НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

БАХРУЗ КЕРИМБАЛА оглы АГАРЗАЕВ

МНОГОМЕРНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1202.01 – Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2014

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

BƏHRUZ KƏRİMBALA OĞLU AĞARZAYEV

ÇOXÖLÇÜLÜ POTENSİALLAR VƏ ONLARIN TƏTBİQLƏRİ

1202.01 – Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2014

Dissertasiya işi **Bakı Dövlət Universitetinin** «Riyazi analiz» kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbərlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Sadiq K.Abdullayev**

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Fuad A.Abdullayev**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Camal İ.Məmmədxanov**

(Bakı Dövlət Universiteti);

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Cavanşir C.Həsənov**

(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu).

Aparıcı təşkilat:

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

«Riyazi analzi» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 12 dekabr 2014-cü il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 05 noyabr 2014-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111

Dissertasiya Şurasının

elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена на кафедре «Математический анализ» **Бакинского Государственного Университета**.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук, проф. **Садиг К.Абдуллаев**

кандидат физико-математических наук, доц. **Фуад А.Абдуллаев**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф. **Джамал И.Мамедханов**

(Бакинский Государственный Университет);

кандидат физико-математических наук, доц.**Джаваншир Дж.Гасанов**

(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана).

Ведущая организация:

Азербайджанский Государственный Педагогический Университет кафедра «Математический анализ».

Защита диссертации состоится 12 декабря 2014 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 05 ноября 2014 года.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета

Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Идеи и методы теории многомерных потенциалов являющихся мощным аппаратом гармонического анализа в настоящее время широко применяются в математической физике, в теории функций и функциональном анализе, в теории вероятностей и в многих других областях математики, физики и механики.

Свойства потенциалов Рисса исследованы в работах М. Рисса, G.Hardy, J.Litllwood, С.Л.Соболева, И.М. Стейна, Г.Вейса, О.В.Бесова, П.И.Лизоркина, С.Г. Самко и др., а также, в работах азербайджанских математиков А.Д.Гаджиева, С.К. Абдуллаева, В.С.Гулиева, Р.М.Рзаева и др .

Изложение ряда свойств потенциалов Рисса содержатся в монографиях И.М. Стейна, С.Л.Соболева.

В настоящее время широко изучаются свертки, связанные с некоторым специальным сдвигом (так называемым, обобщенным сдвигом), приспособленным к преобразованию Фурье-Бесселя, ассоциированного дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя:

$$\Delta_{B_{m+k,k}}(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{i=m+1}^{m+k}B_{x_i},\text{где } B_{x_i}=\frac{d^2}{dx_i^{\,2}}+\frac{2\nu_i}{x_i}\cdot\frac{d}{dx_i}\qquad (x_i>0,\nu_i>0)$$

сингулярный дифференциальный оператор Бесселя.

Изучение уравнений в частных производных, содержащих дифференциальный оператор Бесселя, с использованием многомерного преобразования Фурье-Бесселя было начато в работах И.А.Киприянова[1].

И. А. Киприяновым и Л. А. Ивановым было доказано, что решением уравнения $\Delta_{B_{m+k,k}}(x)=f(x)$ является интегральный операторов типа цилиндрического потенциала, который называется обобщенным потенциалом Рисса и содержит оператор преобразования $T^y f(x)$, в одномерном случае введенный Б.М. Левитаном и называемый оператором обобщенного или Бесселева

[1]И.А.Киприянова. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, Физматлит, 1997, 208с.

сдвига (коротко ООС). Но фундаментальное решение простейшего уравнения $\Delta_B u = f$ в двумерном случае (т.е. когда $m=1,\ k=1$) впервые было построено А. Вайнштейном.

И.А.Киприяновым и М.И.Ключанцевым, задача получения априорных оценок по существу, сведена к оценкам этих обобщенных потенциалов Рисса и их соответствующих производных. Так и возникли сингулярные интегралы нового типа. Ядра этих операторов имеют особенность на гиперплоскости, а сами они порождены оператором обобщенного сдвига. Этим и совершенно естественно объясняется потребность исследования сингулярных операторов и потенциалов, порожденных ООС.

Первые работы в этом направлении принадлежат И.А.Киприянову, М.И.Ключанцеву и их дальнейшее развитие относятся к работам А.Д. Гаджиева[2], С.К.Абдуллаева, В.С.Гулиева и их ученикам.

В диссертационной работе рассматривается вопрос об ограниченности сингулярных операторов с обобщенным сдвигом в пространствах Гельдера с весом. А также рассматривается вопрос об установлении неравенств типа неравенства Харди - Литллвуда - Соболева и неравенства Соболева-Ильина и неравенства в терминах средней осцилляции функций, для обычных и обобщенных потенциалов Рисса - $I_B^{\omega}(f)(x)$ с почти монотонным ядром.

Цель работы. Диссертационная работа посвящена изучению структурных свойств, как сингулярных интегральных операторов, так и обобщенных потенциалов Рисса с почти монотонным ядром, с обобщенным сдвигом.

Общая методика исследований. В работе применяются методы теории функций, теории интегральных операторов, теории функциональных пространств и гармонического анализа.

---

[2] Гаджиев А.Д., Алиев И.А. Весовые оценки многомерных сингулярных интегралов, порожденных оператором обобщенного сдвига//Мат.сборник, 1992, т.183, №9, с.45-66.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- найдены достаточно широкие условия на параметры γ, α, β весовых гельдеровых пространств $-H^{\gamma}_{\alpha,\beta}(R^{+}_{m})$, обеспечивающие инвариантность этих пространств относительно многомерного сингулярного оператора с обобщенным сдвигом.

- для обобщенных потенциалов Рисса с почти монотонным ядром, как с обычным сдвигом, так и с обобщенным сдвигом, устанавливаются сильные и слабые неравенства типа неравенств Харди – Литтлвуда – Соболева. Доказано, что потенциалы Рисса с нестепенными ядрами действуют из пространства $L_{p,\gamma}\left(R^{+}_{m+k}\right)-$ функций, интегрируемых в р-ой степени с весом $y_{m+1}^{\gamma_{m+1}} \cdots y_{m+k}^{\gamma_{m+k}}$, в некоторое пространство Орлича $-L^{\Phi}_{p,\gamma}\left(R^{+}_{m+k}\right)$ и эти теоремы не улучшаемы.

- для обобщенных потенциалов Рисса с почти монотонным ядром, определенного класса, по произвольному набору переменных с обычным и обобщенным сдвигом, доказывается одно свойство, выражаемое в терминах средней осцилляции функций.

- для обобщенных потенциалов Рисса с почти монотонным ядром, как обычным сдвигом по всем переменным, так и по произвольному набору переменных с обычным и обобщенным сдвигом, устанавливаются сильные и слабые неравенства типа неравенств Соболева – Ильина (о следах функций представимых потенциалом Рисса).

- для потенциалов Рисса с обобщенным сдвигом, в терминах интегральных характеристик Ω, Ω^{*}, локально интегрируемых функций, устанавливаются некоторые оценки, на базе которых доказывается аналоги второй теоремы Соболева в терминах весовых $L_{p,\gamma}$ пространств.

Научная и практическая ценность работы: Результаты полученные в работе носят теоретический характер. Они могут быть использованы в различных задачах Гармонического анализа Фурье и Фурье-Бесселя.

Аппробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры «Математический анализ» БГУ (рук. проф. С.К.Абдуллаев), на семинарах отдела «Математический анализ» ИММ НАН Азербайджана (рук. член- корр. НАНА, проф. В.С.Гулиев), а также на конференции по современным проблемам математики, посвященной 80-летнему юбилею Президента Азербайджанской Республики Г.А.Алиева (Баку 2003), на международной конференции по математике и механике, посвященной 45-летию ИММ НАНА (Баку,2004), на международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летнему юбилею кафедры «Вычислительная математики» БГУ (Баку, 2012), на международной конференции посвященной 90-летнему юбилею член-корр. РАН Л.Д.Кудрявцева (Москва,2013).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащей 80 наименований. Объем диссертации 122 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Перейдем к подробному изложению основных результатов, которые получены в настоящей диссертации. Отметим, что принятая в тексте нумерация лемм, теорем и т.д. соответствует нумерации в диссертации.

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации. Здесь же даются некоторые вспомогательные факты и понятия, связанные с тематикой диссертации.

Глава I посвящена установлению весовых гельдеровых оценок для сингулярных операторов с обобщенным сдвигом, ассоциированным дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя. Отметим, что в случае операторов Кальдерона-Зигмунда весовые гельдеровые оценки впервые получены в работах С.К.Абдуллаева[3], как по всему пространству так же и по ограниченной области. Здесь мы рассматриваем случай, когда вес вырождается на границе полупространства - R_m^+. В 1.1 приводятся некоторые определения, обозначения и предварительные сведения. В частности даны понятие многомерного сингулярного оператора, порожденного – ООС и потенциала Рисса-Бесселя, порожденного – ООС.

В 1.2. вводятся весовые гельдеровые пространства - $H_{\alpha,\beta}^{\gamma}(R_m^+)$.

Пусть α> 0, β- действительное число, 0 < γ < 1,0 < α – γ < 1, 0 < β + γ<m и $\rho(x) = x_m^{\alpha}(1+|x|)^{\beta-\alpha}, x \in R_m^+$. По определению $u \in H_{\alpha,\beta}^{\gamma}(R_m^+)$, если $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)\rho(x) = 0, \quad \lim\limits_{x_m\to 0} u(x)\rho(x) = 0$ и конечна норма

$$\|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}} = \sup_{x,y\in R_m^+}(|u(x)\rho(x) - u(y)\rho(y)|d^{-\gamma}(x,y)),$$

$$d(x,y) = |x-y|(1+|x|)(1+|y|)^{-1}.$$

В 1.1.3 решается вопрос о существовании сингулярного интеграла

$$Au(x) = v.p.\int_{R_m^+} f(\theta)\,|\,s\,|^{-m-2\nu}\ [T^s u(x)] s_m^{2\nu} ds, \qquad (1.1.20)$$

в каждой точке $x \in R_m^+$, когда $u \in H_{\alpha\beta}^{\gamma}$.

Пусть $x \in R_m^+$. Обозначим $\widetilde{x} = (x,0) \in R_{m+1}$, и

---

[3] Абдуллаев С.К. Многомерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Гельдера с весом , вырождающимся на некомпактном множестве//ДАН СССР, 1989, т.308, №6, с.1289-1292.

$$\omega_x = \left\{ s \in R_m^+ : | s - x | < \frac{x_m}{2} \right\}, \quad \omega_x^{'} = \left\{ y \in R_{m+1} : | \widetilde{x} - y | < \frac{x_m}{2} \right\},,$$

$$S_m^+ = \{ x \in R_m^+ ; |x| = 1 \}$$

Теорема 1.3.1. Пусть $u \in H_{\alpha\beta}^{\gamma}$, а функция $f(\theta)$, $\theta \in S_m^+$ ограничена и

$$\int_{S_m^+} f(\theta) \theta_m^{2\nu} ds(\theta) = 0, \tag{1.1.19}$$

то в каждой точке $x \in R_m^+$ существует сингулярный интеграл $Au(x)$ определённый формулой (1.1.20) и имеет место равенство

$$Au(x) = v.p. \int_{R_m^+} f(\theta) \, | s |^{-m-2\nu} \; [T^s u(x)] s_m^{2\nu} ds =$$

$$= \frac{1}{2} C_\upsilon \int_{\omega_x^{'}} f(\widetilde{\theta}) \, | \widetilde{x} - y |^{-m-2\nu} \; (u(y^{'}; \sqrt{y_{m+1}^2 + y_m^2}) - u(x)) \, | y_{m+1} |^{2\nu - 1} \; dy +$$

$$+ \frac{1}{2} C_\upsilon \int_{R_{m+1} \setminus \omega_x^{'}} f(\widetilde{\theta}) \, | \widetilde{x} - y |^{-m-2\nu} \; u(y^{'}; \sqrt{y_{m+1}^2 + y_m^2}) \, | y_{m+1} |^{2\nu - 1} \; dy,$$

В §1.4. изучается вопрос ограниченности сингулярного интегрального оператора A в пространствах $H_{\alpha\beta}^{\gamma}$.

Вводится функция

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\theta_1, \theta_2 \in S_m^+, |\theta_1 - \theta_2| \le \delta} |f(\theta_1) - f(\theta_2)|, \; \delta > 0.$$

Теорема 1.1.5. Пусть $f(\theta)$ удовлетворяет условию (1.1.19)

Если $0 < \gamma < 1$, $0 < \alpha - \gamma < 1$, $\beta + \gamma < m$, и

1. $\omega_f\left(\dfrac{\delta}{\xi}\right)\le C\left(\dfrac{\delta}{\xi}\right)^{\gamma}$, при $0<\delta\le\xi$,

2. $\int_{\delta}^{\xi}\omega_f\left(\dfrac{\delta}{\tau}\right)\tau^{\gamma-1}d\tau\le C\delta^{\gamma}$ при $0<\delta\le\xi$,

то СИ оператор A ограничен в $H^{\gamma}_{\alpha\beta}$.

В главе II для обобщенных потенциалов Рисса с обобщенным сдвигом и почти монотонным ядром устанавливаются неравенства типа Харди – Литтлвуда – Соболева, неравенства типа Соболева-Ильина, и некоторые оценки в терминах средней осциляции функций. Здесь рассматривается случай, когда обобщенный сдвиг берется по произвольному набору переменных.

Пусть $m\ge 0$, $k\ge 1$-целые числа,

$$R^{+}_{m+k,k}=\{(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+k})\in R^{m+k}: x_{m+1}>0,\ldots,x_{m+k}>0\}$$

$$T^{S}(u(x))=c_v\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}u\left(x'-s',\sqrt{x_{m+1}^2-2x_{m+k}S_{m+k}\cos\alpha_1+S_{m+1}^2},\ldots,\sqrt{x_{m+k}^2-2x_{m+k}S_{m+k}\cos\alpha_k+S_{m+k}^2}\right)\times$$

$\times\sin^{v_{m+1}-1}\alpha_1\cdots\sin^{v_{m+k}-1}\alpha_k d\alpha_1\cdots d\alpha_k$ -оператор обобщенного сдвига, порожденный оператором Лапласа - Бесселя [51]:

$$\Delta_{B_{m+k,k}}(x)=\sum_{j=1}^{m}\frac{d^2}{dx_j^2}+\sum_{j=m+1}^{m+k}\left(\frac{d^2}{dx_j^2}+\frac{\gamma_j}{x_j}\frac{d}{dx_j}\right),$$

$$x\in R^{+}_{m+k,k},\gamma_{m+1}>0,\ldots,\gamma_{m+k}>0,$$

$$x=(x',x_{m+1},\ldots,x_{m+k})s=(s',s_{m+1},\ldots,s_{m+k})\quad x',s'\in R^{m},$$

$$|\gamma_{k,n}|=\gamma_{m+1}+\ldots+\gamma_{m+k},$$

C_v -нормирующий множитель.

Для полноты рассуждений, при $k=0$ считаем, что $R^+_{m+k,k} \equiv R^m$ и T^y -обычный сдвиг: $T^y f(x) = f(x-y)$.

Определение. Положительная функция $g(t)$ почти убывает (почти возрастает) на множестве $X \subset (0;+\infty)$, если существует постоянная $c>0$ такая, что $g(t_2) \le cg(t_1)$ ($g(t_1) \le cg(t_2)$) при $t_1 < t_2$ для любых $t_1, t_2 \in X$.

Для $p \ge 1$ *и* $\alpha > 0$, $\Omega_{p,\alpha}$ ($\widetilde{\Omega}_{p,\alpha}$)-совокупность функций $\omega : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ таких, что $\omega(t)$ возрастает (почти возрастает), $t^{-\frac{\alpha}{p}+\varepsilon}\omega(t)$ убывает (почти убывает) для некоторого числа $\varepsilon > 0$ и сходится интеграл $\int_0^\infty \omega(t) t^{-1} dt$.

Очевидно, что $\Omega_{p,\alpha} \subset \widetilde{\Omega}_{p,\alpha}$ и если $\omega \in \widetilde{\Omega}_{p,\alpha}$, то $\omega(2t) \le c\omega(t)$, $t>0$. Кроме того, $\widetilde{\Omega}_{p,\alpha} \subset \widetilde{\Omega}_{1,\alpha}$ для $\forall p \ge 1$, $\forall \alpha > 0$.

Всюду в дальнейшем полагаем $\left(R^m\right)_\upsilon = R^m$, если $k=0$ (тогда и $|\gamma_{k,n}| = 0)$ и $\left(R^m\right)_\upsilon = R^k_{m+k,k}$, если $k \ge 1$.

Пусть $\omega \in \widetilde{\Omega}_{p,m+k+2|\nu|}$, $k \ge 0$. Берем обобщенный потенциал Рисса

$$\left(I_B^\omega f\right)(x) = \int_{R^n} f(y) T^y \left(\frac{\omega(|x|)}{|x|^{m+k+|\nu|}} \right) d\mu(y),$$

$$x \in \left(R^m\right)_\upsilon,\ d\mu(y) = y_{m+1}^{\nu_{m+1}} \ldots y_{m+k}^{\nu_{m+k}} dy,\ dy_1 \ldots dy_{m+k}$$

При $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$ и $k=0$ I_B^ω -обычный потенциал Рисса.

Отметим, что I_B^{ω} в случае $\omega(t)=t^{\alpha}$, $\alpha>0$ и $k=1$, рассмотрено Алиевым И.А., Гаджиевым А.Д.[4] Им получены оценки типа Харди - Литтлвуда - Соболева в шкале $L_{p,v}$ пространств. В работе E.Nakai и H.Sumitomo доказано, что потенциалы с нестепенными ядрами действуют из L_p пространств в некоторые пространства Орлича и эти теоремы не улучшаемы.

Через $L_v^{\Phi}\left((R^m)_{\upsilon}\right)$, обозначим пространство Орлича, определённое $N-$функцией Φ:

$$L_v^{\Phi}\left((R^m)_{\upsilon}\right)=\left\{f-изм.: \int\limits_{(R^m)_{\upsilon}} \Phi\left(\varepsilon\left|f(x)\right|\right)d\mu(y)<\infty,\ \ \varepsilon>0\right\}.$$

$$\|f\|_{L_v^{\Phi}\left((R^m)_{\upsilon}\right)}=\inf\left\{\lambda>0: \int\limits_{(R^m)_{\upsilon}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)d\mu(y)\le 1\right\}.$$

В случае $\varPhi(\mathrm{t})=|t|^p$, $t>0$ $и$ $1\le p<+\infty$, пространство $L_v^{\Phi}\left((R^m)_{\upsilon}\right)$ обозначается через $L_{p,v}\left((R^m)_{\upsilon}\right)-$пространство функций, интегрируемых в р-ой степени с весом $y_{m+1}^{v_{m+1}}\ldots y_{m+k}^{v_{m+k}}$.

В §2.1 неравенства Харди-Литлвуда–Соболева распространяются на случай потенциалов Рисса с обобщенным сдвигом и почти монотонным ядром.

Если $A\subset\left(R^m\right)_{\upsilon}$, то по определению $|A|=\int_A d\mu(y)$.

Теорема 2.1.1. Пусть $1\le p<\infty$ и $\omega\in\widetilde{\Omega}_{p,m+k+|\gamma_{k,n}|}$, $k\ge 0$. Тогда существует $N-$функция Φ такая, что

---

[4] Гаджиев А.Д., И.А.Алиев. О классах операторов типа потенциала, порожденного обобщенным сдвигом./В сб. "Доклады расширенных заседаний семинара Института прикладной математ. им. И.Н.Векуа" Тбилиси, 1990, т.5, №2, с.30-32.

$$C^{-1}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right) \le \frac{1}{r^{\frac{a}{p}}}\int_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt \le C\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right),\ r>0,$$

где $a = m + k + \left|\gamma_{k,n}\right|$, постоянная, не зависящая от r, и

$a)$ если $p > 1$, то существует постоянная $C > 0$ такое, что

$$\left\|I_B^{\omega} f\right\|_{L_\nu^\Phi\left(\left(R^m\right)_\upsilon\right)} \le C\|f\|_{L_{p,\gamma}},\ f \in L_{p,\nu}\left(\left(R^m\right)_\upsilon\right);$$

$б)$ существует постоянная $C > 0$ такое, что для любой функции $f \in L_{1,\nu}\left((R^m)_\upsilon\right)$ и для любого $\beta > 0$

$$\int\limits_{\left\{x:\left|I_B^{\omega} f(x)\right|>2\beta\right\}} d\mu(x) \le \left\{\Phi\left[\left(\frac{c}{\beta}\|f\|_{L_1,\gamma}\right)^{-1}\right]\right\}^{-1}.$$

В §2.2 для обобщенных потенциалов Рисса, с нестепенными ядрами, доказывается одно неравенство в терминах средней осцилляции функций. Рассматривается случай, когда оператор обобщенного сдвига берется по произвольному набору переменных.

Пусть $\omega(t)$ положительная в интервале $(0,+\infty)$ функция, $K(t) = \omega(t)t^{-(m+k+|\nu|)}$.

$$\left(I_B^{\omega} f\right)(x) = \int\limits_{R^+_{m+k,k}} f(x)T^y K(|x|)d\mu(y), x \in R^+_{m+k,k}, d\mu(y) = y_{m+1}^{\nu_{m+1}} \dots y_{m+k}^{\nu_{m+k}}dy$$

обобщенный потенциал Рисса и

$$\left(\widetilde{I}^{\,\omega} f\right)(x) = \int\limits_{R^+_{m+k,k}} \left(T^y K(|x|) - K(y)X_{B^*(0,1)}(y)\ \right)f(y)d\mu(y),$$

$$B(0,r) = \left\{y \in R^+_{m+k,k} : |y| < r\right\},\quad B^*(0,1) = R^+_{m+k,k} \setminus B(0,1),$$

$X_E(x)$- характеристическая функция множества $E \subset R^+_{m+k,k}$,

BMO_γ - пространство локально интегрируемых с весом $x_{m+1}^{\gamma_1}...x_{m+k}^{\gamma_k}$ на $R_{m+k,k}^{+}$ функций

$$\|f(\cdot)\|_{BMO_\gamma}=\sup_{x,r}|B(0,r)|_\nu^{-1}\int_{B(0,r)}\left|T^y f(x)-f_{B(x,r)}\right|d\mu(y)<\infty,$$

$$f_{B(x,r)}=|B(0,r)|_\nu^{-1}\int_{B(0,r)}T^y f(x)d\mu(y),|E|_\nu=\int_E d\mu(y),E\subset R_{m+k,k}^{+}.$$

Обозначаем $\omega_{p,\nu}(t)=\omega(t)t^{-\frac{m+k+|\nu|}{p}}$, $t>0.$

Основной результат §2.2 состоит в следующем

Теорема 2.2.1. Пусть ω и $p>1$ такие, что

$$\left|T^y\big(K(|x|)\big)-K(y)\right|\le c\frac{|x|}{|y|}K(|y|),\ \text{при}\quad |x|\le\frac{1}{2}|y|, \tag{2.2.1}$$

$\omega_{p,\nu}(t)t^{-\varepsilon}$ почти убывает, $\omega_{p,\nu}(t)t^{\varepsilon}$ почти возрастает для любого $\varepsilon>0$ и $\omega_{p,\nu}(t)\le const$.

Тогда

а) существует $c>0$ такое, что для любых $f\in L_{p,\nu}(R_{m+k}^k)$

$$\left\|\widetilde{I}^{\omega}(f)\right\|_{BMO_\nu}\le c\|f\|_{L_p}, \tag{2.2.3}$$

б) если $I^{\omega}(f)$ существует для почти всех $x\in R_{m+k,k}^{+}$, то (2.2.3) имеет место и для интеграла $I^{\omega}(f)$.

В §2.3. доказываются теоремы типа теорем Соболева для обобщенных потенциалов Рисса. Вторая теорема Соболева очень богата с применениями в области краевых задач и в вопросах о следов функций из различных функциональных пространств. Отметим, что в случае, когда рассматриваются потенциалы с обобщенным сдвигом по произвольному набору переменных, теоремы типа II-ой теоремы Соболева для наглядности необходимо рассматривать всевозможные частные случаи и затем их объединить в виде общей теоремы. Так как мы рассматриваем общий случай (т.е. с обычным и обобщенным сдвигом и в комбинации по разным наборам координат) в отдельности рассматриваются случаи; а) с обычным сдвигом по всем переменным, б) случаи с обобщенными сдвигами.

В §2.3.1 рассматривается случай а), точнее общий случай, когда сдвиг по всем переменным обычный (т.е. случай $k=0$).

Пусть $n \geq 2$ и R^n- эвклидово пространство. Для почти возрастающей функции $\omega:(0,\infty)\to(0,\infty)$ рассмотрим обобщенный потенциал Рисса

$$\left(I_{\omega,n} f\right)(x) = \int\limits_{R^n} \frac{\omega\left(\left|x - y\right|\right)}{\left|x - y\right|^n} f(y)dy, \qquad x \in R^n.$$

Пусть $S \in \{1,2,...,n-1\}$, R^n разбито в прямую сумму пространств R^S с координатами $x^{(1)} = \left(x_{j_1},...,x_{j_s}\right)$ и R^{n-s} с координатами $x^{(2)} = \left(x_{j_{s+1}},...,x_{j_n}\right)$ $x = \left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)$, $1 < p < \infty$ и $p' = p/(p-1)$.

Обозначим через $\Omega_{p,n,s}$ –совокупность функций $\omega:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ таких, что $\omega(t)t^{-\frac{n-s}{p}}$ почти возрастает, $\omega(t)t^{-\left(\frac{n}{p}-\varepsilon\right)}$ почти убывает при некотором $\varepsilon > 0$ и сходится интеграл $\int\limits_0^1 \omega(t)t^{-\left(1+\frac{n-s}{p}\right)}dt$.

Основной результат пункта 2.3.1 состоит в следующем

Теорема 2.3.1. Пусть $1 \le p < \infty$, $S \in \{1,..., n-1\}$ и $\omega \in \Omega_{p,n,s}$. Тогда существует N – функция Φ, для которой

$$C^{-1}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^s}\right) \le \frac{1}{r^{\frac{s}{p}}} \int_0^r \frac{\omega(t)}{t^{1+\frac{n-s}{p}}}\, dt \le C\,\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^s}\right), 0 < r < \infty, \qquad (2.3.4)$$

и

а) если $p > 1$, то существует $C > 0$ такое, что для любой функции

$f \in L_p(R^n)$ и $x^{(2)} \in R^{n-s}$

$$\left\| \left(I_{\omega,n} f\right)\left(\,\cdot\,, x^{(2)}\right) \left| L^{\Phi}\left(R^s\right) \right| \right\| \le C \left\| f \left| L^{\Phi}\left(R^n\right) \right| \right\|, \qquad (2.3.5)$$

б) существует $C > 0$ такое, что для любой функции $f \in L_1(R^n)$, для любого $\beta > 0$ и $x^{(2)} \in R^{n-s}$

$$\int_{\left\{x \in R^n : \left|(I_{\omega,n} f)\left(\bullet, x^{(2)}\right)\right| > 2\beta\right\}} d\left(x^{(1)}\right) \le \left\{ \Phi\left[\left(\frac{c}{\beta} \|f\|_{L_1\left(R^n\right)} \right)^{-1} \right] \right\}^{-1} \qquad (2.3.5)^*$$

где A не зависит от f и $x^{(2)} \in R^{n-s}$.

4. Сравнения. Пусть $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha < n$ и $\lambda = n - \alpha$. Следуя [53] обозначим $S_{пор} = \max\{0, \mathrm{n} + 1 + [\mathrm{p}(\lambda - \mathrm{n})]\}$, где $[\mathrm{p}(\lambda - \mathrm{n})]$- целая часть $\mathrm{p}(\lambda - \mathrm{n})$. Простыми вычислениями показывается, что $\omega \in \Omega_{p,n,s}$ тогда и только тогда, когда

$$n - \lambda > \frac{n-s}{p} \quad \text{и} \quad n > \lambda > n - \frac{n}{p}$$

или же

$$s \geq S_{пор} \quad \text{и} \quad 0 < \alpha < \frac{n}{p}. \tag{2.3.9}$$

Кроме того,

$$\frac{1}{r^{s/p}} \int_0^r \frac{\omega(t)}{t^{1+\frac{n-s}{p}}} dt = Cr^{-\left(\lambda - \frac{n}{p'}\right)}.$$

Поэтому N - функция Φ в теореме 2.3.4 удовлетворяет условию

$$\Phi(t) \underset{\cap}{\cup} t^q, \quad \text{где} \quad \frac{s}{q} = \frac{n}{p} - \alpha. \tag{2.3.10}$$

Условия (2.3.9), (2.3.10) показывают, что имеет место вторая теорема Соболева о потенциалах. Тем самым доказывается, что теорема 2.3.1 является развитием этой теоремы Соболева о потенциалах в случае обобщенных потенциалов Рисса.

В §2.3.2. доказываются теоремы типа теорем Соболева для обобщенных потенциалов Рисса с обобщенным сдвигом и почти монотонным ядром. В этом случае подход к решению задач существенно отличается от предыдущего случая.

Пусть $k \geq 1$, $m + k \geq 2$. Положим $m + k = n$. В случае $S \in \{1,...n-1\}$ $R^+_{n,k}$ разбиваем на прямую сумму пространств R^+_{s,k_s} (точек ${}_s x = (x_{n_1}, \ldots, x_{n_s})$ с координатами $x_{n_1}, \ldots, x_{n_s}$, где $1 \leq n_1 < \cdots < n_s \leq n$, и эти координаты фиксируются для дальнейших рассуждений) и $R^+_{n-s,(k-k_s)}$ (с координатами ${}_s x'$), так что $x = \uparrow ({}_s x, {}_s x') \in R^+_{n,k}$ (по поводу обозначений см. в [53]).

Пусть

$$m_s = rang\left(\{n_1,\ldots,n_s\} \cap \{1,\ldots,m\}\right),$$

$$k_s = rang\left(\{n_1,\ldots,n_s\} \cap \{m+1,\ldots,m+k\}\right).$$

Тогда m_s, k_s-целые числа, такие что $0 \le m_s \le m$, $0 \le k_s \le k$, $m_s + k_s = s$.

Если $m_s > 0$ $(k_s > 0)$, то полагаем

$$\{n_1,\ldots,n_s\} \cap \{1,\ldots,m\} = \{j_1,\ldots,j_{m_s}\}, \quad j_1 < \ldots < j_{m_s}$$

$(\{n_1,\ldots,n_s\} \cap \{m+1,\ldots,m+k\} = \{m+i_1,\ldots,m+i_{k_s}\}$, $i_1 < \cdots < i_{k_s}$).

Тогда, очевидно, что ${}_s y = (y_{j_1},\ldots y_{j_{m_s}}, y_{m+i_1},\ldots y_{m+i_{k_s}})$ и $d_s y = dy_{j_1}\ldots dy_{j_{m_s}} dy_{m+i_1}\ldots dy_{m+i_{k_s}}$.

Когда $k_s > 0$, положим

$$\gamma_{k_s,s} = \left(\gamma_{i_1},\ldots,\gamma_{i_{k_s}}\right), \ |\gamma_{k_s,s}| = \gamma_{i_1} + \cdots + \gamma_{i_{k_s}},$$

$$y^{\gamma_{k_s,s}} = y_{m+i_1}^{\gamma_{i_1}} \cdots y_{m+i_{k_s}}^{\gamma_{i_{k_s}}}, \ d\mu_{k_s,s}(y) = y^{k_s,s} d_s y$$

В этих обозначениях также полагаем $m_s' = m - m_s$, $k_s' = k - k_s$, $R^+_{s,k_s} \equiv R^+_{m_s+k_s,k_s}$, $R^+_{n-s,k-k_s} \equiv R^+_{m_s'+k_s',k_s}$. Далее $\gamma_{k_s',n-s}$ обозначается и выбирается из равенства $\gamma_{k,n} = (\gamma_{k_s,s}, \gamma_{k_s',n-s})$, а $y^{\gamma_{k_s',n-s}}$ и $d\mu_{k_s',n-s}(y)$ из равенств $y^{\gamma_{k,n}} = y_{m+1}^{\nu_{m+1}} \cdots y_{m+k}^{\nu_{m+k}} = y^{\gamma_{k_s,s}} . y^{\gamma_{k_s',n-s}}$ и $d\mu(y) = d\mu_{k_s,s}(y)$ $d\mu_{k_s',n-s}(y)$ соответственно.

При этом считаем, что если $k_s = 0$, то множество $\{m+i_1,\dots,m+i_{k_s}\}$ пустое, $m_s = 0$ и $\gamma_{k_s,s} = (0,\dots,0)$, $y^{\gamma_{k_s,s}} = 1$, ${}_s y = (x_1,\dots,x_s)$, $d\mu_{k_s,s}(y) = d_s y = dy_1 \cdots dy_s$.

Также считаем, что, если $m_s = 0$, то множество $\left\{j_1,\dots,j_{m_s}\right\}$ пустое, $k_s = s$,

$$ {}_s y = (y_{j_1},\dots y_{j_{m_s}}, y_{m+i_1},\dots y_{m+i_{k_s}}), $$

$$ d\mu_{k_s,s}(y) = y_{m+i_1}^{\gamma_{i_1}} \dots y_{m+i_{k_s}}^{\gamma_{i_{k_s}}} dy_{m+i_1} \dots dy_{m+i_{k_s}} = y^{\gamma_{s,s}} d_s y. $$

Всюду в дальнейшем $\omega_s(t) = \omega(t) t^{-\frac{n-s+\left|\gamma_{k_s',n-s}\right|}{p}}$.

Доказываются

Теорема 2.3.2.. Пусть $s \in \{1,\dots,n-1\}$, $1 \le p < \infty$, $k_s = 0$ и $\omega_s \in \widetilde{\Omega}_{p,s}$.

Тогда существует $N-$функция Φ такая, что

$$ C^{-1}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^s}\right) \le \frac{1}{r^{\frac{s}{p}}} \int_0^r \frac{\omega_s(t)}{t} dt \le C\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^s}\right), \; r > 0, $$

где $C-$ постоянная, не зависящая от r, и

$a)$ если $p > 1$, то существует $C > 0$ такое, что для любой функции $f \in L_{p,\gamma_{k,n}}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ и ${}_s x' \in R^+_{n-s,k}$

$$ \left\| \left(I_B^\omega f\right)(\bullet, {}_s x')\right\|_{L^\Phi\left(R^s\right)} \le C \|f\|_{L_{p,\gamma_{k,n}}\left(R^+_{m+k,k}\right)}, $$

$б)$ существует $C > 0$ такое, что для любой функции $f \in L_{1,\gamma_{k,n}}\left(R^+_{n,k}\right)$, для любого $\beta > 0$ и ${}_s x' \in R^+_{n-s,k}$

$$\int\limits_{\left\{x:\left|\left(I^{\omega}_B f\right)\left(\bullet,_s x'\right)\right|>2\beta\right\}} d\mu(x) \le \left\{\Phi\left[\left(\frac{c}{\beta}\|f\|_{L_{1,\gamma_{k,n}}\left(R^+_{n,k}\right)}\right)^{-1}\right]\right\}^{-1}.$$

Теорема 2.3.3. Пусть $s \in \{1,\dots,n-1\}$, $1 \le p < \infty$, $k_s = k$ и $\omega_s \in \widetilde{\Omega}_{p,s+|\gamma_{k,s}|}$.

Тогда существует $N-$функция Φ такая, что

$$C^{-1}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right) \le \frac{1}{r^{\frac{a}{p}}}\int\limits_0^r \frac{\omega_s(t)}{t}dt \le C\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right), \; r > 0,$$

где $a = s + \left|\gamma_{k,s}\right|$, $C-$ постоянная, не зависящая от r, и

$а)$ если $p > 1$, то существует $C > 0$ такое, что для любой функции $f \in L_{p,\gamma_{k,n}}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ и ${}_s x' \in R^{n-s}$

$$\left\|\left(I^{\omega}_B f\right)\left(\bullet,_s x'\right)\right\|_{L^{\Phi}_{\gamma_{k_s,s}}\left(R^+_{s,k_s}\right)} \le C\|f\|_{L_{p,\gamma_{k,n}}\left(R^+_{m+k,k}\right)},$$

$б)$ существует $C > 0$ такое, что для любой функции $f \in L_{1,\gamma_{k,n}}\left(R^+_{n,k}\right)$, для любого $\beta > 0$ и ${}_s x' \in R^{n-s}$

$$\int\limits_{\left\{x:\left|\left(I^{\omega}_B f\right)\left(\bullet,_s x'\right)\right|>2\beta\right\}} d\mu(x) \le \left\{\Phi\left[\left(\frac{c}{\beta}\|f\|_{L_{1,\gamma_{k,n}}\left(R^+_{n,k}\right)}\right)^{-1}\right]\right\}^{-1}.$$

Основной результат 2.3. состоит в следующем

Теорема 2.3.4. Пусть $s \in \{1,...,n-1\}$, $0 \le m_s \le m$, $0 \le k_S \le k$, и $k_S + m_s = s$, $1 \le \mathrm{p} < \infty$ $\omega_s \in \widetilde{\Omega}_p, s + |\gamma_{k\,s,s}|$. Тогда существует $N-$функция Φ такая, что

$$C^{-1}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right) \le \frac{1}{r^{\frac{a}{p}}}\int_0^r \frac{\omega_s(t)}{t}dt \le C\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right), \; r>0, \; 0 \le m_s \le m$$

где $a = s + |\gamma_{k_s,s}|$, $C-$ постоянная, независящая от r, и

a) если $p > 1$, то существует $C > 0$ такое, что для любой функции $f \in L_{p,\gamma_{k,n}}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ и ${}_s x' \in R^+_{k'_s n-s}$

$$\left\|\left(I_B^{\omega} f\right)(\bullet,_s x')\right\|_{L^{\Phi}_{\gamma\, k_s,s}\left(R^+_{s,k_s}\right)} \le C\|f\|_{L_{p,\gamma k,n}\left(R^+_{m+k,k}\right)},$$

$б$) существует $C > 0$ такое, что для любой функции $f \in L_{1,\gamma_{k,n}}\left(R^+_{n,k}\right)$, для любого $\beta > 0$ и ${}_s x' \in R^+_{k'_s n-s}$

$$\int_{\left\{x:\left|\left(I_B^{\omega} f\right)(\bullet,_s x')\right|>2\beta\right\}} d\mu(x) \le \left\{\Phi\left[\left(\frac{c}{\beta}\|f\|_{L_{1,\gamma k,n}\left(R^+_{n,k}\right)}\right)^{-1}\right]\right\}^{-1}.$$

В главе III в качестве приложения, на базе полученных в 2.3. результатов устанавливаются весовые аналоги теоремы Соболева.

Пусть $S \in \{1,...,m+k-1\}$ зафиксировано и $l \in N_s = \{j_1, \cdots, j_{m_s}$ $m+i_1, \cdots, m+i_{k_s}\}$.

Совокупность всех функций, измеримых на R^+_{s,k_s} и суммируемых в $p-$й степени с весом $y^{\gamma_{i_1}}_{m+i_1} \cdots y^{\gamma_{i_{k_s}}}_{m+i_{k_s}}$ на множестве

$\left\{x\in R^{+}_{s,k_s}:|x_l|\geq\xi\right\}$ $\left(\left\{x\in R^{+}_{s,k_s}:|x_l|\leq\xi\right\}\right)$ при любом $\xi>0$, обозначим через $A^{(s)}{}_{p,v}(x_l)$ $\left(A^{(s)*}_{p,v}(x_l)\right)$.

Для функций $u\in A^{(s)}{}_{p,v}(x_l)$ и $\upsilon\in A^{(s)*}_{p,v}(x_l)$ введем характеристики

$$\Omega^{(s)}{}_{p,l}(u,\xi)=\left\{\int\limits_{\left\{R^{+}_{s,k_s}:|x_l|\geq\xi\right\}}|u(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\Omega^{(s)*}_{p,l}(\upsilon,\xi)=\left\{\int\limits_{\left\{R^{+}_{s,k_s}:|x_l|\leq\xi\right\}}|\upsilon(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}},\quad \xi>0,\ l=\overline{1,m+k}\ ,$$

а также множества

$$J^{(s)}{}_{p,v}(x_l)=\left\{u\in A^{(s)}{}_{p,v}(x_l):\int\limits_0^{\xi}\Omega^{(s)}{}_{p,l}(u,t)\cdot t^{\frac{1+a_l}{p'}}dt<\infty,\ \forall\xi>0\right\},$$

$$J^{(s)*}_{p,v}(x_l)=\left\{u\in A^{(s)*}_{p,v}(x_l):\int\limits_{\xi}^{\infty}\Omega^{(s)*}_{p,l}(\upsilon,t)\cdot t^{-\left(\frac{1+a_l}{q}+1\right)}dt<\infty,\ \forall\xi>0\right\}.$$

По определению функция $f\left({}_s x,{}_s x'\right)$, $x=\left({}_s x,{}_s x'\right)\in R^{+}_{m+k,k}$ принадлежит классу $J^{n-s,(s)}{}_{p,\gamma}(x_l)$ ($J^{n-s,(s)*}_{p,v}(x_l)$), если для почти всех ${}_s x\in R^{+}_{s,k_s}$ сходится интеграл $\int\limits_{R_{n-s,k'_s}}|\,f\left({}_s x,{}_s x'\right)|^p\,d\mu\left({}_s x'\right)$ и

$$\left\| f\left({}_s y,\bullet\right)\right\|_{L_{p,\gamma_{k'_S,n-s}}\left(R_{n-s,k'_S}\right)} \in J^{(s)}{}_{p,\gamma}\left(x_l\right)$$

$$\left(\left\| f\left({}_s y,\bullet\right)\right\|_{L_{p,\gamma_{k'_S,n-s}}\left(R_{n-s,k'_S}\right)} \in J^{(s)^*}{}_{p,\gamma}\left(x_l\right)\right).$$

Всюду в дальнейшем $\beta = \alpha - \dfrac{n-s+\left|\gamma_{k'_s,n-s}\right|}{p}$.

Из леммы 2.3.6 в случае $\omega(t)=t^\alpha$, легко получаем

Лемма 3.1.1. Пусть $k \ge 0,\quad m+k \ge 2,\quad s \in \{1,\ldots,m+k-1\}$, $0 \le m_s \le m,\ 0 \le k_S \le k,\ k_S + m_s = s,\ 1 \le p < \infty,\ 0 < \alpha < m+k+\left|\gamma_{k,n}\right|$, $\beta > 0.$

Тогда существует $C_1 > 0$ такое, что для любой функции $f \in L^{loc}_{p,\gamma_{n,k}}\left(R^+_{n,k}\right)$

и для любого $x = \uparrow\left({}_s x, {}_s x'\right) \in R^+_{n,k}$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{R^+_{n,k}} T^y\left(\frac{1}{|x|^{n+\left|\gamma_{k,n}\right|-\alpha}}\right)\cdot\left|f(y)\right| y^{\gamma_{k,n}}_{k,n}\,dy \le$$

$$\le C_1 \int\limits_{R^+_{s,k_S}} T^{s^y}\left(\frac{1}{\left|{}_s x\right|^{s+\left|\gamma_{k_S,s}\right|-\beta}}\right)\left\| f\left({}_s y,\cdot\right)\right\|_{L_{p,\gamma_{k_S,n-s}}\left(R^+_{n-s,k'_S}\right)} y^{\gamma_{k_S,s}}\, d_s y.$$

Эта лемма позволяет установить некоторые оценки в терминах $\Omega,\ \Omega^*$ характеристик функций, для потенциалов Рисса. Эти оценки являются отправным пунктом в установлении весовых аналогов второй теоремы Соболева.

В дальнейшем $a_l = 0$, когда $l \in \{j_{1,} \cdots, j_{m_s}\}$ и $a_l = \gamma_l$, когда $l \in \{m + i_{1,} \cdots, m + i_{k_s}\}$. $L_{p,v}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ – пространство функций, интегрируемых в р-ой степени с весом $y_{m+1}^{v_{m+1}} \ldots y_{m+k}^{v_{m+k}}$.

Теорема.3.1.1. Пусть $k \geq 0, m + k \geq 2$, $s \in \{1, \ldots, m + k - 1\}$, $s = k_S + m_s$, $0 \leq m_s \leq m$, $0 \leq k_S \leq k$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < m + k + \left|\gamma_{k,n}\right|$, $1 < p < q < \infty$, $\dfrac{s + \left|\gamma_{k_s,s}\right|}{q} = \dfrac{n + \left|\gamma_{k,n}\right|}{p} - \alpha$ и $l \in N_s$. Тогда

А) существует $C > 0$ такое, что для любой функции $f \in J^{(s)}{}_{p,v}(x_l)$ и для почти всех $x = \uparrow\left({}_s x, {}_s x'\right) \in R^+_{m+k,k}$ существует $\left(I^\alpha_\gamma\right)(x)$ и имеет место оценка

$$\Omega^{(s)}{}_{q,l}\left(I^\alpha_\gamma(f)(\bullet, {}_s x'), \xi\right) \leq$$
$$\leq C\xi^{-\frac{1+a_l}{p'}} \int\limits_0^\xi \Omega^{(s)}{}_{p,i}\left(\left\|f\left({}_s y, \bullet\right)\right\|_{L_{p,\gamma_{k_S',n-s}}\left(R^+_{n-s,k'_s}\right)}, t\right) t^{\frac{1+a_l}{p'}-1} dt,$$

Б) существует $C > 0$ такое, что для любой функции $f \in J^{(s)*}{}_{p,v}(x_l)$ и для почти всех $x = \uparrow\left({}_s x, {}_s x'\right) \in R^+_{m+k,k}$ существует $\left(I^\alpha_\gamma\right)(x)$ и имеет место оценка

$$\Omega^{(s)*}{}_{q,l}\left(I^\alpha_\gamma(f)(\bullet, {}_s x'), \xi\right) \leq$$
$$\leq C\xi^{\frac{1+a_l}{q}} \int\limits_\xi^\infty \Omega^{(s)*}{}_{p,i}\left(\left\|f\left({}_s y, \bullet\right)\right\|_{L_{p,\gamma_{k_S',n-s}}\left(R^+_{n-s,k'_s}\right)}, t\right) t^{-\left(\frac{1+a_l}{q}+1\right)} dt,$$

где постоянная C не зависит от f и ξ.

Полученные оценки позволяют доказать совершенно новые по содержанию теоремы об обобщенных потенциалах Рисса, в пространствах введенных в терминах Ω, Ω^* характеристик[5], в частности в весовых $L_{p,\gamma}$ пространствах.

По определению, функция $\alpha(t)$, $0<t<\infty$, принадлежит множеству N $\left(N^*\right)$, если $\alpha(t)\geq 0$ и существует $\varepsilon>0$ такое, что $\alpha(t)>0$ для почти всех $t\in(0,\varepsilon)$ $(t\in(\varepsilon,\infty))$.

Скажем, что α принадлежит классу N_1 $\left(N_1^*\right)$, если $\alpha\in N$ $\left(\alpha\in N^*\right)$ и $\forall\,\varepsilon>0$ сходится интеграл $\int_0^\varepsilon \alpha(t)dt$ $\left(\int_\varepsilon^\infty \alpha(t)dt\right)$.

Пусть $s\in\{1,...,m+k-1\}$, $1\leq p<\infty$ и $l\in N_s$. Для $\varphi\in N_1$ и введем пространств

$$I^{(s)}{}_{p,l}(\varphi)=\left\{\mathrm{u}\in A^{(s)}_{p,\gamma}(x_l)\ :\ \left\|u:I^{(s)}{}_{p,l}(\varphi)\right\|^p\overset{\mathrm{df}}{=}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^\infty(\Omega^{(s)}_{p,l}(u,\xi))^p\,\varphi(\xi)d\xi<\infty\right\},$$

$$I^{(s)^*}{}_{p,l}(\psi)=\left\{u\in A^{(s)^*}_{p,\gamma}(\mathrm{x}_1).\quad \left\|u:I^{(s)^*}{}_{p,l}(\psi)\right\|^p\times\right.$$

$$\left.\times\overset{\mathrm{df}}{=}\int_0^\infty\left(\Omega^{(s)^*}{}_{p,l}(u,\xi)\right)^p\psi(\xi)d\xi<\infty\right\}.$$

$$I^{n-s,(s)}_{p,l}(\varphi)=\left\{\mathrm{u}\in J^{n-s,(s)}_{p,\gamma}(x_l)\ :\ \left\|u:I^{n-s,(s)}_{p,l}(\varphi)\right\|^p\times\right.$$

$$\left.\times\overset{\mathrm{df}}{=}\left\|\left\|u({}_s\,y,\bullet)\right\|_{L_{p,\gamma k'_s,n-s}\left(R_{n-s,k'_s}\right)}:I^{(s)}_{p,l}(\varphi)\right\|\right\},$$

[5] Абдуллаев С.К. О некоторых классах интегральных операторов в пространствах суммируемых функций//ДАН СССР, 1985, т.283, №4, с.77-78

$$I_{p,l}^{n-s,(s)^*}(\psi)=\left\{u\in J_{p,l}^{n-s,(s)^*}(\mathrm{x}_1).:\quad \left\|u:I_{p,l}^{n-s,(s)^*}(\psi)\right\|^p\times\right.$$

$$\left.\times\overset{\mathrm{df}}{=}\left\|u({}_s y,\bullet)\right\|_{Lp,\gamma_{k'_s,n-s}\left(R_{n-s,k'_s}\right)}:I_{p,l}^{(s)^*}(\psi)\right\}$$

Доказывается

Лемма 3.1. 2. Если $\varphi\in N_1$, $\psi\in N_1^*$ и $\omega(|x_l|)=\int\limits_0^{|x_l|}\varphi(t)dt$,

$\widetilde{\omega}(|x_l|)=\int\limits_t^{|x_l|}\psi(t)dt$,то

$$I^{(s)}{}_{p,l}(\varphi)=L_{p,\gamma}(\widetilde{\omega}(|x_l|),R^+_{s,k_s}),\quad I^{(s)^*}{}_{p,l}(\psi)=L_{p,\gamma}(\widetilde{\omega}(|x_l|),R^+_{s,k_s}),$$

$$I_{p,l}^{n-s,(s)}(\varphi)=L_{p,\gamma}(\widetilde{\omega}(|x_l|),R^+_{s,k_s}),\ I_{p,l}^{n-s,(s)^*}(\psi)=L_{p,\gamma}(\widetilde{\omega}(|x_l|),R^+_{s,k_s})$$

и соответствующие нормы эквивалентны.

Легко видеть, что $\omega(t)$ – возрастающая, а $\widetilde{\omega}(t)$ – убывающая весовые функции.

Основной результат главы состоит в следующем

Теорема 3.1. 2. Пусть $0<\alpha<m+k+\left|\gamma_{k,n}\right|, k\ge 0,\quad m+k\ge 2$, $s\in\{1,...,m+k-1\}$, $s=k_S+m_s$, $0\le m_s\le m,\quad 0\le k_S\le k$,

$1<p<q<\infty,\ \dfrac{s+\left|\gamma_{k_s,s}\right|}{q}=\dfrac{n+\left|\gamma_{k,n}\right|}{p}-\alpha$ и $l\in N_s$.

Тогда, если

а) $\omega(\xi)=\int\limits_0^{\xi}\varphi(t)dt$, $\widetilde{\omega}(\xi)=\int\limits_0^{\xi}\psi(t)dt\quad \varphi,\phi\in N_1$ такие, что

$$\sup_{0<t}\left(\int_t^d \xi^{-\frac{1+a_l}{p'}q}\varphi(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t \psi^{-\frac{p'}{p}}(\xi)\xi^{-(p'-(1+a_l))}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty,$$

или

б) $\omega(\xi)=\int_\xi^\infty \varphi(t)dt$ и $\widetilde{\omega}(\xi)=\int_\xi^\infty \psi(t)dt$ где $\varphi,\phi\in N_1^*$ такие, что

$$\sup_{0<t}\left(\int_0^t \xi^{\frac{1}{q}}\varphi(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_t^\infty \psi^{-\frac{p'}{p}}(\xi)\xi^{\left(\frac{1-a_l}{q}-1\right)p}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty,$$

то существует $C>0$ такое, что для любой функции $u\in L_{p,\gamma}\left(\widetilde{\omega}(|x_l|),R^+_{m+k,k}\right)$ и для почти всех $x=\uparrow\left({}_s x,{}_s x'\right)\in R^+_{m+k,k}$ существует $\left(I^\alpha_\gamma\right)(x)$ и имеет место оценка

$$\left\|I^\alpha_\gamma(f)(\bullet,{}_s x'):L_{p,\gamma}\left(\omega(|x_l|),R^+_{s,k_s}\right)\right\|\le C\left\|u:L_{p,\gamma}\left(\widetilde{\omega}(|x_l|),R^+_{m+k,k}\right)\right\|.$$

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям доктору физико-математических наук, профессору С.К. Абдуллаеву и кандидату физико-математических наук, доценту Ф.А. Абдуллаеву за постановку задачи, обсуждение полученных результатов и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в следующих работах:

1. С.К.Абдуллаев, Б.К.Агарзаев. Некоторые оценки для объёмного потенциала. //Azər. Resp. Prez. H.Əliyevin 80-illik yubileyinə həsr olunmuş riyaziyyatın müasir problemləri mövzusunda konfrans. Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi, BDU, Bakı, 2003, səh.3-4.
2. С.К.Абдуллаев, Б.К.Агарзаев. Об одном свойстве обобщенных потенциалов Рисса. //RMİ-nın 45 illiyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika üzrə X beynəlxalq konfransın tezisləri Bakı- 2004, səh.3.
3. С.К.Абдуллаев, Б.К.Агарзаев. Holder veight estimates of singular inteqrals generalized shift operator. //Transactions of NASA, issue mat. and mech. series of fizikal-technical and matematikal sciense, XXIV, №1, Baku-2004, pp. 9-18.
4. С.К.Абдуллаев, Б.К.Агарзаев. On one property of Riesz generalized potensial. // Transactions of NASA, issue mat. and mech. series of fizikal-technical and matematikal sciense, XXIV, №4 Baku-2005, pp. 3-8.
5. С.К.Абдуллаев, Б.К.Агарзаев, Р.А.Джафарова. Об одном осцилляционном свойстве обобщенных потенциалов Рисса. //Вестник Бакинского Университета, серия физ.-мат. наук, 2012 №2, стр. 5-13.
6. С.К.Абдуллаев, Б.К.Агарзаев. Неравенства типа Харди-Литлвуда-Соболева для обобщенных потенциалов Рисса. // Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi, BDU-nun "Hesablama riyaziyyatı" kafedrasının 50 illik yubleyinə həsr olunmuş elmi konfransın materialları. 2012, səh. 85-89.
7. С.К.Абдуллаев, Б.К.Агарзаев. Некоторые оценки потенциалов Рисса с обобщенным сдвигом и почти монотонным ядром. /Тезисы докладов четвёртой межд. конф., посвящ. 90-летию со дня рожд. член-корр. РАН, Л.Д.Кудрявцева. Москва, РУДН, 2013 г. стр. 60-62.
8. С.К.Абдуллаев, Б.К.Агарзаев. Теорема Соболева дл потенциалов Рисса с обобщенным сдвигом и почти монотонным ядром.// Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2013, №2, стр. 5-15.
9. Б.К.Агарзаев. Весовые аналоги второй теоремы Соболева для потенциалов Рисса.// Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2013, №4, стр.86-95.
10. С.К.Абдуллаев, Б.К.Агарзаев. Теорема Соболева-Ильина для потенциалов Рисса с обобщенным сдвигом и почти монотонным ядром. //Ученые записки Орёлского Государственного Университета №3(59), 2014, стр. 11-14.

BƏHRUZ KƏRİMBALA oglu AGARZAYEV

ÇOXÖLÇÜLÜ POTENSİALLAR VƏ ONLARIN TƏTBİQLƏRİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi ümumiləşmiş sürüşmə ilə sinqulyar integral operatorların və sanki monoton nüvə ilə ümumiləşmiş Riss potensiallarının struktur xassələrinin oyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Dissertasiya işininin əsas nəticələri aşagıdakılardir:

- ümumiləşmiş sürüşmə ilə çoxölçülü sinqulyar operatorun $H^{\gamma}_{\alpha,\beta}(R^{+}_{m})$-çəkil Hölder fəzalarını invariant saxlaması üçün γ, α , β parametrləri üzərinə geniş kafi şərtlər tapılmışdır.

- adi və ümumiləşmiş sürüşmə ilə sanki monoton nüvəli Ris potensialları üçün Xardi-Litlvud-Sobolev bərabərsizlikləri tipli güclü və zəif tipli bərabərsizliklər alınmışdır. İsbat olunur ki, üstlü olmayan nüvə ilə Ris potensialları $y_{m+1}^{\gamma_{m+1}} \cdots y_{m+k}^{\gamma_{m+k}}$ - çəki ilə p-dərəcədən cəmlənən funksiyaların $L_{p,\gamma}\left(R^{+}_{m+k}\right)-$fəzasından müəyyən $L^{\Phi}_{p,\gamma}\left(R^{+}_{m+k}\right)-$Orliç fəzasına məhdud təsir edir və bu teoremlər yaxşılaşdırıla bilən deyil.

- müəyyın sinifdən olan sanki monoton nüvə və dəyişənlərin adi və ümumiləşmiş sürüşmənin ixtiyari yıgımına görə götürülmüş Ris potensialları üçün funksiyanın orta ossilyasiya terminlərində bir xassə isbat olunmuşdur.

- bütün dəyişənlərə görə adi sürüşmə ilə və eləcədə ixtiyari yıgımla adi və ümumiləşmiş sürüşmə ilə sanki monoton nüvəli Ris potensialları üçün Sobolev-İlyin bərabərsizlikləri tipli (Ris potensialları ilə verilmiş funksiyaların izləri haqqında) güclü və zəif tipli bərabərsizliklər alınmışdır.

- ümumiləşmiş sürüşmə ilə Riss potensialları üçün lokal inteqrallanan funksiyaların Ω, Ω^{*} inteqral xarakteristikaları terminlərində bəzi qiymətləndirmələr alınmış və onların əsasında çəkili $L_{p,\gamma}$ fəzaları terminində Sobolevin ikinci teoreminin analoqları isbat olunmuşdur.

BAHRUZ KERİMBALA oglu AGARZAYEV

MULTIVARIATE POTENTIALS AND THEIR APPLICATIONS

SUMMARY

The dissertation work is devoted to studying structures properties both of singular integral operators and generalized Riesz potentials with almost monotone kernel, with generalized shift. In the dissertation work the following main results were obtained:

- Rather wide conditions on the parameters γ, α , β of the weighted Holder spaces $H^{\gamma}_{\alpha,\beta}(R^{+}_{m})$ providing invariance of these spaces with respect to multivariate singular operator with generalized shift were found.

- Strong and weak inequalities of Hardy-Littlwood-Sobolev inequalities type were established for the Riesz generalized potential with almost monotone kernel both with ordinary shift and generalized shift. It is proved that the Riesz potentials with nonpower kernels act from the space $L_{p,\gamma}\left(R^{+}_{m+k}\right)$ of functions integrable in the p-th degree with the weight $y^{\gamma_{m+1}}_{m+1}\cdots y^{\gamma_{m+k}}_{m+k}$ to some Orlicz space $L^{\Phi}_{p,\gamma}\left(R^{+}_{m+k}\right)$; and these theorems are unimpovable.

- For generalized Riesz potentials with almost monotone kernel of definite class with respect to arbitrary set of variables with ordinary and generalized shift, a property expressed in the terms of mean oscillation of functions is proved.

- For generalized Riesz potentials with almost monotone kernel both with ordinary shift with respect to all variables and with respect to arbitrary set of variables with ordinary and generalized shift, strong and weak inequalities of Sobolev-Il'in type (on traces of functions represented by the Riesz potential) are established.

- For Riesz potentials with a generalized shift, in the terms of integral characteristics Ω, Ω^{*} of locally integrable functions, some estimations on the bases of which the analogs of the Sobolev second theorem are proved in the terms of weighted $L_{p,\gamma}$ spaces, are established.