НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ЛАЛЕ РАХМАН кызы АЛИЕВА

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ТЕРМИНАХ СРЕДНЕЙ ОСЦИЛЛЯЦИИ

1202.01-Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2014

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

LALƏ RƏHMAN QIZI ƏLİYEVA

ORTA OSSİLYASİYA TERMİNLƏRİNDƏ SİNQULYAR İNTEQRALLARIN STRUKTUR XASSƏLƏRİNİN TƏDQİQİ

1202.01-Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2014

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun** «Riyazi analiz» şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Rəhim M.Rzayev**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Sadiq K.Abdullayev**

(Bakı Dövlət Universiteti);

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Mübariz Q.Hacıbəyov**

(Azərbaycan Milli Aviasiya Akademiyası).

Aparıcı təşkilat:

Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti

«Ali riyaziyyat» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 27 iyun 2014-cü il saat 16^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 14 may 2014-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111

Dissertasiya Şurasının

elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена в отделе «Математический анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, проф. **Рагим М.Рзаев**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф. **Садиг К.Абдуллаев**

(Бакинский Государственный Университет);

кандидат физико-математических наук,доц.**Мубариз Г.Гаджибеков**

(Национальная Авиационная Академия Азербайджана).

Ведущая организация:

Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет

кафедра «Высшая математика».

Защита диссертации состоится 27 июня 2014 г. в 16^{00} часов на заседании7диссертационного совета Д

01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 14 мая 2014 года.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета

Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из актуальных вопросов математического анализа является изучение локальных и глобальных структурных свойств того или иного математического объекта. Многие задачи теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории функций, математической физики и механики требуют применения теории сингулярных интегральных операторов. Поэтому из-за разнообразных применений становится необходимым исследование локальных и глобальных структурных свойств упомянутых интегральных операторов.

Решение многих проблем теории тригонометрических рядов и интегралов Фурье требует развития методов оценки сингулярных интегралов в терминах различных характеристик. Следует отметить, что многие значительные достижения гармонического анализа тесно связаны с развитием теории сингулярных интегральных операторов, самым простым и может быть, самым фундаментальным из которых является преобразование Гильберта.

Исследования сингулярных интегральных операторов начались в работах таких авторов, как А.Пуанкаре, Д.Гильберт, Н.Н.Лузин, И.И.Привалов и др. Эти исследования развивались в работах Г.Жиро, Н.И.Мусхелишвили, Ф.Д.Гахова, С.Г.Михлина, З.И.Халилова, Т.Г.Гегелиа, А.И.Гусейнова, А.Кальдерона, А.Зигмунда, И.Стейна, Ч.Фефферман, А.А.Бабаева, В.В.Салаева, А.Д.Гаджиева, С.Г.Самко, С.К.Абдуллаева, Е.Г.Гусейнова, Р.К.Сейфуллаева, Т.С.Салимова, В.С.Гулиева, Р.М.Рзаева и многих других.

Классические вопросы, касающиеся теории сингулярных интегральных операторов хорошо изложены во многих книгах− прежде всего в замечательной книге И.Стейна. Следует отметить также книги Н.И.Мусхелишвили, Ф.Д.Гахова и С.Г.Михлина.

Важным и актуальным представляется исследование структурных свойств функций, определяемых условиями на среднюю осцилляцию. Пространство функций с ограниченной средней осцилляцией (пространство BMO) впервые было введено в работе Джона и Ниренберга в связи с вопросами регулярности решений эллиптических дифференциальных уравнений.

Характеризация пространств, определяемых условиями на среднюю осцилляцию функций представляется также важной с точки зрения внутренних задач теории функций. Пространства средней осцилляции были изучены в работах многих авторов, из которых отметим S.Campanato, N.G.Meyers, S.Spanne, J.Peetre, Ch.Fefferman, E.M.Stein, R.DeVore, R.Sharpley, S.Janson, Дж.Гарнетт, П.Кусис, А.А.Кореновский, Р.М.Рзаев и др.

Цель работы. Исследование некоторых локальных и глобальных свойств локально суммируемых функций и многомерных сингулярных интегралов в терминах средней осцилляции высшего порядка и в терминах Φ - осцилляции.

Общая методика исследований. В работе применяются методы теории функций, теории интегральных операторов, теории функциональных пространств, гармонического анализа.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- Найдены достаточные условия в терминах средней осцилляции высшего порядка для того, чтобы точка была d^k – точкой данной функции;
- Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция f в данной точке имела производную порядка k в смысле L^p;
- Указаны локальные свойства функции f, описываемые средней осцилляцией, k -го порядка, которые являются инвариантными относительно сингулярного интегрального оператора.
- Найдены достаточные условия, для сохранения l_p^k-точки x_0 функция f (т.е. точки x_0, в которой функция f имеет производную порядка k в смысле L^p) относительно многомерного сингулярного интегрального оператора;
- Доказаны неравенства, связывающие Φ-осцилляцию k -го порядка со средней осцилляцией того же порядка.
- Доказаны теоремы об ограниченном действии многомерного сингулярного интегрального оператора в пространствах, определяемых условиями на Φ-осцилляцию функции;

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации носят, в основном, теоретический характер. Результаты о свойствах сингулярных интегральных операторов дают возможность, например, изучать более широкие классы дифференциальных уравнений с частными производными.

Полученные результаты могут применяться к решению ряда прикладных задач механики, при решении которых используется теория сингулярных интегральных уравнений.

Аппробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах отдела «Математический анализ» в Институте Математики и Механики НАН Азербайджана (рук. проф. Р.М.Рзаев), на семинарах отдела «Функциональный анализ» ИММ НАН Азербайджана (рук. проф. Г.И.Асланов), на семинарах отдела «Негармонический анализ» ИММ НАН Азербайджана (рук. проф. Б.Т.Билалов). Результаты диссертации докладывались автором также на Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летнему юбилею проф. И.Т.Мамедова (Баку, 2005), на Международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летнему юбилею акад. А.Д.Гаджиева (Баку, 2007), на Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию ИММ НАН Азербайджана (Баку, 2009), на Международной конференции, посвященной 80-летнему юбилею акад. Ф.Г.Максудова (Баку, 2010).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащий 70 наименований. Объем диссертации 107 страниц.

Содержание диссертации

Перейдем к подробному изложению основных результатов, которые получены в настоящей диссертации. Отметим, что принятая в тексте нумерация лемм, теорем и т.д. соответствует нумерации в диссертации.

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации. Здесь же даются некоторые вспомогательные факты и понятия, связанные с тематикой диссертации.

Глава I посвящена изучению локальных свойств локально суммируемых функций многих переменных и многомерных сингулярных интегралов, которые в той или иной форме описываются в терминах средней осцилляции высшего порядка.

В 1.1 даны основные определения, обозначения и предварительные сведения, которые необходимы для дальнейшей работы.

Пусть $B(a,r):=\{x\in R^n : |x\text{-}a|\le r\}$ – замкнутый шар в R^n радиуса $r>0$ с центром в точке $a\in R^n$. Применим процесс ортогонализации относительно скалярного произведения

$$(f,g):=|B(0,1)|^{-1}\int_{B(0,1)} f(t)g(t)dt$$

к системе степенных функций $\{x^\nu\}$, $|\nu|\le k$, расположенных в частично лексикографическом порядке, где через $|E|$ обозначается лебегова мера множества $E\subset R^n$, $\nu=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $x^\nu=x_1^{\nu_1}\cdot x_2^{\nu_2}\cdot...\cdot x_n^{\nu_n}$, $|\nu|=\nu_1+\nu_2+...+\nu_n$, а $\nu_1,\nu_2,...,\nu_n$ и $k-$ целые неотрицательные числа. Результат процесса ортогонализации обозначим через $\{\varphi_\nu\}$, $|\nu|\le k$. Система $\{\varphi_\nu\}$, $|\nu|\le k$, является ортогональной и нормированной.

Через $L^p_{loc}(R^n)$ $(1\le p<\infty)$ обозначим класс всех локально суммируемых в p-ой степени функций, а через $L^\infty_{loc}(R^n)$ – класс всех локально ограниченных функций, определенных в R^n.

Пусть $f\in L^1_{loc}(R^n)$, $k\in N\cup\{0\}$ (N –множество натуральных чисел). Положим:

$$P_{k,B(a,r)}f(x):=\sum_{|\nu|\le k}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)} f(t)\varphi_\nu\left(\frac{t-a}{r}\right)dt\right)\varphi_\nu\left(\frac{x-a}{r}\right).$$

$P_{k,B(a,r)}f$ –полином степени не выше k.

Совокупность всех полиномов в R^n степени не выше k обозначим через P_k. Таким образом, $P_{k,B(a,r)}f \in P_k$.

Для функций $f \in L^p_{loc}\left(R^n\right)$, $\left(1 \le p \le \infty\right)$ обозначим

$$\Omega_k(f,B(a,r))_p := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{|B(a,r)|}\displaystyle\int_{B(a,r)}\left|f(t)-P_{k-1,B(a,r)}f(t)\right|^p dt\right)^{1/p}, & 1\le p<\infty, \\ \operatorname{ess\,sup}\left\{\left|f(t)-P_{k-1,B(a,r)}f(t)\right| :\ t\in B(a,r)\right\}, & p=\infty. \end{cases}$$

$\Omega_k\left(f,B(a,r)\right)_p$ называется средней осцилляцией k-го порядка функции f в шаре $B(a,r)$ в метрике L^p.

Рассмотрим следующую метрическую характеристику функции $f \in L^p_{loc}\left(R^n\right)$, $\left(1 \le p \le \infty\right)$:

$$m_f^k\left(x_0;\delta\right)_p := \sup\left\{\Omega_k\left(f,B\left(x_0;r\right)\right)_p :\quad r \le \delta\right\} \quad \left(\delta > 0\right),$$

где $x_0 \in R^n$ фиксированная точка, $k \in N$.

Пусть $f \in L^p_{loc}\left(R^n\right)$, $1 \le p \le \infty$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Точку $x_0 \in R^n$ назовем m_p^k-точкой функции $f(x)$, если

$$m_f^{k+1}\left(x_0;\delta\right)_p = \mathrm{o}\left(\delta^k\right), \quad \delta \to 0.$$

Множество всех m_p^k-точек функции f обозначим через $M_p^k(f)$.

Точку $x_0 \in R^n$ назовем d^k-точкой для функции $f \in L^1_{loc}\left(R^n\right)$ если для каждого $\nu = \left(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\right)$ с условием $|\nu| \le k$ существует число $D_\nu f\left(x_0\right)$ такое, что выполняется условие

$$\left|D^\nu P_{k,B(x_0,r)}f\left(x_0\right) - D_\nu f\left(x_0\right)\right| = \mathrm{o}\left(r^{k-|\nu|}\right), \quad r \to 0.$$

Множество всех d^k-точек функции f обозначим через $D^k(f)$.

Определения m_p^k-точек и d^k-точек впервые были даны в [37][1]..

Говорят, что функция f имеет производную порядка k в смысле L^p в точке $x_0 \in R^n$ [51][2], если существует такой полином $P_{x_0}(f;x)$ степени, не превышающей k, что

$$\left(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\left|f(t)-P_{x_0}(f;t)\right|^p dt\right)^{1/p}=\mathrm{o}\left(r^k\right),\quad r\to 0,$$

с соответствующей модификацией в случае $p=\infty$.

Множество всех точек, в которых функция f имеет производную порядка k в смысле L^p обозначим через $L_p^k(f)$. Каждую точку из $L_p^k(f)$ будем называть также l_p^k - точкой функции f.

В работе [3] было доказано, что если $f \in L_{loc}^p(R^n)$, $1 \le p \le \infty$, $k \in N \cup \{0\}$, то $L_p^k(f)=M_p^k(f)\cap D^k(f)$.

В 1.2 изучаются локальные свойства локально суммируемых функций. Найдены достаточные условия в терминах метрической характеристики $m_f^k(x_0;\delta)_p$ для того, чтобы точка $x_0 \in R^n$ была d^k-точкой для функции f. А именно, доказана

Теорема 1.2.1. Пусть $f \in L_{loc}^1(R^n)$. Если $k \in N \cup \{0\}$ и

---

[1] Рзаев Р.М. Локальные свойства сингулярных интегралов в терминах средней осцилляции. Труды Института математики и механики АН Азерб., 1998, т.8, с.179-185.

[2] Calderon A.P., Zygmund A. Local properties of solutions of elliptic partial differential equations. Studia Math., 1961, v.20, p.171-225.

[3] Рзаев Р.М. Интегральные операторы в пространствах, определяемых условиями на среднюю осцилляцию функций и некоторые приложения. Дисс.доктора физ.-мат. наук. Баку, 1998, 285 с.

$$\int_0^1 t^{-k-1} \cdot m_f^{k+1}(x_0;t)_1\,dt < +\infty,$$

то для любого $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ с условием $|\nu| \le k$ существует предел

$$D_\nu f(x_0) := \lim_{r\to 0} D^\nu P_{k,B(x_0,r)} f(x_0)$$

и верно соотношение

$$\left| D^\nu P_{k,B(x_0,r)} f(x_0) - D_\nu f(x_0) \right| = o\left(r^{k-|\nu|}\right), \quad r \to 0,$$

т.е. x_0 является d^k – точкой функции f.

Пусть $f \in L^p_{loc}(R^n)$, $1 \le p \le \infty$, $x_0 \in R^n$ и пусть для любого ν с условием $|\nu| \le k-1$ существует предел

$$\lim_{r\to 0} D^\nu P_{k-1,B(x_0,r)} f(x_0) =: D_\nu f(x_0).$$

Обозначим

$$P_{k-1,x_0} f(t) := \sum_{|\nu| \le k-1} D_\nu f(x_0) \frac{(t-x_0)^\nu}{\nu!},$$

$$n_f^k(x_0;\delta)_p := \sup_{0<r\le\delta} \left(\frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} \left| f(t) - P_{k-1,x_0} f(t) \right|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$n_f^k(x_0;\delta)_\infty := \sup_{0<r\le\delta} \left\| f - P_{k-1,x_0} f \right\|_{L^\infty(B(x_0,r))}.$$

Найдены необходимые и достаточные условия в терминах характеристики $n_f^k(x_0;\delta)_p$, для того чтобы функция f в точке $x_0 \in R^n$ имела производную порядка k в смысле L^p.

Теорема 1.2.2. Пусть $f \in L^p_{loc}(R^n)$ $1 \le p \le \infty$. Тогда следующие условия эквивалентны

1) $x_0 \in L_p^k(f)$;

2) для любого ν с условием $|\nu| \le k-1$ существует предел $\lim_{r\to 0} D^\nu P_{k-1,B(x_0,r)} f(x_0) =: D_\nu f(x_0)$ и $n_f^{k+1}(x_0;\delta)_p = o(\delta^k)$, $\delta \to 0$.

Далее в этом параграфе доказана теорема (теорема 1.2.4), которая показывает неулучшаемость в случае $k=1$ и $p=1$ одной оценки характеристики $n_f^k(x_0;\delta)_p$ через характеристику $m_f^k(x_0;\delta)_p$, полученной в работе [4].

В 1.3 рассматривается сингулярный интегральный оператор:

$$A_k f(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{R^n}\left\{K_\varepsilon(x-y)-\left(\sum_{|v|\le k-1}\frac{x^v}{v!}D^vK(-y)\right)X_{\{|t|>1\}}(y)\right\}f(y)dy,$$

где

$$K(x)=\omega(x)\cdot|x|^{-n},\quad \int_{S^{n-1}}\omega(x)ds=0,\quad K_\varepsilon(x)=K(x)\cdot X_{\{|t|>\varepsilon\}}(x),$$

функция $\omega(x)$ однородна степени 0, $X_{\{|t|>\varepsilon\}}-$ характеристическая функция множества $\{t\in R^n : |t|>\varepsilon\}$, $S^{n-1}-$ единичная сфера в евклидовом пространстве R^n; предполагаем, что при $k=1$ функция $K(x)$ дифференцируема и имеет ограниченные частные производные первого порядка, а при $k>1$ функция $K(x)$ является k раз непрерывно дифференцируемой на сфере S^{n-1}; $v=(v_1,v_2,...v_n)$, $v_1,v_2,...,v_n-$ целые неотрицательные числа, $v!=v_1!v_2!...v_n!$ $k\in N$,

$$D^v f:=\frac{\partial^{|v|}f}{\partial x_1^{v_1}\partial x_2^{v_2}...\partial x_{1n}^{v_n}}.$$

Отметим, что если $f\in L^p(R^n)$ $(1\le p<\infty)$, то сингулярный интеграл $A_k f$ отличается от сингулярного интеграла

$$Tf(x):=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{R^n}K_\varepsilon(x-y)f(y)dy$$

полиномом степени не выше $k-1$, причем оба интеграла существует почти всюду в R^n. Следует отметить, что при рассмотрении классов локально суммируемых функций, содержащих полиномы из класса P_{k-1} более подходящим является модификация вида $A_k f$ многомерного сингулярного интеграла Tf.

[4] Rzaev R.M. On some maximal functions, measuring smoothness, and metric characteristics. Trans. AS Azerb., 1999, v.19, №5, p. 118-124.

В 1.3 исследуются некоторые локальные структурные свойства сингулярного интеграла $A_k f$ в терминах метрической характеристики $m_f^k(x_0;\delta)_p$. В следующей теореме выделяются некоторые локальные свойства локально суммируемых функций, которые являются инвариантными относительно сингулярного интегрального оператора. Эти локальные свойства выражаются в терминах средней осцилляции. А именно, справедлива следующая

Теорема1.3.2. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $x_0 \in R^n$, $f \in L_{loc}^p(R^n)$, $\widetilde{f} := A_k f$, $k \in N$; $\varphi(x)$ − неотрицательная монотонно возрастающая на $(0,+\infty)$ функция такая, что

$$\delta^k \int_\delta^\infty \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}} dt = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta > 0).$$

Тогда если

$$\|f\|_{\varphi,\theta,k,p} := \left(\int_0^\infty \left(\frac{m_f^k(x_0;t)_p}{\varphi(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}} < +\infty,$$

с соответствующей модификацией в случае $\theta = \infty$, то выполняется условие

$$\|\widetilde{f}\|_{\varphi,\theta,k,p} := \left(\int_0^\infty \left(\frac{m_{\widetilde{f}}^k(x_0;t)_p}{\varphi(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}} < +\infty.$$

Кроме того, существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\forall f: \ \|\widetilde{f}\|_{\varphi,\theta,k,p} \le c \cdot \|f\|_{\varphi,\theta,k,p}.$$

Из этой теоремы получается следствие 1.3.1, которое продолжает и развивает исследования, касающиеся вопроса о сохранении m_p^k-точек функции сингулярным интегральным преобразованием.

В конце параграфа введены пространства $MO_{\varphi,\theta}^{k,p}(x_0)$

и указаны условия (с помощью теоремы 1.3.2), при которых оператор $A_k f$ ограниченно действует в пространстве $MO_{\varphi,\theta}^{k,p}(x_0)$.

В 1.4 исследуются локальные свойства многомерного сингулярного интеграла $A_k f$ в терминах характеристики $n_f^k(x_0;\delta)_p$. Указываются локальные свойства функции f, описываемые характеристикой $n_f^k(x_0;\delta)_p$, которые остаются инвариантными относительно сингулярного интегрального оператора $A_k f$.

Известно, что почти каждая l_p^k-точка $(1 < p < \infty)$ функции $f \in L^p(R^n)$ сохраняется сингулярным интегралом Tf. Получаются достаточные условия, при выполнении которых данная l_p^k-точка $x_0 \in R^n$ сохраняется относительно сингулярного интегрального преобразования $A_k f$. При этом получаются также и количественные характеристики таких точек.

Теорема 1.4.3. Пусть $f \in L_{loc}^p(R^n)$, $1 < p < \infty$, $k \in N \cup \{0\}$, $x_0 \in R^n$,

$$\int_0^1 \frac{n_f^{k+1}(x_0;t)_p}{t^k} \cdot \frac{dt}{t} < +\infty, \quad \int_1^\infty \frac{n_f^{k+1}(x_0;t)_p}{t^k} \cdot \frac{dt}{t^2} < +\infty.$$

Тогда выполняется условие

$$n_{\tilde{f}}^{k+1}(x_0;\delta)_p = o(\delta^k), \qquad \delta \to 0,$$

т.е. $x_0 \in R^n$ является l_p^k-точкой для функции $\tilde{f} = A_k f$.

Отметим, что при выполнении первого из интегральных условий теоремы 1.4.3 точка $x_0 \in R^n$ является l_p^k-точкой для функции f. Эта теорема дает достаточные условия, для сохранения l_p^k-точки x_0 функции f относительно сингулярного интеграла $A_k f$.

В конце параграфа с помощью характеристики $n_f^k(x_0;\delta)_p$ вводится пространство $NO_{\varphi,\theta}^{k,p}(x_0)$ и доказывается теорема 1.4.4, которая утверждает, что если $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $x_0 \in R^n$, $k \in N$, $\varphi(x)-$ неотрицательная монотонно возрастающая на $(0,+\infty)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t}dt = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta > 0), \quad \delta\int_\delta^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}dt = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta > 0),$$

то сингулярный интегральный оператор $A_k f = \widetilde{f}$ ограниченно действует в пространстве $NO_{\varphi,\theta}^{k,p}(x_0)$.

Глава II посвящена изучению структурных свойств функций и сингулярных интегралов в терминах Φ- осцилляции. Понятие Φ-осцилляции появилось в [5], [6] в результате исследований гармонической осцилляции и встречающихся в научной литературе близких вопросов.

В 2.1 доказана теорема 2.1.1, из которой получен следующий результат в терминах характеристики $m_f^k(x_0;\delta)_p$:

Следствие 2.1.2. Пусть $f \in L_{loc}^p(R^n)$ $(1 \le p \le \infty)$, $\alpha > 0$, $k \in N$, $k < \alpha + 1$, $x_0 \in R^n$. Тогда имеет место неравенство

$$r^{-n}\int_{R^n} \frac{1}{1 + (|x - x_0|/r)^{n+\alpha}} \left|f(x) - P_{k-1,B(x_0,r)}f(x)\right|dx \le$$

$$\le c \cdot r^\alpha \int_r^\infty \frac{m_f^k(x_0;t)_p}{t^{\alpha+1}}dt, \quad (r > 0),$$

где $c > 0$ не зависит от f, x_0 и r.

В 2.2 введено понятие Φ- осцилляции k-го порядка и доказаны неравенства, связывающие Φ- осцилляцию k-го порядка со средней осцилляцией того же порядка.

---

[5]Рзаев Р.М., Алиева Л.Р. Некоторые оценки для Φ- осцилляции. Тезисы Межд. конф. по матем. и мех., посв. 50-летию ИММ НАН Азерб., Баку, 2009, с.262

[6] Rzaev R.M., Aliyeva L.R. Mean oscillation, Φ-oscillation and harmonic oscillation. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 2010, v.30, #1, p.167-176.

Пусть $\Phi(x)$ $\left(x \in R^n\right)$ суммируемая в R^n функция такая, что $\Phi(x) \geq 0$ $\left(x \in R^n\right)$, $\int\limits_{R^n} \Phi(x)dx = 1$; $\Phi_r(x) := r^{-n}\Phi\left(\frac{x}{r}\right)$ $\left(r > 0,\ x \in R^n\right)$;

$\Omega_{k,\Phi}(f, B(x;r)) := \int\limits_{R^n} \Phi_r(x-t)\left|f(t) - P_{k-1,\mathrm{B}(x,r)}f(t)\right|dt$, где

$f \in L^1_{loc}\left(R^n\right)$, $k \in \mathrm{N}$.

$\Omega_{k,\Phi}(f, B(x;r))$ назовем Φ-осцилляцией k-го порядка функции f в шаре $B(x,r)$.

Пусть, кроме того,

$$h_f^{k,\Phi}(x;\delta) := \sup\{\Omega_{k,\Phi}(f, B(x;r)):\quad 0 < r \leq \delta\},\quad \delta > 0,\quad x \in R^n,$$

$$H_f^{k,\Phi}(\delta) := \sup\left\{h_{\mathrm{f}}^{\mathrm{k},\Phi}(x;\delta):\quad x \in R^n\right\},\quad \delta > 0.$$

Очевидно, что функции $h_f^{k,\Phi}(x;\delta)$ и $H_f^{k,\Phi}(\delta)$ монотонно возрастают по аргументу $\delta \in (0;+\infty)$.

Пусть $\Phi(x) \equiv \Phi^{(\alpha)}(x) := c(n;\alpha)\cdot\left(1 + |x|^{n+\alpha}\right)^{-1}$, $\alpha > 0$, где $c(n,\alpha)$ – постоянная такая, что $\int\limits_{R^n} \Phi^{(\alpha)}(x)dx = 1$.

Введем также следующие обозначения.

$$h_f^{k,\alpha}(x;\delta) := h_f^{k,\Phi^{(\alpha)}}(x;\delta),\quad H_f^{k,\alpha}(\delta) := H_f^{k,\Phi^{(\alpha)}}(\delta).$$

Можно проверить, что если $\Phi(x) \equiv \frac{1}{|B(0,1)|}\cdot X_{\mathrm{B}(0,1)}(x)$, где X_E – характеристическая функция множества $E \subset R^n$, то

$$\Omega_{k,\Phi}(f, B(x;r)) = \Omega_k(f, B(x,r))_1$$

где $\Omega_k(f, B(x;r))_1$ средняя осцилляция k-го порядка функции f в шаре $B(x,r)$ в метрике пространства L^1.

В дальнейшем мы будем пользоваться также обозначением $M_f^k(\delta)_p := \sup\left\{m_f^k(x;\delta)_{\mathrm{p}}:\quad x \in R^n\right\}$ ($\delta > 0$), $1 \leq p \leq \infty$.

Доказаны, в частности, следующие утверждения.

Предложение 2.2.2. Пусть $f \in L^p_{loc}\left(R^n\right)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $\alpha > 0$,

$k \in N$, $k < \alpha + 1$. Тогда верно неравенство

$$H_f^{k,\alpha}(\delta) \le c \cdot \delta^\alpha \int_\delta^\infty \frac{M_f^k(t)_p}{t^{\alpha+1}} dt \ , \qquad \delta > 0,$$

где $c > 0$ не зависит от f и δ .

Предложение 2.2.3. Пусть $f \in L_{loc}^1(R^n)$, $\alpha > 0$, $k \in \mathrm{N}$. Тогда справедливы неравенства

$$m_f^k(x;\delta)_1 \le c \cdot h_f^{k,\alpha}(x;\delta) \ \left(x \in R^n, \ \delta > 0\right), \ M_f^k(\delta)_1 \le c \cdot H_f^{k,\alpha}(\delta)$$
$$(\delta > 0),$$

где $c > 0$ не зависит от f, x и δ.

В 2.3 определяется гармоническая осцилляция и изучается ее связь с Φ-осцилляцией и средней осцилляцией первого порядка.

Пусть $P(x)$– ядро Пуассона для R^n, т.е $P(x) = c_n \cdot \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$, $c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}$, $P_r(x) := r^{-n} P\left(\frac{x}{r}\right)$ $(r > 0)$ и пусть $f \in L_{loc}^1(R^n)$, $P_r f(x) := (P_r * f)(x) = \int\limits_{R^n} f(t) P_r(x-t) dt$.

Величину $\int\limits_{R^n} |f(t) - P_r f(x)| P_r(x-t) dt$ назовем гармонической осцилляцией функции f. Введем также следующие обозначения:

$$h_f(x;\delta) := \sup_{0<r\le\delta} \int\limits_{R^n} |f(t) - P_r f(x)| P_r(x-t) dt \qquad \left(x \in R^n, \ \delta > 0\right),$$

$$H_f(\delta) := \sup\left\{h_f(x;\delta) : \ x \in R^n\right\}, \qquad \delta > 0.$$

Доказана лемма 2.3.1, которая показывает, что гармоническая осцилляция эквивалентна некоторой Φ-осцилляции первого порядка, где в качестве функции Φ выбирается ядро Пуассона $P(x)$. Отсюда следует, что

$$h_f(x;\delta) \approx h_f^{1,1}(x;\delta) \ \left(x \in R^n, \ \delta > 0\right), \quad H_f(\delta) \approx H_f^{1,1}(\delta) \quad (\delta > 0).$$

(Если функции f и g определены на множестве $X \subset R^m$, то запись $f(x) \approx g(x)$, $(x \in X)$, означает, что выполняются условия $f(x) = O(g(x))$,

$(x \in X)$, и $g(x) = O(f(x))$, $(x \in X)$).

Следует отметить, что вариант характеристики $H_f(\delta)$ для периодических функций встречается в [7].

В 2.4 исследуются некоторые свойства функций из пространства средней осцилляции высшего порядка $BMO^k_{\varphi,\theta}$ в терминах Φ-осцилляции. Найдены эквивалентные условия для принадлежности функции пространству $BMO^k_{\varphi,\theta}$ в терминах Φ-осцилляции и гармонической осцилляции.

Модуль средней осцилляции k-го порядка $(k \in N)$ локально суммируемой функции f определяется равенством $M^k_f(\delta) := M^k_f(\delta)_1 \quad (\delta > 0)$.

Через Ψ обозначим класс всех положительных монотонно возрастающих на $(0,+\infty)$ функций $\varphi(t)$ таких, что $\varphi(+0) = 0$. По определению функцию $\varphi(t) \equiv 1$ тоже будем считать элементом класса Ψ. Через Ψ_k обозначим совокупность всех функций $\varphi \in \Phi$ таких, что $\dfrac{\varphi(t)}{t^k}$ почти убывает (для определения понятия почти убывания см. конец раздела 1.1).

Пусть $\varphi \in \Psi_k$, $k \in N$, $1 \le \theta \le \infty$. Через $BMO^k_{\varphi,\theta}$ обозначим совокупность всех функций $f \in L_{loc}(R^n)$, для которых $\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}} < +\infty$, где

$$\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}} := \left(\int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{M}^k_f(t)}{\varphi(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \text{ при } 1 \le \theta < \infty,$$

с соответствующей модификацией в случае $\theta = \infty$.

Отметим, что пространства $BMO^k_{\varphi,\theta}$ впервые были введены в Эти пространства являются банаховыми относительно указанной выше нормы.

[7] Blasco O., Perez M.A. On functions of integrable mean oscillation. Rev. Mat. Complut., 2005, v.18, #2, p.465-477.

Пусть $f \in L_{loc}(R^n)$, $\alpha > 0$, $k \in N$, $\varphi \in \Psi_k$. Будем пользоваться также следующими обозначениями

$$\mathrm{A}_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}(f) := \left(\int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{H}_f^{k,\alpha}(t)}{\varphi(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad \text{при } 1 \le \theta < \infty ,$$

$$\mathrm{A}_{\varphi,\infty}^{k,\alpha}(f) := \sup \left\{ \frac{\mathrm{H}_f^{k,\alpha}(t)}{\varphi(t)} : \ \mathrm{t} > 0 \right\}.$$

Пусть $\varphi \in \Psi_k$, $k \in N$, $1 \le \theta \le \infty$, $\alpha > 0$, $k < \alpha + 1$. Через $HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}$ обозначим совокупность всех функций $f \in L_{loc}(R^n)$, для которых $A_{\varphi,\theta}^{k,\alpha} < +\infty$. Норму в этом классе введем следующим равенством

$$\|f\|_{HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}} := A_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}.$$

Доказаны теоремы 2.4.1, 2.4.2 и 2.4.3, из которых в свою очередь получается следующая теорема.

Теорема 2.4.4. Пусть $\alpha > 0$, $k = (\alpha) + 1$, $1 \le \theta \le \infty$, $\varphi \in \Psi_k$ и выполняется условие (2.34). Тогда $HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha} = BMO_{\varphi,\theta}^k$ и их нормы эквивалентны.

Из доказанных утверждений, как частные случаи получены соответствующие утверждения, касающиеся случаю модуля гармонической осцилляции $H_f(\delta)$ (следствия 2.4.1 и 2.4.2).

В 2.5 исследуется поведение многомерного сингулярного интегрального оператора $A_k f$ в пространстве $HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}$.

Сначала получены оценки характеристики $H_{\tilde{f}}^{k,\alpha}(\delta)$ образа $\tilde{f} = A_k f$ оператора A_k через характеристику $H_f^{k,\alpha}(\delta)$ самой функции f (теорема 2.5.1). Далее, в основном, опираясь на эти оценки и теорему 2.4.4 доказана следующая теорема.

---

[8]Рзаев Р.М. Об ограниченности многомерного сингулярного интеграль-ного оператора в пространствах $BMO_{\varphi,\theta}^k$ и $H_{\varphi,\theta}^k$. Труды Азерб. матем. об-ва, 1996, т.2, с.164-175.

Теорема 2.5.2. Пусть $\alpha > 0$, $k \in N$, $k < \alpha + 1$, $1 \le \theta \le \infty$, $\mu = \min\{\alpha, k\}$, $\varphi \in Z_\mu$. Тогда оператор A_k ограниченно действует в пространстве $HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}$.

Далее в этом параграфе сформулированы утверждения об ограниченном действии оператора A_1 в пространствах, определяемых условиями на модуль гармонической осцилляции (следствия 2.5.1 и 2.5.2).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора список которых приводится в конце автореферата.

Пользуясь случаем автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Р.М.Рзаеву за полезные обсуждения, ценные замечания и поддержку.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Алиева Л.Р. О некоторых локальных свойствах преобразования Гильберта. Тезисы Междунар. конф. по мат. и мех., посв. 50-летнему юбилею проф. И.Т.Мамедова. Баку, 2005, с.35.
2. Алиева Л.Р. Некоторые неравенства для средней и гармонической осцилляций. Тезисы Междунар. конф. по мат. и мех., посв. 70-летию со дня рожд. акад. А.Д. Гаджиева. Баку, 2007, с.24.
3.Алиева Л.Р. Об условиях, характеризующих некоторые пространства средней осцилляции. Спектральная теория и ее приложения. Тезисы Междунар. конф., посв. 80-летнему юбилею акад. Ф.Г. Максудова. Баку, 2010, с.49-50.
4. Рзаев Р.М., Алиева Л.Р. Некоторые оценки для Φ- осцилляции. Тезисы Межд. конф. по матем. и мех., посв. 50-летию ИММ НАН Азерб., Баку, 2009, с.262.
5. Aliyeva L.R. Some local properties of singular integral in terms of mean oscillation. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 2006, v.26, #7, p.9-16.
6. Aliyeva L.R. Equivalent norms in spaces of mean oscillation. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 2011, v.31, #4, p.19-26.

7. Rzaev R.M., Aliyeva L.R. On some local properties of functions. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 2005, v.25, #4, p.111-118.
8. Rzaev R.M., Aliyeva L.R. On local properties of functions and singular integrals in terms of the mean oscillation. Cent. Eur. J. Math., 2008, v.6, №4, p.595-609.
9. Rzaev R.M., Aliyeva L.R. Mean oscillation, Φ-oscillation and harmonic oscillation. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 2010, v.30, #1, p.167-176.
10. Aliyeva L.R. Ismayilova A.F. Some local properties of singular integral in terms of mean oscillation. Материалы «3-ей Республиканской инновативной идейной ярмарки молодых ученых», 2013, p.17-18.

LALƏ RƏHMAN qızı ƏLİYEVA

ORTA OSSİLLYASİYA TERMİNLƏRİNDƏ SİNQULYAR İNTEQRALLARİN STRUKTUR XASSƏLƏRİNİN TƏDQİQİ

X Ü L A S Ə

Dissertasiya işi orta ossillyasiya terminlərində lokal cəmlənən funksiyaların və çoxölçülü sinqulyar inteqralların lokal və qlobal struktur xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunub.

Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakılardır:

- Nöqtənin verilmiş funksiyanın d^k nöqtəsi olması üçün yüksək tərtibli orta ossilyasiya terminlərində kafi şərtlər tapılmışdır;
- f funksiyasının verilmiş nöqtədə L^p mənada k tərtibli törəməsinin olması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır;
- f funksiyasının k -tərtibli orta ossilyasiyası ilə təsvir olunan və sinqulyar inteqral operatora nəzərən invariant olan lokal xassələri göstərilmişdir;
- f funksiyasının x_0 l_p^k nöqtəsinin (yəni f funksiyasının L^p mənada k tərtibli törəməsinin mövcud olduğu x_0 nöqtəsinin) çoxölçülü sinqulyar inteqral operatora nəzərən saxlanılması (invariant qalması) üçün kafi şərtlər tapılmışdır;
- k tərtibli Φ -ossilyasiyanı həmin tərtibli orta ossilyasiya ilə əlaqələndirən bərabərsizliklər isbat olunmuşdur;
- Çoxölçülü sinqulyar inteqral operatorun funksiyanın Φ ossilyasiyası üzərinə olan şərtlərlə təyin olunan fəzalarda məhdud təsir etməsi haqda teoremlər isbat olunmuşdur.

LALA RAHMAN gizi ALİYEVA

RESEARCH OF THE STRUCTURAL PROPERTİES OF SİNQULAR İNTEGRALS İN TERMS OF THE MEAN OSCİLLATİON

SUMMARY

Dissertation work is devoted to research on local and global properties of functions and multidimensional singular integrals in terms of their mean oscillation. In the dissertation work the following main results are obtained:

- Sufficient conditions for the point be a d^k–point of the given function were found in the terms of higher order mean oscillation;
- Necessary and sufficient conditions for the function f at the given point have a derivative of order k in the sense of L^p were found;
- Local properties of the function f, described by the k-th order mean oscillation, that are invariant with respect to singular integral operator, are indicated;
- Sufficient conditions for preservation of l_p^k-point of the x_0 of the function f (i.e. of the point x_0 where the function f has a k order derivative in the sense of L^p) with respect to multidimensional singular integral operator, were found;
- The inequalities connecting the Φ-oscillation of k-th order with the mean oscillation of the some order, were proved;
- Theorems on bounded action of a multidimensional singular integral operator in the spaces, determined by the conditions on Φ-oscillation of the function, were proved.