AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

AYNUR FÜZULİ qızı ƏMRAHOVA

SİNQULYAR İNTEQRAL OPERATORLARIN APROKSİMASİYALARI VƏ ONUN TƏTBİQLƏRİ

1202.01 – Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2016

Dissertasiya işi **Bakı Dövlət Universitetinin Riyazi analiz”** kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi,
dos. **Rəşid Ə. Əliyev**

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru,
prof. **Camal İ. Məmmədxanov**
(Bakı Dövlət Universiteti).

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi,
dos. **Elnur H. Xəlilov**
(Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti).

Aparıcı təşkilat: Azərbaycan Dövlət Memarlıq və İnşaat Universiteti
“Ali riyaziyyat” kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 19 fevral 2016-ci il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 18 yanvar 2016-ci il.

AMEA RMİ-nın D 01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi r.e.d.,dos. Rövşən Bəndəliyev

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Məlumdur ki, sinqulyar inteqral tənliklər üsulu ilə riyaziyyatın, mexanikanın, astrofizikanın, elastiklik nəzəriyyəsinin, hidrodinamikanın, difraksiya nəzəriyyəsinin, elektrodinamikanın, uçan aparatlar nəzəriyyəsinin bir çox nəzəri və tətbiqi məsələləri uğurla həll olunmuşdur. Belə tənliklərinin həllərinin aşkar şəkildə qurulması çox nadir hallarda mümkün olur. Buna görə də yeni effektiv konstruktiv üsulların işlənməsi zərurəti meydana çıxır.

Sinqulyar inteqral tənliklərin həll edilməsinin konstruktiv metodlarının işlənməsi bu tənliklərdə iştirak edən sinqulyar inteqral operatorların xassələrini öyrənmədən mümkün deyil və bu, operatorların approksimasiyası ilə əlaqəlidir ki, bu da dissertasiya işinin aktuallığını göstərir.

Sinqulyar inteqralların aproksimasiyası və Koşi və Hilbert nüvəli sinqulyar inteqral tənliklərin konstruktiv həll üsulunun qurulması V.V. İvanovun, B.Q.Qabdulxayevin, S.M. Belotserkovski və İ.K. Lifanovun, V.A. Zolotorevskinin, Z. Presdorfun, M.A. Şeşkonun, B.İ. Musayevin, A.A. Babayev və B.İ. Musayevin, R.Ə. Əliyevin və başqa müəlliflərin işlərində öz əksini tapmışdır.

Polisinqulyar inteqralların aproksimasiyası və polisinqulyar inteqral tənliklərin konstruktiv həll üsulu V.A. Kakiçevin, R.V. Duduçavın, B.Q. Qabdulxayevin, V.S. Plidinin, İ.B. Simonenkonun işlərində araşdırılmışdır.

R.Ə.Əliyevin Koşi nüvəli sinqulyar inteqral tənliklərin həlli üçün işlədiyi yeni konstruktiv üsul, hansı ki, sinqulyar inteqral operator sinqulyar ineqral operatorun əsas xassələrini saxlayan operatorlar vasitəsilə aproksimasiya olunur ki, bu da yığılma sürəti nöqteyi nəzərindən əvvəl işlənmiş üsullarla müqayisədə daha dəqiq qiymətləndirmələr almağa imkan verir və hesablama çətinliyi daha azdır, belə ki, bu üsul təqribi həllin aşkar şəkildə tapılmasına imkan verir, bu zaman uyğun xətti cəbri tənliklər sisteminin əmsalları asan hesablanır.

Hazırki dissertasiya işində bu konstruktiv üsul Hilbert nüvəli sinqulyar inteqral tənliklərin həlli üçün işlənmiş və əsaslandırılmışdır. Bununla yanaşı, işdə Koşi və hilbert nüvəli polisinqulyar inteqral operatorların aproksimasiyası da verilib və göstərilib ki, bu aproksimasiyalar polisinqulyar inteqral operatorların əsas xassələrini saxlayır və yığılma sürəti nöqteyi nəzərindən daha dəqiq qiymətləndirmələr almağa imkan verir.

Tədqiqat üsulları. Dissertasiya işində alınmış nəticələrin əsaslandırılması üçün sinqulyar inteqral tənliklər nəzəriyyəsinin, funksional analiz, xətti cəbr və yaxınlaşmalar nəzəriyyəsinin ümumi üsullarından istifadə olunmuşdur.

İşin məqsədi. İşin məqsədi Koşi və Hilbert nüvəli sinqulyar və polisinqulyar inteqral operatorların approksimasiyasını qurmaq, həmçinin, Hilbert nüvəli tam xətti sinqulyar inteqral tənliklərin konstruktiv həll üsulunu qurmaq və əsaslandırmaqdan ibarətdir.

Elmi yeniliklər. Dissertasiya işində

- kvadratı ilə cəmlənən funksiyalar fəzasında və Hölder fəzalarında Hilbert nüvəli sinqulyar inteqralların aproksimasiyasının sürət qiymətləndirməsi alınmışdır;
- kvadratı ilə cəmlənən funksiyalar fəzasında və Hölder fəzalarında Hilbert nüvəli tam xətti sinqulyar inteqral tənliklərin konstruktiv həll üsulu təklif olunmuşdur;
- kvadratı ilə cəmlənən funksiyalar fəzasında və Hölder fəzalarında Hilbert və Koşi nüvəli polisinqulyar inteqralların aproksimasiyasının sürət qiymətləndirməsi alınmışdır.

Nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya əsasən nəzəri xarakter daşıyır, lakin alınan nəticələr sinqulyar inteqral tənliklərin ədədi üsullarla həllinin və analizin digər məsələlərinin inkişafında öz tətbiqini tapa bilər. Alınan nəticələr dissertasiya işində baxılan sinqulyar və polisinqulyar inteqral tənliklərə gətirilən müxtəlif nəzəri və praktik məsələlərin həlli zamanı tətbiq oluna bilər.

İşin aprobasiyası. Dissertasiyanın əsas nəticələri Bakı Dövlət Universitetinin “Riyazi analiz” kafedrasının seminarlarında (rəhbər f.-r.e.n., dos. F.A. Abdullayev), “Riyaziyyat, mexanika, informatikanın müasir problemləri” adlı beynəlxalq elmi konfransda (Tula, 2012), Bakı Dövlət Universitetinin Hesablama Riyaziyyatı kafedrasının 50 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konfransda (Bakı, 2012), Tələbələr, magistrantlar, aspirantlar və gənc tədqiqatçıların “Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri” adlı elmi konfransında (Bakı, 2013, Azərbaycanın Ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 90 illik yubileyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri” adlı respublika elmi konfransında (Bakı, 2013) məruzə edilmişdir

Çap olunmuş elmi əsərlər. Dissertasiyanın əsas nəticələri müəllifin 10 işində çap olunmuşdur. Bunların siyahısı avtoreferatın sonunda verilir.

İşin həcmi və strukturu. Dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiyanın həcmi 112 səhifədən, ədəbdiyyat siyahısı 79 adda ədabiyyatdan ibarətdir.

İŞİN MƏZMUNU

Dissertasiya işi girişdən, üç fəsildən, nəticə və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Birinci fəsildə Hilbert nüvəli sinqulyar inteqralın aproksimasiyası və kvadratik cəmlənən funksiyalar fəzasında Hilbert nüvəli sinqulyar inteqral tənliklərin konstruktiv həll üsulu verilmişdi.

Tutaq ki, $L_2 = L_2([0,2\pi])$

$$\|\varphi\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

normalı kvadratik cəmlənən 2π - periodlu funksiyalar fəzasıdır. $C = C([0,2\pi])$ isə

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{t\in[0,2\pi)} |\varphi(t)|$$

normalı 2π - periodlu kəsilməz funksiyalar fəzasıdır.

L_2 fəzasında

$$(R\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + (\mathrm{K}\varphi)(t),$$

Hilbert nüvəli tam xətti sinqulyar inteqral operatora baxaq, burada

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ctg \frac{t-\tau}{2} \varphi(\tau) d\tau\,, \tag{1}$$

$$(\mathrm{K}\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(t,\tau) \varphi(\tau) d\tau\,, \tag{2}$$

$a(t), b(t), K(t,\tau)$ – 2π - periodlu kəsilməz funksiyalardır, belə ki, bütün $t \in [0,2\pi)$ üçün $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$.

$$(R\varphi)(t) = f(t)$$

sinqulyar inteqral tənliyinin konstruktiv həll üsulları aerodinamika, elastiklik nəzəriyyəsi, elektrodinamika və digər tətbiqi sahələrdə öz geniş tətbiqini tapmışdır və onların qurulmasına bir çox işlər həsr olunmuşdur. Bu fəsildə R operatoru

$$(R_n\varphi)(t)=\sum_{k=0}^{2n-1}\alpha_k^{(n)}(t)\varphi\left(t+\frac{\pi k}{n}\right)$$

operatorlar ardıcıllığı ilə aproksimasiya olunur, burada $\alpha_k^{(n)}(t)$, $k=\overline{0,2n-1}$, $n\in N$ – verilmiş funksiyalarla ifadə olunan 2π - priodlu kəsilməz funksiyalardır və isbat olunur ki, $\{R_n\}$ operatorlar ardıcıllığı L_2 fəzasında R operatoruna güclü yığılır**,** R operatorunun tərsinin olmasından R_n (n-nin kifayət qədər böyük qiymətlərində) operatorunun tərsinin olması alınır və $\{R_n^{-1}\}$ operatorlar ardıcıllığı L_2 fəzasında $n\to\infty$ olduqda R^{-1} operatoruna güclü yığılır. Qeyd edək ki, bu üsulda R^{-1} tərs operatorunun tapılması $t+\dfrac{\pi m}{n}$, $m=\overline{0,2n-1}$ nöqtələrində

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\alpha_k^{(n)}(t)\varphi\left(t+\frac{\pi k}{n}\right)=f(t)$$

tənliyə baxılması ilə ekvivalentdir, belə ki,

$$\left(\varphi(t),\varphi\left(t+\frac{\pi}{n}\right),\dots,\varphi\left(t+\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)\right)$$ nəzərən

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\alpha_k^{(n)}\left(t+\frac{\pi m}{n}\right)\varphi\left(t+\frac{\pi(k+m)}{n}\right)=f\left(t+\frac{\pi m}{n}\right),\quad m=\overline{0,2n-1}$$

bərabərliyinin alınan həlli xətti cəbri tənliklər sistemində $\varphi(t)$ funksiyasının tapılmasına gətirib çıxarır.

1.1-də Hilbert nüvəli sinqulyar inteqralın və requlyar inteqralın L_2 fəzasında aproksimasiyası verilmiş, göstərilmişdir ki, bu aproksimasiyalar sinqulyar inteqralın əsas xassələrini özündə saxlayır və uyğun yığılma qiymətləndirməsi alınmışdır.

Məlumdur ki, S və K operatorları L_2 fəzasında məhdud təsir göstərir, bu zaman

$$\|S\|_{L_2\to L_2}=1, \qquad \|\mathrm{K}\|_{L_2\to L_2}\le \|\mathrm{K}\|_\infty=\max_{t,\tau\in[0;2\pi]}|K(t,\tau)|\ ,$$

və ixtiyari $\varphi\in L_2$ funksiyası üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur.

$$(S^2\varphi)(t)=-\varphi(t)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)d\tau\ .$$

L_2 fəzasında

$$(S_n\varphi)(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}ctg\left(-\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right)\varphi\left(t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\right),\ \ n=2,3,\dots \quad (3)$$

operatorlar ardıcıllığına baxaq.

Teorem 1. S_n, $n=2,3,\dots,$ operatorları L_2 fəzasında xətti məhduddur, bu zaman

$$\|S_n\|_{L_2\to L_2}=1\ ;$$

tərtibi $n-1$-dən böyük olmayan ixtiyari $T_{n-1}(t)$ triqonometrik çoxhədlisi üçün

$$\left(S_nT_{n-1}\right)(t)=(ST_{n-1})(t)$$

bərabərliyi ödənir və ixtiyari $\varphi\in L_2$ funksiyası üçün

$$\left(S_n^2\varphi\right)(t)=-\varphi(t)+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(t+\frac{2\pi k}{n}\right)$$

bərabərliyi doğrudur.

Tutaq ki, $E_n^{(2)}(\varphi)=\inf_{P\in T_n}\|\varphi-P\|_{L_2}$ – $\varphi\in L_2$ funksiyasının T_n-dən olan çoxhədlilərlə ən yaxşı yaxınlaşmasıdır, burada T_n - tərtibi

$n \in Z_{+} = N \cup \{0\}$-dən böyük olmayan bütün triqonometrik çoxhədlilərin çoxluğudur.

Teorem 2. $\{S_n\}$ operatorlar ardıcıllığı L_2 fəzasında S operatoruna güclü yığılır, bu zaman ixtiyari $\varphi \in L_2$ funksiyası üçün

$$\left\| S\varphi - S_n\varphi \right\|_{L_2} \leq 2E_{n-1}^{(2)}(\varphi),\ n = 2,3,\ldots$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

L_2 fəzasında

$$\left(\mathrm{K}_n\varphi\right)(t) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} K\left(t, t+\frac{\pi k}{n}\right)\varphi\left(t+\frac{\pi k}{n}\right) \tag{4}$$

operatorlar ardıcıllığına baxaq.

Tutaq ki, $E_n(K) = \inf \left\| K - \Phi_n \right\|_\infty$ K funksiyasının

$$\Phi_n(t,\tau) = \frac{\alpha_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k(t)\cos k\tau + \beta_k(t)\sin k\tau)$$

şəkilli çoxhədlilər vasitəsilə ən yaxşı yaxınlaşma ölçüsüdür, burada infimum tərtibi n-dən böyük olmayan bütün $\alpha_k(t),\ \ k = \overline{0,n},$ $\beta_k(t),\ \ k = \overline{1,n}$ triqonometrik çoxhədliləri üzrə götürülür.

Teorem 3. $\{\mathrm{K}_n\}$ operatorlar ardıcıllığı L_2 fəzasında K operatoruna güclü yığılır, bu zaman ixtiyari $\varphi \in L_2$ funksiyası üçün

$$\left\| \mathrm{K}\varphi - \mathrm{K}_n\varphi \right\|_{L_2} \leq 2\left\| K \right\|_\infty \cdot E_{n-1}^{(2)}(\varphi) + 2E_{n-1}(K)\cdot\left\{E_{n-1}^{(2)}(\varphi) + \left\| \varphi \right\|_{L_2}\right\}$$

qiymətləndirməsi doğrudur

L_2 fəzasında

$$(R\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + (\mathrm{K}\varphi)(t)$$

Hilbert nüvəli tam xətti sinqulyar inteqral operatora baxaq, burada, S və K uyğun olaraq (1) və (2) bərabərlikləri ilə təyin olunan xətti operatorlar, $a(t),\ b(t),\ K(t,\tau)$ - 2π - periodlu kəsilməz funksiyalardır, bu zaman bütün $t \in [0, 2\pi)$ üçün $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ və

$$(R_n\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S_n\varphi)(t) + (\mathrm{K}_n\varphi)(t)$$

operatorlar ardıcıllığı
burada, S_n и K_n xətti operatorları uyğun olaraq (3) və (4) bərabərlikləri ilə təyin olunur.

1.1 göstərilib ki, $\{R_n\}$ operatorlar ardıcıllığı L_2 fəzasında R operatoruna güclü yığılır. 1.2-də isbat edilib ki, əgər R operatorunun L_2 fəzasında tərsi varsa, onda n-nin kifayət qədər böyük qiymətlərində R_n operatorlarının da L_2 fəzasında tərsi var və $\{R_n^{-1}\}$ operatorlar ardıcıllığı L_2 fəzasında $n \to \infty$ olduqda R^{-1} operatoruna güclü yığılır.

Tutaq ki, A- X Banax fəzasında xətti kəsilməz operator, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ - isə X fəzasında xətti kəsilməz operatorlar ardıcıllığıdır.

Определение 1. Əgər elə $n_0 \in N$ varsa ki, ixtiyari $n \geq n_0$ üçün A_n operatorlarının tərsi var və X fəzasında ixityari $y \in X$ üçün

$$A_n x_n = y, \quad n \geq n_0$$

tənliyinin $x_n \in X$ həlli

$$Ax = y$$

tənliyinin $x \in X$ həllinə yığılarsa, deyəcəyik ki, tərsi olan A operatoruna A_n operatorlar sistemi vasitəsilə yaxınlaşmalar metodu tətbiq oluna bilər.

Teorem 4. L_2 fəzasında tərsi olan

$$(R\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + (\mathrm{K}\varphi)(t)$$

tam sinqulyar inteqral operatoruna -burada $a(t), b(t), K(t,\tau)$- 2π periodlu kəsilməz funksiyalardır, bütün $t \in [0; 2\pi)$ üçün $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$

$$(R_n\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S_n\varphi)(t) + (\mathrm{K}_n\varphi)(t)$$

operatorlar sistemi üzrə yaxınlaşmalar metodu tətbiq olunur, başqa sözlə n-in böyük qiymətlərində R_n operatorlarının L_2 fəzasında tərsi var və $\{R_n^{-1}\}$ operatorlar ardıcıllığı L_2 fəzasında R^{-1} operatoruna güclü yığılır. Bundan başqa,

$$\left\|R_n^{-1} f - R^{-1} f\right\|_{L_2} \le const \cdot \left\{\left[\|b\|_\infty + \|K\|_\infty\right] E_{n-1}^{(2)}(\varphi) + E_{n-1}(K)\left[E_{n-1}^{(2)}(\varphi) + \|\varphi\|_{L_2}\right]\right\}$$

qiymətləndirməsi doğrudur, burada $\varphi = R^{-1} f$.

Tutaq ki, $H_\alpha \equiv H_\alpha\left([0,2\pi]\right)$

$$\|\varphi\|_\alpha = \|\varphi\|_\infty + H(\varphi;\alpha)$$

normalı, burada $\|\varphi\|_\infty = \max\limits_{t\in[0;2\pi]} |\varphi(t)|$,

$$H(\varphi;\alpha) \equiv \sup\left\{ |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \,/\, |t_1 - t_2|^\alpha : t_1, t_2 \in [0, 2\pi],\ t_1 \ne t_2 \right\},$$

2π periodlu, α $(0 < \alpha \le 1)$ göstəricili Hölder mənada kəsilməz funksiyalar fəzasıdır.

İkinci fəsildə birinci fəsildə işlənmiş konstruktiv üsul H_α $(0 < \alpha \le 1)$ Hölder fəzasında verilmişdir, başqa sözlə H_α fəzasında Hilbert nüvəli sinqulyar inteqralın və requlyar inteqralın aproksimasiyası verilmişdir, eləcə də H_α fəzasında Hilbert nüvəli tam sinqulyar inteqral tənliyin konstruktiv həll üsulu əsaslandırılmışdır.

Məlumdur ki, Hibert nüvəli S sinqulyar inteqral operatoru və K requlyar inteqral operatoru H_α fəzasında xətti məhduddur, burada S operaotru üçün $0 < \alpha < 1$ və K operatoru üçün $0 < \alpha \le 1$.

2.1-də H_α Hölder fəzalarında Hibert nüvəli sinqulyar inteqral operatorun və requlyar inteqral operatorun aproksimasiyası verilir.

Teorem 5. İxtiyari $\varphi \in H_\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$ funksiyası üçün $\{S_n\varphi(t)\}$ funksiyalar ardıcıllığı H_β $(0 < \beta < \alpha \le 1)$ fəzasında $(S\varphi)(t)$ funksiyasına yığılır, bu zaman

$$\|S\varphi - S_n\varphi\|_\beta \le \frac{c_2 + c_3 \ln n}{n^{\alpha-\beta}} \cdot H(\varphi;\alpha).$$

Teorem 6. İxtiyari $\varphi \in H_\alpha$ $(0<\alpha\le 1)$ funksiyası üçün $\{K_n\varphi(t)\}$ funksiyalar ardıcıllığı H_β $(0<\beta<\alpha)$ fəzasında $(K\varphi)(t)$ funksiyasına yığılır, bu zaman

$$\left\| K\varphi - K_n\varphi \right\|_\beta \le \frac{c_5}{n^{\alpha-\beta}}\left[\|\varphi\|_\infty \cdot H(K;\alpha) + \|K\|_\infty \cdot H(\varphi;\alpha)\right]$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

H_α $(0<\alpha\le 1)$ fəzasında

$$(R\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + (K\varphi)(t)$$

Hilbert nüvəli tam xətti sinqulyar inteqral operatoruna və

$$(R_n\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S_n\varphi)(t) + (K_n\varphi)(t)$$

operatorlar ardıcıllığına baxaq

2.2-də isbat olunur ki, əgər R operatorunun H_β fəzasında tərsi var-sa , onda n-nin kifayət qədər böyük qiymətlərində R_n operatorlarının da H_β fəzasında tərsi var və ixtiyari $f \in H_\beta$ funksiyası üçün $\{R_n^{-1} f\}$ funk-siyalar ardıcıllığı $H_{\beta'}$ $(0<\beta'<\beta)$ fəzasında $R^{-1}f$ funksiyasına yığılır.

İndi H_α $(0<\alpha\le 1)$ fəzasında R tam xətti sinqulyar inteqral operatoruna baxaq.

Teorem 7. Tutaq ki, $a(t)$, $b(t)$ – kəsilməz differensiallanan funksiyalardır, $a'(t)$, $b'(t)$ törəmələri H_α sinfinə daxildir, bütün $t\in[0;2\pi]$ üçün $a^2(t)+b^2(t)\ne 0$ və R operatorunun H_β $(0<\beta<\alpha)$ fəzasında tərsi var. Onda n-in böyük qiymətlərində

$$(R_n\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S_n\varphi)(t) + (K_n\varphi)(t)$$

operatorlarının da H_β fəzasında tərsi var və ixtiyari $f \in H_\beta$ funksiyası üçün

$$\left\| R_n^{-1} f - R^{-1} f \right\|_{\beta'} \le \frac{c_8 + c_9 \ln n}{n^{\beta-\beta'}} \cdot \left\| f \right\|_{\beta} \quad (0 < \beta' \le \beta)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Üçüncü fəsil kvadratik cəmlənən funskiayar fəzasında və Hölder fəzalarında Koşi və Hilbert nüvəli polisinqulyar inteqral operatorların aproksimasiyasına həsr olunub.

Tutaq ki, $L_2(T^m)$ və $L_2(\Gamma^m)$ – uyğun olaraq T^m və Γ^m çoxluqları üzrə kvadratik cəmlənən funksiyalar fəzasıdır ($L_2(T^m)$ halında əlavə olaraq həm də hər bir dəyişənə görə 2π periodlu), burada $T = [0; 2\pi]$, $\Gamma = \{ z \in C : |z| = 1 \}$.

$L_2(T^m)$ fəzasında

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} ctg \frac{t-\tau}{2} \varphi(\tau)\, d\tau \,, \; t \in T^m$$

Hilbert nüvəli polisinqulyar inteqral operatoruna baxaq, burada

$$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m), \; t = (t_1, \ldots, t_m), \; d\tau = d\tau_1 \ldots d\tau_m,$$

$$ctg \frac{t-\tau}{2} = ctg \frac{t_1 - \tau_1}{2} \cdot \ldots \cdot ctg \frac{t_m - \tau_m}{2};$$

və $L_2(\Gamma^m)$ fəzasında

$$(\tilde{S}\varphi)(\xi) = \frac{1}{(\pi i)^m} \int_{\Gamma^m} \frac{\varphi(\eta)}{\eta - \xi} d\eta \,, \; \xi \in \Gamma^m$$

Koşi nüvəli polisinqulyar inteqral operatoruna baxaq, burada

$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m), \; \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m), \; d\eta = d\eta_1 \ldots d\eta_m,$$

$$\frac{1}{\eta - \xi} = \frac{1}{\eta_1 - \xi_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\eta_m - \xi_m}.$$

Məlumdur ki, S və $\widetilde{S}$ operatorları uyğun olaraq $L_2(T^m)$ və $L_2(\Gamma^m)$ fəzalarında xətti məhduddurlar, bu zaman

$$\|S\|_{L_2(T^m)\to L_2(T^m)} = \|\widetilde{S}\|_{L_2(\Gamma^m)\to L_2(\Gamma^m)} = 1.$$

bərabərliyi ödənilir.

3.1-də $L_2(T^m)$ fəzasında Hilbert nüvəli polisinqulyar inteqral operatorların aproksimasiyası göstərilir.

$L_2(T^m)$ fəzasında

$$(S_n\varphi)(t) = \frac{1}{n^m} \sum_{\substack{k=(k_1,\ldots,k_m) \\ k_i\in Z_+,\, i=\overline{1,m} \\ |k|\le n-1}} \left(\prod_{i=1}^{m} ctg\left(-\frac{\pi(2k_i+1)}{2n} \right) \right) \varphi\left(t + \frac{\pi(2k+1)}{n} \right),$$

$$t = (t_1,\ldots,t_m) \in T^m, \quad n = 2,3,\ldots,$$

operatorlar ardıcıllığına baxaq, burada

$$|k| = \max_{i=\overline{1,m}} k_i\,, \quad \left(t + \frac{\pi(2k+1)}{n} \right) = \left(t_1 + \frac{\pi(2k_1+1)}{n}, \ldots, t_m + \frac{\pi(2k_m+1)}{n} \right).$$

Teorem 8. S_n, $n = 2,3,\ldots$, operatorları $L_2(T^m)$ fəzasında xətti məhduddur, bu zaman

$$\|S_n\|_{L_2(T^m)\to L_2(T^m)} = 1\,;$$

tərtibi $n-1$-dən böyük olmayan ixityari m-ölçülü $T_{n-1}(t)$ triqonometrik çoxhədlisi üçün

$$\left(S_n T_{n-1}\right)(t) = (ST_{n-1})(t)$$

bərabərlik ödənilir və ixtiyari $\varphi \in L_2(T^m)$ funksiyası üçün

$$\left(S_n^2\varphi\right)(t) = (-1)^m \left[\varphi(t) - \left(H_n\varphi\right)(t)\right]$$

bərabərlik doğrudur, burada

$$\left(H_n\varphi\right)(t) = \sum_{l=1}^{m} \frac{(1)^{l+1}}{n^l} \left(\sum_{1\le j_1<\ldots<j_l\le m} \; \sum_{k_{j_s}=\overline{0,n-1},\; s=\overline{1,l}} \varphi\left(t + \frac{2\pi k^{(j)}}{n} \right) \right),$$

$$j=\left(j_1,\ldots,j_l\right),\ k^{(j)}=\left(k_1^{(j)},\ldots,k_m^{(j)}\right),$$

$$k_i^{(j)}=\begin{cases} k_{j_s}, & olduqda \quad i=j_s,\ s=\overline{1,l}; \\ 0, & olduqda \quad i\notin\left\{j_1,\ldots,j_l\right\}. \end{cases}$$

Tutaq ki, $E_n^{(2)}\left(\varphi;T^m\right)=\inf\limits_{P_n\in T_n^{(m)}}\left\|\varphi-P_n\right\|_{L_2(T^m)}$ – $\varphi\in L_2(T^m)$ funksiyasının $T_n^{(m)}$-dən olan çoxhədlilərlə ən yaxşı yaxınlaşmasıdır, burada $T_n^{(m)}$- tərtibi n-dən böyük olmayan bütün m ölçülü triqonometrik çoxhədlilərin çoxluğudur.

Teorem 9. $\left\{S_n\right\}$ operatorlar ardıcıllığı $L_2(T^m)$ fəzasında S operatoruna güclü yığılır, bu zaman ixtiyari $\varphi\in L_2(T^m)$ funksiyası üçün

$$\left\|S\varphi-S_n\varphi\right\|_{L_2(T^m)}\le 2E_{n-1}^{(2)}(\varphi;T^m)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

3.2-də $L_2(\Gamma^m)$ fəzasında Koşi nüvəli polisinqulyar inteqral operatorların aproksimasiyası verilir.

Tutaq ki,
$$\tau_p^{(\xi)}=e^{p\theta i}\cdot\xi,\ \Delta\tau_p^{(\xi)}=\left(\tau_{p+1}^{(\xi)}-\tau_p^{(\xi)}\right)\cdot\frac{\theta}{\sin\theta}=$$
$$=2ie^{p\theta i}\cdot\xi\cdot\theta,\ \ p=\overline{0,2n},\ \theta=\frac{\pi}{n},\ \xi\in\Gamma.$$

$$(\widetilde{S}_n\varphi)\left(\xi\right)=\frac{1}{\left(\pi i\right)^m}\sum_{\substack{k=(k_1,\ldots,k_m)\\ k_i\in Z_+,\, i=\overline{1,m}\\ |k|\le n-1}}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{\Delta\tau_{2k_i+1}^{(\xi_i)}}{\tau_{2k_i+1}^{(\xi_i)}-\xi_i}\right)\varphi\left(\tau_{2k+1}^{(\xi)}\right),$$

$$\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_m)\in\Gamma_m,\ \ n=1,2,\ldots,$$

operatorlar ardıcıllığına baxaq, burada $\tau_{2k+1}^{(\xi)}=\left(\tau_{2k_1+1}^{(\xi_1)},\ldots,\tau_{2k_m+1}^{(\xi_m)}\right)$.

Teorem 10. $\widetilde{S}_n$, $n=1,2,\ldots$ operatorları $L_2(\Gamma^m)$ fəzasında xətti məhduddur, bu zaman

$$\left\|\widetilde{S}_n\right\|_{L_2(\Gamma^m)\to L_2(\Gamma^m)} = 1;$$

İxtiyari $\varphi \in L_2(\Gamma^m)$ funksiyası üçün

$$\left(\widetilde{S}_n^2\varphi\right)(\xi) = \varphi(\xi)$$

bərabərliyi ödənilir və tərtib $n-1$-dən böyük olmayan ixtiyari m - ölçülü $\widetilde{T}_{n-1}(\xi) = \sum\limits_{\substack{k=(k_1,\ldots,k_m) \\ -n+1\le k_i \le n-1,\ i=\overline{1,m}}} \alpha_k \xi^k$ çoxhədlisi üçün

$$\left(\widetilde{S}_n \widetilde{T}_{n-1}\right)(\xi) = (\widetilde{S}\widetilde{T}_{n-1})(\xi)$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_m) \in \Gamma^m$, $\xi^k = \xi_1^{k_1}\ldots\xi_m^{k_m}$.

Tutaq ki, $E_n^{(2)}(\varphi;\Gamma^m) = \inf\limits_{\widetilde{P}_n \in \widetilde{T}_n^{(m)}} \left\|\varphi - \widetilde{P}_n\right\|_{L_2(\Gamma^m)}$ – $\varphi \in L_2(\Gamma^m)$ funksiyasının $\widetilde{T}_n^{(m)}$-dən olan çoxhədlilərlə ən yaxşı yaxınlaşmasıdır, burada $\widetilde{T}_n^{(m)}$ - $\sum\limits_{\substack{k=(k_1,\ldots,k_m) \\ -n\le k_i \le n,\ i=\overline{1,m}}} \alpha_k \xi^k$ şəkilli bütün çoxhədlilərin çoxluğudur.

Teorem 11. $\left\{\widetilde{S}_n\right\}$ operatorlar ardıcıllığı $L_2(\Gamma^m)$ fəzasında S operatoruna güclü yığılır, bu zaman ixtiyari $\varphi \in L_2(\Gamma^m)$ funksiyası üçün

$$\left\|\widetilde{S}\varphi - \widetilde{S}_n\varphi\right\|_{L_2(\Gamma^m)} \le 2E_{n-1}(\varphi;\Gamma^m)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Tutaq ki, $H_\alpha(T^m)$ $(0 < \alpha \le 1)$

$$\|\varphi\|_\alpha = \|\varphi\|_\infty + H(\varphi;\alpha)$$

normalı, burada $\|\varphi\|_\infty = \max_{t\in T^m}|\varphi(t)|, \quad H(\varphi;\alpha) = \inf_{\substack{\tau,t\in R^m\\ \tau\neq t}} \frac{|\varphi(t)-\varphi(\tau)|}{\sum_{k=1}^{m}|t_k-\tau_k|^\alpha}$,

$t=(t_1,\dots,t_m),\ \tau=(\tau_1,\dots,\tau_m)$, T^m-üzərində aşağıdakı şərtləri ödəyən hər bir dəyişənə görə 2π - periodlu, kəsilməz funksiyalar fəzasıdır:

$M>0$ ədədi var ki, ixtiyari $t=(t_1,\dots,t_m)\in R^m$, $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_m)\in R^m$ nöqtələri üçün $|\varphi(t)-\varphi(\tau)|\le M\cdot\sum_{k=1}^{m}|t_k-\tau_k|^\alpha$ bərabərsizliyi ödənilir.

Məlumdur ki,

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{T^m} ctg\frac{t-\tau}{2}\varphi(\tau)d\tau,\ \ t\in T^m,$$

polisinqulyar inteqral operatoru $H_\alpha(T^m)$ fəzasında xətti məhduddur.

3.3-də isbat olunur ki, $S_n,\ n=2,3,\dots$ operatorları H_α fəzasında xətti məhduddur və

$$\|S_n\|_{H_\alpha(T^m)\to H_\alpha(T^m)} \le \left(2+\ln n+c_0\right)^m$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Teorem 12. İxtiyari $\varphi\in H_\alpha\left(T^m\right)$ $(0<\alpha\le 1)$ funksiyası və $0<\beta\le\alpha$ şərtini ödəyən β üçün

$$\|S\varphi-S_n\varphi\|_\beta \le \frac{(c_{11}+c_{12}\ln n)^m}{n^{\alpha-\beta}}\cdot H(\varphi;\alpha)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Tutaq ki, $H_\alpha(\Gamma^m)$ $(0<\alpha\le 1)$

$$\|\varphi\|_\alpha = \|\varphi\|_\infty + H(\varphi;\alpha)$$

normalı, burada $\|\varphi\|_\alpha = \|\varphi\|_\infty + H(\varphi;\alpha)$,

$$H(\varphi;\alpha) = \inf_{\substack{\xi,\eta\in\Gamma^m \\ \xi\neq\eta}} \frac{|\varphi(\xi)-\varphi(\eta)|}{\sum_{k=1}^{m}|\xi_k-\eta_k|^\alpha}, \qquad \xi=(\xi_1,\ldots,\xi_m),\ \eta=(\eta_1,\ldots,\eta_m),$$

Γ^m üzərində aşağıdakı şərtləri ödəyən kəsilməz funksiyalar fəzasıdır:

$M>0$ ədədi var ki, ixtiyari $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_m)\in\Gamma^m$,

$\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_m)\in\Gamma^m$ nöqtələri üçün $|\varphi(\xi)-\varphi(\eta)| \le M\cdot\sum_{k=1}^{m}|\xi_k-\eta_k|^\alpha$

bərabərsizliyi ödənilir.
Məlumdur ki,

$$\left(\tilde{S}\varphi\right)(\xi) = \frac{1}{(\pi i)^m}\int_{\Gamma^m}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\xi}d\eta, \quad \xi\in\Gamma^m$$

polisinqulyar inteqral operatoru $H_\alpha(\Gamma^m)$ fəzasında xətti məhduddur.

3.4-də isbat olunur ki, ixtiyari $\varphi\in H_\alpha(\Gamma^m)$ funsiyasi üçün $\tilde{S}_n\varphi$ funksiyası da $H_\alpha(\Gamma^m)$ fəzasına daxildir və

$$\left\|\tilde{S}_n\right\|_{H_\alpha(\Gamma^m)\to H_\alpha(\Gamma^m)} \le (2+\ln n + c_0)^m$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada c_0 - Eyler sabitidir.

Teorem 13. İxtiyari $\varphi\in H_\alpha(\Gamma^m)$ $(0<\alpha\le 1)$ funksiyası və $0<\beta\le\alpha$ şərtini ödəyən β üçün

$$\left\|\tilde{S}\varphi-\tilde{S}_n\varphi\right\|_\beta \le \frac{(c_{12}+c_{13}\ln n)^m}{n^{\alpha-\beta}}\cdot H(\varphi;\alpha)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur.

1. Алиев Р.А., Амрахова А.Ф. Об аппроксимации сингулярного интеграла с ядром Гильберта // Вестник Бакинского Университета, Физико-математических наук, №2, 2012, с. 78–85.
2. Алиев Р.А., Амрахова А.Ф. Конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта //Труды Института Математики и Механики Уро РАН, 2012, том 18, №4, с. 14–25.
3. Алиев Р.А., Амрахова А.Ф. Об аппроксимации полисингулярного интеграла с ядром Гильберта. Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула, 17–21 сентября 2012 года, с. 7–9.
4. Амрахова А.Ф. Об аппроксимациях полисингулярного интегрального оператора с ядром Коши в пространствах L_2 / Bakı Dovlət Universitetinin Hesablama riyaziyyatı kafedrasının 50 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konfransın materialları, Bakı, 15–16 noyabr 2012-ci il, səh. 106–107.
5. Amrahova A.F. On approximations of polysingular integral operators of with Cauchy and Hilber kernel. Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan,vol. XXXVIII (XLVI), 2013, pp. 9–16.
6. Amrahova A.F. Constructive method for the solution of singular integral equations with the Hilbert nucleus in Holder spaces. Transactions of NAS of Azerb., vol. XXXIII, № 4, 2013, pp.19–32.
7. Амрахова А.Ф. Об аппроксимациях полисингулярных интегральных операторов с ядром гильберта в гельдеровых пространствах / Tələbələr,magistrantlar, aspirantlar və gənc tədqiqatçıların «Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri» adlı ənənəvi elmi konfransın materialları, Bakı; 2013, səh.30–31.
8. Амрахова А.Ф. Об аппроксимации сингулярного интеграла в Гельдеровых пространствах // Вестник Бакинского Университета, Физико-математических наук, №1, 2013, с. 62–69.
9. Амрахова А.Ф. Об аппроксимациях полисингулярных интегральных операторов с ядром Коши в гельдеровых пространствах. Актуальные проблемы математики и информатики / Тезисы международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Гейдара Алиева, 2013, Baku, Azerbaijan, p. 130–131.
10. Амрахова А.Ф. Об аппроксимациях полисингулярных интегральных операторов в гельдеровых пространствах // Вестник Бакинского Университета, Физико-математических наук, №2, 2014, с. 68-75.

АЙНУР ФУЗУЛИ кызы АМРАХОВА

АППРОКСИМАЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

В работе разработан новый конструктивный метод решения полного линейного сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта и приведены аппроксимации полисингулярных интегральных операторов с ядром Коши и ядром Гильберта. В диссертации

- получены оценки погрешности аппроксимаций сингулярных интегралов с ядром Гильберта в пространстве квадратично-суммируемых функций и в гельдеровых пространствах;
- предложен и обоснован конструктивный метод решения полных линейных сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта в пространстве квадратично-суммируемых функций и в гельдеровых пространствах;
- получены оценки погрешности аппроксимаций полисингулярных интегралов с ядрами Коши и Гильберта в пространстве квадратично-суммируемых функций и в гельдеровых пространствах.

AYNUR FUZULI gizi AMRAHOVA

APPROXIMATION OF SINGULAR INTEGRAL OPERATORS AND THEIR APPLICATIONS

SUMMARY

In the thesis a new constructive method of solving the complete linear singular integral equations with Hilbert kernel is accomplished and approximation of polysingular integral operators with Cauchy and Hilbert kernel are investigated.

The following results are obtained:

- an error estimation of approximations of singular integral operators with Hilbert kernel in the square-integrable functions space and Holder spaces is obtained;
- a new constructive method of solving of complete linear singular integral equations with Hilbert kernel in the square-integrable functions space and Holder spaces is proposed;
- an error estimation of approximations of polysingular integral operators with Cauchy and Hilbert kernel in the square-integrable functions space and Holder spaces is obtained.

Sifariş № 2. Tirajı 100 nüsxə

Azərbaycan MEA Geologiya və Geofizika İnstitutu
“Nafta-Press” nəşriyyatı,
Bakı, H.Cavid pr. 119, Tel.: 539-39-72

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АЙНУР ФИЗУЛИ кызы АМРАХОВА

АППРОКСИМАЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1202.01 – Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2016