası

Mövzunun aktuallığı. Diskret optimallaşdırma məsələlərində qradiyent alqoritmlərin (ingilis dilli ədəbiyyatda - greedy algorithms) xətalarının tapılması və analiz edilməsi intensiv tədqiq edilən istiqamətlərdən biridir. Yaxşı məlumdur ki, qradiyent alqoritm həmişə optimal həlli tapmır. Ona görə də qradiyent alqoritmin xətasının tapılması, keyfiyyət araşdırılması aktualdır. Bu məsələlərə çoxlu sayda araşdırılmalar həsr edilmişdir. Koordinat artımlı qradiyent alqoritmin (bəzən bu alqoritmi pure greedy alqoritm adlandırırlar) tərtib qabarıq modelində bir metodikası təklif edilmişdir. Qeyd edək ki, qradiyent alqoritmin mürrəkəbliyi və dəqiqliyi diskret riyaziyyatda dizyunktiv normal formaların minimallaşdırılmasında məlum məsələlərdən biridir. Bir çox məsələlərin dəqiq və effektiv həlli mümkün olmadığı üçün diskret optimallaşdırmada da (DO) bu məsələ aktualdır. Lokal (qradiyent) qlobal ekstremumun üst üstə düşdüyü DO məsələlər sinfi geniş deyil. Demək olar ki, geniş sinif DO məsələləri üçün bütün effektiv alqoritmlər təqribidir. Ona görə də, müasir DO nəzəriyyəsində qradiyent tipli alqoritmlərin xətalarının tapılması intensiv tədqiq edilən və aktual istiqamətlərdəndir. Qeyd edək ki, burada bir neçə əsas istiqamətlər nəzərə çarpır. Onların əsaslarını qeyd edək:

- qradiyent tipli alqoritmlərin effektiv realizasiyası;
- qradiyent alqoritm vasitəsi ilə alınmış həllərin dəqiqliyinin yaxşılaşdırılması;
- geniş sinif DO məsələləri üçün qradiyent alqoritmlərin xətalarının qiymətləndirilməsi üçün metodikaların işlənməsi;
- qradiyent alqoritmin dayanıqlığı şərtlərinin tapılması və sair.

Bəzi hallarda mümkün həllər çoxluğunun əyriliyi qradiyent alqoritmin xətasının tapılmasında və qradiyent həllin optimallığı üçün şərtlərin tapılmasında vacib rol oynayır. Eyni zamanda əyriliyin bilinməsi mümkün həllər çoxluğunun strukturunun tapılmasına imkan verir. Əyriliyin dəqiq qiymətinin tapılması hesablama nöqteyi nəzərindən mürəkkəb məsələ olduğu üçün əyriliyin effektiv hesablanan qiymətləndirilməsi aktualdır.

Bir çox hallarda qradiyent alqoritmin xətasını yaxşılaşdırmaq üçün bu alqoritmlərin parametrləşdirilməsindən istifadə edilir. Bu yanaşma bəzən daha dəqiq xətaların tapılmasına və ya addımların sayını azaltmağa imkan verir. Bunu nəzərə alaraq dissertasiya işində ayrı bir fəsil qradiyent alqoritmlərin parametrləşdirilməsinə həsr edilmişdir.

Bir çox diskret optimallaşdırma məsələlərində məqsəd funksiyası diskret arqumentli iki ciddi qabarıq funksiyaların fərqi kimi (adətən belə funksiyaları d.c.- qabarıq adlandırırlar) verilir. Bu tipli məsələlərə, məsələn qeyd edilmiş cəriməli ödənişli nəqliyyat, tam qiymətli qeyri xətti kəsr proramlaşdırmada, şəbəkələrin canlandırılması və sair yerlərdə rast gəlinir. Ona görədə ayrı bir fəsil (**FƏSİL IV**) d.c.- qabarıq funksiyaların xassələrinə və alınmış nəticələrin məlum tətbiqi məsələlərə tətbiqinə həsr edilmişdir. Bəzi hallarda məqsəd funksiyasının xarakteristikaları daha keyfiyyətli nəticələrin alınmasına kömək edir. **FƏSİL V** – də məqsəd funksiyasının bükülməsi anlayışı daxil edilmiş, bu parametrin hesablanma qaydaları göstərilmiş və alınmış nəticələr qradiyent alqoritmin daha dəqiq xətalarının tapılmasına tətbiq edilmişdir. Bükülmə anlayışı qradiyent alqoritmin xətalarının analiz edilməsində, optimallıq üçün kafi şərtin (funksional mənada) tapılmasında, həmçinin dayanıqlığın araşdırılmasında effektiv xarakteristika olur.

Çoxlu diskret optimallaşdırma məsələlərində ilkin verilənlər təqribi xarakter daşıyır. Ona görədə məsələnin parametrlərinin kiçik həyacanlanmasında həllin dayanıqlığı aktualdır. Diskret optimallaşdırma məsələlərində təkcə həllin yox, həm də həll alqoritmin dayanıqlığının araşdırılması aktualdır. Lokal (qradiyent) alqoritmlərin dayanıqlığının mümkün variantlarından biri məsələnin parametrlərinin "kiçik" həyacanlanmasında zəmanətli (nisbi) xətaların dəyişməsinin tapılmasıdır. Əgər həyacanlanmış məsələ üçün lokal (qradiyent) alqoritmin zəmanətli xətası başlanğıc məsələ üçün zəmanətli xətadan pis deyilsə, onda belə lokal (qradiyent) alqoritmi dayanıqlı adlandırmaq olar. Başqa sözlə, qradiyent alqoritmin dayanıqlığı dedikdə qradiyent alqoritmin zəmanətli xətasının bu xətaya daxil olan parametrlərin "kiçik" həyacanlanmasında zəmanətli xətanın invariantlıq xassəsi başa düşülür. Məsələn, zəmanətli xəta terminində göstərilmişdir ki, məhdudiyyət şərtlərinə daxil olan matrisin Çebışev normasının "kiçik" həyacanlanmasında koordinat artımlı qradiyent alqoritm bəzi qabarıq diskret optimallaşdırma məsələlərində dayanıqlıdır. Əvvəlki bəndlərdə alınmış nəticələrin konkret tətbiqi məsələlərə tətbiqi aktualdır. Ona görə də 7-ci FƏSİL bu məsələlərə həsr edilmişdir.

Tədqiqatın məqsədi. Diskret strukturlarda DO məsələləri üçün qradiyent tipli alqoritmlərin işləməsi üçün yeni metodikaların işlənməsi;

- xətalarının tapılmasını sadələşdirmək və ya xətaları dəqiqləşdirmək üçün koordinat artımlı qradiyent alqortmin bəzi modifikasiyalarının təklif edilməsi;
- Jordan-Dedekind strukturlarında, tərtib-qabarıq çoxluqlarda, supermatoidlər və onların kəsişməsində və sair diskret strukturlarda DO məsələlərində qradiyent tipli alqoritmlərin daha dəqiq aprior və aposterior xətalarının alınması.

Araşdırma üsulları. İşdə qabarıq diskret optimallaşdırma üsullarından, qəfəslər nəzəriyyəsinin elementlərindən, qraflar nəzəriyyəsindən, supermatroidlər nəzəriyyəsindən, qradiyent alqoritmlərin analizi üsullarından, müəllif tərəfindən işlənmiş qradiyent alqoritmlərin zəmanətli xətalarının qurulması metodikalarından istifadə edilmişdir.

Elmi yenilikləri. Qabarıq diskret optimallaşdırma (QDO) məsələlərində qradiyent alqoritmin xətalarının qiymətləndirilməsi üçün yeni metodikalar işlənmişdir;

- mümkün həllər çoxluğunun əyriliyindən istifadə etməklə qardiyent alqoritmin xətaları araşdırılmışdır;
- ρ-koordinat-qabarıq (ρ-tərtib-qabarıq) məqsəd funksiyalı ekstremal məsələləri üçün tərtib-qabarıq çoxluqlarda qradiyent tipli alqotitmlərin məlum xətaları yaxşılaşdırılmışdır;
- supermatroid strukturlarda və onların kəsişməsində qradiyent alqoritmin xətalarını prinsipial yaxşılaşdıran yeni aprior xətalar alınmışdır;
- tacir, ehtiyatların paylanması, tam və natamam informasiyalı sifarişlər, texniki sistemlərin (şəbəkələrin) etibarlılığı kimi məlum model məsələlərində qradiyent alqoritmin xətaları araşdırılmış və yaxşılaşdırılmışdır;
- geniş sinif QDO məsələləri üçün optimal və qradiyent həllin üst üstə düşməsi üçün konstruktiv zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır;
- DO məsələləri üçün qradiyent alqoritmin bir neçə modifikasiyası təklif edilmiş və bu alqoritmlərin köməyi ilə alınmış həllin keyfiyyəti tapılmışdır;
- Jordan-Dedekind diskret strukturlarında xətaların yaxşılaşdırılmış dəqiqliyi alınmışdır;
- d.c.-qabarıq, (σ,ς)-koordinat-qabarıq, ξ- koordinat-qabarıq funksiyalar daxil edilmiş və onların xassələri araşdırılmışdır.

Məqsəd funksiyası d.c.-qabarıq və ya mümkün həllər çoxluğu d.c.-qabarıq funksiyalar vasitəsi ilə verilmiş məsələlərdə lokal optimallıq şərti və bu məsələlərdə qradiyent alqoritmin xətaları tapılmışdır;

- əvvəlki bəndin əsasında DO-da d.c.-qabarıq optimallaşdırma nəzəriyyəsi işlənmişdir;
- tərtib-qabarıq çoxluğun əyriliyinin qiymətləndirilməsi üçün metodika işlənmişdir;
- ρ-koordinat-çökük, $\sigma,\varsigma)$-koordinat-çökük funksiyaları vasitəsi ilə verilmiş tərtib-qabarıq çoxluğun əyriliyinin qiymətləndirilməsi tapılmışdır;
- bəzi model DO məsələləri üçün birbaşa və ikili qradiyent alqoritmlərin dəqiqliyi müqayisəli araşdırılmışdır;
- bəzi QDO məsələlərində məqsəd funksiyasının bükülməsinin və mümkün həllər çoxluğunun parametrlərinin həyacanlanmasında qradiyent alqoritmin dayanıqlığı (qeyri dayanıqlığı) araşdırılmışdır;
- ρ-koordinat-qabarıq məqsəd funksiyalı ekstremal məsələlərdə k-qiymətli cəbri məntiq funksiyaların sıfırları çoxluğunda qradiyent alqoritmin məlum xətaları yaxşılaşdırılmışdır;
- məqsəd funksiyasının bükülməsi və mümkün həllər çoxluğunun parametrləri terminində qradiyent alqoritmin yaxşılaşdırılmış zəmanətli xətaları alınmışdır;
- alınmış nəticələrin əvvəlki nəticələrlə müqayisəsi aparılmışdır.

Praktiki və nəzəri əhəmiyyəti. İş nəzəri xarakter daşıyır. Dissertasiya işində mümkün həllər çoxluğunun strukturunun və məqsəd funksiyasının xassələrinin ümumi tərtib-qabarıq çoxluqlarda ümumi diskret optimallaşdırma məsələləri üçün araşdırılması, qradiyent tipli alqoritmlərin zəmanətli xətalarının tapılması metodikası və dayanıqlığın analizi baxılan məsəslələrin xüsusi halı olan konkret optimallaşdırma məsələləri üçün təqribi alqoritmlərin işlənməsində və ya effektivliyinin artırılmasında faydalı ola bilər.

Dissertasiyanın nəzəri nəticələri Bakı Dövlət Universitetində tədris prosesində istifadə edilir.

İşin aprobasiyası. Dissertasiya işinin nəticələri V-VII, XIV-XV “Riyazi proqramlaşdırma və tətbiqləri ” (Yekaterinburq, 1987, 1989, 1991, 2011, 2015) Ümumrusiya konfranslarında; ”Diskret optimallaşdırma və kompyuterlər" (Moskva, 1987) Ümumittifaq konfransında; "Əməliyyatlar tətqiqində riyazi üsullar" Beynəlxalq konfransında (Sofiya, BXR, 1987); "Tətbiqi riyaziyyatın müasir problemləri" elmi konfransında (Bakı,2002); "Riyazi fizikanın nəzəri və tərs məsələləri" Beynəlxalq konfransında (Sumqayıt, 2003); "Diskret analiz və əməliyyatlar tədqiqi" Beynəlxalq konfransında (Novosibirsk, Rusiya, 2004, 2007, 2010, 2013); The International Conference on "Control and Optimization with Industrial Applications" (Baku, 2005, 2015); The International Conference on "Problems of Cybernetics and informatics" (Baku, 2010); "Optimallaşdırma üsulları və onların tətbiqi" Beynəlxalq Baykal məktəb-seminarında (İrkutsk, Rusiya, 2005, 2008, 2011, 2014); "Optimallaşdırma problemləri və iqtisadi tətbiqləri" III-VI Ümumrusiya konfransında (Omsk, Rusiya, 2006, 2009, 2012, 2015);"İdarəetmə problemləri və tətbiqləri" Beynəlxalq konfransında (Minsk, Belarusiya, 2005); "Diskret riyaziyyat, cəbr və onların tətbiqləri" Beynəlxalq konfransında (Minsk, Belarusiya, 2009, 2015); "Diskret riyaziyyat, qraflar nəzəriyyəsi və onların tətbiqləri" Beynəlxalq konfransında (Minsk, Belarusiya, 2013), həmçinin riyazi kibernetika kafedrasının elmi seminarlarında, AMEA-nın Sistemli İdarəetmə institutunun seminarlarında, BDU-nun nəzdindəki Tətbiqi Riyaziyyat institutunun elmi seminarlarında, akademik D.A. Suprunenkonun rəhbərlik etdiyi seminarlarda (Belarusiya Milli Elmlər Akademiyasının Riyaziyyar institutu, Minsk, Belarusiya, 1984-1990) professor M.M.Kovalyovun rəhbərlik etdiyi seminarlarda (Belarusiya Dövlət Universiteti, Minsk, Belarusiya) aprobasiya edilmişdir.

Nəşrlər. Dissertasiya mövzusu üzrə müəllifin 74 elmi işi nəşr edilmişdir. Onlardan 56-sı dissertasiyaya daxil edilmişdir. Həmmüəlliflərlə konflikt yoxdur. Birgə işlərdə dissertasiyaya daxil edilmiş nəticələrin isbatı müəllifə aiddir.

Dissertasiyanın həcmi və strukturu. Dissertasiya 253 səhifədən, giriş, yeddi fəsil, xülasə və 227 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

İşin məzmunu

Girişdə dissertasiya mövzusunun aktuallığı əsaslandırılır, tətqiqatın məqsədi verilir və dissertasiya mövzusuna aid məlum nəticələrin qısa xülasəsi qeyd edilir.

FƏSİL I – də tərtib qabarıq çoxluğun əyriliyinin qiymətləndirilməsi araşdırılır. Birinci bənddə aşağıdan və yuxarıdan sonlu fərq operatoru – törəmənin diskret analoqu qradiyentlərlə məhdud cökük funksiyalar daxil edilmiş və onların koordinat qəfəslərdə xassələri araşdırılmışdır. 1.2 bəndində bu funksiyalar vasitəsi ilə verilmiş çoxluğun əyriliyinin aşağıdan qiymətləndirilməsi tapılmışdır. Əyriliyin alınmış qiymətləndirilməsinin çatdırıla bilən olmasına aid misal göstərilmişdir.

Tutaq ki, $H=(H,\prec)$ - $\prec$ nizamı ilə verilmiş xətti nizamlanmış diskret çoxluqdur (zəncirdir) və

$H^n=\underbrace{H\times H\times\ldots\times H}_{n}=\{x=(x_1,\ldots,x_n):x_i\in H,1\le i\le n\}$. Bəzi hallarda şərhin şəffaflığı üçün tamqiymətli qəfəslər istifadə ediləcəkdir. Əsas nəticələrin koordinat qəfəslərdə verilməsinə baxmayaraq, nəzərə alsaq ki, tamqiymətli və koordinat qəfəslər izomorfdur, onda koordinat qəfəslərdə alınmış nəticələr tamqiymətli qəfəslədə də doğrudur və əksinə.

Tutaq ki, $P\subseteq H^n$. Sonralar hesab edəcəyik ki, P çoxluğu aşağıdakı xassələrə malikdir:

1) $|P|<+\infty$; 2) $0\in P$; 3) $[0,x]=\{z\in H^n:0\prec z\prec x\}\subseteq P$ ixtiyari $x\in P$.

1)-3) xassələrinə malik P çoxluğunu sıfırı olan sonlu tərtib-qabarıq çoxluq adlandıracağıq.

Aşağıdakı işarələmələri daxil edək:

$$N(x,y)=\{i:x=(x_1,\ldots,x_n)\prec(y_1,\ldots,y_n)=y,\ x_i\prec y_i,\ x_i\ne y_i\},$$

$$h(x,y)=\sum_{i\in N(x,y)}h(x_i,y_i),\ h(x_i,y_i)=\left|\{z_i:x_i\prec z_i\prec y_i\}\right|-1,$$

$$1\le i\le n,\ h(x)=h(0,x),h=h(P)=\max\{h(0,x):x\in P\},$$

$$r=\min\{h(x)-1:x\in H^n\setminus P\},$$

$$fes(x,P)=\{1\le i\le n:\pi_i^+(x)\in P,\ x\in P\},$$

$$\pi_i^+(x)=(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i^+,x_{i+1},\ldots,x_n),\ h(x_i,x_i^+)=1$$

Aşağıdakı ədəd $P\subseteq H^n$ tərtib-qabarıq çoxluğunun əyriliyi adlanır

$$\theta(P)=\min\left\{\frac{l(P\cap[0,x])}{h(P\cap[0,x])}:x\in H^n,x\ne 0\right\},$$

burada $l(Q)=\min\{h(x):x\in Q^{\max}\}$, $Q^{\max}$ - qismən nizamlanmış $(Q,\prec)$, $Q\subseteq P$ çoxluğunun maksimal elementlər çoxluğudur, başqa sözlə $Q^{\max}=\{x\in Q:\pi_i^+(x)\notin Q\}$, $h(Q)=\max\{h(x):x\in Q\}$ Q çoxluğunun hündürlüyüdür.
Aydındır ki, $0<\theta(P)\le 1$. Əgər $\theta(P)=1$ olarsa, onda P çoxluğu supermatroid adlanır.

$f:H^n\to R$ (R - həqiqi ədədlər çoxluğudur) funksiyası üçün i-qradiyent

$$\Delta_i f(x)=f(\pi_i^+(x))-f(x),$$

və $(i,j)-$ qradiyent anlayışını daxil edək

$$\Delta_{ij} f(x)=\Delta_j f(\pi_i^+(x))-\Delta_j f(x),$$

burada $\pi_i^+(x)=(x_1,...,x_{i-1},x_i^+,x_{i+1},...,x_n)$, $h(x_i,x_i^+)=1$.

Tutaq ki, $\rho=(\rho_1,...,\rho_n)\in R_+^n$, $\Re_\rho(H^n)$ - H^n - də ρ-koordinat-qabarıq funksiyalar sinfidir, yəni elə $F:H^n\to R$ funksiyalarıdır ki, ixtiyari $x\in H^n$ üçün

$$\Delta_{ij}F(x)\le 0,\ i\ne j,\quad 1\le i,j\le n,$$

$$\Delta_{ii}F(x)\le -\rho_i,\ 1\le i\le n.$$

A qabarıq diskret optimallaşdırma məsələsinə baxaq: tapın

$$\max\{F(x):x\in P_f\},$$

burada $F(x)$ - $\rho-$koordinat-qabarıq funksiyadır.

Tutaq ki, $x^*=(x_1^*,...,x_n^*)$ - optimal, $x^g=(x_1^g,...,x_n^g)$ isə A məsələsinin qradiyent həllidir (başqa sözlə koordinat artımlı qradiyent alqoritm vasitəsi ilə alınmış nöqtədir).

A məsələsi üçün qradiyent alqoritmin zəmanətli xətası dedikdə adətən elə $\varepsilon\ge 0$ ədədi başa düşülür ki, aşağıdakı bərabərsizlik ödənilsin

$$\frac{F(x^*)-F(x^g)}{F(x^*)-F(0)}\le\varepsilon.$$

Teorem 1.1. A məsələsi üçün koordinat artımlı qradiyent alqorirmin zəmanətli xətası $F(x) \in \Re_{\rho}(H^n)$ funksiyası azalmayan olduqda aşağıdakı düsturla ifadə edilir

$$\varepsilon = \frac{1}{(1+\theta(P_f))}(1-\theta(P_f)B(\rho, r, h, \delta_F)),$$

burada bütün parametrlər məlumdur və $0 \le B(\rho, r, h, \delta_F) \le 1$ bərabərsizliyi doğrudur.

Teorem 1.2. Tutaq ki, $\rho = (\rho_1, ..., \rho_n) \in R_+^n$, $F(x) \in \Re_{\rho}(H^n)$, $P \subseteq H^n$ - tərtib- qabarıq çoxluqdur və qeyd edilmiş vektor $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in R_+^n$ elədir ki, $\Omega(\mu) > 0$ və ixtiyari $x \in P$, $i \in fes(x, P)$ üçün $\Delta_i F(x) + \mu_i \ge 0$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda A məsələsi üçün koordinat artımlı qradiyent alqoritmin zəmanətli xətası aşağıdakı düsturla ifadə edilir $\varepsilon = \theta(P_f)/(1+\theta(P_f))$.

Növbəti 1.2 bəndinin əsas nəticələri daxil edilmiş funksiyaların xarakterizə edilməsi və müxtəlif mümkün həllər çoxluğunun əyriliyinin qiymətləndirilməsidir. Bu bəndin əsas hökmlərini verək. 1.3 və 1.4 teoremləri vasitəsi ilə $\Re_{\rho}^0(H^n)$ sinfindən olan funksiyaların xarakterizasiyası alınmışdır.

Teorem 1.3. $f(x)$ funksiyası $\Re_{\rho}^0(H^n)$ sinfinə ancaq və ancaq o vaxt daxildir ki, onu aşağıdakı səkildə təqdim etmək olsun

$$f(x) = g(x) + \varphi(x),$$

burada $g(x) \in \Re_0^0(H^n)$, $\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho_i h^2(0, x_i)$.

Teorem 1.4. Aşağıdakı hökmlər ekvivalentdir:

1. $f \in \Re_{\rho}^0(H^n)$;
2. $f(y) - f(x) \ge \sum_{i \in N(x,y)} h(x_i, y_i)(\Delta_i f(x) - \rho_i) + \sum_{i \in N(y,x)} h(y_i, x_i)(\Delta_i^- f(x \vee y) - \rho_i) + \Omega, \forall x, y \in H^n$;

3. $f(y)-f(x)\geq \sum_{i\in N(x,y)} h(x_i,y_i)\Delta_i f(x)+$

$$\frac{1}{2}\sum_{i\in N(x,y)}\rho_i h(x_i,y_i)(h(x_i,y_i)-1),\ \forall x,y\in H^n,\ x\leq y.$$

Burada $x\vee y$ - x və y elementlərinin birləşməsidir. Məsələn, tamqiymətli qəfəsdə $x\vee y$ belə təyin edilir

$$x\vee y=(\max\{x_1,y_1\},\cdots,\max\{x_n,y_n\}),\quad x=(x_1,\cdots,x_n),\quad y=(y_1,\cdots,y_n),$$

$$\Delta_i^- f(x)=f(v_i(x))-f(x),\ i\in I_n=\{1,...,n\},$$

$$v_i(x)=(x_1,...,x_{i-1},x_i^-,x_{i+1},...,x_n),\ x_i^-\prec x_i,\ \Omega=\Omega(\rho)=\sum_{i=1}^n\rho_i.$$

Sonralar P_f^- ilə aşağıdakı çoxluğu işarə edəcəyik

$$P_f^-=\{x: f(x)\leq 0,\ x\in P\}\quad .$$

Növbəti teoremlər mümkün həllər çoxluğunun strukturunun təyin edilməsinə və əyriliyin aşağıdan qiymətləndirilməsinə imkan verir.

Teorem 1.5. Əgər $f(x)\in\Re_\rho^0(H^n)$, $f(0)\leq 0$ azalmayan funksiya, P - tərtib-qabarıq çoxluqdursa, onda P_f^- - tərtib-qabarıq çoxluqdur.

Aydındır ki, əgər $P_1,P_2,...,P_k$ tərtib-qabarıq çoxluqdursa, onda onların kəsişməsidə $\bigcap_{i=1}^k P_i=P_1\cap P_2\cap...\cap P_k$ tərtib-qabarıq çoxluqdur.

Teorem 1.6. Tutaq ki, $P_{f_k}^-=\{\,x: f_k(x)\leq 0,\ x\in P\,\}$, $f_k(0)\leq 0$, $f_k(x)\in\Re_{\rho^k}^0(Z^n)$ – $\forall k\in I_m$ üçün azalmayan funksiyadır, $P\subseteq H^n$ - tərtib-qabarıq çoxluqdur, $\rho^k=(\rho_1^k,\ \rho_2^k,...,\rho_n^k)\in R_+^n$, $k\in I_m=\{1,...,m\}$.
Əgər

$$f(x)=\max_k\{\,f_k(x): k\in I_m\,\},$$

olarsa, onda $\bigcap_{k=1}^{m} P_{f_k}^{-} = P_f^{-}$.

Sonralar aşağıdakı işarəmələrdən istifadə edəcəyik:

$$\Omega^*(\rho,h)=\begin{cases}\Omega^0(\rho,h), & \Omega^0(\rho,h)>1,\\ \dfrac{1}{\Omega^0(\rho,h)}, & 0<\Omega^0(\rho,h)\le 1,\end{cases}$$

burada

$$\Omega^0=\Omega^0(\rho,h)=(h(P)+\frac{1}{2})\Omega(\rho), \; h=h(P), \quad \Omega(\rho)=\sum_{i=1}^{n}\rho_i \, .$$

Teorem 1.7. Tutaq ki, $f(x)\in\Re_\rho^0(H^n)$ - azalmayan funksiyadır, $f(0)\le 0$, $\Omega(\rho)>0$, $g(x)\in\Re_0^0(H^n)$ - azalan funksiyadır, P - tərtib-qabarıq çoxluqdur. Onda

$$\theta(P_f^{-})\ge\frac{1}{\Omega^*(\rho,h)}$$

Teorem 1.7-dən aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə1.2. Əgər $f(x)\in\Re_\rho^0(H^n)$ - azalmayan funksiya, $f(0)\le 0, \Omega^0(\rho,h)=1, g(x)$ - azalan funksiya, P - tərtib-qabarıq çoxluqdur, onda P_f^{-} - supermatroiddir.

Qeyd edək ki, teorem 1.7 əsasında bu nəticənin şərtlərini ödəyən $f(x)$ funksiyası aşağıdakı xassəyə malikdir

$$\Delta_i f(x)\in[0,1], \quad \forall x\in H^n, \quad i\in I_n$$

Nəticə 1.2 nəzərə almaqla supermatroidin faktiki yeni bir tərifini belə vermək olar.

Nəticə 1.3. $P\subseteq H^n$ tərtib-qabarıq çoxluğunun supermatroid olması üçün zəruri və kafi şərt elə $\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_n)\in R_+^n$ vektorunun varlığıdır ki, P hər hansı $f(x)\in\Re_\rho^0(H^n)$ funksiyasının P_f^{-} çoxluğu ilə üst-üstə düşür.

Bənd 1.3.1 $(\sigma,\varsigma)-$koordinat-çökük funksiyaların xassələrinin araşdırılmasına həsr edilmişdir. Tutaq ki,

$\sigma=(\sigma_1,...,\sigma_n),\ \varsigma=(\varsigma_1,...,\varsigma_n)\ \in R_+^n$,

burada R_+^n - n-ölçülü mənfi olmayan həqiqi vektorlar çoxluğudur. $\Re_{\sigma,\varsigma}^b(H^n)$ ilə ixtiyari $x\in H^n$ üçün elə $f:H^n\to R$ funksiyalar çoxluğunu işarə edək ki, aşağıdakı şərt ödənilsin

$$\Delta_{ij}f(x)\geq 0, i\neq j,\quad 1\leq i,j\leq n,$$

$$\sigma_i\leq\Delta_{ii}f(x)\leq\varsigma_i,\ 1\leq i\leq n,$$

burada $\sigma_i=\min\{\Delta_{ii}f(x):x\in H^n\},\varsigma_i=\max\{\Delta_{ii}f(x):x\in H^n\}$. $\Re_{\sigma,\varsigma}^b(H^n)$ sinfindən olan funksiyalar çoxluğunu H^n qəfəsində $(\sigma,\varsigma)-$koordinat-çökük adlandıracağıq. Əgər ixtiyari $x\in H^n$ üçün $f:H^n\to R$ funksiyası aşağıdakı xassəyə malikdirsə

$$\Delta_{ij}f(x)\geq 0, 1\leq i,j\leq n,$$

onda $f(x)$ funksiyası H^n-də koordinat-çökük adlanır.

Bu funksiyaların xassələri araşdırılmışdır və $(\sigma,\varsigma)-$koordinat-çökük funksiyaların xarakterizasiyası alınmışdır. Bu bəndin əsas teoremlərini verək.

Teorem 1.8. Əgər $f(x)\in\Re_{\sigma,\varsigma}^b(H^n)$ funksiyası azalmayandırsa, onda ixtiyari $x,y\in H^n$ və $x\prec y$ üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur

$$\sum_{i\in N(x,y)}h(x_i,y_i)\Delta_i f(x)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i h(x_i,y_i)(h(x_i,y_i)-1)\leq$$
$$f(y)-f(x)\leq$$
$$\sum_{i\in N(x,y)}h(x_i,y_i)\Delta_i f(x)\quad+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varsigma_i h(x_i,y_i)(h(x_i,y_i)-1).$$

Teorem 1.9. Əgər $f(x)\in\Re_{\sigma,\varsigma}^b(H^n)$ funksiyası azalmayandırsa, onda ixtiyari $i\in fes(x,P)$ və $x\in P$ üçün bərabərsizliyi doğrudur

$$\Delta_i f(0) + \sigma_i h(0,x) \le \Delta_i f(x) \le \Delta_i f(0) + \varsigma_i h(0,x) .$$

Sonralar $f(x) \in \Re^b_{\sigma,\varsigma}(H^n)$ funksiyası üçün $P_f^{\sigma,\varsigma}$ ilə aşağıdakı çoxluğu işarə edəcəyik:

$$P_f^{\sigma,\varsigma} = \{x : f(x) \le 0 \,,\, f(0) \le 0, x \in P \subseteq H^n\} .$$

Teorem 1.10. Əgər $f(x)$ funksiyası azalmayandırsa, onda $P_f^{\sigma,\varsigma}$ çoxluğu tərtib-qabarıqdır.

1.3.2 bəndi $(\sigma,\varsigma)-$koordinat-çökük funksiyalar vasitəsi ilə verilmiş çoxluğun əyriliyinin aşağıdan qiymətləndirilməsinə həsr edilmişdir.

Tutaq ki,

$$\Omega^*(\varsigma,h,\delta_f) = \Omega^* = \begin{cases} \Omega^0(\varsigma,h,\delta_f), \;\; \Omega^0(\varsigma,h,\delta_f) > 1, \\ \dfrac{1}{\Omega^0(\varsigma,h,\delta_f)}, \;\; 0 < \Omega^0(\varsigma,h,\delta_f) \le 1, \end{cases}$$

burada

$$\Omega^0(\varsigma,h,\delta_f = \Omega(\delta_f) + h\Omega(\varsigma),\, h = h(P),\, \delta_f = (\delta_1^f,...,\delta_n^f),$$

$$\delta_i^f = \Delta_i f(0),\, 1 \le i \le n.$$

Teorem 1.11. Tutaq ki, $f(x) \in \Re^b_{\sigma,\varsigma}(H^n)$ - azalmayan funksiyadır, $P \subseteq H^n$ - tərtib-qabarıq çoxluqdur. Onda

$$\theta(P_f^{\sigma,\varsigma}) \ge \frac{1}{\Omega^*(\varsigma,h,\delta_f)} = \frac{1}{\Omega^*} .$$

Bəzi hallarda əgər $f(x)$ funksiyasının şəkli məlumdursa, $P_f^{\sigma,\varsigma}$ çoxluğunun aşağı sərhədi və nəticə olaraq A məsələsində koordinat artımlı qradiyent alqoritmin zəmanətli xətası konkretləşdirilə bilər. Bu məqsədlə aşağıdakı funksiyaya baxaq

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(Ax,x) - b ,$$

burada $A=(a_{ij})_{n\times n}\in R_+^{n\times n}, a_{ij}=a_{ji}, 1\le i,j\le n$, $x=(x_1,...,x_n)\in Z_+^n$, Z_+^n - n-ölçülü mənfi olmayan tam qiymətli vektorlar çoxluğu, $b\in R_+^1, b>0$, (Ax,x) - Ax və x vektorlarının skalyar hasilidir. $R_+^{n\times n}$ fəzasında Çebışev normasını verək, başqa sözlə, $A=(a_{ij})_{n\times n}\in R_+^{n\times n}$ matrisinin norması dedikdə aşağıdakı ədəd başa düşülür $\|A\|=\max\{a_{ij}:1\le i,j\le n\}$. $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ - ilə A matrisinin izini işarə edək.

Teorem 1.12. Tutaq ki,

$$\psi(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)-b,$$

$P\subseteq Z_+^n$ çoxluğunda azalmayan funksiyadır, P - tərtib-qabarıq çoxluqdur, $tr(A)>0$, $P_\psi^-=\{x\in P:\psi(x)\le 0\}$. Onda

$$\theta(P_\psi^-)\ge M^*(\|A\|, tr(A), h),$$

burada bütün parametrlər mümkün həllər çoxluğunun köməyi ilə təyin edilir. Tutaq ki, $\lambda_1,...,\lambda_n$ $n\times n$ tərtibli həqiqi simmetrik $A=(a_{ij})$ matrisinin məxsusi ədədləridir.

Nəticə 1.6. 1.12 teoreminin şərtləri daxilində aşağıdakı qiymətlənmə doğrudur

$$\theta(P_\psi^-)\ge M^*(\|A\|, \Omega(\lambda), h),$$

burada $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n), \Omega(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$, digər parametrlər isə teorem 1.12-də təyin edilib.

Qeyd 1.1: Qeyd edək ki, məxsusi ədədlərin əyriliyin qiymətlənməsində və sonralar qradiyent alqoritmin zəmanətli xətasında istifadəsi onunla bağlıdır ki, məxsusi ədədlərin qiymətləndirilməsi üçün güclü riyazi aparat mövcuddur.

1.4 bəndində bəzi tanınmış diskret optimallaşdırma məsələlərinin mümkün həllər çoxluğunun əyriliyinin qiymətləndirilməsi verilmişdir.

FƏSİL II- də koordinat artımlı qradiyent alqoritmin əvvəlki xətaları yaxşılaşdıran zəmanətli xətaları alınmışdır. Əvvəlcə 2.1 bəndində əvvəlki nəticələri yaxşılaşdıran koordinat artımlı qradiyent alqoritmin əsas zəmanətli xətaları çıxarılmışdır. Bu xətalarda əsas parametr mümkün həllər çoxluğunun əyriliyidir. Həmçinin zəmanətli xəta terminində funksional mənada qradiyent alqoritmin optimallığı şərti tapılmışdır. Bənd 2.1-in əsas nəticələrini verək.

Teorem 2.1. Tutaq ki, $F(x) \in \Re_q(H^n)$, - azalmayan funksiyadır, $q = (q_1, ..., q_n) \in R_+^n$, $\omega_1(q, \delta_F) > 0$, $P \subseteq H^n$ - tərtib-qabarıq çoxluqdur. Onda $F(x)$ funksiyasının $P \subseteq H^n$ çoxluğunda maksimallaşdırılması məsələsində qradiyent alqoritmin aşağıdakı zəmanətli xətası doğrudur

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leq \frac{1}{(1 + \theta(P))}(1 - \theta(P)B(q, r, h, \delta_F)),$$

burada xətaya daxil olan bütün parametrlər məlumdur.

Teorem 2.2. Tutaq ki, $q = (q_1, ..., q_n) \in R_+^n$, $F(x) \in \Re_q(H^n)$ - azalmayan funksiyadır, $\gamma\ (q, r) > 0$, $P \subseteq H^n$ - tərtib-qabarıq çoxluqdur. Onda $F(x)$ funksiyasının $P \subseteq H^n$ çox-luğunda maksimallaşdırılması məsələsində qradiyent alqoritmin aşağıdakı zəmanətli xətası doğrudur

$$\frac{F(x^*) - F(x^g)}{F(x^*) - F(0)} \leq$$

$$\frac{1}{(1 + \theta(P))\gamma(q, r)}(h\omega_1(q, \delta_F)/2 - \theta(P)(h - r)^2 \omega(q)/2h),$$

burada xətaya daxil olan bütün parametrlər məlumdur.

Teorem 2.3. Tutaq ki, $F(x) \in \Re_q(H^n), q = (q_1, ..., q_n)$, $P \subseteq H^n$ - tərtib-qabarıq çoxluqdur və qeyd edilmiş $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in R_+^n$ vektoru elədir ki,

$$\Delta_i F(x) + \mu_i \geq 0, \forall\ i \in fes(x, P), x \in P.$$

Onda $F(x)$ funksiyasının $P \subseteq H^n$ çoxluğunda x^* qlobal maksimumu və x^g qradiyent maksimumu aşağıdakə münasibət ilə bağlıdır

$$\frac{F(x^*)-F(x^g)}{F(x^*)-F(0)} \le \frac{1}{\theta(P)}(1+B_1(r,h,q,\mu))-B_2(\tau,h,q,\mu,\delta_F)\,,$$

burada bütün parametrlər məlumdur.

Teorem 2.1-dən qradiyent ekstremumun qiymətləndirilməsində vacib əhəmiyyətə malik bir neçə nəticə alınmışdır.

Teorem 2.4. Əgər $\Re_q(H^n)$ sinfindən olan $F(x)$ funksiyası azalmayandırsa, P H^n-də supermatroiddirsə, onda

$$\frac{F(x^*)-F(x^g)}{F(x^*)-F(0)} \le \frac{1-B(q,r,h,\delta_F)}{2}.$$

Xüsusi halda, əgər P H^n-də supermatroiddirsə və $h(P)=r(P)$ (başqa sözlə P H^n-də bircins supermatroiddir), onda

$$\frac{F(x^*)-F(x^g)}{F(x^*)-F(0)} \le \frac{1}{2}$$

2.2 bəndində 2.1 bəndində alınmış xətalar **FƏSİL I-də** əyriliyin tapılmış xətaları nəzərə alınmaqla konkretləşdirilir. Belə ki, alınmış xətalar əvvəlkilərdən dəqiqdir. Bu bəndin əsas nəticələrini verək.

Aşağıdakı məsələlərə baxılır.

A məsələsi: tapın

$$\max\{F(x): x\in P_f^-\}\ ,$$

burada

$$F(x)\in\Re_q(H^n),\ q=(q_1,...,q_n)\in R_+^n,\ P_f^-=\{x: f(x)\le 0,$$
$$f(0)\le 0,\ x\in P\},\ f(x)\in\Re_\rho^0(H^n),\ \rho=(\rho_1,...,\rho_n)\in R_+^n.$$

B məsələsi: tapın

$$\max\{F(x)=\sum_{i=1}^{n}F_i(x_i): x\in P_f^-\}$$

burada $F_i(x_i)\in\Re_0(H\ \ ), i\in I_n$ sinfinə daxil olan azalmayan funksiyadır, P_f^- çoxluğu və $f(x)$ funksiyası A məsələsində olduğu kimidir.

A məsələsi üçün əvvəlki nəticələri yaxşılaşdıran zəmanətli xətalar alınmışdır (teorem 2.1). B məsələsi üçün doğrudur

Teorem 2.9. B məsələsində x^g qradiyent həll aşağıdakı bərabərsizliyi ödəyir

$$F(x^g) \geq \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega^0(\rho,h)} F(x^*) + (1 - \dfrac{1}{\Omega^0(\rho,h)}) F(0), & \Omega^0(\rho,h) > 1, \\ \Omega^0(\rho,h) F(x^*) + (1 - \Omega^0(\rho,h)) F(0), & \Omega^0(\rho,h) \leq 1. \end{cases}$$

Buradan $\Omega^0(\rho,h) = 1$ olduqda separabel koordinat-qabarıq funksiyanın supermatroidlər üzərində maksimallaşdırılmasında qlobal və qradiyent ekstremumun üst üstə düşməsi (funksional mənada) haqqında yaxşı məlum olan nəticəni alırıq.

$F(x)$ funksiyası azalmayan olmadıqda, ancaq aşağıdakı bərabərsizlik ödənildikdə

$$\Delta_i F(x) + \mu_i \geq 0\,, \quad \forall i \in fes(x,P)\,, \quad \forall x \in P\,,$$

burada $\mu = (\mu_1,...,\mu_n) \in R_+^n$ qeyd edilmiş vektordur, A məsələsinin həlli üçün qradiyent alqoritmin zəmanətli xətası alınmışdır.

Sonra $P_\psi^- = \{x \in P : \psi(x) \leq 0\}$ çoxluğunda qradiyent alqoritmin yaxşılaşdırılmış müxtəlif xətaları alınmışdır (teorem 2.25-2.28). Məqsəd funksiyasının və mümkün həllər çoxluğu aydın verildikdə konkretləşdirilmiş xətalar alınmışdır (teorem 2.11-2.13).

Aşağıdakı D diskret optimallaşdırma məsələsinə baxılır: tapın

$$\max\{F(x) : \psi_1(x) \geq 0, \psi_2(x) \leq 0, x \in P\},$$

burada

$$F(x) \in \Re_q(Z^n), \psi_1(x) \in \Re_\rho(Z^n), \psi_2(x) \in \Re_\mu^0(Z^n), \quad \rho, q, \mu \in R_+^n.$$

Müəyyən məhdudiyyətlər daxilində D məsələsində qradiyent alqoritmin zəmanətli xətası tapılmışdır (teorem 2.12).

Alınmış xətaların konkretləşdirilməsi hallarına baxılmışdır.

2.3 bəndində $P_f^{\sigma,\varsigma}$ çoxluğunun əyriliyi üçün qiymətləndirilmə alınmışdır və $\rho-$koordinat-qabarıq funksiyaların $P_f^{\sigma,\varsigma}$ çoxluğunda maksimallaşdırılması məsələsində qradiyent alqoritmin xətaları konkretləşdirilmişdir.

2.4 bəndində iki ciddi qabarıq funksiyanın fərqi (və ya ciddi qabarıq və ciddi çökük funksiyaların cəmi) maksimallaşdırılması məsələsində koordinat artımlı qradiyent alqoritmin xətası supermatroidlərin kəsişməsində, texniki sistemlərin etibarlılığı məsələsində əyrilik terminində araşdırılır. Bu xətaların tapılmasında əvvəlki bəndlərdə alınmış nəticələr tətbiq edilir.

Tutaq ki,

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x),$$

burada $F_1(x) \in \Re_q(Z^n), F_2(x) \in \Re_\mu^0(Z^n), \quad \mu = (\mu_1, ..., \mu_n), q = (q_1, ..., q_n) \in R_+^n$.

Məqsəd funksiyası iki diskret arqumentli funksiyanın fərqi şəklində (və ya qabrıq və çökük funksiyanın cəmi şəklində) ekstremal məsələləri diskret d.c-proqramlaşdırma məsələsi adlandırılır. Qeyd edək ki, kəsilməz d.c.-proramlaşdırma ekstremal məsələləri kifayət qədər aktualdır və müxtəlif müəlliflər tərəfindən araşdırılmışdır. Aydındır ki, $F(x)$ funksiyası həmişə koordinat-qabarıq deyil. Ona görədə ümumi halda $F(x)$ funksiyası üçün zəmanətli xətanın tapılması metodikasını istifadə etmək olmaz. Ancaq bəzi hallarda $F(x)$ funksiyası üçün xətaları $F_1(x)$ və $F_2(x)$ funksiyalarının ekstremumları vasitəsi ilə tapmaq olar.

Tutaq ki, x_F^g - qradiyent, x_F^* isə $F(x)$ funksiyasının $P \subseteq H^n$ tərtib-qabarıq çoxluğunda qlobal maksimumudurlar.

Teorem 2.4. Tutaq ki,

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) \in \Re_0(H^n), F_1(x) \in \Re_q(H^n), F_2(x) \in \Re_\mu^0(H^n), q \ge \mu,,$$

$F(x)$ $P \subseteq H^n$ çoxluğunda azalmayan funksiyadır. Onda $F(x)$ funksiyasının x_F^g qradiyent və x_F^* qlobal maksimumları $P \subseteq H^n$ çoxluğunda aşağıdakı münasibətlə bağlıdır

$$\frac{F(x_F^*) - F(x_F^g)}{F(x_F^*) - F(0)} \le \frac{1}{(1 + \theta(P))}(1 - \theta(P)B(q - \mu, r, h, \delta_F)),$$

burada bütün parametrlər məlumdur.

Bir çox diskret optimallaşdırma məsələlərində mümkün həllər çoxluğu iki supermatroidin (tamqiymətli polimatroidin) kəsişməsi kimi verilir. Ümumiyyətlə iki supermatroidin kəsişməsi həmişə supermatroid olmadığı üçün mümkün həllər çoxluğu supermatroid olan məsələlər üçün alınmış nəticələri supermatroidlərin kəsişməsinə tətbiq etmək olmaz. 2.4.2

bəndində $\rho-$koordinat-qabarıq funksiyaların supermatroidlərin kəsişməsində maksimallaşdırılması məsələsinə baxılır. Bu məsələ üçün ilk dəfə olaraq əvvəlki analoji nəticələri dəqiqləşdirən və ümumiləşdirən koordinat artımlı qradiyent alqoritmin zəmanətli aprior və aposterior xətaları alınmışdır. Həmçinin baxılmış məsələ üçün məqsəd funksiyasının qlobal (optimal) və qradiyent ekstremumda üst-üstə düşməsi üçün yeni şərtlər tapılmışdır.

Aşağıdakı A1 diskret optimallaşdırma məsələsinə baxılır:

$$\max\{ f(x): x=(x_1,...,x_n)\in S_1 \cap S_2 \},$$

burada $f(x)$ Z_+^n-də $\rho-$koordinat-qabarıq funksiya S_1 , $S_2 \subseteq Z_+^n$ - supermatroidlərdir.

Tutaq ki, A1 məsələsində x^* - optimal, x^g isə qradiyent (başqa sözlə koordinat artımlı qradiyent alqoritm köməyi ilə qurulmuş) həllərdir.

Teorem 2.4.4. Tutaq ki, A1 məsələsində $f(x)$ azalmayan funksiyadır. Onda A1 məsələsində qradiyent alqoritmin zəmanətli xətası aşağıdakı düsturla ifadə olunur

$$\varepsilon=\frac{(2-B(\rho,r,h))}{3},$$

burada xətaya daxil olan bütün parametrlər məlumdur, $0\le B(\rho,r,h)\le 1$.

Parametrlərin müxtəlif kombinasiyalarında bir sıra əvvəllər məlum olmayan yeni zəmanətli xətalar alınmışdır.

2.4.3 bəndində iki xüsusi qabarıq tamqiymətli proqramlaşdırma məsələsinə baxılır. Bu məsələlər üçün qradiyent alqoritmin zəmanətli xətası alınmışdır.

2.4.4 bəndində texniki sistemin yüksək etibarlılığı şərti daxilində xüsusi etibarlılıq məsələsi üçün qradiyent alqoritmin xətası tapılmışdır.

Qabarıq diskret optimallaşdırma məsələlərində qradiyent alqoritmin xətasının keyfiyyətinin yaxşılaşdırılması və addımların sayını azaltmaq üçün qradiyent alqoritmin parametrləşdirilməsindən istifadə edilir. Qradiyent alqoritmin müxtəlif parametrləşməsi vasitəsi ilə qradiyent alqoritmin xətası və ya qradiyent həllin optimallığı üçün tacir, ehtiyatların paylanması və sair tanınmış məsələlərində şərtlər tapılmışdır.

FƏSİL III-də qradiyent alqoritmin parametrləşdirilməsinin köməyi ilə zəmanətli xətalar tapılmışdır. 3.1 bəndində koordinat qəfəslərin sonlu alt çoxluğunda qradiyent alqoritmin ciddi qabarıqlıq ölçüsü ilə parametrləşdirilməsi məsələsinə baxılır. Qradiyent alqoritmə parametrin daxil edilməsi qradiyent alqoritmin addımlarının sayını azaldır. Qeyd edək ki, bu variantda qradiyent alqoritmin diskret optimallaşdırma məsələlərində tətbiqi kifayət qədərdir. Əgər digər işlərdə mümkün həllər çoxluğunun xassələrindən istifadə edilirsə, bu fəsildə əsas aprior informasiya ciddi qabarıqlıq parametridir ki, bu parametrdə əvvəlcədən aprior məlumdur. Həmcinin qlobal və qradiyent ekstremumun üst-üstə düşməsi üçün şərtlər verilmişdir.

$f(x) \in \Re_\rho(H^n)$ funksiyasının ρ vektoru vasitəsi ilə parametrləşdirilmiş $G(\rho)$ koordinat artımlı qradiyent alqoritmin $P \subseteq H^n$ çoxluğunda x^g maksimumu qurulmuşdur (bənd 3.1). Tutaq ki, x^* $f(x) \in \Re_\rho(H^n)$ funksiyasının P çoxluğunda qlobal maksimumudur.

Teorem 3.1. Tutaq ki, $f(x) \in \Re_\rho(H^n)$ P çoxluğunda azalmayan funksiyadır. Onda $f(x)$ funksiyasının P çoxluğunda x^* qlobal və x^g qradiyent maksimumları aşağıdakı münasibətlə bağlıdır

$$f(x^*) \le A(k,h) f(x^g) + (1 - A(k,h)) f(\theta) - B(k,h,\rho),$$

burada bütün parametrlər apriori məlumdur.

Koordinat-qabarıqlığın qabarıq diskret optimallaşdırma məsələlərində rolu məlumdur. Bu anlayışlar vasitəsi ilə qradiyent alqoritmin xətasının keyfiyyətinin tapılması üçün kifayət qədər universal metodika işlənmişdir. Qabarıq diskret ekstremal məsələlərin inkişafı və daha dəqiq xətaların tapılması üçün yeni sinif diskret arqumentli qabarıq funksiyalar daxil edilir. 3.2 bəndində diskret arqumentli yeni sinif koordinat-qabarıq funksiyalar sinfi daxil edilmişdir. Bu funksiyaların xassələri araşdırılmışdır. Bu sinfin tərifindən istifadə edərək koordinat artımlı qradiyent alqoritm təklif edilmişdir. Təklif edilmiş qradiyent alqoritmin zəmanətli xətası tapılmışdır. Alınmış nəticələrin əvvəlki məlum nəticələrlə müqayisəsi verilmişdir.

Tutaq ki, $\rho = (\rho_1, ..., \rho_n)$, $q = (q_1, ..., q_n) \in R_+^n$, burada R_+^n - n-ölçülü mənfi olmayan həqiqi vektorlar çoxluğudur. $\Re_{\rho,q}(H^n)$ - ilə aşağıdakı xassəyə malik $f : H^n \to R$ funksiyalar sinfini işarə edək

$$\Delta_{ij} f(x) \le 0, \ \forall x \in H^n, \forall i, j \in I_n = \{1,2,...,n\}, i \ne j,$$

$$-q_i \le \Delta_{ii} f(x) \le -\rho_i, \forall x \in H^n, i = \overline{1,n}.$$

Başqa sözlə, $-q_1,...,-q_n$ və $-\rho_1,...,-\rho_n$ uyğun olaraq qessianın diskret analoqu olan $\|\Delta_{ij} f(x)\|$ matrisin diaqonal elementlərinin aşağı və yuxarı sərhədləridir.

Qeyd edək ki, kəsilməz halda analoji funksiyalar ətraflı araşdırılmış və (l,Q)-çökük adlandırılmışdır.

$\Re_{\rho,q}(H^n)$ sinfinin bir neçə ekvivalent tərifi alınmışdır (teorem 3.1).

Koordinat qəfəslərdə daha iki koordinat-qabarıq funksiyalar sinfi daxil edilmişdir. Tutaq ki, $L = \|l_{ij}\| \in R_+^{n \times n}$ - simmetrik matrisdir. $W_L(H^n)$ - ilə aşağıdakı xassəyə malik $f : H^n \to R$ funksiyalar sinfini işarə edək

$$\Delta_{ij} f(x) \le -l_{ij}, \forall x \in H^n, \forall i, j \in I_n.$$

$WW_{LM}(H^n)$ - ilə aşağıdakı şərti ödəyən $f : H^n \to R$ funksiyalar sinfini işarə edək

$$-m_{ij} \le \Delta_{ij} f(x) \le -l_{ij}, \forall x \in H^n, \forall i, j \in I_n,$$

burada $L = \|l_{ij}\| \in R_+^{n \times n}$, $M = \|m_{ij}\| \in R_+^{n \times n}$ - simmetrik matrislərdir.

Aydındır ki, əgər $l_{ij} = 0, i \ne j, m_{ij} = 0, i \ne j$ olarsa, onda $\Re_{\rho,q}(H^n)$ və $WW_{LM}(H^n)$ sinifləri $q_i = m_{ii}, \rho_i = l_{ii}, i = \overline{1,n}$ olduqda üst-üstə düşür.

$WW_{LM}(H^n)$ və $W_L(H^n)$ siniflərini xarakterizə edən uyğun teoremlər isbat edilmişdir (teorem 3.3, teorem 3.4).

Aşağıdakı A3 və A4 qabarıq diskret optimallaşdırma məsələsinə baxılır.

Məsələ A3:

$$\max\{ f(x) : x \in P \subseteq H^n \},$$

burada $f(x) \in \Re_{\rho,q}(H^n)$, $P -$ tərtib-qabarıq çoxluqdur.

Məsələ A4:

$$\max\{ f_0(x) : f_i(x) \ge 0, i \in I_m, x = (x_1,...,x_n) \in P \},$$

burada

$$f_j(x) \in \Re_{\rho^j, q^j}(H^n), \;\; \rho^j = (\rho_1^j, ..., \rho_n^j),$$
$$q^j = (q_1^j, ..., q_n^j) \in R_+^n, \; j = \overline{0, m},$$

$P \;\; H^n$-də tərtib-qabarıq çoxluqdur,
$\Delta_i^+ f_j(x) > 0, \forall i \in fes(x, P), \forall x \in P, j \in I_m$.

A3 məsələsinin həlli üçün ρ, q vektorları ilə parametrləşdirilmiş koordinat artımlı qradiyent alqoritm təklif edilmişdir (alqoritm G_4).

G_4 alqotitmi vasitəsi ilə alınmış həlli $x^{G_4} = (x_1^{G_4}, ..., x_n^{G_4})$ ilə işarə edək.

Teorem 3.2.5. Əgər A3 məsələsində $f(x)$ azalmayan funksiyadırsa, onda G_4 alqoritmin zəmanətli xətası üçün bərabərsizlik doğrudur

$$\frac{f(x^*) - f(x^{G_4})}{f(x^*) - f(0)} \le V(h, k, q, \rho),$$

burada bütün parametrlər apriori məlumdur.

A4 məsələsinin həlli üçün koordinat artımlı qradiyent alqoritm təklif edilmişdir (alqoritm GA4) və həmin alqotitmin zəmanətli xətası tapılmışdır.

Həmçinin sadə struktura malik və qradiyent həlli tez tapan alqoritm təklif edilmişdir (alqoritm GA5). GA5 alqoritmi üçün bu alqoritmin xətası tapılmışdır.

Bənd 3.3 zəif ε-koordinat-qabarıq funksiyaları üçün qradiyent alqoritmin xətasının tapılmasına həsr edilmişdir.

Əgər aşağıdakı bərabərsizlik doğrudursa, onda $f : H^n \to R$ funksiyası zəif ε-koordinat-qabarıq adlanır

$$f(y) - f(x) \le \sum_{i \in N(x,y)} h(x_i, y_i) \Delta_i f(x) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i h(x_i, y_i), \; \forall x, y \in H^n, x \prec y,$$

burada $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in R_+^n$, R_+^n - n-ölçülü mənfi olmayan həqiqi vektorlar çoxluğudur.

$G(\varepsilon)$ alqoritmi təklif edilmişdir (bənd 3.3).

$G(\varepsilon)$ alqoritmi vasitəsi ilə alınmış həlli x^g ilə işarə edək. Tutaq ki, k $G(\varepsilon)$ alqoritminin addımlarının sayıdır və x^* - $f(x)$ funksiyasının P çoxluğunda qlobal maksimumudur.

Teorem 3.3. Tutaq ki, $f: H^n \to R$ funksiyası zəif ε-koordinat-qabarıqdır. Onda $f(x)$ funksiyasının P çoxluğunda maksimallaşdırılması məsələsində $G(\varepsilon)$ qradiyent alqoritmin aşağıdakı zəmanətli xətası doğrudur

$$f(x^*) \le A(k,h)f(x^g) + (1 - A(k,h))f(\theta) + h\Omega(\bar{\varepsilon}),$$

$$\frac{f(x^*) - f(x^g)}{f(x^*) - f(\theta)} \le C(k,h,\varepsilon,\bar{\varepsilon},\delta_f),$$

burada bütün parametrlər apriori məlumdur.

3.4 bəndində məqsəd funksiyasının ciddi qabarıqlıq ölçüsündən və qradiyent alqoritmin parametrləşdirilməsi ilə əvvəlki nəticələrin bir qabarıq diskret optimallaşdırma məsələsində məlum nəticələrin yaxşılaşdırılması və ümumiləşməsi göstərilmişdir.

A5 qabarıq diskret optimallaşdırma məsələsinə baxılır

$$\max\{f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) : x = (x_1,...,x_n) \in P_\varphi\},$$

burada

$$P_\varphi = \{x = (x_1,..., x_n) \in Z_+^n : \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) \le a,\ a \in R_+^1\},$$

$$f(x) \in \Re_\rho(Z_+^n), \varphi(x) \in \Re_q^0(Z_+^n),\ \rho = (\rho_1,..., \rho_n),$$

$$q = (q_1,..., q_n) \in R_+^n, \varphi(0) = 0,\ \Delta_i\varphi(x) > 0,\ \forall i \in I_n,\ x \in P_\varphi.$$

Aydındır ki, A5 məsələsində

$$\Delta_i f(x) = \Delta_i f_i(x_i),\ f_i(x_i) \in \Re_{\rho_i}(Z_+^1),\ \varphi_i(x_i) \in \Re_{q_i}^0(Z_+^1).$$

A5 məsələsi üçün qradiyentlərin dartılması ilə $G(q)$ qradiyent alqoritmi təklif edilmiş və bu alqoritmin zəmanətli xətası alınmışdır.

Teorem 3.4.1. A5 məsələsində x^g qradiyent həlli və x^* optimal həlli $f(x)$ funksiyası azalmayan olduqda aşağıdakı münasibətlə bağlıdır

$$f(x^*) \le \omega_1(\tau,h,q) f(x^g) + (1-\omega_1(\tau,h,q)) f(0) - \frac{(h-\tau)^2 \omega(\rho)}{2h},$$

burada bütün parametrlər məlumdur.

Alınmış xətaların konkretləşdirilməsi üçün bir neçə nəticə verilmişdir.

A5 məsələsi üçün $G(q)$ alqoritmindən istiqamətlə fərqlənən daha bir neçə qradiyent tipli alqoritm təklif edilmiş və bu alqoritmlərin xətası tapılmışdır (teorem 3.4-3.6). x^g qradiyent həllin optimallığı üçün şərt tapılmışdır. 3.5 bəndində iki qradiyentin fərqinə əsaslanan istiqamət seçən (başqa sözlə qradiyent həllin axtarışı üçün ətraf genişlənir) koordinat artımlı qradiyent alqorimin modifikasiyası təklif edilmişdir. Belə ki, qradiyent alqoritmin təklif edilmiş modifikasiyası diskret arqumentli funksiyalar üçün yeni aprior və aposterior zəmanətli xətaların tapılmasını sadələşdirir. Həmçinin qlobal və qradiyent ekstremumun funksional mənada üst-üstə düşməsi üçün şərt verilmişdir.

3.7 bəndində bir bul dəyişənli qeyri xətti diskret optimallaşdırma məsələsində ikili qradiyent alqoritm araşdırılır. Bu məsələ üçün ikili qradiyent alqoritm təklif edilir və ikili və birbaşa qradiyent alqoritmlərin konkret misallarla müqayisəsi aparılır.

3.7 bəndində aşağıdakı bul dəyişənli çanta məsələsinə baxılır

$$\max\{f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b,\ x_i = 0 \vee 1,\ i \in I_n\},$$

burada $c = (c,...,c) \in R_+^n$, $a = (a_1,...,a_n) \in R_+^n, b \in R_+^1$.

Bu məsələ üçün aşağıdakı xəta tapılmışdır (teorem 3.8)

$$\frac{f(x^*) - f(x^g)}{f(x^*)} \le \left(1 - \frac{1}{1 + (1-c)(h-1)} \right)^r = \varepsilon(c),$$

burada bütün parametrlər məlumdur.

Bu xəta çanta məsələsi üçün əvvəllər məlum olan qradiyent alqoritmin xətasını əsaslı yaxşılaşdırır.

4-cü FƏSİLDƏ məqsəd funksiyası diskret arqumentli iki ciddi qabarıq funksiyanın fərqi (onları d.c.-qabarıq adlandıracağıq) şəklində verilmiş diskret optimallaşdırma (DO) məsələləri araşdırılır. Bu fəsilin məqsədi diskret arqumentli d.c.-qabarıq funksiyalar üçün ciddi qabarıqlıq və ciddi çöküklük ölçüləri vasitəsi ilə lokal optimallıq şərtinin alınması, həmçinin bu funksiyaların Jordan-Dedekind və koordinat qəfəslərdə maksimallaşdırılması məsələsində qradiyent alqoritmin yeni zəmanətli aposterior xətasının tapılmasıdır. Qeyd edək ki, kəsilməz ekstremal məsələlərdə qabarıq və çökük funksiyanın cəminin (başqa terminlə iki qabarıq funksiyanın fərqi və ya d.c.-qabarıq funksiyalar) kifayət qədər aktualdır və çoxlu sayda müəlliflər tərəfindən araşdırılmışdır. 4.1 bəndində əvvəlcə lokal ekstremum şərti verilmiş və qradiyent alqoritmin Jordan-Dedekind strukturlarında xətası alınmışdır.

$SM^{f,g}_{\rho,q}(H)$ ilə aşağıdakı çoxluğu işarə edək:

$$SM^{f,g}_{\rho,q}(H)=\{F(x):F(x)=f(x)+g(x), f(x)\in\Im_\rho(H), -g(x)\in\Im_q(H)\}.$$

$SM^{f,g}_{\rho,q}(H)$ sinfindən olan funksiyaların sonlu Jordan-Dedekind strukturlarında maksimallaşdırılması məsələsini diskret arqumentli d.c.-qabarıq funksiyaların maksimallaşdırılması məsələsi adlandıracağıq. $SM^{f,g}_{\rho,q}(H)$ sinfindən olan funksiyaların maksimal-laşdırılması məsələsində qradiyent alqoritmin xətasını tapmaq üçün bir sıra təriflər və köməkçi hökmlər verək.

$x\in H$ elementinin tərtib ətrafı dedikdə x-lə müqayisə edilən $O(x)$ elementlər çoxluğu başa düşülür. Əgər $f(y)\ge f(x), \forall x\in O(y)$ şərti ödənilirsə, onda $y\in H$ elementi tərtib lokal maksimum adlanır.

β -tərtib-lokal maksimum anlayışı daxil edilmişdir. Əgər $f:H\to R, H$ - Jordan-Dedekind şərtini ödəyir, funksiyası üçün aşağıdakı implikasiya doğrudursa

$$(\exists\beta\ge 0)\Rightarrow(f(x)\le f(y)-\beta, \forall x\in O(y)),$$

Aydındır ki, hər bir β -tərtib lokal maksimum, həm də tərtib-lokal maksimumdur. Aydındır ki, əksi doğru deyil.

Teorem 4.1.4. Tutaq ki, $f:H\to R, H$ - Jordan-Dedekind şərtini ödəyir. Onda $y\in H$ elementinin $f(x)$ funksiyasının $\beta-$tərtib-qabarıq maksimumu olması üçün zəruri və kafi şərt $\Delta^+ f(y)\le-\beta$ və $\Delta^- f(y)\le-\beta$ olmasıdır.

Teorem 4.1.5. $x \in H$ nöqtəsinin $F(x) \in SM^{f,g}_{\rho,q}(H)$ funksiyasının tərtib-lokal maksimumu olması üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı münasibətin ödənilməsidir $\Delta^{+} f(x) + \Delta^{+} g(y) \le 0, \forall x \prec y$.

Tutaq ki, $\varphi : H \to R$. Əgər

$$(\exists \delta \ge 0) \Rightarrow (\forall x (\Delta^{+} \varphi(x) - \delta \le 0)),$$

implikasiyası doğudursa, onda $\varphi(x)$ funksiyası δ-şərtini ödəyir.

Aydındır ki, δ ədədi həmişə var, ona görədə δ-şərtini ödəyən funksiyalar çoxluğu boş deyil.

Jordan-Dedekind strukturlarında qradiyent alqoritmin zəmanətli xətası alınmışdır. 4.2 bəndində analoji nəticəlr koordinat qəfəslərdə alınmışdır.

4.3.1 bəndində diskret arqumentli d.c.-qabarıq funksiyaların qlobal maksimumda supermatroidlər və onların kəsişməsində yuxarı və aşağı sərhədləri tapılmışdır. 4.3 bəndi d.c.-qabarıq funksiyaların qeyri xətti kəsr proqramlaşdırma məsələsinə tətbiqinə həsr edilib. Bu məqsədlə aşağıdakı A məsələsinə baxılır:

$$\max\left\{ \psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} : x \in P \subseteq H^{n} \right\},$$

burada $f(x) \in \Re_{\rho}(H^{n}), \varphi(x) \in \Re_{q}(H^{n}), \varphi(x) > 0, \forall x \in P, f(x), \varphi(x)$

$P \subseteq H^{n}$ çoxluğunda azalmayan funksiyadır.

Məlumdur ki, A məsələsinin həlli aşağıdakı $D(\lambda)$, $(\lambda \ge 0)$ parametrik proqramlaşdırma məsələsi ilə bağlıdır:

$$\max\{F(x,\lambda) = f(x) - \lambda\varphi(x) : x \in P\}.$$

Aydındır ki, $F(x,\lambda) \in S\Re^{f,\varphi}_{\rho,\lambda q}(H^{n})$, burada $\lambda q = (\lambda q_{1}, \dots, \lambda q_{n})$.

Tutaq ki, x_{λ} - $D(\lambda)$ məsələsinin optimal həllidir və

$$\Phi(\lambda) = F(x_{\lambda}, \lambda) = \max\{F(x_{\lambda}, \lambda) : x \in P\}.$$

Əvvəlki bəndlərin nəticələrindən istifadə edərək alınmışdır

$$\underline{Q} \le \Phi(\lambda) \le \overline{Q}, \quad \lambda^{*} = \max\{\psi(x) : x \in P\}, \ \underline{\lambda} \le \lambda^{*} \le \overline{\lambda},$$

burada $\underline{Q}, \overline{Q}$ $\underline{\lambda}, \overline{\lambda}$ - məlumdur.

Ona görə də, $\Phi(\lambda)$ funksiyasının $\underline{\lambda},\overline{\lambda}$ parametrləri əsasında araşdırılması əvvəlki nəticələrlə müqayisədə kifayət qədər sadələşir.

5-ci FƏSİLDƏ uyğun məsələlərdə məqsəd funksiyasının bükülməsi üçün düstur verilmişdir. Məqsəd funksiyasının bükülməsi və mümkün həllər çoxluunun bəzi parametrləri köməyi ilə $\rho-$koordinat-qabarıq funksiyaların maksimallaşdırılması məsələsində koordinat artımlı qradiyent alqoritmin zəmanətli xətası alınmışdır. Göstərilmişdir ki, bu xətalar əvvəlki xətalardan yaxşıdır. Bükülmə terminində qradiyent ekstremumun optimallığı üçün kafi şərt alınmışdır. Misallara baxılmışdır. Sonra isə bükülmənin xassələri verilmişdir.

5.3.1 teoremindəki xəta ilə əvvəlki xətaların müqayisəsi aparılmışdır (teorem 5.3, teorem 5.4).

5.4 bəndində isbat edilmiş teoremlərə misallar verilmişdir.

5.5 bəndində Jordan-Dedekind strukturlarında bükülmə terminində qradiyent alqoritmin xətası alınmışdır. Göstərilmişdr ki, bu xətalar əvvəlki məlum xətalardan dəqiqdir. Əlavə olaraq qradiyent həllin optimallığı üçün kafi şərt verilmişdir.

$f \in \Im_\rho(H)$ funksiyasının bükülməsi aşağıdakı $c = c(f)$ kəmiyyətini adlandıracağıq:

$$c(f) = \begin{cases} \min\{(\Delta^+ f(x) - \Delta^+ f(y)) / \Delta^+ f(x) \big| (x,y) \in I\}, I \neq \varnothing, \\ \qquad\qquad\qquad 0, \; I = \varnothing, \end{cases}$$

burada $I = \{(x,y) \big| \Delta^+ f(x) > \Delta^+ f(y) \geq 0, x \rhd y, x, y \in H\}$.

Aydındır ki, əgər $f(x) \in \Im_\rho(H), \rho > 0$, onda $I \neq \varnothing$.

Aşağıdakı A məsəsləsinə baxılır:tapın

$$\max\{f(x) \big| x \in H\},$$

burada $f(x)$ $\Im_\rho(H)$ sinfindən olan azalmayan funksiyadır.

Teorem 5.1. A məsələsi üçün qradiyent alqoritmin aşağıdakı zəmanətli xətası doğrudur

$$\frac{f(x^*) - f(x^g)}{f(x^*) - f(\theta)} \leq \left(1 - \frac{1}{1 + (1-c)(h-1)} \right)^r.$$

5.1 teoremindəki xəta ilə əvvəlki məlum nəticələrlə müqayisəsi aparılmışdır (teorem 5.3, teorem 5.4).

Nəticə 5.2. Əgər A məsələsində $c = c(f) = 1$ olarsa, onda $f(x^*) = f(x^g)$.

Nəticə 5.3. Teoremdə alınmış xəta çatdırıla biləndir.

5.6 bəndində qradiyent alqoritmin məqsəd funksiyasının bükülməsinin köməyi ilə parametrləşdirilməsi məsələsinə baxılır. Əvvəlcə xüsusi məsələyə baxılır. Sonra ümumi hal üçün qradiyent alqoritm verilir. Bu alqoritmin xətası alınmışdır.

6-cı FƏSİL qradiyent alqorirmin zəmanətli xəta terminində dayanıqlığına həsr edilib. 6.1 bəndində məqsəd funksiyasının bükülməsi və mümkün həllər çoxluğunun əyriliyi terminində göstərilmişdir ki, hər hansı qabarıq diskret optimallaşdırma məsələsində məsələnin parametrlərinin "kiçik" həyacanlanmalarında qradiyent alqoritmin dayanıqlığı göstərilmişdir.

Aşağıdakı A qabarıq diskret optimallaşdırma məsələsinə baxılır: tapın

$$\max\{f(x) \mid x = (x_1,...,x_n) \in P \subseteq Z_+^n\},$$

burada $f(x) \in \Re_\rho(Z_+^n)$, $f(x)$ P çoxluğunda azalmayan funksiyadır.

Tutaq ki, $x^* = (x_1^*,...,x_n^*)$ A məsələsinin optimal həllidir. $x^g = (x_1^g,...,x_n^g)$ ilə A məsələsinin qradiyent həllini qeyd edək, başqa sözlə x^g P-dən olan və koordinat artımlı qradiyent alqoritm vasitəsi ilə alınmış nöqtədir.

Aşağıdakı A^δ məsələsini A məsələsinin həyacanlanması adlandıracağıq: tapın

$$\max\{f^\delta(x) \mid x \in P \subseteq Z_+^n\},$$

burada $f^\delta(x) \in \Re_q(Z_+^n)$ P çoxluğunda azalmayan funksiyadır, $c(f^\delta) = c(f) + \delta$, $\delta \in R_+^1$, $q = (q_1,...,q_n)$.

İsbat edilmişdir ki, A^δ tipli məsələlər sinfi boş deyil.

Tutaq ki, $\varepsilon(\delta)$ və ε uyğun olaraq həyacanlanmış A^δ və ilkin A məsələsinin zəmanətli xətalarıdır. Koordinat artımlı qradiyent alqoritm xətası aşağıdakı şərti ödədikdə A məsələsi üçün dayanıqlı adlanır

$$\varepsilon(\delta) \le K(\delta)\varepsilon,$$

burada $\delta \to 0$ olduqda $K(\delta) \to 1$.

Mahiyyətcə zəmanətli xəta terminində qradiyent alqoritmin dayanıqlığı elə bir sinif məsələlərin seçilməsidir ki, məsələnin parametrlərinin (xüsusi halda məqsəd funksiyasının bükülməsinin) "kiçik" həyacanlanmalarında həyacanlanmış məsələlərdə zəmanətli xəta pisləşmir.

Teorem 6.1. A məsələsində məqsəd funksiyasının bükülməsinin "kiçik" həyacanlanmasında koordinat artımlı qradiyent alqoritm dayanıqlıdır.

6.2 bəndində mümkün həllər çoxluğunun əyriliyinin həyacanlanmasında qradiyent alqoritm dayanıqlıdır (teorem 6.2).

6.3 bəndində məhdudiyyət şərtlərinə daxil olan matrisin Çebışev normasının həyacanlanmasında qradiyent alqorirmin dayanıqlı olduğu göstərilmişdir.

Tutaq ki, A məsələsi verilmişdir

$$\max\{f(x) : x \in P_{\psi}^{-}\},$$

burada bütün parametrlər məsələnin parametrləri vasitəsi ilə təyin edilir.

Teorem 6.5. A məsələsində Çebışev normasının "kiçik" həyacanlanmasında koordinat artımlı qradiyent alqoritm dayanıqlıdır.

Analoji nəticələr A matrisinin izi və məxsusi ədədlərinin həyacanlanmasında da alınmışdır.

6.4 bəndində cərimələi xidmət şəbəkələrində məsələnin parametrlərinin həyacanlanmasında qradiyent alqoritmin dayanıqlığı və qeyri dayanıqlığı araşdırılır. Analoji məsələ obrazların tanınmasında əlamətlərin informativliyinin təyin edilməsində də yaranır. Göstərilmişdir ki, cərimə $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ vektorunun uyğun məsələdə kiçik həyacanlanmasında qradiyent alqoritm dayanıqlıdır. Analoji olaraq göstərilmişdir ki, prioritetlik $c = (c_1, ..., c_n)$ vektorunun uyğun məsələdə kiçik həyacanlanmasında qradiyent alqoritm dayanıqlı deyil.

6.5 bəndində Jordan-Dedekind strukturlarında məqsəd funksiyasının bükülməsinin həyacanlanmasında qradiyent alqoritmin dayanıqlı olduğu göstərilmişdir.

7-ci FƏSİL qradiyent alqoritmin xüsusi diskret optimallaşdırma məsələlərinə tətbiqinə həsr edilib.

7.1 bəndində gücləndirilmiş üçbucaq bərabərsizlikli tacir məsələsi üçün qradiyent alqoritmin zəmanətli xətası alınmışdır.

7.1 bəndinin məqsədi gücləndirilmiş üçbucaq bərabərsizlikli tacir məsələsi üçün yaxşılaşdırılmış və parametrləşdirilmiş qradiyent alqoritmin zəmanətli xətasının tapılmasıdır. Alınmış xətalar əvvəllər alınmış analoji xətaları yaxşılaşdırır. Həmçinin zəif mənada (başqa sözlə funksional mənada) (nəticə 7.2) optimal və qradiyent həllin üst-üstə düşməsi üçün şərtlər tapılmışdır və təkrar olaraq qradiyent alqoritmin tacir məsələsi üçün 2-dən ciddi kiçik olmasının mümkünsüzlüyü hipotezası təkzib olunub (nəticə 7.1). Bu hipoteza əvvəllər qradiyent alqoritmin modifikasiyası yolu ilə dəfələrlə müxtəlif müəlliflər tərəfindən təkzib edilmişdir.

Tutaq ki, $G=(VG,EG)$ n-təpəli tam qrafdır, burada VG - təpələr çoxluğu, EG isə tillər çoxluğudur. $G=(VG,EG)$ qrafında Hamilton dövrü dedikdə təpələrdən bir dəfə keçən dövr başa düşülür. Hər bir $(i,j)\in EG$ tilinə qarşı mənfi olmayan $f(i,j)$ (dəyər, uzunluq, yük və sair) ədədi qarşı qoyulur. $F(EG'), EG'\subset EG$ ilə EG'-dən olan tillərin yüklərinin cəmini işarə edək. Əgər $1/2\le\beta\le 1$ üçün $G=(VG,EG)$ qrafının tillərinin yükü $f(i,j)$ aşağıdakı bərabərsizliyi ödəyirsə

$$f(i,j)\le\beta(f(i,k)+f(k,j))\,,\ \forall i,j,k\in VG\,,\ i\ne j,\ j\ne k,\quad (7.1)$$

Onda G qrafının gücləndirilmiş üçbucaq bərabərsizliyini ödəyir. (7.1) bərabərsizliyini nəzərə alaraq gücləndirilmiş metrik tacir məsələsi (GMTM) daxil edilmişdir. GMTM dedikdə $f(i,j)$ yükləri üçün (7.1) bərabərsizliyi daxilində maksimal yükə malik Hamilton dövrünü tapmaq başa düşülür. $\beta=1$ olduqda GMTM adi metrik tacir məsələsinə (MTM) çevrilir. G qrafında Hamilton dövrlər çoxluğunu

$$U=\{(VU,EU):VU=VG,\ EU\subseteq EG\}$$

ilə işarə edək. GMTM-nin optimal həlli dedikdə elə $U^*\in U$ başa düşülür ki, aşağıdakı bərabərsizlik ödənilsin

$$F(U^*)=\sum_{(i,j)\in EU^*} f(i,j)\ge F(\overline{U})=\sum_{(i,j)\in E\overline{U}} f(i,j)\,,\ \forall\overline{U}\in U\,.$$

Tutaq ki, U^g GMTM məsələsinin təqribi (qradiyent) həllidir (məsələn, “acgöz” alqoritmi vasitəsi ilə tapılmış).

GMTM məsələsində qradiyent alqoritmin zəmanətli xətası dedikdə, elə $\varepsilon \geq 0$ ədədi başa düşülür ki, $F(U^*)/F(U^g) \leq \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilsin.

Teorem 7.1. GMTM məsələsi üçün qradiyent alqoritmin aşağıdakı zəmanətli xətası doğrudur

$$F(U^*)/F(U^g) \leq 4\beta/(1+2\beta) \qquad (7.2)$$

Nəticə 7.1. $1/2 < \beta < 1$ olduqda GMTM məsələsi üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur

$$F(U^*)/F(U^g) < 2$$

Beləliklə nəticə 7.1 bir daha tacir məsələsi üçün qradiyent alqoritmin zəmanətli xətasının 2-dən ciddi kiçik olmasının mümkünsüzlüyü hipotezası təkzib edilir (bu hipoteza əvvəllər qradiyent alqoritmin modifikasiyası yolu ilə dəfələrlə müxtəlif müəlliflər tərəfindən təkzib edilmişdir).

Nəticə 7.2. Əgər $\beta = 1/2$ olarsa, onda aşağıdakı bərabərlik doğrudur $F(U^*) = F(U^g)$.

Qeyd 7.1: (7.2) xətasına β-ya görə parametrləşmiş xəta kimi baxmaq olar. β-nı $[1/2,1]$ parçasında dəyişməklə qradiyent alqoritmin əvvəllər məlum digər zəmanətli xətaları almaq olar. Belə ki, kənar nöqtələrə ($\beta = 1/2$, $\beta = 1$) və daxili ($1/2 < \beta < 1$) β parametrinin qiymətlərinə yeni keyfiyyətli nəticələr – optimal və qradiyent həllərin (zəif mənada, başqa sözlə funksional mənada) üst-üstə düşməsi (nəticə 7.2), əvvəllər məlum xətaların alınması və ya yaxşılaşdırılması və məlum hipotezanın təkzib edilməsi (nəticə 7.1 və 7.3).

7.2 bəndində sifarişlər potrfeli məsələsində sifarişlərin prioritetliyinin tam və ya qismən məlum olduqda qradiyent alqoritm analiz edilir.

7.3 bəndində yüksək həlledilə bilən qruplarda və kombinator Evklid çoxluqlarında qradiyent ekstremumun xətası tapılmışdır. Göstərilmişdir ki, bu məsələlər Jordan-Dedekin strukturlarında araşdırılmış məsələlərə gətirilir.

7.4 bəndində qonşuluq matrisinin xarakteristik ədədləri terminində qrafın minimal rənglənməsi məsələsində qradiyent alqoritmin zəmanətli xətası alınmışdır. Bu bənddə yenilik ondadır ki, ilk dəfə olaraq xromatik ədədin tapılması üçün qonşuluq matrisin məxsusi ədədləri tətbiq edilir.

7.5 bəndində obrazların tanınmasında siniflərə bölmə və komitet həllin tapılması üçün qradiyent alqoritm tətbiq edilir. Burada zəmanətli xətaların köməyi ilə siniflərə bölmənin bir neçə qaydası təklif edilmişdir.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işində müxtəlif diskret strukturlarda qradiyent tipli alqoritmlərin xətaları araşdırılmışdır. Dissertasiya işinin əsas nəticələri.

1. Minimal elementi olan qismən nizamlanmış çoxluqlarda diskret arqumentli ciddi qabarıq funksiyaların qradiyent və qlobal yaxınlığı üçün yeni yaxşılaşdırılmış aposterior və aprior xətalar alınmışdır. Burada xətanın keyfiyyətini xarakterizə edən əsas parametrlər mümkün həllər çoxluğunun əyriliyi və ciddi qabarıqlığın ölçü parametridir.

2. Supermatroidin şəkili dəyişdirilmiş tərifi təklif edilmiş və qradiyent alqoritmin supertmatroidlər və onların kəsişməsində yaxşılaşdırılmış xətaları tapılmışdır.

3. Diskret arqumentli ciddi qabarıq funksiyaların qradiyent və qlobal ekstremumunun qismən nizamlanmış çoxluqlarda üst üstə düşməsi üçün şərtlər tapılmışdır.

4. Diskret d.c.-proqramlaşdırma məsələləri üçün diskret arqumentli iki ciddi qabarıq funksiyanın fərqinin qlobal ekstremumda yeni xətaları tapılmışdır.

5. Lokal optimallıq şərti əsasında Jordan-Dedekind strukturlarında və koordinat qəfəslərdə iki ciddi qabarıq funksiyanın fərqinin maksimallaşdırılması məsələsində qradiyent alqoritmin yeni zəmanətli xətası tapılmışdır.

6. Qradiyent alqoritmin ciddi qabarıqlıq parametri və iki ardıcıl elementdə hesablanmış iki qradiyentin fərqindən (başqa sözlə axtarışı dərinləşdirməklə) asılı parametrləşdirilməsi araşdırılmışdır.

7. Parametrləşdirilmiş qradiyent alqoritmin xətaları alınmışdır.

8. Koordinat qəfəslərdə yeni ciddi qabarıq funksiyalar sinfi daxil edilmişdir. Belə funksiyaların xassələri qismən araşdırılmış və onların maksimallaşdırılması məsələsində qradiyent alqoritmin xətaları tapılmışdır. Xüsusi məsələlər üçün xətalar konkretləşdirilmişdir.

9. Diskret arqumentli funksiyalar üçün bükülmə anlayışı daxil edilmiş və bükülmənin xassələri araşdırılmışdır.

10. Müxtəlif məsələlərdə qradiyent alqoritmin dayanıqlığı (qeyri dayanıqlığı) şərtləri alınmışdır.

Müəllifin dissertasiya mövzusu üzrə çap edilmiş elmi işləri

1. **Рамазанов А.Б.** Гарантированная оценка погрешности градиентного алгоритма в задачах максимизации строго выпуклой функции на дискретных структурах Жордана-Дедекинда / Мат.-лы Всесоюзной конференции "Математическое программирование и приложения". Уральское Отделение АН СССР, ИМ и М. Свердловск, 1991, с. 56-57.
2. **Рамазанов А.Б.,** Ефимчик Н.Е. О погрешности градиентного экстремума строго выпуклой функции дискретного аргумента // Известия АН Беларуси, сер. физ.-мат., наук, 1996, N 2, с. 133.
3. **Рамазанов А.Б.** Точность градиентных экстремумов для строго выпуклой функции дискретного аргумента на частично упорядоченных множествах. Препринт N 21, Баку, 2003, 122 с.
4. **Рамазанов А. Б.** О гарантированной оценке точности градиентного алгоритма на пересечениях двух суперматроидов / Российская конф. "Дискретный анализ и исследование опера-ций". Материалы конференции (Новосибирск, 2004 г.). Новосибирск: Изд.-во Ин.-та математики им. С.Л.Соболева, СО РАН, Новосибирск, 2004, с. 169.
5. **Рамазанов А.Б.** Оценка глобального максимума разности двух выпуклых функций дискретного аргумента / Тезисы Республиканской конф.-ции "Проблемы математики,информатики и экономики", БГУ, Баку, 2008, с. 101-102.
6. **Рамазанов А.Б.** О гарантированной оценке погрешности градиентного алгоритма для одной задаче выпуклой дискретной оптимизации // Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, 2004, № 3, с. 60-66.
7. **Рамазанов А.Б.** Об устойчивости градиентного алгоритма в одной задаче дискретной оптимизации / Тезисы Между.-ной конф.-енции посвященная 90-летию Бакинского государ-ственного университета, Баку, 2009, с. 84-85.
8. **Рамазанов А.Б.** Исследование одной специальной задачи надежности технических систем / Мат-лы Между.-родной конф.-ции "Проблемы управления и приложения", Минск, 2005, с. 171.
9. **Рамазанов А. Б.** Оценки точности получаемых алгоритмом покоординатного подъема решений задач дискретной выпуклой

оптимизации // Дискретный анализ и исследование операций, 2005, серия 1, том 12, № 4, с. 60-80.
10. **Рамазанов А. Б.** Гарантированная оценка точности градиентного алгоритма для задачи коммивояжера с усиленным неравенством треугольника // Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, 2005, № 2, с. 60-64.
11. **Рамазанов А.Б.** Точность градиентного экстремума на основе разности двух градиентов строго выпуклой функции дискретного аргумента // Вестник Университета Одлар Юрду, 2005, № 13, с. 82-85.
12. **Рамазанов А. Б.** Об оценке точности градиентного алгоритма в одной задаче выпуклой дискретной оптимизации и некоторые смежные вопросы // Труды 13-й Байкальской Международной семинар-школы ”Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, Изд.-во Ин-та систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 2005, с. 571-576.
13. **Рамазанов А.Б.** Точность градиентного решения на суперматроидах и их пересечениях // Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, 2006, № 4, с. 41-45.
14. **Рамазанов А.Б.** Монотонные функции многозначной логики и точность градиентного алгоритма / Тез. научной конф. “Теоретические и прикладные задачи операторных уравнений”, Баку, 2006, с. 116-117.
15. **Рамазанов А.Б.** Априорные оценки точности градиентного алгоритма на суперматроидах и их пересечениях / Мат.-лы 4-й Всероссийской конф. “Проблемы оптимизации и экономические приложения” посвяшенная 50-летию Сибирского Отделения РАН, Изд.-во Омского филиала Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, 2006, с. 118.
16. **Рамазанов А.Б.** Поведение в среднем градиентных методов для одной задачи выпуклой дискретной оптимизации / Тез. научной конф. “Методы математической физики”, Баку, 2006, с. 156-157.
17. **Рамазанов А.Б.** Точность градиентного алгоритма для задачи о p-медиане / Мат. Конф. “Вопросы применение математики и новые информационные технологии”, СГУ, 2007, с. 115.
18. **Рамазанов А.Б.**, Ахмедова Н.А. Оценка оптимального решения в одной специальной задаче дискретной оптимизации / Мат. конф.

“Вопросы применение математики и новые информаци--онные технологии”, СГУ, 2007, с. 115-116.
19. **Рамазанов А.Б**. Точность градиентного алгоритма для задачи о минимальной раскраске графа / Мат. Между.-ной конф. “Применение новых информационных технологии в науке и образование”, Баку, 2007, с. 496-497.
20. **Рамазанов А.Б**. Оценки погрешности градиентного алгоритма для задачи о минимальной раскраске графа / Сб. ст. “Применение новых информационных технологии в науке и образование”, Баку, 2007, с. 483-485.
21. **Рамазанов А.Б.,** Джавадов А.В. Об оценке оптимального решения в одной нелинейной задаче дискретной оптимизации / Тезисы науч. конф. посвяшенной 90-летию Г.Т. Ахмедова, БГУ, Баку, 2007, с. 64-65.
22. **Рамазанов А.Б.** Об оценке глобального максимума разности строго выпуклых функций на суперматроидах и их пересечениях / Матер.-лы Всероссийской конф. “Дискретная оптимизация и исследование операций”. Изд-во ИМ им. С.Л.Соболева, СО РАН, Новосибирск, 2007, с. 134.
23. **Рамазанов А. Б.** Оценки в глобальном экстремуме d.c.-выпуклых функций дискретного аргумента // Труды XIV Байкальской Международной школы-семинара “Методы опти-мизации и их приложения”, Иркутск, Изд-во Ин-та систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН , 2008, с. 483-490.
24. **Рамазанов А.Б.** Оценки в глобальном экстремуме ds-выпуклых функций дискретного аргумента и некоторые смежные вопросы // Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, 2009, № 3, с. 56-61.
25. **Рамазанов А.Б**. Об оценке кривизны порядково-выпуклого множества // Мат.-лы конференции посвященная 90- летию Бакинского государственного университета, Баку, 2009, с. 84-87.
26. **Рамазанов А.Б**. Новые оценки точности градиентного алгоритма на суперматроидах и их пересечениях / Материалы Международной конференции посвященный 80-ти летию профессора Р.И. Тышкевича, Минск, 2009, с. 165.
27. **Рамазанов А.Б.** О точности жадного алгоритма на структурах Жордана-Дедекинда / Мат.-лы Всероссийкой конференций

“Дискретный анализ и исследование операций“ . Изд-во Инс-та Математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2010 , с. 108.
28. **Рамазанов А.Б.** Об оценке глобального максимума функции дискретного аргумента // Материалы Республикансий конференции “Современные проблемы математики, информатики и экономики”, 2010, с. 178-183.
29. **Рамазанов А.Б.,** Ализаде Э.Э. Об оценке глобального максимума d.s.-выпуклой функций дискретного аргумента / Материалы Международной конференции посвященный 80-ти летию чл. корр. НАНА Мамедова Я.Дж., Баку, 2010, с. 118-119.
30. **Рамазанов А.Б**., Мамедова Х.В. О задаче выбора наиболее приоритетных запросов / Материалы Международной конференции посвященный 80-ти летию чл. корр. НАНА Мамедова Я.Дж., Баку, 2010, с. 117-118.
31. **Рамазанов А. Б.** Точность градиентного алгоритма на структурах Жордана-Дедекинда и некоторые смежные вопросы // Труды XV Байкальской Международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, Изд.-во Ин.-та систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН , 2011, с. 170-174.
32. **Рамазанов А.Б.** Устойчивость градиентного алгоритма на структурах Жордана-Дедекинда / Мат.-лы Всероссийской конференции “Математическое программирование и приложения”. Изд.-во ИМ и М Уральское Отделение РАН, Екатеринбург, 2011, с. 204-205.
33. **Рамазанов А.Б.** Устойчивость градиентного алгоритма в задачах выпуклой дискретной оптимизации и некоторые смежные вопросы // Дискретная математика, 2011, №3, с. 82-92.
34. **Рамазанов А.Б.** Устойчивость градиентного алгоритма в одной задаче дискретной оптимизации // Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, 2012, N 1, с. 62-69.
35. **Рамазанов А.Б**. Об оптимальности жадного алгоритма на упорядоченных множествах с условием Жордана-Дедекинда / Мат.-лы 5-й Всероссийской конф. “Проблемы оптимизации и экономические приложения”. Изд.-во Омского филиала Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, 2012, с. 160.
36. **Рамазанов А.Б.** Критерий устойчивости жадного алгоритма на структурах Жордана-Дедекинда / Материалы Международной

конференции “Дискретная математика, теория графов и их приложения”, Минск, 2013, с. 37-38.

37. **Рамазанов А.Б.** Необходимое и достаточное условие устойчивости градиентного алгоритма в одной задаче дискрет-ной оптимизации / Материалы Международной конференции “Дискретная оптимизации и исследование операций”, Новосибирск, Изд.-во ИМ им. С.Л.Соболева СО РАН, 2013, с. 121.
38. **Рамазанов А.Б.** Анализ устойчивости градиентного алгоритма в задачах выпуклой дискретной оптимизации // Труды Международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения.” Изд.-во Инст.-та систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, 2014, с. 87.
39. **Рамазанов А.Б.** Анализ устойчивости градиентного алгоритма в задаче обслуживание сети со штрафом // Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, 2014, № 3, с. 38-44.
40. **Рамазанов А.Б.** Анализ точности градиентного алгоритма на структурах Жордана-Дедекинда // Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, 2014, № 4, с. 24-28.
41. **Рамазанов А.Б.** Устойчивость градиентного алгоритма в терминах кривизны множества допустимых решений // Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, 2015, № 2, с. 48-54.
42. **Рамазанов А.Б**. Анализ точности и устойчивости градиентного алгоритма на структурах Жордана-Дедекинда // Proceedings of IAM , 2014, V. 3, N 2, pp. 242-248.
43. **Рамазанов А.Б**. Об оценке градиентного экстремума с помощъю параметризации градиентного алгоритма // Proceedings of IAM , 2015, V. 4, N 2, pp. 214-220.
44. **Рамазанов А.Б.** Устойчивость градиентного алгоритма в терминах меры строгой выпуклости / Мат.-лы Всероссийской конференции “Математическое программирование и приложения”. Изд.-во ИМ и М Уральское Отделение РАН, Екатеринбург, 2015, с. 164-165.
45. **Рамазанов А.Б.** Анализ устойчивости градиентного алгоритма в одной задаче дискретной оптимизации / Мат.-лы 6-й Международной конф. “Проблемы оптимизации и экономические

приложения". Изд.-во Омского филиала Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, 2015, с. 102.
46. **Рамазанов А.Б О** точности градиентного алгоритма на частично упорядоченных множествах / Тезисы науч. конф. посвяшенной 100-летию Г.Т. Ахмедова, БГУ, Баку, 2017, с. 243-244.
47. **Рамазанов А.Б.,** Мамедова Е.В. Применение градиентного алгоритма в некоторых задачах распозновaния образов // Proceedings of IAM , 2017, V. 6, N 2, pp. 217-224.
48. **Ramazanov A.** B. An Estimate for the Curvature of an Order-Convex Set in the Integer Lattice and Related Questions // Math. Notes, 2008, vol 84, N 1, pp. 147-151.
49. **Ramazanov A.B.** Errors of special gradient algorithm in problems of discrete optimization / Abstract. The International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Baku, 2005, pp. 82-83.
50. **Ramazanov A.B**. Greedy algoritms on special convex-ordered sets / Mat.-s the Third İnternational Conference "Problems of Cybernetics and informatics", Baku , 2010, pp. 65-66.
51. **Ramazanov A.B**. Stabibity greedy algorithm for one problems discrete optimization / Mat.-s the Third İnternational Conference "Problems of Cybernetics and informatics", Baku, 2010, pp. 130-131.
52. **Ramazanov A.B.** Stability gradient algorithm on Jordan-Dedekind structures / Mat.-s the 4-hrd İnternational Conference "Problems of Cybernetics and informatics", Baku, 2012, pp. 80-81.
53. Afanas`ev A.P., Dzyuba S.M., Emelyanova I.I., **Ramazanov A.B.** Optimal Control with Feedback of Some Class of Nonlinear Systems via Quadratic Criteria // Applied and Computational Mathematics, 2016, V. 15, N 1, pp. 78-87.
54. Emelichev V.A., **Ramazanov A.B.** About the steepness of the function of discrete argument // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, 2016, V. 7, N 1, pp. 105-111.
55. **Ramazanov A.B.** New Quaranteed errors Greedy Algorithms in Convex Discrete Optimization Problems in terms of steepness Utility functions / XVII Baikal International School-Seminar Methods of

Optimization and their Applications, Yuly 31-August 6, 2017, Irkutsk, pp. 117.
56. **Ramazanov A.B.** New of Accuracy of Gradient Algorithm in the Jordan-Dedekinds Structure // Applied and Computational Mathematics, 2018, V. 17, N1, pp. 109-113.

Birgə çap edilmiş elmi işlərdə tətqiqatçının şəxsi rolu:

(2, 18, 21, 29, 30, 47) – işlərində həmmüəlliflər müzakirə və hesablamada iştirak ediblər.

(53) – həllin korrektliyinin yoxlanması hissəsi müəllifə aiddir.

(54) – hesablama hissəsi və nəticələrin analizi müəllifə aiddir.

A.B. Ramazanov

Quality Research of errors of gradient typed algorithms in discrete Structures and Related Questions

SUMMARY

The main results of the thesis are following:

- there are worked out new methods for estimate of the accuracy of Gradient method in the problems of convex discrete optimization (CDO);
- there are investigated the accuracies of Gradient algorithms with using the curviture of the admissible domain;
- there improved known results of the accuracy of the algorithms of Gradient type in the extremal problems with ρ-coordinate-convex (ρ-ordered-convex) purpose functions on ordered convex sets;
- there are obtained new principially improved apriori estimates of accuracy of Gradient algorithm in supermatroid structures and their inversection;
- there are investiguud and improved the accuracies of Gradient algorithms in such known model profelues as the problem of travelling salesman, the problem of knapsacks, the problem of reserves distibution, portofelio problem, the problem of the technical systems reliability;
- there are found constructive sufficient conditions for wicle classes of CDO problems ruhen optimal and gradient solutions of the correcpondng problems councide;
- there are proposed some modifications of Gradient type algorithms for the problems for discrete optimisation (DO) and the methods of finding the quality of the solutions of the solutions obtained by muas of these algorithms;
- there are obtained improved estimates of the accuracy in the discrete structures of Jordan-Dedekind;
- there is investigated stability (nonstability) of Gradient algorithms;
- model tasks of direct and dual gradient algorithm were compared;
- in steepness term errors in different structures of Gradient algorithm were improved.

АННОТАЦИЯ

- Разработаны новые методики для оценки точности градиентного алгоритма для задач выпуклой дискретной оптимизации (ВДО);
- исследованы точности градиентных алгоритмов с использованием кривизны допустимой области;
- улучшены известные результаты точности алгоритмов градиентного типа в экстремальных задачах с ρ–координатно-выпуклыми (ρ-порядково-выпуклыми) целевыми функциями на порядково-выпуклых множествах;
- получены новые принципиально улучшенные априорные оценки точности градиентного алгоритма на суперматроидных структурах и их пересечениях;
- исследованы и улучшены точности градиентных алгоритмов в таких известных модельных задачах, как задача коммивояжера, задача распределении ресурсов, задач построения портфеля заказов на основе полной и неполной информации, задач надежности технических систем (сетей);
- найдены конструктивные необходимые и достаточные условия для широких классов задач ВДО, когда оптимальное и градиентное решения в соответствующих задачах совпадают;
- предложено несколько модификаций алгоритмов градиентного типа для задач ДО и нахождения качества решений, полученных с помощью этих алгоритмов;
- получены улучшенные оценки точности на дискретных структурах Жордана-Дедекинда;
- исследованы устойчивости (не устойчивости) градиентных алгоритмов в некоторых задачах ВДО при возмущениях крутизны целевой функции и параметров допустимой области;
- получены улучшенные гарантированные оценки точности градиентного алгоритма в терминах крутизны целевой функции и некоторых параметров допустимой области.

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

==

На правах рукописи

Али Багдаш оглы Рамазанов

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТИ АЛГОРИТМОВ ГРАДИЕНТНОГО ТИПА НА ДИСКРЕТНЫХ СТРУКТУРАХ И НЕКОТОРЫЕ СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

3338.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (по отраслям)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора математических наук

Баку-2018