НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АХМЕД ГАСАН оглы ДЖАМШИДИПУР

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В УСЛОВИИ РАЗРЫВА

1211.01-Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2014

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

ƏHMƏD HƏSƏN oğlu CƏMŞİDİPUR

KƏSİLMƏ ŞƏRTİNƏ SPEKTRAL PARAMETR DAXİL OLAN ŞTURM – LİUVİLL OPERATORU ÜÇÜN SƏPİLMƏNİN DÜZ VƏ TƏRS MƏSƏLƏLƏRİ

1211.01-Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2014

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

ƏHMƏD HƏSƏN OĞLU CƏMŞİDİPUR

KƏSİLMƏ ŞƏRTİNƏ SPEKTRAL PARAMETR DAXİL OLAN ŞTURM – LİUVİLL OPERATORU ÜÇÜN SƏPİLMƏNİN DÜZ VƏ TƏRS MƏSƏLƏLƏRİ

1211.01-Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2014

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АХМЕД ГАСАН оглы ДЖАМШИДИПУР

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В УСЛОВИИ РАЗРЫВА

1211.01-Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2014

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu-nun** «Funksional analiz» şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Hidayət M.Hüseynov**

Rəsmi opponentlər:
riyaziyyat üzrə elmlər doktoru . **Araz R.Əliyev**
(Bakı Dövlət Universiteti);
riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, dosent **Bəhram Ə.Əliyev**
(Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti).

Aparıcı təşkilat:
Azərbaycan Texniki Universiteti
«Riyaziyyat» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 27 iyun 2014-cü il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq ücün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç., 9.

Avtoreferat göndərilib 14 may 2014-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена в отделе «Функциональный анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, проф. **Идаят М.Гусейнов**

Официальные оппоненты:
доктор наук по математике, проф. **Араз Р.Алиев**
(Бакинский Государственный Университет);
доктор наук по математике, доцент **Бахрам А.Алиев**
(Азербайджанский Государственный Педагогический Университет).

Ведущая организация:
Азербайджанский Технический Университет
кафедра «Математика».

Защита диссертации состоится 27 июня 2014 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде., 9.

Автореферат разослан 14 мая 2014 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена исследованию прямых и обратных задач рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в условии разрыва.

Под прямыми задачами рассеяния подразумевается определение величин (данных рассеяния), характеризующих асимптотику собственных функций, а под обратными задачами – восстановление самого оператора по данным рассеяния.

Обратная задача теории рассеяния возникла из потребностей квантовой механики. Как известно, в квантовой механике рассеяние частиц потенциальным полем полностью определяется асимптотикой волновых функций на бесконечности. Естественно возникает вопрос о том, можно ли по асимптотике волновых функций на бесконечности восстановить потенциал поля и, если это возможно, дать метод восстановления. Это и есть физическая сущность обратной задачи рассеяния.

Полное математическое решение обратной задачи рассеяния на полуоси было дано В.А.Марченко. Позднее эти вопросы для системы уравнений на полуоси были полностью решены З.С.Аграновичем и В.А.Марченко. Решение обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом, удовлетворяющим условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)|q(x)|dx<\infty,$$

было дано Л.Д.Фадеевым. Но в этой работе поведение матрицы рассеяния на краю непрерывного спектра была написано неточно.

Позднее В.А.Марченко исправил эти неточности. Поведение матрицы рассеяния на краю непрерывного спектра полностью дана в работе И.М.Гусейнова.

Отметим, что во всех этих работах важнейшую роль играет основное уравнение обратной задачи (эти уравнения также называются уравнениями Гельфанда-Левитана-Марченко). Впервые это уравнение было дано И.М.Гельфандом и Б.М.Левитаном при решении обратной задачи спектрального анализа. В.А.Марченко получил аналогичное уравнение при решении обратной задачи рассеяния. Решение обратной задачи рассеяния другим методом было дано М.Г.Крейном.

Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля на всей оси в разных вариантах (когда потенциал удовлетворяет другим условиям) рассматривали В.С.Буслаев и В.М.Фомин, И.А.Андерс и В.П.Котляров, М.Й.Фирсова, В.В.Блащак, Е.И.Зубкова и Ф.С.Рофе-Бекетов и др.

Обратные задачи для системы уравнений Дирака были изучены в работах М.Г.Гасымова и Б.М.Левитана, М.Г.Гасымова, Ф.Г.Максудова и С.Г.Велиева, И.М.Гусейнова, И.С.Фролова и др.

Интегральные уравнения типа Гельфанда-Левитана-Марченко играют важную роль для прямых и обратных задач как в этих работах, так и в других постановках. Обратным и прямым задачам для разностных уравнений посвящены работы В.Г.Тарнапольского, К.Каца, К.Каца и С.Чи, Г.Ш.Гусейнова, А.Х.Ханмамедова и др. В монографии Л.П.Нижника и Н.Ш.Искендерова даны обратные и прямые задачи для нестационарных уравнений.

В 1967 году Г.Гарднер, Ж.Грин, М.Крускал и Р.Миура впервые применили обратную задачу рассеяния к решению задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза. Открывая сущность этих задач, П.Лакс обосновал возможность интегрирования этим методом и другие уравнения. На следующей стадии В.Е.Захаров и А.Б.Шабат показали возможность интегрирования этим методом задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера с помощью обратной задачи для системы уравнений Дирака. Эти работы способствовали интенсивному развитию и широкому применению обратных задач рассеяния.

Обратные задачи спектрального анализа по другим спектральным данным (по собственным значениям и нормирующим множителям, по двум спектрам, по спектральной функции, по функции Вейля и др.) были отражены в монографиях В.А. Марченко, Б.М.Левитана, М.А. Наймарка, В.А.Садовничего, Я.Т.Султанаева и А.М.Ахтямова, И.М.Набиева, В.А.Юрко и др., а также в обзорных статьях Ю.М.Березанского, М.Г.Гасымова и Б.М.Левитана и др.

Последнее время чаще встречаются спектральные задачи с условиями разрыва внутри интервала. Появление таких задач связано со свойствами негладкости и разрыва среды. Спектральная информация может быть использована при восстановлении коэффициентов, характеризующих свойства одномерной разрывной среды. Краевые задачи с условиями разрыва внутри интервала также встречаются в геофизических моделях для колебаний земной поверхности. Условие разрыва приводит к качественным изменениям в исследовании прямых и обратных задач для дифференциальных операторов.

В разных постановках разрывные обратные задачи были рассмотрены в статьях М.Г.Гасымова, Р.Х.Амирова, Р.Х.Амирова и В.А.Юрко, Э.Н.Ахмедова и И.М.Гусейнова, И.М.Гусейнова и Р.Т.Пашаева, И.М.Гусейнова и А.Р.Лятифовой, О.Х.Хальда, В.В.Проворотова, Р.Й.Крюгера, М.Кобаяши, Хуан Фу-Янга, С.Т.Ших и В.А.Юрко и др. В основном разрывные обратные задачи были рассмотрены на конечном отрезке. Обратная задача с условием разрыва на бесконечном интервале почти не исследована.

Цель работы. Исследование свойств данных рассеяния оператора Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в условии разрыва и решение обратной задачи теории рассеяния.

Общая методика исследований. В работе были использованы методы теории функций, функционального анализа и теории дифференциальных интегральных уравнений.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

- получены интегральные представления решений типа Йоста уравнения Штурма-Лиувилля в случае, когда условие разрыва в некоторой точке содержит спектральный параметр и изучены свойства их ядер;
- определены данные рассеяния, изучены их свойства для оператора Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в условии разрыва;
- показано существование и единственность решения обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля с параметром в условии разрыва при отсутствии дискретного спектра и дан алгоритм построения потенциала;
- получены необходимые и достаточные условия на заданную функцию для того, чтобы она являлась коэффициентом отражения оператора Штурма-Лиувилля со спектральным

параметром в условии разрыва при отсутствии дискретного спектра.

Теоретическая и практическая ценность работы. Полученные в работе результаты имеют теоретическую ценность. Эти результаты могут быть использованы в обратных задачах спектрального анализа.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы были доложены на семинарах отделов “Дифференциальные уравнения” (руководитель д.ф.-м.н., проф. А.Б.Алиев), “Функциональный анализ” (руководитель д.ф.-м.н., проф. Г.И.Асланов), на международной конференции, посвященной 100 летию З.И.Халилова (г. Баку, 2011), на международной конференции, посвященной 80 летию Ф.Г.Максудова (г. Баку, 2011), на IV международной конференции по математике Тюркских Государств (г. Баку, 2011) и на международной конференции, посвященной 95 летию Гейдара Алиева (г. Баку, 2013).

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 9 опубликованных работах автора.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 96 наименований. Диссертационная работа изложена на 110 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В работе исследуются прямые и обратные задачи для задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \ -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

$$y'(a+0) - y'(a-0) = \lambda\beta y(a), \tag{2}$$

здесь $q(x)$- вещественнозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|q(x)|dx < \infty, \tag{3}$$

β -вещественное число, $a \in (-\infty, \infty)$ фиксированная точка.

Отметим, что уравнение $-y^{n}+\lambda p(x)y+q(x)y=\lambda^{2}y$, $-\infty<x<\infty$ в случае $p(x)=\beta\delta(x-a)$ приводится к задаче (1), (2).

В первой главе рассматривается прямая задача рассеяния для задачи (1), (2): строятся решения Йоста задачи (1), (2), даются основные свойства их ядер, определяются данные рассеяния и изучаются их важные свойства.

В 1.1 показывается существование и единственность решений Йоста задачи (1), (2), получаются для них интегральные представления и изучаются свойства их ядер.

Решения $e^{+}(x,\lambda)$ и $e^{-}(x,\lambda)$ задачи (1), (2), удовлетворяющие, соответственно, условиям $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x,\lambda)e^{-i\lambda x}=1$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x,\lambda)e^{+i\lambda x}=1$, называются решениями Йоста. Очевидно, что решения Йоста при $q(x)\equiv 0$ имеют вид

$$e_0^{\pm}(x,\lambda)=\begin{cases} e^{\pm i\lambda x}, & \pm x>\pm a,\\ \left(1+\dfrac{i\beta}{2}\right)e^{\pm i\lambda x}-\dfrac{i\beta}{2}e^{\pm i\lambda(2a-x)}, & \pm x<\pm a \end{cases}$$

Теорема 1.1. Если функция $q(x)$ удовлетворяет условию (3), то для всех λ из замкнутой верхней полуплоскости существуют и единственны решения Йоста $e^{\pm}(x,\lambda)$ задачи (1), (2), представимые в виде

$$e^{\pm}(x,\lambda)=e_0^{\pm}(x,\lambda)\pm\int_x^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)e^{\pm i\lambda t}dt\,, \qquad (4)$$

причем ядра $K^{\pm}(x,t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|K^{\pm}(x,t)\right|\le\frac{C}{2}\sigma^{\pm}\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{C\sigma_1^{\pm}(x)},\quad 0<|x-a|<\pm(t-a), \qquad (5)$$

$$\left|K^{\pm}(x,t)\right| \le \left\{\frac{C}{2}\sigma^{\pm}\left(\frac{x+t}{2}\right)+\frac{|\beta|}{4}\sigma^{\pm}\left(\frac{x+2a-t}{2}\right)\right\}e^{C\sigma_1^{\pm}(x)}, \quad |t-a| < \pm(a-x)$$

(здесь $C = 1+\dfrac{|\beta|}{2}$, $\sigma^{\pm}(x) = \pm\int\limits_x^{\pm\infty}|q(t)|dt,\ \ \sigma_1^{\pm}(x) = \pm\int\limits_x^{\pm\infty}\sigma^{\pm}(t)dt$).

Кроме этого, функции $K^{\pm}(x,t)$ непрерывны при $t \ne 2a-x$, $x \ne a$ и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$K^{\pm}(x,x) = \pm\frac{1}{2}\int\limits_x^{\pm\infty}q(s)ds, \quad \pm x > \pm a,$$

$$K^{\pm}(x,x) = \pm\frac{1}{2}\left(1+\frac{i\beta}{2}\right)\int\limits_x^{\pm\infty}q(s)ds, \quad \pm x < \pm a \quad ,(6)_{\pm}$$

$$K^{\pm}(x,2a-x+0)-K^{+}(x,2a-x-0) = \frac{i\beta}{4}\left\{\int\limits_x^{a}q(s)ds-\int\limits_a^{\pm\infty}q(s)ds\right\}, \quad \pm x<\pm a.$$

Из интегральных уравнений и оценок (5) для функций $K^{\pm}(x,t)$ получим следующее утверждение

Лемма 1.3. При $t \ne 2a-x$, $x \ne a$ существуют частные производные функций $K^{\pm}(x,t)$ и справедливы следующие оценки:

если $0 < |x-a| < \pm(t-a)$ то

$$\left|\frac{\partial K^{\pm}(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial K_0^{\pm}(x,t)}{\partial x}\right| \le \frac{C}{2}\sigma^{\pm}\left(\frac{x+t}{2}\right)\sigma^{\pm}(x)e^{C\sigma_1^{\pm}(x)};$$

если $|t-a| < \pm(a-x)$, то

$$\left|\frac{\partial K^{\pm}(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial K_0^{\pm}(x,t)}{\partial x}\right|\leq(1+|\beta|)\left\{\sigma^{\pm}\left(\frac{x+t}{2}\right)+\frac{|\beta|}{4}\sigma^{\pm}\left(\frac{x+2a-t}{2}\right)\sigma^{\pm}(x)e^{C\sigma_1^{\pm}(x)}\right\}.$$

Эти оценки справедливы также для разности

$\dfrac{\partial K^{\pm}(x,t)}{\partial t}-\dfrac{\partial K_0^{\pm}(x,t)}{\partial t}$. Здесь при $\pm x>\pm a$

$$K_0^{\pm}(x,t)=\pm\frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\pm\infty}q(s)ds\ ,$$

при $\pm x<\pm a$

$$K_0^{\pm}(x,t)=\pm\frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\pm\infty}q(s)ds-\frac{i\beta}{4}\begin{cases}\pm\displaystyle\int_{\frac{t+x}{2}}^{\frac{t+2a-x}{2}}q(s)ds, & \pm t>\pm(2a-x),\\ \pm\displaystyle\int_{\frac{x+t}{2}}^{\pm\infty}q(s)ds\pm\int_{\frac{x+2a-t}{2}}^{\frac{t+2a-x}{2}}q(s)ds, & \pm x<\pm t<\pm(2a-x).\end{cases}$$

Лемма 1.4. 1° Если $q(x)$ дифференцируема, то в случае $t\neq 2a-x,\ x\neq a$ существуют частные производные второго порядка ядер $K^{\pm}(x,t)$ и эти ядра удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 K^{\pm}(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 K^{\pm}(x,t)}{\partial t^2}=q(x)K^{\pm}(x,t);$$

2° Ядра $K^{\pm}(x,t)$ удовлетворяют условиям

$$K^{\pm}(a+0,t)=K^{\pm}(a-0,t), \qquad \pm t>\pm a\,,$$

$$\frac{\partial K^{\pm}(a+0,t)}{\partial x}-\frac{\partial K^{\pm}(a-0,t)}{\partial t^{2}}=\pm i\beta\frac{\partial K^{\pm}(a,t)}{\partial t}, \qquad \pm t>\pm a$$

в точке $x=a$.

Из свойств ядер $K^{\pm}(x,t)$ видно, что эти функции удовлетворяют гиперболическому уравнению и условиям разрыва на прямых $t=2a-x$ (при $\pm x<\pm a$ и $\pm t>\pm x$) и $x=a$ (при $\pm t>\pm x$).

В 1.2 получены формулы решений некоторых задач с условиями разрыва для гиперболических уравнений. Эти формулы играют важную роль при решении обратной задачи .

В 1.3 определяются данные рассеяния задачи (1), (2) и изучаются их важные свойства. При $\lambda\neq 0$ функции $e^{+}(x,\lambda)$, $\overline{e^{+}(x,\lambda)}$, $e^{-}(x,\lambda)$ и $\overline{e^{-}(x,\lambda)}$ образуют две фундаментальные системы решений задачи (1), (2). Поэтому можно написать соотношения

$$e^{+}(x,\lambda)=+b(\lambda)e^{-}(x,\lambda)+a(\lambda)\overline{e^{-}(x,\lambda)},$$

$$e^{-}(x,\lambda)=-\overline{b(\lambda)}e^{+}(x,\lambda)+a(\lambda)\overline{e^{+}(x,\lambda)}.$$

Лемма 1.5. 1) Функция $a(\lambda)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость $R\setminus\{0\}$ и представима в виде

$$,\ a(\lambda)=\left(1+\frac{i\beta}{2}\right)-\frac{1}{2i\lambda}\left\{\left(1+\frac{i\beta}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}q(s)ds+\int_{0}^{+\infty}A(t)e^{i\lambda t}dt\right\}$$

$A(t)\in L_1(0,\infty)$;

2) функция $b(\lambda)$ определена в $R\setminus\{0\}$ и представима в виде

$$b(\lambda)=-\frac{i\beta}{2}e^{2i\lambda a}+\int_{-\infty}^{\infty}B(t)e^{-i\lambda t}dt,\ B(t)\in L_1(-\infty,\infty);$$

3) $|a(\lambda)|^2=1+|b(\lambda)|^2,\ \lambda\in R\setminus\{0\}$.

Функция $a(\lambda)$ может иметь в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$ лишь конечное число нулей: $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Обозначим через m_k кратность корня λ_k уравнения $a(\lambda)=0$. Числа λ_k являются собственными значениями задачи (1), (2) и наоборот, собственные значения задачи (1), (2) являются нулями функции $a(\lambda)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$.

Лемма 1.10. Существует такая цепочка чисел

$\{\overset{+}{\chi}_{k,0},\overset{+}{\chi}_{k_1,\ldots,}\overset{+}{\chi}_{k,m_k-1}\}$, что

$$\left.\frac{1}{j!}\frac{d^j e^-(x,\lambda)}{d\lambda^j}\right|_{\lambda=\lambda_k}=\sum_{s=0}^{j}\overset{+}{\chi}_{k,j-s}\left.\frac{1}{s!}\frac{d^s}{d\lambda^s}e^+(x.\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_k},$$

$$j=0,1,\ldots,m_k-1;\ k=1,2,\ldots n,\ \ \overset{+}{\chi}_{k,0}\neq0.$$

Из этой леммы вытекает, что

$$\left.\frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\lambda^j}e^+(x,\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_k}=\sum_{s=0}^{j}\overset{-}{\chi}_{k,j-s}\left.\frac{1}{s!}\frac{d^s}{d\lambda^s}e^-(x,\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_k},$$

причем

$$\overset{+}{\chi}_{k,0}\overset{-}{\chi}_{k,0}=1,$$

$$\chi_{k,j}^{\pm}=\frac{(-1)^{j}}{\left(\chi_{k,0}^{\pm}\right)^{j+1}}\begin{vmatrix}\chi_{k,1}^{\pm} & \chi_{k,0}^{\pm} & 0 & \dots & 0\\ \chi_{k,2}^{\pm} & \chi_{k,1}^{\pm} & \chi_{k,0}^{\pm} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \chi_{k,j}^{\pm} & \chi_{k,j-1}^{\pm} & \chi_{k,j-2}^{\pm} & \dots & \chi_{k_1}^{\pm}\end{vmatrix}.$$

Набор величин

$$\left\{r^{-}(\lambda)=\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)};\ \lambda_k;\ \chi_{k,j}^{-}\left(j=0,1,\dots,m_{k-1},\ k=1,2,\dots,n\right)\right\}$$

называется левыми данными рассеяния, а

$$\left\{r^{+}(\lambda)=-\frac{\overline{b(\lambda)}}{a(\lambda)};\lambda_k;\chi_{k_j}^{+}\left(j=0,1,m_{k_j}\ k=1\dots,n\right)\right\}$$ – правыми

данными рассеяния задачи (1), (2). Функция $r^{+}(\lambda)$ $\left(r^{-}(\lambda)\right)$ называется правым (левым) коэффициентом отражения. Когда известны одни данные рассеяния, по ним можно определить другие. Действительно, последние равенства показывают, что когда известна одна из величин $\chi_{k,j}^{+}$ и $\chi_{k,j}^{-}$, то по ней можно однозначно определить и другую. Справедливо равенство

$$r^{-}(\lambda)=-\overline{r^{+}(\lambda)}\,\frac{\overline{a(\lambda)}}{a(\lambda)}$$

и следующая лемма показывает, что можно восстановить функцию $a(\lambda)$ по правым или по левым данным рассеяния.

Лемма 1.11. При $\operatorname{Im} z > 0$ справедлива следующая формула:

$$a(z) = \left(1 + \frac{i\beta}{2}\right) e^{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left\{\left|1+\frac{i\beta}{2}\right|^2 \left(1-\left|r^{\pm}(\lambda)\right|^2\right)\right\}}{\lambda - z} d\lambda} \prod_{k=1}^{x} \left(\frac{z-\lambda_k}{z-\overline{\lambda_k}}\right)^{m_k}.$$

Вторая глава диссертации посвящена обратной задаче рассеяния для задачи (1), (2). Обратная задача рассеяния для задачи (1), (2) ставится следующим образом: построить потенциал $q(x)$ по правым или по левым данным рассеяния.

В 2.1 выводится основное уравнение, играющее важную роль в обратной задаче рассеяния.

Теорема 2.1. Ядра $K^{\pm}(x,t)$ представлений (4) решений Йоста удовлетворяют следующим уравнениям (основным уравнениям обратной задачи):

$$F_1^{+}(x,y) - \frac{i\beta}{2+i\beta} K^{+}(x,2a-y) + \overline{K^{+}(x,y)} + \int\limits_{x}^{+\infty} K^{+}(x,t) F^{+}(t+y)\, dt = 0 \qquad (7)_+$$

$$(x < y < +\infty),$$

$$F_1^{-}(x,y) - \frac{i\beta}{2+i\beta} K^{-}(x,2a-y) + \overline{K^{-}(x,y)} + \int\limits_{-\infty}^{x} K^{-}(x,t) F^{-}(t+y)\, dt = 0 \qquad (7)_-$$

$$(-\infty < y < x),$$

где

$$F^{\pm}(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k^{\pm}(x) e^{\pm i\lambda_k x} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[r^{\pm}(\lambda) - r_0^{\pm}(\lambda)\right] e^{\pm i\lambda x} d\lambda,$$

$$r_0^{\pm}(\lambda) = -\frac{i\beta}{2+i\beta} e^{\mp 2i\lambda a}, \qquad (8)_\pm$$

$$F_1^{\pm}(x,y)=\begin{cases} F^{\pm}(x+y), & \pm x>\pm a, \\ \left(1+\dfrac{i\beta}{2}\right)F^{\pm}(x+y)-\dfrac{i\beta}{2}F^{\pm}(2a-x+y), & \pm x<\pm a, \end{cases}$$

а $P_k^{\pm}(x)$ - многочлен степени m_k-1:

$$P_k^{\pm}(x)=-ie^{\mp i\lambda_k x}\sum_{s=1}^{m_k-1}\chi_{k,m_k-1-s}^{\pm}\frac{1}{s!}\left\{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}e^{\pm i\lambda x}}{a(\lambda)}\right\}\Bigg|_{\lambda=\lambda_k}.$$

Отметим, что если $\beta=0$ в условии разрыва, то функционально-интегральные уравнения $(7)_{\pm}$ превращаются в известные интегральные уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко. Присутствие условия разрыва $(\beta\neq 0)$ влияет как на представление решения Йоста, так и на структуру основных уравнений обратной задачи.

Функционально-интегральные уравнения $(7)_{\pm}$ устанавливают связь между данными рассеяния задачи (1), (2) и ядрами $K^{\pm}(x,t)$ представлений (4) решений Йоста. С другой стороны, из соотношений (6) вытекает, что потенциал $q(x)$ определяется с помощью ядер $K^{\pm}(x,t)$. Поэтому, зная свойства данных рассеяния можно изучить свойства потенциала, и наоборот.

Лемма 2.1. Функции

$$R^{\pm}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[r^{\pm}(\lambda)-r_0^{\pm}(\lambda)\right]e^{\pm i\lambda x}d\lambda$$

абсолютно непрерывны на произвольном отрезке, несодержащем точку $2a$, существуют конечные пределы $R^{\pm}(2a+0)$, $R^{\pm}(2a-0)$ и производные $R^{+'}(x), R^{-'}(x)$ при любых $x'>-\infty$ и $x''<+\infty$ удовлетворяют условиям

$$\int_{x'}^{+\infty}(1+|x|)\left|R^{+'}(x)\right|dx<\infty, \quad \int_{-\infty}^{x''}(1+|x|)\left|R^{-'}(x)\right|dx<\infty .$$

В 2.2 исследуются существование и единственность решения обратной задачи. Отметим, что при $\beta=0$ нули функции $a(\lambda)$ расположены на мнимой оси (в случае, когда $q(x)$-вещественнозначная). Поэтому функция $F^{\pm}(x)$ вещественнозначна, что облегчает исследование основного уравнения. Но в случае, когда $\beta\neq 0$, невозможно сказать что - то о расположении нулей $a(\lambda)$ на верхней полуплоскости, и поэтому исследование основного уравнения усложняется. Подобная ситуация имеется также при рассмотрении обратной задачи рассеяния для уравнения Штурма-Лиувилля с комплекснозначным потенциалом и для уравнения $-y''+\lambda p(x)y+q(x)y=\lambda^2 y$ с гладкими вещественнозначными функциями $p(x)$ и $q(x)$. Поэтому в остальной части этой главы предполагается, что дискретный спектр задачи (2) отсутствует, т.е. $a(\lambda)\neq 0$ на полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$.

Теорема 2.2. Если $r^{\pm}(\lambda)$ непрерывны при любом $\lambda\neq 0$, $\left|r^{\pm}(\lambda)\right|<1$, $r^{\pm}(\lambda)-r_0^{\pm}(\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ $(|\lambda|\to\infty)$[1] и функции $R^{\pm}(x)$ удовлетворяютусловиям леммы 2.1, а также дискретный спектр задачи (1), (2) отсутствует, то при каждом фиксированном $x>-\infty$ и $x<+\infty$, соответственно, функционально-интегральные уравнения $(7)_+$ и $(7)_-$ имеют единственные решения $K^{+}(x,\cdot)\in L_1(x,+\infty)$, $K^{-}(x,\cdot)\in L_1(-\infty,x)$.

Теорема 2.3. При отсутствии дискретного спектра задачи (1), (2) потенциал $q(x)$ однозначно определяется по правому (левому) коэффициенту отражения, т.е. если совпадают правые (левые)

---

[1] Отметим, что эти условия выполняются при решении прямой задачи (лемма 1.5).

коэффициенты отражения двух задач типа (1), (2), то на действительной оси почти всюду $q(x)=\widetilde{q}(x)$.

Поучается нижеследующий алгоритм для построения потенциала $q(x)$ по коэффициенту отражения $r^{+}(\lambda)$ ($r^{-}(\lambda)$) задачи (1.2), (1.3).

Алгоритм. Предположим, что, $r^{+}(\lambda)$ ($r^{-}(\lambda)$) известен.

1) Пользуясь формулами $(8)_{+}$ ((8_{-})) строим функции $F^{+}(x), F_1^{+}(x,y)$ ($F^{-}(x), F_1^{-}(x,y)$) (из за отсутствия дискретного спектра в формулах $(8)_{\pm}$ останется лишь интегральная часть);
2) Написав уравнение $(7)_{+}$ ($(7)_{-}$), определяем из него функцию $K^{+}(x,y)$ ($K^{-}(x,y)$);
3) С помощью формулы $(6)_{+}$ ($(6)_{-}$) строим функцию $q(x)$.

Наконец, при отсутствии дискретного спектра дается полное решение обратной задачи рассеяния для задачи (1), (2).

Теорема 2.4. Необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы функция $r^{+}(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<+\infty)$ была правым коэффициентом отражения задачи (1), (2) при отсутствии дискретного спектра, когда β-вещественное число, а $q(x)$ - вещественнозначная функция, удовлетворяющая условию (3), являются:

1° при вещественном $\lambda\neq 0$ функция $r^{+}(\lambda)$ непрерывна, $\left|r^{+}(\lambda)\right|\leq 1-C\lambda^2\left(1+\lambda^2\right)^{-1}$ и при $\lambda\to\pm\infty$, $r^{+}(\lambda)-r_0^{+}(\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$,

где $r_0^{+}(\lambda)=-\dfrac{i\beta}{2+i\beta}e^{-2i\lambda a}$,

C-неотрицательная постоянная;

2° если $$a(z)=\left(1+\frac{i\beta}{2}\right)e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\left[\left(1+\frac{\beta^2}{4}\right)\left(1-\left|r^{+}(\lambda)\right|^2\right)\right]}{\lambda-z}d\lambda},$$

то функция $za(z)$ непрерывна на верхней замкнутой полуплоскости и

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda a(\lambda)\left[r^{+}(\lambda)+1\right]=0;$$

3° если $r^{-}(\lambda)=-\overline{r^{+}(\lambda)}\dfrac{\overline{a(\lambda)}}{a(\lambda)}$, $r_0^{-}(\lambda)=-\dfrac{i\beta}{2+i\beta}e^{2i\lambda a}$, то функции

$$R^{\pm}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[r^{\pm}(\lambda)-r_0^{\pm}(\lambda)\right]e^{\pm i\lambda x}d\lambda$$

абсолютно непрерывны на произвольном конечном отрезке, несодержащем точку $2a$, существуют конечные пределы $R^{\pm}(2a+0)$, $R^{\pm}(2a-0)$, а производные $R^{\pm'}(x)$ при любых фиксированных $x'>-\infty$ и $x''<\infty$ удовлетворяют неравенствам

$$\int_{x'}^{+\infty}(1+|x|)\left|R^{+'}(x)\right|dx<\infty,\quad \int_{-\infty}^{x''}(1+|x|)\left|R^{-'}(x)\right|dx<\infty;$$

4° если

$$R_1^{\pm}(x,y)=\begin{cases}R^{\pm}(x+y), & \pm x>\pm a,\\ \left(1+\dfrac{i\beta}{2}\right)R^{\pm}(x+y)-\dfrac{i\beta}{2}R^{\pm}(2a-x+y), & \pm x<2a,\end{cases}$$

то решения $K^{\pm}(x,y)$ уравнения

$$R_1^{\pm}(x+y)+K^{\pm}(x,y)-\frac{i\beta}{2+i\beta}K^{\pm}(x,2a-y)\pm\int_{x}^{\pm\infty}K^{\pm}(x,t)R^{\pm}(t+y)dt=0,$$

$$\pm y>\pm x,$$

удовлетворяют условиям

$$K^{\pm}(x,x)\Big|_{a\mp 0} = \left(1+\frac{i\beta}{2}\right)K^{\pm}(x,x)\Big|_{a\pm 0}.$$

Замечание. Условие 4° теоремы 2.4 существенно. Действительно, функция $r^{+}(\lambda) = -\dfrac{i\beta + \dfrac{\gamma}{i\lambda}}{2 + i\beta + \dfrac{\gamma}{i\lambda}} e^{-2i\lambda a}$ удовлетворяет всем условиям теоремы за исключением 4°. В этом случае решения $e^{\pm}(x,\lambda)$ при $q(x) \equiv 0$ удовлетворяют уравнению (1), но условие разрыва (2) при $\gamma \neq 0$ не удовлетворяется. При $\gamma = 0$ все условия этой теоремы (в том числе условие 4°) удовлетворяются и $r^{+}(\lambda) = r_0^{+}(\lambda)$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю, д.ф.-м.н., проф. И.М.Гусейнову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Список работ, опубликованных по теме диссертации:

1. Hüseynov H.M., Jamshidipour A.H. On Jost solutions of Shturm-Liouville equations with spectral parameter in discontinuity conditions // Trans. Of NAS of Azerb. vol. XXX, No 4, Baku-2010, pp.61-88.
2. Гусейнов И.М., Джамшидипур А.Г. О представлении решений Йоста для оператора Штурма-Лиувилля содержаний спектральный параметр в условии разрыва во внутренней точке // Тезисы международной конференции, посв. 80-летию акад. Ф.Г.Максудова. Баку. 2010, с. 131-132.
3. Jamshidipour A.H., Huseynov H.M. Scatering date of Shturm-Liouville operator with spectral parameter in discontinuity conditions// Trans of NAS of Azerb. vol. XXXI, No 1, 2011, pp.71-78.

4. Jamshidipour A.H., Huseynov H.M. Inverse scattering problem for the Shturm-Liouville operator with spectral parameter on the discontinuity condition // Book of Abstracts. IV congress of the Turkish world math. Society, Baku, 2011, p.190.
5. Jamshidipour A.H., Huseynov H.M. Basic equations of inverse scattering problem for Shturm-Liouville operator with spectral parameter in discontinuity conditions// Proc. of IMM of NAS of Azerb. vol. XXXV (XLIII), 2011, pp.59-54.
6. Джамшидипур А.Г. Основные уравнения для уравнения Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в условии разрыва// Функциональный анализ и его приложения. Материалы международной конференции, посввящ. 100-летию академика З.И. Халилова, 2011, с. 136-138.
7. Jamshidipour A.H., Huseynov H.M. Solution of the inverse scattering problem for the Shturm-Liouville equation a spectral parameter discontinuity conditions // Trans of NAS of Azerb., vol. XXXII, No 1, 2012 pp. 89-100.
8. Huseynov H.M., Jamshidipour A.H. On one problem for hyperbolic equation with discontinuity conditions// Abstracts on the Intern. conf. dedicated to the 90-th anniversary of Haydar Aliyev. Baku, 2013, pp. 50-51.
9. Гусейнов И.М., Джамшидипур А.Г. Обратная задача рассеяния для уравнения Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в условии разрыва // Дифференциальные уравнения, т.50, №4, 2014, с.556-560.

ƏHMƏD HƏSƏN oğlu CƏMŞİDİPUR

KƏSİLMƏ ŞƏRTİNƏ SPEKTRAL PARAMETR DAXİL OLAN ŞTURM-LİUVİLL OPERATORU ÜÇÜN SƏPİLMƏNİN DÜZ VƏ TƏRS MƏSƏLƏLƏRİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi hər hansı nöqtədə kəsilmə şərtinə spektral parametr daxil olan halda Ştrum-Liuvill operatoru üçün səpilmənin düz və tərs məsələlərinin həllinə həsr edilmişdir.

İşdə aşağıdakı yeni nəticələr alınmışdır:

- hər hansı nöqtədə kəsilmə şərtinə spektral parametr daxil olan halda Şturm-Liuvill tənliyinin Yost tipli həllərinin inteqral göstərilişi alınmış və onun nüvələrinin xassələri öyrənilmişdir;
- kəsilmə şərtinə spektral parametr daxil olan Şturm-Liuvill operatorunun səpilmə verilənləri müəyyən edilmiş və onun xassələri öyrənilmişdir;
- diskret spektri olmayan halda kəsilmə şərtinə parametr daxil olan Şturm-Liuvill operatoru üçün səpilmənin tərs məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi göstərilmiş, potensialın qurulması üçün alqoritm verilmişdir;
- diskret spektri olmayan halda verilmiş funksiyanın kəsilmə şərtinə spektral parametr daxil olan Şturm-Liuvill operatorunun əksetmə əmsalı olması üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır.

AHMAD HASSAN oglu JAMSHİDİPOUR

DIRECT AND INVERSE SCATTERING PROBLEM FOR STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH A SPECTRAL PARAMETER IN THE DISCONTINUITY CONDITION

SUMMARY

The dissertation work is devoted to the studying of the direct and inverse scattering problem for a Sturm-Liouville operator with discontinuity condition at some fixed point on the axis, containing a spectral parameter.

In the work the following main results are obtained:

- Integral representation of the solution of Jost type for a Sturm-Liouville operator with a spectral parameter at some point are obtained and main features of their kernels are studied;
- The scattering data of a Sturm-Liouville operator with a spectral parameter in the discontinuity condition are defined and their main properties were studied;
- The existence and uniqueness of the solution of the inverse scattering problem for a Sturm-Liouville operator with a spectral parameter in the discontinuity condition when the discrete spectrum is absent is shown, an algorithm for constructing the potential is given.
- The necessary and sufficient conditions on the given function so that it is a mapping factor of a Sturm-Liouville operator with a spectral parameter in the discontinuity condition in the absence of a discrete spectrum, are obtained.