

**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ**  
**BAKİ DÖVLƏT UNİVERSİTETİ**

---

*Əlyazması hüququnda*

**MƏQSƏD YUSİF OĞLU ƏFƏNDİYEV**

**RELYATİVİSTİK KVANT SİSTEMLƏRİNİN**  
**SONLU-FƏRQ TƏNLİKLƏRİN KÖMƏYİLƏ TƏDQIQI**

**1212.01- Riyazi fizika tənlikləri**

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim  
olunmuş dissertasiyanın

**AVTOREFERATI**

**Bakı – 2016**

Dissertasiya işi Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Fizika İnstitutunda yerinə yetirilmişdir.

**Elmi rəhbər:** fizika-riyaziyyat elmləri doktoru  
professor Nağıyev Şakir Məmməd oğlu

**Rəsmi opponetlər:** riyaziyyat üzrə elmlər doktoru,  
professor Qəhrəmanov Polad Fərrux oğlu

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi,  
dosent Rəcəbov Məmməd Rəcəb oğlu,

**Aparıcı təşkilat:** Azərbaycan Dövlət Pedaqoji  
Universiteti ("Riyazi analiz"  
kafedrası)

Müdafiə 14 iyun 2016-cı il saat 14<sup>00</sup>-da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdindəki B/FD.02.016 Dissertasiya Şurasının iclasında olacaqdır

**Ünvan:** AZ1148, Bakı şəhəri, Z.Xəlilov küçəsi 23, Bakı Dövlət Universiteti

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin kitabxanasında tanış olmaq olar.

Avtoreferat " 12 " may 2016-cı il göndərilmişdir

**B/FD.02.016 Dissertasiya  
Şurasının elmi katibi  
riyaziyyat üzrə elmlər doktoru,  
professor**

**Natiq Qarakişi oğlu Əhmədov**

## İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

**Mövzunun aktuallığı.** Kvant sistemlərinin davranışını təsvir etməyin əsas vasitələri dalğa tənlikləri və səpilmə amplitudu üçün tənliklərdir. Dalğa tənliklərinə həm relyativistik dalğa tənlikləri kimi, həm də qeyri-relyativistik dalğa tənlikləri kimi baxmaq olar. Relyativistik dalğa tənlikləri Eynşteynin xüsusi nisbilik nəzəriyyəsini nəzərə alır və işıq sürətinə yaxın sürətlərə malik olan kvant obyektlərini təsvir etmək üçün yararlıdır.

Kvant sistemlərini, elementar zərrəciklərin fundamental qarşılıqlı təsirini təsvir etmək üçün ardıcıl relyativistik aparat qurmağın nəzəri əsasını kvant sahə nəzəriyyəsi təşkil edir. Elementar zərrəciklər oblastının materiyanın quruluşu ilə bağlı sonrakı inkişafı ilk növbədə məhz fundamental qarşılıqlı təsirlər nəzəriyyəsinin qabaqlayıcı inkişafından asılıdır.

Kvant sahə nəzəriyyəsində relyativistik zərrəciyin hərəkəti Dirak tənliyiylə, ikizərrəcikli sistemlərin hərəkəti isə Bete-Solpiter tənliyiylə təsvir olunur. Bu tənliklər dördölçülü Feynman-Dayson formalizmi əsasında alınmışdır və adronların relyativistik modellərini qurmaq üçün istifadə olunmuşdur. Lakin adronların 4-ölçülü Bete-Solpiter tənliyinə əsaslanan tərkib modelləri bir sıra çətinliklərlə bağlıdır. Məsələn, bu tənliyin həlli olan ikizərrəcikli dalğa funksiyası əlavə olaraq sistemi təşkil edən zərrəciklərin nisbi  $t_1 - t_2$  zamanından aslıdır və bunun da qeyri-relyativistik kvant mexanikasında analoqu yoxdur. Bundan başqa zərrəciklər arasında zamana bənzər interval  $(x_1 - x_2)^2 > 0$  olduqda dalğa funksiyasına ehtimal şərhini vermək çətinlik törədir.

Kvazipotensial yanaşma göstərilən çətinliklərdən azaddır. Kvazipotensial yanaşmanın əsas ideyası kvant sahə nəzəriyyəsinin dördölçülü formalizminə əsaslanaraq, relyativistik səpilmə amplitudunun analitik xassələrini nəzərə alaraq, ikizərrəcikli relyativistik sistemin Şredinger və Lippman-Şvinger tipli tənliklərin köməyiylə üçölçülü təsvirini verməkdən ibarətdir.

Biz kvant sahə nəzəriyyəsinin kovariant Hamilton şərhinə əsaslanan kvazipotensial yanaşmadan istifadə edəcəyik.

Bu halda hərəkət tənlikləri impuls fəzasının həndəsəsinə (Lobaçevski həndəsəsinə) nəzərən mütləq xarakter daşıyır, yəni formasına nəzərən uyğun qeyri-relyativistik Lippman–Şvinger tənliyindən və Şredinger tənliyindən seçilmir. Relyativistik tənlikləri uyğun qeyri–relyativistik tənliklərindən almaq olar. Bunun üçün sonuncu tənliklərdə enerjinin, həcm elementinin və  $\delta$ –funksiyanın qeyri–relyativistik (evklid) ifadələrini onların relyativistik (qeyri-evklid) analoqları ilə əvəz etmək lazımdır:

Hərəkət tənliklərinin həndəsi xassələri onlara Lorens qrupunda relyativistik Furry çevrilməsi aparatını tətbiq etməyə və üçölçülü relyativistik konfigurasiya  $\vec{r}$  -fəzası anlayışı daxil etməyə imkan verir.

Relyativistik  $\vec{r}$  -fəzasına keçid dalğa funksiyasını Lorens qrupunun sonsuz unitar təsvirləri («relyativistik müstəvi dalğalar»)

$$\xi(\vec{p}, \vec{r}) = \left( \frac{p_0 - \vec{p}\vec{n}}{Mc} \right)^{-1 - ir/\lambda} \quad (1)$$

üzrə sıraya ayırmaqla yerinə yetirilir. Burada  $\vec{r} = r\vec{n}$ ,  $\vec{n}^2 = 1$ ,

$0 < r < \infty$ ,  $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2 c^2}$ ,  $\lambda = \hbar / Mc$  zərrəciyin Kompton dalğa uzunluğudur.

Relyativistik konfigurasiya  $\vec{r}$  - fəzasında

$$[H_0 + V(r, E_q)]\Psi_q(\vec{r}) = E_q \Psi_q(\vec{r}). \quad (2)$$

dalğa tənliyi sonlu-fərq tənliyidir.

(2)-də  $H_0$  -sərbəst Hamilton operatoru (relyativistik kinetik enerji operatoru) addımı Kompton dalğa uzunluğuna bərabər olan sonlu-fərq operatorudur:

$$H_0 = Mc^2 ch(i\lambda\partial_r) + \frac{i\hbar c}{r} sh(i\lambda\partial_r) - \frac{\hbar^2 \Delta_{\theta,\varphi}}{2Mr^2} e^{i\hbar\partial_r}, \quad (3)$$

$\Delta_{\theta,\varphi}$  - üçölçülü Laplas operatorunun bucaqlardan asılı olan hissəsidir.

(1) relyativistik müstəvi dalğaları  $H_0$  operatorunun məxsusi funksiyalarıdır:

$$\hat{H}_0 \xi(\vec{p}, \vec{r}) = E_p \xi(\vec{p}, \vec{r}).$$

(2) tənliyinin sonlu-fərq xarakterini və  $\vec{r}$  vektorunun qrup-nəzəri interpretasiyasını nəzərə alaraq, bu sxemə kovariant qəfəs üzərində qurulmuş relyativistik kvant mexanikası kimi baxa bilərik.

Bu relyativistik mexanika qeyri-relyativistik kvant mexanikasının bir çox xassələrinə malikdir.

Relyativistik sonlu fərq kvant mexanikasının bəzi aspektləri təqdim olunan dissertasiya işinin mövzusunun təşkil edir və ona görə aktualdır.

Digər tərəfdən nəzəri fizikanın bir sıra bölmələrində, xüsusilə kvant optikasında və radiofizikada koherent hallar adlanan hallar geniş istifadə olunur. Bunlar Hilbert fəzasında ifrat tam və qeyri-ortoqonal hallar sistemidir.

Koherent hallar metodu müasir kvant nəzəriyyəsinin mühüm metodlarından biridir.

Koherent hallar dinamik simmetriyaya malik olan fiziki məsələlərdə təbii olaraq yaranır. Məsələn olaraq zəif qeyri-ideal Bozeqazın ifrat axıcılığı və zəif qeyri-ideal Fermiqazın ifrat-keçiriciliyi, zamandan periodik asılı əmsallı udulma və doğulma operatorlarına nəzərən kvadratik Hamiltonianın kvazienerji spektri, spinin dəyişən maqnit sahəsində hərəkəti, xarici dəyişən qüvvənin təsiri altında kvant ossilyatoru, kvant ossilyatorunun parametrik həyəcanlanması, dəyişən bircins xarici sahədə cütün yaranması və s. haqqındakı məsələləri göstərə bilərik.

Koherent hallar çox vaxt xassələri klassik halların xassələrinə ən yaxın olan kvant hallarıdır. Ona görə də onlar ən təbii şəkildə klassik haldan kvant halına keçməyə imkan verir.

Koherent hallar metodu Li qrupunun təsvirləri nəzəriyyəsinin riyazi məsələlərinə baxdıqda da çox faydalıdır.

**Təqdim olunan dissertasiyanın məqsədi** relyativistik kvant sistemlərini sonlu-fərq hərəkət tənliklərinin köməyiylə tədqiq etməkdən ibarətdir.

**Tədqiqat metodları.** Tədqiqat zamanı relyativistik kvant sahə nəzəriyyəsinin, qrup nəzəriyyəsinin, relyativistik kvant mexanikasının metodlarından, diferensial və sonlu-fərq tənliklərin həlli üsullarından istifadə olunmuşdur.

**Elmi yenilik.** Dissertasiyada ilk dəfə olaraq relyativistik ikiölçülü konfigurasiya  $\vec{r}$  - fəzası daxil edilmiş, sərbəst iki ölçülü Hamilton və impuls sonlu-fərq operatorları qurulmuşdur. Relyativistik ikiölçülü dəqiq həll olunan sonlu-fərq Kulon məsələsinə və sonlu-fərq harmonik ossilyator modelinə baxılmış, onların enerji səviyyələri tapılmışdır.

Relyativistik  $N$  - ölçülü sonlu-fərq sinqulyar ossilyator modeli təklif olunmuş və həll edilmişdir. Relyativistik xətti və üçölçülü sonlu-fərq sinqulyar ossilyator modelləri üçün ümumiləşmiş koherent hallar qurulmuşdur. Relyativistik sərbəst zərrəciyin və xətti harmonik ossilyatorun propaqatorları hesablanmışdır.

**İşin nəzəri və praktik əhəmiyyəti.** Dissertasiyada təklif olunmuş modellər (relyativistik Kulon məsələsi, relyativistik ossilyator modeli, relyativistik  $N$  - ölçülü sinqulyar ossilyator modeli), onların dalğa funksiyaları elementar zərrəciklər fizikasında, relyativistik nüvə fizikasında mürəkkəb tərkibli sistemlərin müxtəlif dinamik xarakteristikalarının hesablanması üçün baza rolunu oynayır. Relyativistik  $N$  -ölçülü sinqulyar ossilyator modeli, bir-birilə qarşılıqlı təsirdə olan çoxcisimli relyativistik sistemlərin modelləşdirilməsində çıxış nöqtəsini təşkil edir.

Dissertasiyada alınmış nəticələr nəzəri və riyazi fizika məsələlərinin həlli zamanı tətbiq oluna bilər. Alınan nəticələr xüsusi funksiyalar nəzəriyyəsi baxımından da böyük əhəmiyyət kəsb edir.

**İşin aprobasiyası.** Dissertasiya işinin əsas nəticələri

1. AMEA Fizika İnstitutunun elmi seminarlarında;
2. AMEA aspirantlarının elmi konfranslarında (Bakı, 2008 və 2009);
3. “Fizikanın Müasir Problemləri” adlı I Respublika konfransında (Bakı Dövlət Universiteti, 2007, Bakı);
4. “Alternativ və bərpa olunan enerji mənbələrindən istifadənin perspektivləri” adlı elmi konfransda (Radiasiya Problemləri İnstitutu, 1-2 iyun 2011-ci il, Bakı) müzakirə edilmişdir.

**Çap.** Dissertasiya mövzusu üzrə Beynəlxalq və Respublika elmi jurnallarında 5 məqalə və Respublika elmi konfranslarında 4 məruzə çap olunmuşdur.

**Dissertasiyanın həcmi və quruluşu.** Dissertasiya girişdən, dörd fəsilədən, əsas nəticələrdən və istifadə olunmuş 108 adda ədəbiyyat siyahısından ibarət olmaqla, 123 səhifədə yerləşir.

## İŞİN QISA MƏZMUNU

**Girişdə** dissertasiya mövzusunun aktuallığı əsaslandırılmış, işin məqsədi, elmi yeniliyi, nəzəri və praktiki əhəmiyyəti göstərilmiş, müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar müəyyən edilmişdir. Burada həmçinin işin quruluşu barədə məlumatlar verilmişdir.

**Birinci fəsil** relyativistik konfigurasiya fəzasında ikiölçülü Kulon məsələsinin formulə edilməsinə və ətraflı tədqiqinə həsr edilmişdir.

1.1 və 1.2 xülasə xarakterlidir. 1.1-də qeyri-relyativistik ikiölçülü kvant mexanikasının bəzi aspektləri, 1.2-də qeyri-relyativistik ikiölçülü Kulon məsələsi şərh olunmuşdur.

1.3-də relyativistik iki ölçülü sonlu-fərq kvant mexanikası şərh olunmuş, relyativistik ikiölçülü konfigurasiya  $\vec{r} \equiv \vec{r}(x, y)$  fəzası anlayışı daxil edilmişdir.

**Teorem 1.** Relyativistik 2 ölçülü sərbəst Hamilton operatoru  $\hat{H}_0$  və relyativistik impuls operatoru  $\vec{p}$  aşağıdakı şəkilə malikdirlər:

$$H_0 = Mc^2 \left[ chi\hat{\lambda}\partial_r + \frac{i\hat{\lambda}}{2r} shi\hat{\lambda}\partial_r - \frac{\hat{\lambda}^2}{r(2r + i\hat{\lambda})} \partial_\varphi^2 e^{i\hat{\lambda}\partial_r} \right], \quad (4)$$

$$\vec{p} = Mc\vec{n} \left( \frac{H_0}{Mc^2} - e^{i\hat{\lambda}\partial_r} \right) - \vec{m} \frac{\hbar}{r + i\hat{\lambda}/2} e^{i\hat{\lambda}\partial_r} \quad (5)$$

burada

$$\vec{r} = r\vec{n}, \quad \vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi), \quad \vec{n}^2 = 1,$$

$$\vec{m} = (-i\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}, i\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}).$$

$H_0$  və  $\vec{p}$  -operatorlarının ortaq məxsusi funksiyaları olan

$$\xi(\vec{p}, \vec{r}) = \left( \frac{p_0 - \vec{p}\vec{n}}{Mc} \right)^{-\frac{1}{2} - ir/\lambda} \quad (6)$$

relyativistik müstəvi dalğalar qurulmuşdur

(6) funksiyaları ortoqonal və tam sistem əmələ gətirir və  $H_0$  və  $\vec{p}$  operatorlarının ortaq məxsusi funksiyalarıdır. 1.3-də həmçinin göstərilmişdir ki, (4), (5) və (6) ifadələri düzgün qeyri-relyativistik limitə malikdir.

1.4-də dəqiq həll olunan relyativistik ikiölçülü sonlu-fərq Kulon məsələsi öyrənilmişdir. Bu məsələ

$$H\psi(\vec{r}) \equiv (H_0 - \frac{\alpha}{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(r) \quad (7)$$

tənliyi ilə təsvir olunur.  $H$  və  $\widehat{L} = -i\partial_\phi$  operatorları kommutasiya etdiyindən, (7) tənliyinin həlləri aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$\psi(\vec{r}) = \left[ \left( -\frac{r}{\chi} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} R(r) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, \quad (8)$$

burada  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  kvant ədədləri  $\widehat{L}$  operatorunun məxsusi qiymətləridir.

$R(r)$  radial dalğa funksiyaları Meyksner-Pollaçek çoxhədlilərlə aşağıdakı kimi ifadə olunur

$$R_{n|m}(r) = C_{n|m}(\rho)^{(|m|+1/2)}. e^{-\chi_n \rho} P_{n-|m|-1}^{(|m|+1/2)}(-\rho; \chi_n) \quad (9)$$

Enerjinin (9) dalğa funksiyalarına uyğun məxsusi qiymətləri (enerji spektri)

$$E_n = Mc^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\hbar^2 c^2 (n-1/2)^2}} \quad (10)$$

şəklinə malikdir, (burada  $n=0,1,2,3,\dots$  baş kvant ədədidir və  $|m| = 0,1,2,\dots, n-1$ -dir)

(10) ifadəsindən görünür ki, qeyri-relyativistik halda olduğu kimi, relyativistik sonlu-fərq ikiölçülü Kulon məsələsinin enerji spektri cırlaşandır və cırlaşma dərəcəsi  $g(n) = 2n - 1$ -ə bərabərdir.

1.4-də (9) və (10) ifadələrinin qeyri-relyativistik limitləri də hesablanmışdır.

**Teorem 2.** (7) tənliyinin həlli

$$\psi(\vec{r}) = R(r) \phi_m(\phi)$$

şəklinə malikdir (burada  $R(r)$  radial dalğa funksiyasıdır).

**İkinci fəsil** relyativistik ikiölçülü sonlu-fərq harmonik ossilyator modelinə həsr olunmuşdur.

2.1-də qeyri-relyativistik ikiölçülü harmonik ossilyatora baxılmış, onun xassələri araşdırılmışdır.



2.2-də relyativistik ikiölçülü sonlu-fərq harmonik ossilyator modeli qurulmuş və ətraflı öyrənilmişdir.

Bu model  $\vec{r}(x, y)$  fəzasında

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} M\omega^2 \frac{r + i\tilde{\lambda}}{r + i\tilde{\lambda}/2} \left[ r(r + i\tilde{\lambda}) - \tilde{\lambda}^2 b\partial_\varphi^2 \right] e^{i\tilde{\lambda}\partial_r} \quad (11)$$

qarşılıqlı təsir potensialı ilə xarakterizə olunur və aşağıdakı şərtləri ödəyir:

- 1) dəqiq həll olunur,
- 2) dinamik simmetriyaya malikdir,
- 3) düzgün qeyri-relyativistik  $\lim_{c \rightarrow \infty} V(r) = \frac{1}{2} M\omega^2 r^2$  limitinə malikdir:

(11) potensial enerji operatoru

$$(\psi, \phi) = \int \psi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d\vec{r} \quad (12)$$

skalyar hasilinə nəzərən ermitdir.

**Teorem 5.** (11) operatoru (12) skalyar hasilinə nəzərən ermitdir:  $V^+(r) = V(r)$ .

Relyativistik ikiölçülü harmonik ossilyator modelini təsvir edən sonlu-fərq tənliyi

$$H\psi(\vec{r}) \equiv [H_0 + V(\vec{r})]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (13)$$

şəklindədir. Məsələn aksial simmetriyaya malik olduğundan dalğa funksiyasının bucaqdan asılı hissəsi (8) şəklinə malikdir.

Radial dalğa funksiyası üçün

$$\begin{aligned} & \left[ \text{chi}\partial_\rho + \frac{a}{2\rho^{(2)}} e^{\hat{\rho}} + \frac{1}{2} \omega_0^2 (\rho^{(2)} + \gamma) e^{\hat{\rho}} \right] R_{|m|}(\rho) = \\ & = \frac{E_{|m|}}{Mc^2} R_{|m|}(\rho) \end{aligned} \quad (14)$$

tənliyi alınır.

Burada

$$a = m^2 - \frac{1}{4}, \quad \gamma = \text{bm}^2, \quad \rho^{(2)} = \rho(\rho + i) \quad \text{və} \quad \rho = r/\tilde{\lambda}, \quad \omega_0 = \hbar\omega/Mc^2$$

uyğun olaraq adsız parametr və dəyişəndir.

(14) tənliyinin  $R_{|m|}(0) = R_{|m|}(\rho) = 0$  sərhəd şərtlərini ödəyən həllini

$$R_{|m|}(\rho) = C_{|m|}(-\rho)^{(a)} Z_\nu(\rho)\Omega(\rho). \quad (15)$$

şəklində axtaraq

Biz  $\alpha$  və  $\nu$  parametrlərini elə seçək ki,

$$(-\rho)^{(\alpha)} = i^\alpha \frac{\Gamma(i\rho + \alpha)}{\Gamma(i\rho)} \quad \text{və} \quad Z_\nu(\rho) = \omega_0^{i\rho} \Gamma(i\rho + \nu)$$

funksiyaları dalğa funksiyasının  $\rho = 0$  və  $\rho = \infty$  nöqtələrindəki asimptotikalarını təyin etsin.

(15) –i (14)-də yazaq:

$$(A_1 e^{-i\tilde{\rho}} - B_1 e^{i\tilde{\rho}}) \Omega(\rho) = 2i\rho \frac{E_{|m|}}{\hbar\omega} \Omega(\rho). \quad (16)$$

$\alpha$  və  $\nu$  parametrlərini

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2\left(\gamma + \frac{1}{\omega_0^2} - \sqrt{\left(\gamma + \frac{1}{\omega_0^2}\right)^2 - \frac{4a}{\omega_0^2}}\right)},$$

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 2\left(\gamma + \frac{1}{\omega_0^2} + \sqrt{\left(\gamma + \frac{1}{\omega_0^2}\right)^2 - \frac{4a}{\omega_0^2}}\right)}$$

şəklində seçsək,  $A_1$  və  $B_1$  -lər

$$A_1 = (\alpha + i\rho)(\nu + i\rho), \quad B_1 = (\alpha - i\rho)(\nu - i\rho) \quad (17)$$

qaydası ilə təyin edilir.

$R_{|m|}(\infty) = 0$  sərhəd şərtinin ödənməsi üçün  $\Omega(\rho)$  funksiyası çoxhədli olmalıdır. Bu isə

$$E_n = \hbar\omega(2n + \alpha + \nu), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

enerjinin kvantlanması şərtinə gətirib çıxarır.

(17) tənliyinin həlləri kəsilməz dual Han çoxhədlilərilə

$$\Omega_n(\rho) = S_n(\rho^2; \alpha_2; \nu, \frac{1}{2}). \quad (19)$$

kimi ifadə edilir.

Relyativistik ikiölçülü sonlu-fərq harmonik ossilyatorun dalğa funksiyalarının radial hissəsi

$$\int_0^\infty R_{n'|m'}^*(\rho) R_{n|m}(\rho) d\rho = \delta_{nn'} \quad (20)$$

düsturu ilə normallaşdırılır.

2.3-də sonlu-fərq faktorizasiya metodunun köməyilə rel-yativistik ikiölçülü harmonik ossilyatorun dinamik simmetriya  $SU(1,1)$  qrupu

qurulmuş və göstərilmişdir ki, bu qrupun generatorları sonlu-fərq operatorları olub aşağıdakı kommutasiya münasibətlərini ödəyir:

$$[K_0 K^\pm] = \pm K_0^\pm, \quad [K^\pm, K^\mp] = 2K_0,$$

Burada

$$K_0 = \frac{1}{2\hbar\omega} \tilde{H}^{rad} = \frac{1}{2\omega_0} \left[ chi \partial_\rho + \frac{a}{2\rho^{(2)}} e^{i\partial_\rho} + \frac{\omega_0}{2} (\rho^{(2)} + \gamma) e^{i\partial_\rho} \right],$$

$$K^- = A^- f^{-1/2} (\tilde{H}^{rad}), \quad K^+ = f^{1/2} (\tilde{H}^{rad}) A^+, \quad (21)$$

$$A^\pm = \frac{1}{2\omega_0} \left[ (\omega_0 \rho \mp \frac{i}{Mc} P)^2 - \frac{a}{\rho^2 + 1} \right]$$

$$P = -Mc \left[ shi \partial_\rho + \frac{1}{2} \omega_0^2 \rho^{(2)} e^{i\partial_\rho} + \frac{a}{\rho^{(2)}} e^{i\partial_\rho} \right]$$

2.4-də alınmış relyativistik ifadələrin qeyri-relyativistik limitləri hesablanmışdır.

**Üçüncü fəsil** relyativistik N-ölçülü sonlu-fərq sinqulyar ossilyator modelinin qurulmasına və ətraflı tədqiqinə həsr olunmuşdur.

3.1-də qeyri-relyativistik N-ölçülü sinqulyar ossilyatorun xassələri öyrənilir.

3.2-də relyativistik N-ölçülü konfigurasiya fəzasına baxılmış və bu fəzada sonlu-fərq hərəkət tənlikləri yazılmışdır. Onların əsasında relyativistik N-ölçülü sonlu-fərq kvant mexanikası inkişaf etdirilmişdir.

3.3-də relyativistik N-ölçülü sonlu-fərq sinqulyar ossilyator modeli qurulmuş və tədqiq edilmişdir.

Modeli təsvir edən hərəkət tənliyi

$$H^{(N)} \psi(\vec{r}) \equiv [H_0^{(N)} + V(r)] \psi(\vec{r}_N) = E \psi(\vec{r}_N) \quad (22)$$

şəklindədir. Burada

$$H_0^{(N)} = Mc^2 \left\{ chi \hat{\lambda} \partial_r + \frac{i \hat{\lambda} N(N-1)}{2r} shi \hat{\lambda} \partial_r - \frac{\hat{\lambda}^2 \nabla_0^{(N)}}{r[2r - i \hat{\lambda} (N-3)]} e^{i \hat{\lambda} \partial_r} \right\} \quad (23)$$

sərbəst Hamilton operatoru,

$$V(r) = \left\{ \frac{1}{2} M \omega^2 \frac{r(r + i \hat{\lambda})^2}{r - i \hat{\lambda} (N-3)/2} + \frac{g}{r[r - i \hat{\lambda} (N-3)/2]} \right\} e^{i \hat{\lambda} \partial_r} \quad (24)$$

isə kvazipotensialdır.

$H^{(N)}$  operatoru  $SO(N, I)$  hərəkət qrupuna nəzərən invariant olduğundan,  $\psi(\vec{r}_N)$  dalğa funksiyasının bucaqlardan asılılığı

$$\psi(\vec{r}_N) = \psi_\ell(r) Y_N^\ell(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{N-1}) \quad (25)$$

standart formasına malikdir.

$H^{(N)}$  operatorunun məxsusi funksiyalarının radial hissəsi kəsilməz dual Han çoxhədlilərilə aşağıdakı qaydada ifadə olunur:

$$\psi_{n\ell}(r) = C_{n\ell} \left[ (-\rho)^{\left(\frac{N-1}{2}\right)} \right]^{-1} (-\rho)^{(\alpha_L)} \omega_0^{i\rho} \Gamma(i\rho + \nu_L) \cdot S_n(\rho^2, \alpha_L, \nu_L, 1/2), \quad (26)$$

Onlara uyğun məxsusi qiymətləri isə

$$E_{n\ell} = \hbar\omega(2n + \alpha_L + \nu_L) \quad (27)$$

şəklindədir.

(25) dalğa funksiyalarının normallaşma şərti

$$\int |\psi_{n\ell}(\vec{r}_N)|^2 w_N^-(r) d^N \vec{r} = 1.$$

şəklindədir.

3.4-də relyativistik N-ölçülü sonlu-fərq sinqulyar ossilyatorun dinamik simmetriya qrupu qurulmuş,  $K_0, K^\pm$  qrup generatorlarının aşkar şəkilləri tapılmış və sırf cəbri yolla (27) enerji spektri təyin edilmişdir.

**Dördüncü fəsil** relyativistik xətti və üçölçülü sonlu-fərq kvant sistemlərinin ümumiləşmiş koherent hallarının və pro-paqaqatorlarının qurulmasına həsr olunmuşdur.

4.1-də relyativistik xətti sonlu-fərq sinqulyar ossilyator modelinə baxılmış, sistemin dalğa funksiyalarının və enerji spektrinin aşkar ifadələri verilmişdir.

4.2 relyativistik üçölçülü sonlu-fərq sinqulyar ossilyatorun tədqiq edilmişdir.

4.3-də relyativistik xətti sonlu-fərq sinqulyar ossilyator modeli üçün, 4.4-də isə relyativistik üçölçülü sonlu-fərq sinqulyar ossilyator modeli üçün ümumiləşmiş  $SU(I, I)$  koherent halları qurulmuş və bu koherent hallar arasında keçid amplitudu (pro-paqaqator) üçün yazılmış trayektoriyalar inteqralının vasitəsilə ümumiləşmiş əyri faza fəzasında klassik hərəkət tənlikləri alınmışdır. Göstərilmişdir ki, faza fəzası

Lobaçevski müstəvisindən ibarətdir və bu müstəvidə hərəkət ossilyator tiplidir. Həmçinin göstərilmişdir ki, kvaziklassik Bor-Zommerfeld kvantlanma qaydası sistemin enerji spektri üçün dəqiq ifadə verir.

4.5 relyativistik sərbəst kvant zərrəciyi və relyativistik xətti sonlu-fərq harmonik ossilyator modeli üçün həm komfiqurasiya  $x$ -fəzasında, həm də impuls fəzasında propaqatorlar qurulmuşdur. Göstərilmişdir ki, alınmış relyativistik ifadələr düzgün qeyri-relyativistik limitə malikdir.

### **Tədqiqatın əsas nəticələri aşağıdakılardan ibarətdir:**

1. Relyativistik ikiölçülü konfigurasiya  $\vec{r}(x, y)$  fəzası anlayışı daxil edilmiş və bu fəzada sərbəst Hamilton və impuls sonlu-fərq operatorlarının aşkar şəkli qurulmuşdur.
2. Relyativistik ikiölçülü dəqiq həll olunan sonlu-fərq Kulon məsələsi ətraflı öyrənilmişdir. Göstərilmişdir ki, dalğa funksiyaları Meyksner-Pollaçek çoxhədlilərlə ifadə olunur.
3. Relyativistik ikiölçülü dəqiq həll olunan sonlu-fərq harmonik ossilyator modeli qurulmuş, modelin xassələri və dinamik simmetriya qrupu tədqiq olunmuşdur.
4. Relyativistik  $N$  - ölçülü sonlu-fərq sinqulyar ossilyator modeli qurulmuş və ətraflı tədqiq olunmuşdur. Göstərilmişdir ki, sistemin dalğa funksiyaları kəsilməz dual Han çoxhədlilərlə ifadə olunur.
5. Relyativistik xətti sinqulyar və üçölçülü sonlu-fərq sinqul-yar ossilyator modelləri üçün ümumiləşmiş  $SU(1,1)$  koherent halların aşkar şəkli qurulmuşdur.  $SU(1,1)$  koherent hallar arasında keçid amplitudunun trayektoriyalar üzrə inteqral təsvirinin köməyiylə ümumiləşmiş faza fəzasında klassik hərəkət tənlikləri alınmışdır. Göstərilmişdir ki, kvaziklassik Bor-Zammerfeld kvantlanma qaydasının tətbiqi enerji səviyyələri üçün dəqiq ifadə verir.
6. Relyativistik sərbəst zərrəcik üçün və relyativistik xətti sonlu-fərq harmonik ossilyator modeli üçün həm konfigurasiya fəzasında, həm də impuls fəzasında propaqatorların aşkar şəkilləri qurulmuş, onların qeyri-relyativistik limitləri hesablanmışdır.

**Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:**

1. Nağıyev Sh.M., Jafarov E.И., Efendiyev M.Y. A relativistic model of the  $N$ -dimensional singular oscillator.//J.Phys A.Math.Gen. 40 (2007) 289-295.
2. Нагиев Ш.М., Эфендиев М.Ю. Обобщенные когерентные состояния релятивистского изотропного сингулярного осциллятора / BDU, Fizika Problemləri İnstitutu: “Fizikanın Müasir Problemləri”, I Respublika konfransının materialları, Bakı, 2008, səh. 56-59.
3. Nağıyev S.M., Jafarov M.Y., Efendiyev M.Y. Coherent states and a path integral for relativistic linear singular oscillator// Commun. Theor. Phys. (Beijing, China) 49 (2008) pp.315-318.
4. Nağıyev S.M., Efendiyev M.Y. Coherent states and a path integral for relativistic linear singular oscillator// AMEA-nın Xəbərləri fiz.-riy. və texn. elmləri seriyası, 2006, № 5, s. 25-31.
5. Nağıyev S.M., Jafarov M.Y., Efendiyev M.Y. The relativistic two-dimensional harmonic oscillator// Nuovo Cimento, 124B (2009) pp. 395-403.
6. Nağıyev İ.M., Əfəndiyev M.Y. Relyativistik kvant zərrəciyinin ikiölçülü Kulon sahəsində hərəkəti // Azerbaijan Jour. Phys., vol. 26, ser. Az, 2010, pp. 34-37.
7. Нагиев Ш.М., Эфендиев М.Ю. Пропагатор для некоторых одномерных релятивистских квантовых систем / BDU, Fizika Problemləri İnstitutu: “Fizikanın Müasir Problemləri”, I Respublika konfransının materialları. Bakı, 2007, səh. 23-24.
8. Əfəndiyev M.Y. Relyativistik ikiölçülü Kulon məsələsinə dair/ AMEA aspirantlarının və dissertantlarının elmi konfransı. Bakı, 2009, səh. 53.
9. Nağıyev İ. M., Əfəndiyev M.Y. Relyativistik ikiölçülü sonlu-fərq harmonik ossilyatorun dinamik simmetriya qrupu/ “Alternativ və bərpa olunan enerji mənbələrindən istifadənin perspektivləri” konfransının materialları, səh.72, 1-2 iyun 2011-ci il, Radiasiya Problemləri İnstitutu, Bakı.

**Исследование релятивистских квантовых систем с помощью конечно-разностных уравнений**

**РЕЗЮМЕ**

Диссертационная работа посвящена исследованию физических свойств релятивистских квантовых систем с помощью конечно-разностных уравнений. При этом предложено понятие двумерного релятивистского конфигурационного  $\vec{r}$ -пространства. Найден явный вид операторов свободного гамильтониана и импульса, а также релятивской плоской волны.

Детально рассмотрены конечно-разностная кулоновская задача и модель гармонического осциллятора в двумерном релятивистском конфигурационном  $\vec{r}$ -пространстве. Определены энергетические спектры и волновые функции этих задач. Показано, что волновые функции кулоновской задачи выражаются через полиномы Мейкснера-Поллачека, а волновые функции модели гармонического осциллятора через непрерывные дуальные полиномы Хана.

Исследована релятивистская конечно-разностная модель  $N$ -мерного сингулярного осциллятора. Построены обобщенные когерентные состояния релятивистских конечно-разностных моделей линейного  $N$ -мерного сингулярного осцилляторов.

Построены также пропагаторы для релятивистской свободной частицы и линейного конечно-разностного гармонического осциллятора.



**The study of relativistic quantum systems using the  
finite-difference equations**

**SUMMARY**

The thesis is devoted to research fizicheskikh properties of relativistic quantum systems with pomoschyu finite-difference equations. In this pre-invited to the concept of two-dimensional relativistic configurations-tsiionnogo  $\vec{r}$  - prostranstva. An explicit form of the operators of the free Hamiltonian and momentum, as well as relyativskoy plane wave.

A detailed analysis of finite-difference model of Coulomb problem and harmonious oscillator in a two-dimensional relativistic configuration  $\vec{r}$  - prostranstve. Oprah-deleny energy spectra and wave functions for these tasks. It is shown that the wave functions of Coulomb backsidechi expressed through nolimoli Meyksnera-Pollacheka, and the wave functions of the harmonic ostsillyatora through continuous dialvinenolimoli Khan.

Studied relativistic finite-difference model of  $N$  - dimensional singular oscillator. Built-schennye generalized coherent states of relativistic finite-difference model of a linear  $N$  - dimensional singular oscillator.

Built as propagamory for its relativistic particles and the free-linear finite-difference garmonicheskogo oscillator.

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ  
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

---

*На правах рукописи*

**МАГСАД ЮСИФ ОГЛЫ ЭФЕНДИЕВ**

**ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ КВАНТОВЫХ  
СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ КРНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ  
УРАВНЕНИЙ**

**1212.01 – Математические и физические уравнения**

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации по соисканию ученой степени доктора  
философии по математика**

**Баку-2016**