НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АЙНУР ГИДАЯТ кызы ГАСАНОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1211.01 – Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2014

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

AYNUR HİDAYƏT QIZI HƏSƏNOVA

PARABOLİK TİP TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR SIRA TƏRS MƏSƏLƏLƏRİN ARAŞDIRILMASI

1211.01 – Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2014

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

AYNUR HİDAYƏT qızı HƏSƏNOVA

PARABOLİK TİP TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR SIRA TƏRS MƏSƏLƏLƏRİN ARAŞDIRILMASI

1211.01 – Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2014

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АЙНУР ГИДАЯТ кызы ГАСАНОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1211.01 – Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2014

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun** «Diferensial tənliklər» şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:
riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, prof. **Ədalət Y.Axundov**

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Nizaməddin Ş.İsgəndərov**
(Bakı Dövlət Universiteti);
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Əbdürrəhim F.Quliyev**
(AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu).

Aparıcı təşkilat:
Azərbaycan Dövlət Neft Akademiyası
«Ali riyaziyyat» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 12 dekabr 2014-cü il saat 16^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 11 noyabr 2014-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена в отделе «Дифференциальные уравнения» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный руководитель:
доктор наук по математике, проф. **Адалят Я.Ахундов**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, проф.
Низамеддин Ш.Искендеров
(Бакинский Государственный Университет);
кандидат физико-математических наук,доц.
Абдуррагим Ф.Гулиев
(Институт Математики и Механики НАНА).

Ведущая организация:
Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия
кафедра «Высшая математика».

Защита диссертации состоится 12 декабря 2014 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 11 ноября 2014 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АЙНУР ИДАЯТ кызы ГАСАНОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1211.01 – Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2014

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Научно-практическая значимость обратных задач математической физики, которые в своем большинстве классически некорректно поставлены, настолько велика для естественных наук, что за последние 50-60 лет возникла новая область математики–теория обратных задач математической физики, основы которой были заложены в работах А.Н.Тихонова, М.М.Лаврентьева, В.К.Иванова.

Разработка эффективных методов определения переменных физических характеристик сред, основанных на косвенных наблюдениях без изъятия проб, позволяет значительно упростить экспериментальные исследования, повысить точность и достоверность получаемых результатов. В рассмотренных нами обратных задачах это требование учтено. Отыскиваемые коэффициенты зависят от пространственных или временной переменных. Кроме того, везде размерность дополнительной информации, необходимая для определения неизвестных коэффициентов, является минимальной, и эта информация задается в виде удобно наблюдаемых в практике фактов.

Цель работы. Исследование вопросов корректности (существование, единственность, устойчивость) и приближенного решения многомерных обратных задач об определении переменных коэффициентов и правых частей полулинейных уравнений параболического типа второго порядка и системы параболических уравнений типа реакция-диффузия.

Научная новизна.

- Исследованы вопросы корректности по Тихонову многомерных обратных задач об определении коэффициентов при старших производных полулинейных уравнений параболического типа второго порядка в случае нелинейного граничного условия Неймана.
- Доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решения обратных задач об определении неизвестных коэффициентов при младших членах полулинейных уравнений параболического типа в случае нелинейного граничного условия Неймана.

- Для системы типа реакция-диффузия исследованы вопросы корректности обратных задач об определении неизвестных правых частей уравнений системы, где неизвестные функции зависят от пространственных переменных или от времени.
- Предложены и обоснованы алгоритмы для приближенного решения поставленных обратных задач.

Общая методика исследований. В работе применяются методы математической физики, теории дифференциальных уравнений, теории функций и функционального анализа.

Научная и практическая ценность. В диссертации развита теория многомерных обратных задач для уравнений математической физики.

Результаты диссертации могут быть применены в научных исследованиях и при разработке алгоритмов решения обратных задач об определении линейных теплофизических, диффузионных, фильтрационных характеристик сред. Они также могут быть использованы при чтении специальных курсов по некорректным задачам математической физики.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах отделов "Уравнения математической физики" (рук. член-корр. НАНА, проф. Р.В.Гусейнов) и «Дифференциальные уравнения» (рук. д.ф.-м.н., проф. А.Б.Алиев) ИММ НАН Азербайджана, на международной конференции «Воронежская весен. математическая школа» (Воронеж, Россия, 2012), на международной конференции "International Workshop on Analysis and its applications" (Mersin, Turkey, 2012), на международной конференции "International conference dedicated to the 90-th anniversary of Haydar Aliyev", (Baku, 2013), на международной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвященной 55-летию Института Математики и Механики (Баку, 2014).

Публикация. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 75 наименований. Объем работы 117 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Широким классом некорректно поставленных задач в области естественных наук являются так называемые обратные задачи математической физики.

Некорректность в классическом смысле обратных задач создает много трудностей при их исследовании. Фундаментальные работы А.Н.Тихонова, М.М.Лаврентьева, В.К.Иванова по методам решения некорректных задач оказали сильное влияние также на развитие теории обратных задач. Этим же авторам принадлежат основополагающие результаты по весьма важным, в теоретическом и прикладном отношении, обратным задачам.

В монографиях О.М.Алифанова, Е.А.Артюхина и С.В.Румянцева, А.Л.Бухгейма, В.Б.Гласко, А.В.Гончарский, А.М.Черепащук и А.Г.Ягола, М.М.Лаврентьева, В.Г.Романова и С.П.Шищатского, А.А.Самарского, П.Н.Вабищевича, А.С.Леонова, В.Г.Романова, А.Н.Тихонова и В.Я.Арсенина, А.Н.Тихонова, А.В.Гончарского, В.В.Степанова и А.Г.Ягола, J.R.Cannon, A.Lorenzi, M.M.Lavrentiev (Jr), V.J.Primenko, V.G.Romanov, S.İ.Kabanikhin и обзорных статьях и диссертациях М.Г.Гасымова и Б.М.Левитана, А.Д.Искендерова, Н.Ш.Искендерова, А.И.Прилепко, Г.Я.Ягубова можно найти более полные сведения о состоянии теории обратных задач.

Среди обратных задач важнейшими в прикладном отношении и наиболее трудными для исследования являются обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики.

С начала 60 гг. XX века бурно развивается теория многомерных обратных задач (задач в которых отыскиваемые коэффициенты являются функциями многих переменных) для уравнений математической физики. Работы Ю.Е.Аниконова, А.Я.Ахундова, Н.Я.Безнощенко, А.М.Денисова, К.Н.Джалилова, А.Д.Искендерова, Н.В.Музылева, Г.К.Намазова, В.Г.Романова, В.В.Соловьева, и других посвящены обратным задачам об определении неизвестных коэффициентов и правой части уравнений математической физики.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 75 наименований.

Пусть R^n – вещественное n-мерное эвклидово пространство, $D \subset R^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей ∂D, $x = (x_1, ..., x_n)$– произвольная точка области D, $\overline{D} = D \bigcup \partial D$, $\Omega = D \times (0, T]$, $S = \partial D \times [0, T]$, $0 < T = const$.

Функциональные пространства $C^l(\cdot)$, $C^{l+\alpha}(\cdot)$, $C^{l,l/2}(\cdot)$, $C^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}(\cdot)$, $l = 0,1,2,$ $0 < \alpha < 1$ и нормы в этих пространствах определены общепринято

$$\|\upsilon\|_{l,k} = \|\upsilon\|_{C^{l,k}(\Omega)} = \sum_{i=0}^{l} \sup_{\Omega} \left| D_x^i \upsilon(x,t) \right| + \sum_{j=0}^{k} \sup_{\Omega} \left| D_t^j \upsilon(x,t) \right|,$$

$$\|g(x,t,\upsilon)\|_0 = \sup_{\Omega} \left| g(x,t,\upsilon(x,t)) \right|,$$

$D_x^l \upsilon(x,t)$– всевозможные производные функции $\upsilon(x,t)$ по x_i порядка l, $D_t^k \upsilon(x,t)$– производная функции $\upsilon(x,t)$ по t порядка k, $\upsilon_t = \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t}$, $\upsilon_{x_i} = \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n}$, $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial \overline{N}}$– производная по внешней нормали, $\nabla \upsilon = (\upsilon_{x_1}, ..., \upsilon_{x_n})$, $\Delta \upsilon = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_i^2}$,

$$\int_D \upsilon(x,t)\,dx = \int \underset{(D)}{\cdots} \int \upsilon(x,t)\,dx_1 ... dx_n.$$

Относительно входных данных рассматриваемых задач сделаем следующие предположения:

1^0. Функция $f(x,t,p)$ определена и непрерывна по совокупности переменных в $A = \left\{(x,t,p) \middle| (x,t) \in \overline{\Omega},\ p \in R^1 \right\}$;

– для $m_1 > 0$ и $|p| < m_1$ функция $f(x,t,p)$ непрерывна по Гельдеру по x и t с показателями α и $\alpha/2$ соответственно, при $(x,t) \in \overline{\Omega}$;

– существует постоянное $m_2 > 0$ такое, что для всех $p_1, p_2 \in R^1$ и $(x,t) \in \overline{\Omega}$

$$\left| f(x,t,p_1) - f(x,t,p_2) \right| \le m_2 \left| p_1 - p_2 \right|;$$

2^0. $\varphi(x) \in C^{2+\alpha}\left(\overline{D}\right)$;

3^0. Функция $\psi(x,t,p)$ определена и непрерывна по совокупности переменных в $B = \left\{ (x,t,p) \middle| (x,t) \in S,\ p \in R^1 \right\}$;

– для $m_3 > 0$ и $|p| < m_3$ функция $\psi(x,t,p)$ непрерывна по Гельдеру по x и t с показателями α и $\alpha/2$ соответственно, при $(x,t) \in S$,

– существует постоянное $m_4 > 0$ такое, что для всех $p_1, p_2 \in R^1$ и $(x,t) \in S$

$$\left| \psi(x,t,p_1) - \psi(x,t,p_2) \right| \le m_4 \left| p_1 - p_2 \right|;$$

4^0. $h(x) \in C^{2+\alpha}\left(\overline{D}\right)$;

5^0. $q(t) \in C^{1+\alpha}[0,T]$.

В первой главе исследуются вопросы корректности и приближенного решения многомерных обратных задач об определении неизвестных коэффициентов при старших производных полулинейного параболического уравнения второго порядка в случае нелинейного граничного условия Неймана. Отыскиваемые коэффициенты зависят от временной или от пространственных переменных. Дополнительные условия задаются в нелокальном–интегральном виде.

Для рассматриваемых задач доказываются теоремы единственности и устойчивости решения. Кроме того, на множестве корректности оценена скорость сходимости приближенного решения к точному решению.

Глава I состоит из трех параграфов. В первом параграфе главы I приведены основные обозначения, даны постановки рассматриваемых обратных задач.

Задача 1. По заданным функциям $f(\cdot), \varphi(\cdot), \psi(\cdot), h(\cdot)$ требуется определить функции $\{a(x),\ u(x,t)\}$ из условий:

$$u_t - a(x)\Delta u = f(x,\ t,u), \qquad (x,t) \in \Omega,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad x\in\overline{D}, \quad \frac{\partial u}{\partial \overline{N}}=\psi(x,t,u), \quad (x,t)\in S, \qquad \text{(I)}$$

$$\int_0^T u(x,t)dt=h(x), \qquad x\in\overline{D}.$$

Задача 2. По заданным функциям $f(\cdot), \varphi(\cdot), \psi(\cdot), q(\cdot)$ требуется определить функции $\{a(t),\ u(x,t)\}$ из условий:

$$u_t-a(t)\Delta u=f(x,\,t,u), \qquad (x,t)\in\Omega,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad x\in\overline{D}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \overline{N}}=\psi(x,t,u), \quad (x,t)\in S, \qquad \text{(II)}$$

$$\int_D u(x,t)d\,x=q(t), \qquad t\in[0,T].$$

Обратные задачи об определении неизвестных коэффициентов при старших производных линейных параболических уравнений ранее были рассмотрены в работах А.Я.Ахундова, Н.Я.Безнощенко, А.М. Денисова, Н.И.Иванчова, Н.В.Музылева, Г.К.Намазова, В.Г.Романова, J.R.Cannon, и др. В этих работах обратные задачи изучены в случае граничного условия Дирихле и неизвестные коэффициенты определяются по измерениям на границе области.

Определение 1. Пару функций $\{a(x),u(x,t)\}$ назовем решением задачи 1, если: 1) $a(x)>0,\ x\in\overline{D},\ a(x)\in C(\overline{D})$;
2) $u(x,t)\in C^{2,1}(\Omega)\cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$; 3) для этих функций удовлетворяются соотношения (I).

Определение 2. Функции $\{a(t),\ u(x,t)\}$ назовем решением задачи 2, если: 1) $a(t)>0, \quad t\in[0,T], \quad a(t)\in C[0,T]$;
2) $u(x,t)\in C^{2,1}(\Omega)\bigcap C^{1,0}(\overline{\Omega})$; 3) для этих функций удовлетворяются соотношения (II).

Задачи 1-2 относятся к классу некорректных по Адамару задач. В диссертации приводятся примеры, которые показывают, что решение задач 1-2 не всегда существует, а если существует, то оно может быть неединственным и неустойчивым. Следовательно, к задачам 1-2 надо относиться исходя из общих концепций теории некорректных задач.

Второй параграф главы I посвящен вопросам единственности и устойчивости решения задач 1-2.

Известно, что в теории обратных задач большое внимание уделяется вопросам единственности и устойчивости решения.

Пусть $\{a_k(t), u_k(x,t)\}$– решения задачи 2, соответствующие данным $f_k(\cdot)$, $\varphi_k(\cdot)$, $\psi_k(\cdot)$, $q_k(\cdot)$, $k=1,2$.

Теорема 1. Пусть:

1) функции $f_k(\,\cdot\,)$, $\varphi_k(\,\cdot\,)$, $\psi_k(\,\cdot\,)$, $q_k(\,\cdot\,)$, $k=1,2$, удовлетворяют условиям 1^0, 2^0, 3^0, 5^0 соответственно;

2) существуют решения $\{a_k(t),\ u_k(x,t)\}$, $k=1,2$, задачи 2 в смысле определения 2 и они принадлежат множеству

$$K_{1,2}^{\alpha}=\Big\{(u,a)\Big|u(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}),\ \ \left|D_x^l u(x,t)\right|\le m_5,\ l=0,1,2,\ (x,t)\in\overline{\Omega},$$

$$a(t)\in C^{\alpha}[0,T],\ 0<m_6\le a(t)\le m_7,\ t\in[0,T],$$

$m_5, m_6, m_7>0$ – постоянные числа $\Big\}$.

Тогда существует такое малое T^* $\left(0<T^*\le T\right)$, что при $(x,t)\in\overline{D}\times\left[0,\,T^*\right]$, решение задачи 2 единственно и верна следующая оценка:

$$\|a_1-a_2\|_0+\|u_1-u_2\|_0\le$$

$$\le M_1\Big[\|f_1-f_2\|_0+\|\varphi_1-\varphi_2\|_2+\|\psi_1-\psi_2\|_0+\|q_1-q_2\|_1\Big],$$

где $M_1>0$ зависит от данных задачи 2 и множества $K_{1,2}^{\alpha}$.

Для задачи 1 также доказывается аналогичная теорема.

В третьем параграфе главы I рассмотрены вопросы приближенного решения поставленных задач. Для приближенного решения рассматриваемых обратных задач применяется метод последовательных приближений.

Метод последовательных приближений применяется к задаче 1 по схеме

$$u_t^{(s+1)}-a^{(s)}(x)\Delta u^{(s+1)}=f\left(x,t,u^{(s)}\right),\qquad (x,t)\in\Omega\,, \qquad (1)$$

$$u^{(s+1)}(x,0)=\varphi(x), \quad x\in\overline{D}\,, \quad \frac{\partial u^{(s+1)}}{\partial\overline{N}}=\psi\left(x,t,u^{(s)}\right), \ (x,t)\in S\,, \qquad (2)$$

$$a^{(s+1)}(x)=\left[u^{(s+1)}(x,T)-\varphi(x)-\int_0^T f\left(x,t,u^{(s+1)}\right)dt\right](\Delta h(x))^{-1},\ x\in\overline{D}\,, \quad (3)$$

следующим образом: выбираются некоторые $a^{(0)}(x)\geq a_0>0$, $a^{(0)}(x)\in C^{\alpha}\left(\overline{D}\right)$, $u^{(0)}(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}\right)$ и решается «прямая» задача об определении $u^{(1)}(x,t)$ из соотношений (1), (2) при $s=0$. При надлежащих условиях на входные данные, эта задача имеет единственное классическое решение, принадлежащее $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}\right)$. Далее по функции $u^{(1)}(x,t)$ из соотношения (3) при $s=0$ определяется $a^{(1)}(x)\in C^{\alpha}\left(\overline{D}\right)$. В диссертации указаны условия на входные данные, при которых функции $a^{(s)}(x)$, $s=1,2,...$, найденные из (3), удовлетворяют неравенству: $a^{(s)}(x)\geq a_0>0$, $x\in\overline{D}$. Найденные функции $0<a_0<a^{(1)}(x)$ и $u^{(1)}(x,t)$ используются для проведения следующего шага итерации. Таким образом, при $s=1,2,...$ из системы (1), (2), (3) находятся последовательности $\left\{a^{(s)}(x)\right\}$ и $\left\{u^{(s)}(x,t)\right\}$.

Теорема 2. Пусть:

1) выполнены условия 1^0, 2^0, 3^0, 4^0;
2) $0<a_0\leq a^{(0)}(x)\in C^{\alpha}\left(\overline{D}\right)$, $u^{(0)}(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}\right)$,

   $0<\varphi_0\leq\Delta\varphi(x)$, $x\in\overline{D}$, $0<\psi_0\leq\psi(x,t,p)-\dfrac{\partial\varphi}{\partial\overline{N}}-\displaystyle\int_0^t\frac{\partial f(x,t,p)}{\partial\overline{N}}dt$,

   $(x,t)\in S$, $0<h_0T^{1+\theta}\leq\Delta h(x)\leq h_1T^{1+\theta}$, $x\in\overline{D}$, $\varphi_0,\psi_0,h_0,h_1,\theta$ – некоторые положительные постоянные;
3) решение задачи 1 существует и принадлежит множеству

$K_{1,1}^{\alpha}=\Big\{(u,a)\Big|u(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}\right),\ \left|D_x^l u(x,t)\right|\leq m_8,\ l=0,1,2,\ (x,t)\in\overline{\Omega},$

$a(x)\in C^{\alpha}\left(\overline{D}\right),\ 0<a_0\leq a(x)\leq a_1,\ x\in\overline{D},$

$a_0, a_1, m_8>0$ – постоянные числа $\Big\}$.

Тогда функции $\{a^{(s)}(x),\ u^{(s)}(x,t)\}$, полученные из (1), (2), (3), равномерно (по sup норме) стремятся к точному решению задачи 1 со скоростью геометрической прогрессии.

Во второй главе диссертации исследуются вопросы корректности и приближенного решения многомерных обратных задач об определении неизвестных коэффициентов при младших членах полулинейного параболического уравнения второго порядка. В рассматриваемых задачах граничные условия задаются в нелинейном виде. Отыскиваемые коэффициенты зависят от временной переменной, от пространственных переменных. Дополнительные условия задаются в нелокальном (интегральном) виде.

Глава II состоит из четырех параграфов. В первом параграфе приведены основные обозначения, даны постановки рассматриваемых обратных задач.

Задача 3. По заданным функциям $f(\cdot), \varphi(\cdot), \psi(\cdot), h(\cdot)$ требуется определить пару функций $\{c(x), u(x,t)\}$ из условий:

$$u_t - \Delta u + c(x)u = f(x,t,u), \qquad (x,t) \in \Omega,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \overline{D}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} = \psi(x,t,u),\ (x,t) \in S, \qquad \text{(III)}$$

$$\int_0^T u(x,t)dt = h(x),\ x \in \overline{D}.$$

Задача 4. По заданным функциям $f(\cdot), \varphi(\cdot), \psi(\cdot), q(\cdot)$ требуется определить пару функций $\{c(t), u(x,t)\}$ из условий:

$$u_t - \Delta u + c(t)u = f(x,t,u), \qquad (x,t) \in \Omega,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \overline{D}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \overline{N}} = \psi(x,t,u),\ (x,t) \in S, \qquad \text{(IV)}$$

$$\int_D u(x,t)dx = q(t),\ t \in [0,T].$$

Обратные задачи об определении неизвестных коэффициентов при младших членах в параболическом уравнении второго порядка рассмотрены в работах А.Я.Ахундова, Н.Я.Безнощенко, М.Г.Вишневского, А.М.Денисова, Н.И.Иванчова, А.Д.Искендерова, Н.В.Музылева, Г.К.Намазова, Н.Дж.Пашаева, В.Г.Романова, J.R.Cannon, Duchatean P., Rundell W. и др.

Определение 3. Пару функций $\{c(x), u(x,t)\}$ назовем решением задачи 3, если: 1) $c(x) \in C(\overline{D})$;

2) $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$; 3) для этих функций удовлетворяются соотношения (III).

В этом параграфе приведены примеры нарушения условий корректности задач 3 и 4.

Во втором параграфе также главы II при довольно общих предположениях доказаны теоремы единственности решения задач 3, 4 и установлены оценки, характеризующие условную устойчивость решения.

Пусть $\{c_k(x),\ u_k(x,t)\}$ – решения задачи 3, соответствующие данным $f_k(\cdot),\ \varphi_k(\cdot),\ \psi_k(\cdot),\ h_k(\cdot)$ $k = 1,2$.

Теорема 3. Пусть:

1) $|h_k(x)| \geq const > 0, \quad k = 1, 2, \quad x \in \overline{D}$; 2) функции $f_k(\cdot),\ \varphi_k(\cdot),\ \psi_k(\cdot),\ h_k(\cdot), \quad k = 1,2$, удовлетворяют условиям 1^0, 2^0, 3^0, 4^0 соответственно; 3) существуют решения $\{c_k(x),\ u_k(x,t)\}, \quad k = 1,2$, задачи 3 и они принадлежат множеству

$$K_{2,1}^{\alpha} = \Big\{(c,u) \Big| c(x) \in C^{\alpha}(\overline{D}), \quad u(x,t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega}),$$

$$\left|D_x^l u(x,t)\right| \leq m_9,\ l = 0,1,2,\ (x,t) \in \overline{\Omega},\ |c(x)| \leq m_{10},\ x \in \overline{D},\ m_9, m_{10} > 0\Big\}.$$

Тогда существует такое $T^* > 0$, что при $(x,t) \in \overline{D} \times [0, T^*]$ решение задачи 3 единственно и верна следующая оценка:

$$\|c_1 - c_2\|_0 + \|u_1 - u_2\|_0 \leq$$

$$\leq M_2 \Big[\| f_1 - f_2\|_0 + \| \varphi_1 - \varphi_2\|_2 + \| \psi_1 - \psi_2\|_0 + \| h_1 - h_2\|_2\Big],$$

где $M_2 > 0$ зависит от данных задачи 3 и множества $K_{2,1}^{\alpha}$.

Для задачи 4 также доказывается аналогичная теорема.

Для приближенного решения обратных задач 3 и 4 применяется метод последовательных приближений.

Метод последовательных приближений применяется к задаче 3 по схеме

$$u_t^{(s+1)} - \Delta u^{(s+1)} = f(x,t,u^{(s)}) - c^{(s)}(x)u^{(s+1)}(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega, \quad (4)$$

$$u^{(s+1)}(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{D}, \quad \frac{\partial u}{\partial \overline{N}}^{(s+1)} = \psi\left(x,t,u^{(s)}\right), \quad (x,t) \in S, \ (5)$$

$$c^{(s+1)}(x) = \left[\varphi(x) + \Delta h(x) + \int_0^T f\left(x,t,u^{(s+1)}(x,t)\right)dt - u^{(s+1)}(x,T)\right](h(x))^{-1},$$

$$x \in \overline{D}, \qquad (6)$$

следующим образом: выбираются некоторые $c^{(0)}(x) \in C^{\alpha}\left(\overline{D}\right)$, $u^{(0)}(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}\right)$ и решается “прямая” задача об определении $u^{(1)}(x,t)$ из соотношений (4), (5) при $s = 0$. При надлежащих условиях на входные данные, эта задача имеет единственное классическое решение, принадлежащее $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}\right)$. Далее по функции $u^{(1)}(x,t)$ из соотношения (6) при $s = 0$ определяется $c^{(1)}(x) \in C^{\alpha}\left(\overline{D}\right)$ и эти функции используются для проведения следующего шага итерации.

Нетрудно проверить, что если выполнены условия 1^0, 2^0, 3^0, 4^0 и $c^{(0)}(x) \in C^{(\alpha)}\left(\overline{D}\right)$, $u^{(0)}(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}\right)$, то для любого $s = 1,2,...$ $c^{(s)}(x) \in C^{\alpha}\left(\overline{D}\right)$, $u^{(s)}(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Таким образом, при $s = 1,2,...$ из системы (4), (5), (6) находятся последовательности $\left\{c^{(s)}(x)\right\}$ и $\left\{u^{(s)}(x,t)\right\}$.

Теорема 4. Пусть
1) выполнены условия 1^0, 2^0, 3^0, 4^0; 2) решение задачи 3 существует и принадлежит множеству $K_{2,1}^{\alpha}$.

Тогда функции $\left\{c^{(s)}(x), u^{(s)}(x,t)\right\}$, полученные из (4), (5), (6), равномерно стремятся к решению задачи 3 со скоростью геометрической прогрессии.

В четвертом параграфе главы II методом последовательных приближений доказывается существование интегрального решения задачи 3.

В главе III диссертации исследуются вопросы корректности и приближенного решения обратных задач об определении неизвестных коэффициентов в правой части системы параболических уравнений типа реакция-диффузия. Обратные задачи рассматриваются в ограниченных областях в случае третьего граничного условия и с интегральной дополнительной информацией.

Глава III состоит из четырех параграфов. В первом параграфе главы III приведены основные обозначения и даны постановки рассматриваемых обратных задач.

Задача 5. По заданным функциям $g_k(\cdot)$, $\varphi_k(\cdot)$, $b_k(\cdot)$, $\psi_k(\cdot)$, $q_k(\cdot)$, требуется определить $\left\{f_k(t), u_k(x,t), k=\overline{1,m}\right\}$ из условий:

$$u_{kt}-\Delta u_k = f_k(t) g_k(x,t,u),\ (x,t)\in\Omega,$$

$$u_k(x,0)=\varphi_k(x),\ x\in\overline{D},\ \frac{\partial u_k}{\partial \overline{N}}+b_k(t)u_k=\psi_k(x,t),\ (x,t)\in S, \quad \text{(V)}$$

$$\int_D u_k(x,t)dx = q_k(t), t\in[0,T].$$

Задача 6. По заданным функциям $g_k(\cdot)$, $\varphi_k(\cdot)$, $b_k(\cdot)$, $\psi_k(\cdot)$, $h_k(\cdot)$, $k=\overline{1,m}$, требуется определить $\left\{f_k(x), u_k(x,t), k=\overline{1,m}\right\}$ из условий:

$$u_{kt}-\Delta u_k = f_k(x) g_k(x,t,u),\ (x,t)\in\Omega,$$

$$u_k(x,0)=\varphi_k(x),\ x\in\overline{D},\ \frac{\partial u_k}{\partial \overline{N}}+b_k(t)u_k=\psi_k(x,t),\ (x,t)\in S, \quad \text{(VI)}$$

$$\int_0^T u_k(x,t)dt = h_k(x),\ x\in\overline{D}.$$

Обратные задачи для системы параболических уравнений, по постановке близкие к задачам 5 и 6, ранее были изучены в работах А.Я.Ахундова (в ограниченной области с граничным условием Дирихле), А.Д.Искендерова и Н.Дж.Пашаева (в случае внешней краевой задачи Дирихле).

Определение 4. Пару функций $\left\{f_k(t), u_k(x,t), k=\overline{1,m}\right\}$ назовем решением задачи 5, если: 1) $f_k(t)\in C[0,T]$;

2) $u_k(x,t)\in C^{2,1}(\Omega)\bigcap C^{1,0}(\overline{\Omega})$; 3) для этих функций удовлетворяются соотношения (V).

Во втором параграфе главы III при довольно общих предположениях доказаны теоремы единственности решения задач 5 и 6 и установлены оценки устойчивости решения.

Пусть, кроме задачи 5 задана еще задача $\overline{5}$, где все функции, входящие в (V), заменены на соответствующие функции с чертой.

Теорема 5. Пусть

1) функции $g_k(\cdot),\ \varphi_k(\cdot),\ \psi_k(\cdot),\ q_k(\cdot)$ и $\overline{g}_k(\cdot),\ \overline{\varphi}_k(\cdot),\ \overline{\psi}_k(\cdot),\ \overline{q}_k(\cdot)$, $k=\overline{1,m}$, удовлетворяют условиям 1^0, 2^0, 3^0, 5^0 соответственно и $b_k(t),\ \overline{b_k}(t)\in C^{\alpha}[0,T]$;

2) существуют решения задач 5 и $\overline{5}$ $\{f_k(t), u_k(x,t),\ k=\overline{1,m}\}$ и $\{\overline{f}_k(t), \overline{u}_k(x,t),\ k=\overline{1,m}\}$ и они принадлежат множеству $K_{3,1}^{\alpha}=\{(f_k,u_k)|$ $f_k(t)\in C^{\alpha}[0,T]$, $|f_k(t)|\le c_1,\ t\in[0,T]$, $u_k(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$, $\left|D_x^l u_k(x,t)\right|\le c_2,\ l=0,1,2,\ (x,t)\in\overline{\Omega},\ k=\overline{1,m}\}$.

Тогда существует такое T^* $\left(0<T^*\le T\right)$, что при $(x,t)\in\overline{D}\times\left[0,T^*\right]$ решение задачи 5 единственно и верна следующая оценка устойчивости:

$$\left\|f-\overline{f}\right\|_0+\left\|u-\overline{u}\right\|_0\le$$
$$\le M_3\left[\left\|g-\overline{g}\right\|_0+\left\|\varphi-\overline{\varphi}\right\|_2+\left\|\psi-\overline{\psi}\right\|_0+\left\|b-\overline{b}\right\|_0+\left\|q-\overline{q}\right\|_1\right],$$

где $M_3>0$ зависит лишь от данных задач 5 и $\overline{5}$ и множества $K_{3,1}^{\alpha}$.

Для задачи 6 доказывается аналогичная теорема.

Третий параграф главы III посвящен вопросам приближенного решения обратных задач 5 и 6.

Метод последовательных приближений, применяемый к задаче 5, состоит в следующем: пусть $\left\{f_k^{(s)}(t),\ u_k^{(s)}(x,t), k=\overline{1,m}\right\}$ уже найдены и $f_k^{(s)}(t)\in C^{\alpha}[0,T],\ u_k^{(s)}(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Рассмотрим задачу об определении $u_k^{(s+1)}(x,t)$, $k=\overline{1,m}$, из условий:

$$u_{kt}^{(s+1)}-\Delta u_k^{(s+1)}=f_k^{(s)}(t)\,g_k\left(x,t,u^{(s)}\right),\qquad (x,t)\in\Omega, \tag{7}$$

$$u_k^{(s+1)}(x,0)=\varphi_k(x), \quad x\in\overline{D}\ , \ \frac{\partial u_k^{(s+1)}}{\partial\overline{N}}+b_k u_k^{(s)}=\psi_k(x,t),\ (x,t)\in S\ . \quad (8)$$

Если входные данные задачи (7), (8) об определении $u_k^{(s+1)}(x,t)$ обладают свойствами условий 1^0, 2^0, 3^0, 5^0, то эта задача имеет единственное классическое решение, принадлежащее $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$. Далее, по функции $u_k^{(s+1)}(x,t),\ k=\overline{1,m}$, из формулы

$$f_k^{(s+1)}(t)=\left[q_{kt}(t)-\int_{\partial D}\psi_k(x,t)dx+b_k(t)\int_{\partial D}u_k^{(s+1)}(x,t)dx\right]\times$$

$$\times\left(\int_D g_k\left(x,t,u^{(s+1)}\right)dx\right)^{-1},\ t\in[0,T], \quad (9)$$

определяются $f_k^{(s+1)}(t)$, $k=\overline{1,m}$, и функции $\left\{f_k^{(s+1)}(t),\ u_k^{(s+1)}(x,t),\ k=\overline{1,m}\right\}$ используются для проведения следующего шага итерации.

Таким образом, если выбрать $f_k^{(0)}(t)\in C^\alpha[0,T]$, $u_k^{(0)}(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$, $k=\overline{1,m}$, из системы (7), (8), (9) при $s=0,1,2,...$ последовательно найдем функции $f_k^{(s)}(t)\in C^\alpha[0,T]$, $u_k^{(s)}(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$, $k=\overline{1,m}$.

Теорема 6. Пусть

1) выполнены условия 1^0, 2^0, 3^0, 5^0 и $b_k(t)\in C^\alpha[0,T]$;
2) задача 5 имеет единственное решение, принадлежащее множеству $K_{3,1}^\alpha$;
3) $f_k^{(0)}(t)\in C^\alpha[0,T]$, $u_k^{(0)}(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$, $k=\overline{1,m}$.

Тогда функции $\left\{f_k^{(s)}(t),\ u_k^{(s)}(x,t), k=\overline{1,m}\right\}$, найденные из системы (7), (8), (9) равномерно стремятся к точному решению задачи 5 со скоростью геометрической прогрессии.

Четвертый параграф главы III посвящен вопросам существования решения задач 5 и 6. Нетрудно проверить, что если входные данные задачи 5 удовлетворяют определенным условиям и решение задачи 5 принадлежит множеству $K_{3,1}^\alpha$, то задачу 5 можно привести к эквивалентной задаче – к системе интегральных уравнений:

$$u_k(x,t)=\varphi_k(x)+\int_0^t\int_D \Gamma(x,t;\xi,\tau)[f_k(\tau)g_k(\xi,\tau,u)+\Delta\varphi_k(\xi)]d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{\partial D}\Gamma(x,t;\xi,\tau)\rho_k(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (x,t)\in\Omega,$$

$$f_k(t)=\left[q_{kt}(t)-\int_{\partial D}\psi_k(x,t)dx+b_k(t)\int_{\partial D}u_k(x,t)dx\right]\times$$

$$\times\left(\int_D g_k(x,t,u)dx\right)^{-1}, \ t\in[0,T], \ k=\overline{1,m}, \tag{10}$$

здесь $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ – фундаментальное решение уравнения $u_{kt}-\Delta u_k=0$, $\rho_k(x,t)$ – ограниченное, непрерывное решение следующего интегрального уравнения

$$\rho_k(x,t)=2\int_0^t\int_D\frac{\partial\Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial\overline{N}}[f_k(\tau)g_k(\xi,\tau,u)+\Delta\varphi_k(\xi)]d\xi d\tau+$$

$$+2\int_0^t\int_{\partial D}\frac{\partial\Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial\overline{N}}\rho_k(\xi,\tau)d\xi d\tau-2\left[\psi_k(x,t)-\frac{\partial\varphi_k(x)}{\partial\overline{N}}-b_k(t)u_k(x,t)\right].$$

Существование решения системы интегральных уравнений (10) проводится методом последовательных приближений.

Теорема 7. Пусть выполнены условия 1^0, 2^0, 3^0, 5^0 и $b_k(t)\in C^\alpha[0,T]$. Тогда найдется такое $T^*(0<T^*\le T)$, что при $(x,t)\in\overline{D}\times[0,T^*]$ существует решение системы интегральных уравнений (10) и $f_k(t)\in C[0,T^*]$, $u_k(x,t)\in C(\overline{D}\times[0,T^*])$.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Gasanova A.I. Determination of the coefficient of parabolic equation in the problem with a nonlinear boundary condition. Transactions of NAS of Azerb., ser. of phys.-techn. and math. sci., 2012, v.32, №1, p.39-44.

2. Akhundov A.Ya., Hasanova A.I. Determination of the coefficient of a semilinear parabolic equation in the case of boundary value problem with nonlinear boundary condition. International Scientific Conference "Math. analysis diff. equat. and their applicat.", Mersin, Turkey, September, 4-9, 2012, pp.122-123.
3. Ахундов А.Я., Гасанова А.И. Определение коэффициента параболического уравнения в случае задачи с нелинейным граничным условием. Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы. Воронеж, 2012, с.23-24.
4. Akhundov A.Ya., Gasanova A.I. Determination of the coefficient in the right side of the system of reaction-diffusion type in the problem with a nonlinear boundary condition. Transactions of NAS of Azerb., ser. of phys.-techn. and math. sci., 2013, v.33, №1, p.3-8.
5. Akhundov A.Ya., Gasanova A.I. On an inverse problem for a semilinear parabolic equation. International conference dedicated to the 90-th anniversary of Haydar Aliyev, 2013, p.45-46.
6. Akhundov A.Ya., Gasanova A.I. Determination of the coefficient of a semilinear parabolic equation in the case of boundary-value problem with nonlinear boundary condition. Ukrainian Mathematical Journal, 2014, v.66, №6, p.847-852
7. Hasanova A.I. Approximate solution of an inverse problem for a semilinear parabolic equation. Transactions of NAS of Azerb., ser. of phys.-techn. and math. sci., 2014, v.34, №1, p.51-56.
8. Akhundov A.Ya., Gasanova A.I. On an inverse problem for a semilinear parabolic equation in the case of boundary value problem with non-linear boundary condition. Azerbaijan journal of Mathematics, 2014, vol.4, №2, p.10-15.
9. Həsənova A.H. Parabolik tənlikdə naməlum əmsalın tapılması haqqında tərs məsələ. Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri. Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 55 illiyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransın materialları. Bakı, 2014, c.147.

AYNUR HİDAYƏT qızı HƏSƏNOVA

PARABOLİK TİP TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR SIRA TƏRS MƏSƏLƏLƏRİN ARAŞDIRILMASI

XÜLASƏ

Dissertasiya işi yarımxətti parabolik tip tənliklər və bir sinif parabolik tənliklər sistemində naməlum əmsalların və sağ tərəflərin tapılması haqqında tərs məsələlərin korrektliyinin araşdırılmasına həsr olunmuşdur. Baxılan məsələlərin həllinin varlığı, yeganəliyi və dayanıqlığı haqqında teoremlər isbat olunmuşdur. Həllin təqribi tapılması üçün alqoritm təklif olunmuş və əsaslandırılmışdır.

Dissertasiya işində aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

– iki tərtibli yarımxətti parabolik tip tənlikdə yüksək törəmələr qarşısında duran naməlum əmsalların tapılması haqqında qeyri-xətti Neyman sərhəd şərtli tərs məsələlərin Tixonov mənada korrektliyi araşdırılmışdır;
– iki tərtibli yarımxətti parabolik tip tənlikdə “kiçik” hədlər qarşısında duran naməlum əmsalların tapılması haqqında qeyri-xətti Neyman sərhəd şərtli tərs məsələlərin həllinin varlığı, yeganəliyi, dayanıqlığı teoremləri isbat edilmişdir;
– reaksiya-diffuziya tipli sistemdə naməlum sağ tərəfin tapılması haqqında tərs məsələlərin korrektliyi araşdırılmışdır;
– baxılan tərs məsələlərin təqribi həlli üçün təklif olunmuş alqoritmlər əsaslandırılmışdır.

AYNUR IDAYAT HASANOVA

STUDYING OF SOME INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS

SUMMARY

The dissertation work is devoted to studying of well-posedness of inverse problems on finding the unknown coefficients and right sides in the system of semilinear parabolic equations and a class of parabolic equations. The theorems on the existence, uniqueness and stability of the considered problems were proved. An algorithm to find an approximate solution was suggested and justified.

The following results were obtained in the work:

- the well-posedness of the inverse problems on finding the unknown coefficient standing in front of higher order derivatives in a semilinear parabolic equation in the sense of Tikhonov was studied;
- the theorems on the existence, uniqueness, stability of the inverse problems with non-linear Neumann condition stated to find the coefficients standing in front of “small” boundaries in semilinear parabolic equations were proved;
- theorems on the existence, uniqueness and stability of inverse problems of III boundary term stated to find the unknown right sides in the system of reaction-diffusion type parabolic equations were proved;
- algorithms suggested to find the approximate solution of the considered inverse problems were justified.