AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ

BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Əlyazma hüququnda

GÜNAY FİKRƏT qızı HACIYEVA

DƏYİŞƏN KÜTLƏLİ MÜHİTİN RİYAZİ MODELİNİN VƏ HƏLL ÜSULUNUN İŞLƏNMƏSİ

1211.01 – Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

BAKI-2017

Dissertasiya işi Sumqayıt Dövlət Universitetinin "Riyazi analiz və funksiyalar nəzəriyyəsi" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:	Texnika elmlər doktoru, prof. **Rasim Ş. İsmayılov**
	Riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Polad F.Qəhrəmanov**
Rəsmi opponentlər:	Riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Yaqub Ə. Şərifov**
	Riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Tahir S. Hacıyev**
Aparıcı təşkilat:	Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti ("Bina və qurğuların istismarı və rekonstruksiyası" kafedrası)

Dissertasiya işinin müdafiəsi 19 dekabr 2017-ci il tarixində saat 14^{00}-da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdindəki FD.02.016 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ1148, Bakı şəhəri, Z. Xəlilov küç., 23, Bakı Dövlət Universiteti

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin elmi kitabxanasında tanış olmaq olar.

Avtoreferat 15 noyabr 2017-ci il tarixində göndərilmişdir.

FD 02.016 Dissertasiya Şurasının elmi katibi: **dosent A.T.Əfəndiyeva**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Dissertasiya perspektiv elmi istiqamət olan ikifazalı sistemlərdə xarici kütlə mübadiləsini nəzərə almaqla baş verən hidrodinamik proseslərin nəzəri əsaslarının işlənməsinə həsr edilmişdir. Bu mövzünun əhatə dairəsi kifayət qədər genişdir və son zamanlar belə problemlərə tez-tez rast gəlinir. Bu tip məsələlər neft, qaz və digər məhsulların borularla nəqli, neft və qaz quyularının qazılması zamanı hidrodinamik müqavimətlərin azaldılması, texnoloji qurğularda və aparatlarda kütlə daşınmasının sürətləndirilməsi, texniki sistemlərin (enerji maşınları, trubomaşın, uçuş aparatları, daxiliyanma mühərriklərinin və s.) elementlərinin istilikdən qorunması və digər problemlərin həlli zamanı ortaya çıxır.

Hal-hazırda ikifazalı sistemlərin hidrodinamikasının məlum riyazi modellərində ancaq mühitin daxilində fazalar arası keçidlər nəzərə alınır. Ona görə də ikifazalı sistemlər nəzəriyyəsində kütləmübadiləli izolə edilməmiş axının (yəni xarici axın mənbəli) riyazi modeli işlənilməlidir. Əgər kütləyə xarici mənbə (birləşən və ayrılan kütlə) təsir edirsə axının hidrodinamik parametrləri nəzərə çarpacaq dərəcədə dəyişə bilər. Hərəkətin ümumi tənliyinin və xarici kütlə mübadiləli ikifazalı sistemlərin dəqiq riyazi modelinin olmaması bir çox texnoloji qurğuların və aparatların optimallaşdırılması işini gecikdirir (istilik, hidro və atom energetikasında, avio texnikada, hidrotexnikada, neftkimyada və s.). Bütöv bunlar dissertasiya mövzusunun aktuallığını göstərir.

Dissertasiya işinin məqsədi. Xarici kütlə mübadiləsini nəzərə almaqla ikifazalı sistemlərdə hidrodinamik və kütlə mübadiləsinin nəzəri əsaslarının, riyazi modellərinin, ədədi həll üsullarının və onların kompyuterdə realizasiyası üçün alqoritm və proqramlar təminatının işlənib hazırlanmasından ibarətdir. Bu məqsədlə aşağıdakı tədqiqat məsələləri tərtib olunmuşdur: həm daxili, həm də xarici kütlə mübadiləsini nəzərə almaqla ikifazalı dispers sistemlərin hərəkətinin ümumi tənliyini qurmaq; ikifazalı sistemlərin oxşarlıq şərtini və riyazi modelini işləyib hazırlamaq; bütöv mühitdə konvektiv kütlə mübadiləsi, şırnaqlı axın və sərhəd təbəqəsinin tənliklərinin həlli üçün ədədi üsullardan istifadə etmək və ədədi eksperiment aparmaq.

Elmi yeniliklər.

1. Xarici kütlə mübadiləsi nəzərə alınmaqla ikifazalı sistemlərin ümumi tənlikləri işlənib hazırlanmış və əsaslandırılmışdır;
2. Kütlə mübadiləsi nəzərə alınmaqla ikifazalı sistemlərə xas olan yeni ölçüsüz oxşarlıq kriterisi müəyyən olunmuşdur;
3. Kütlə mübadiləsi nəzərə alınmaqla bir və ikifazalı sistemlərin konkret modelləri üçün yeni daha mükəmməl qapalı hidrodinamika tənlikləri işlənib hazırlanmışdır;
4. Konvektiv kütlə mübadiləsi və sərhəd təbəqəsi tənliklərinin ədədi həlli verilmişdir.

İşin elmi və praktik əhəmiyyəti. Dissertasiya işinin elmi və praktik əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, alınan nəticələr kütləmübadiləli bir və ikifazalı sistemlərin hidrodinamikasının tətbiqi məsələlərini kompleks şəkildə həll etməyə imkan verir. Alınmış riyazi modellər və ədədi həll üsulları texnoloji qurğuların təchizat elementlərində bir və ikifazalı, bütöv mühitlərin hesablanması və analizində istifadə edilə bilər. Dissertasiyada hidrodinamikanın ümumi tənliklər sisteminə əsasən alınmış oxşarlıq kriteriyası kütləmübadiləli bir və ikifazalı sistemin axınının modelləşdirilməsi üçün zəruri və kafi şərtləri ödəyir, ədədi və fiziki eksperimentlərin proqramlar şəklində qoyuluşuna imkan verir.

İşin aprobasiyası: Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakı konfrans və simpoziumlarda məruzə edilmiş və müzakirə olunmuşdur:

1. Механика Наноструктурированных материалов и систем. Сборник трудов Всероссийской конференции, Москва, 2011
2. Материалы VIII международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ 2012), Москва, 2012
3. Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Том 2. Материалы VII Международного симпозиума. Москва, 2012
4. Избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. Москва, 2014
5. Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Том 1. Материалы X Международного симпозиума. Москва, 2015
6. Applied mathematics, informatics and mechanics, Vol. 21, No.2, Tbilisi, 2016

Nəşrlər. Dissertasiya işinin mövzusuna aid 16 elmi iş dərc olunmuşdur.

Dissertasiyanın həcmi və quruluşu. Dissertasiya işi girişdən, 3 fəsildən, nəticədən, istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından, 5 cədvəldən və əlavələrdə daxil olmaqla 144 səhifədən ibarətdir.

İŞİN MƏZMUNU

Girişdə ikifazalı mühitin hərəkətinə həsr olunmuş mövcud işlər araşdırılmış, dissertasiyanın mövzusuna yaxın olan əsas işlərin xülasəsi verilmiş və baxılmış məsələlər təhlil edilmişdir. Ortalaşma üsulu və ikifazalı sistemləri təsvir edən məlum nəzəriyyələrin qısa xülasəsi verilmişdir.

Mühitin axınında çəkilmiş (ölçülmüş) hissəciyin hərəkət nəzəriyyəsi N.A.Slezkinin, Q.İ.Barenblattın və F.İ.Franklın işlərində verilmişdir. Göstərilən nəzəriyyənin əsas fərziyyəsi ondan ibarətdir ki, çəkilmiş hissəciyin ölçüsü (turbulentliyin miqyaslı xarakteri ilə müqayisədə) elədir ki, onlar əsas qarışıq mühitdə kəsilməz paylanma əmələ gətirir. Kütlənin saxlanma tənliyi (kəsilməzlik) maye və qarışıq (bərk hissəciklərlə) üçün aşağıdakı kimi olur:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_f(1-\varphi)\right]+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho_f(1-\varphi)u_{f\alpha}\right]=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s\varphi)+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho_s\varphi u_{s\alpha})=0 \qquad (2)$$

Burada və sonralar α indeksinin birdən üçə qədər toplanması nəzərdə tutulur. Bu tənlikləri toplamaqla qarışıq (ikifazalı mühit) mühit üçün kütlənin saxlanma tənliyini alırıq:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_\alpha)=0 \qquad (3)$$

burada ρ qarışığın sıxlığı, $\rho=(1+\theta\varphi)\rho_f$; $\theta=(\rho_s-\rho_f)/\rho_f$; ρ_f,ρ_s maye və bərk hissəciyin sıxlığı, u-qarışığın sürəti, $u=\left[\rho_f(1-\varphi)u_f+\rho_s\varphi u_s\right]/\rho$; u_f, u_s-mayenin və bərk hissəciyin sürətidir.

Sonra mayeni sıxılmayan, bərk hissəciyi deformasiya olunmayan (yəni $\rho_f=const$ və $\rho_s=const$) hesab edərək müəlliflər hər faza üçün kəsilməzlik tənliyini aşağıdakı formada göstərmişlər:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[(1-\varphi)u_{f\alpha}\right]=0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\varphi u_{s\alpha})=0 \qquad (5)$$

Bütöv mühit üçün isə kəsilməzlik tənliyi belə olur

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[(1-\varphi)u_{f\alpha}+\varphi u_{s\alpha}\right]=0 \qquad (6)$$

və ya

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0\,. \qquad (7)$$

Maye faza və çəkilmiş hissəciyin aktiv hərəkətinin dinamika tənliyini (kəsilməz faza tənliyini nəzərə almaqla) aşağıdakı kimi göstərmək olar:

$$\rho_f(1-\varphi)\left(\frac{\partial u_{fi}}{\partial t}+u_{f\alpha}\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_\alpha}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(1-\varphi)P\right]+ +\frac{\partial\tau^f_{\alpha i}}{\partial x_\alpha}-\rho_f(1-\varphi)g_i+R_i \qquad (8)$$

$$\rho_f\varphi\left(\frac{\partial u_{si}}{\partial t}+u_{s\alpha}\frac{\partial u_{si}}{\partial x_\alpha}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi P)+\frac{\partial\tau^s_{\alpha i}}{\partial x_\alpha}-\rho_s\varphi g_i-R_i \qquad (9)$$

burada, P-mühitin verilmiş nöqtədə tam hidrodinamik təzyiqidir; u_{fi},u_{si}-uyğun olaraq maye və bərk hissəciklərin x_i oxu üzrə sürət komponentləridir $(i=1,2,3)$; R_i- x_i oxu üzrə qarışığın vahid həcmdən keçən maye və hissəciklərin qarşılıqlı təsir qüvvəsinin komponentidir; g_i-oxlar üzrə ağırlıq qüvvəsinin təcil komponentidir; $\tau^f_{\alpha i}$-mayedə özlü gərginlik tenzorudur; $\tau^s_{\alpha i}$-hissəciklərin qarşılıqlı təsiri nəticəsində alınan gərginlikdir.

Q.İ.Barenblatt ikifazalı mühitin aktual hərəkət tənliyini aşağıdakı kimi almışdır

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right)=-\rho g_i+\frac{\partial\tau_{\alpha i}}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial P}{\partial x_i}\,. \qquad (10)$$

Beləliklə, (7) kəsilməzlik tənliyi və (10) dinamika tənliyi Q.İ.Brenblattın ikifazalı mühitin aktual hərəkəti üçün əsas hidrodinamika tənlikləri sistemini təşkil edir.

F.İ.Frankl kinetik qaz nəzəriyyəsində, aktual hərəkətin tənliyini (ortalaşmaya qədər) məşhur terminə analoji olaraq "mikroskopik tənliklər" və hərəkətin ortalaşmış tənliyini isə "makroskopik" adlandırmışdır. Mikroskopik hərəkətə baxdıqda kütlənin saxlama, impuls və enerji tənliklərini F.İ.Frankl sonlu oblast üçün ayrılıqda maye və bərk komponentlər üçün almışdır. Bunları ortalaşdıraraq, müəllif sonlu həcm üçün tənliklərdən diferensial tənliklər sisteminə keçir (mayeni sıxılmayan hesab edir, çəkilmiş hissəciyi isə mütləq bərk hesab edir). O, hərəkət tənliyini ikifazalı mühitin ortalaşmış hərəkətinin hər bir komponenti üçün almışdır.

Bərk faza üçün kəsilməzlik tənliyi

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\overline{\varphi}\, \overline{u}_{s\alpha}\right) = 0 \qquad (11)$$

və maye faza üçün

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(1-\overline{\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\left(1-\overline{\varphi}\right)\overline{u}_{f\alpha}\right] = 0 \qquad (12)$$

kimidir. Bərk faza üçün dinamika tənliyi

$$\rho_s \varphi\left(\frac{\partial \overline{u}_{si}}{\partial t} + \overline{u}_{s\alpha}\frac{\partial \overline{u}_{si}}{\partial x_\alpha}\right) = -\varphi\frac{\partial \overline{P}_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \overline{\Pi}_{si\alpha}}{\partial x_\alpha} + \overline{R}_i + \rho_s \overline{\varphi} F_i \qquad (13)$$

və maye faza üçün

$$\rho_f\left(1-\overline{\varphi}\right)\left(\frac{\partial \overline{u}_{fi}}{\partial t} + \overline{u}_{f\alpha}\frac{\partial \overline{u}_{fi}}{\partial x_\alpha}\right) = -\left(1-\overline{\varphi}\right)\frac{\partial \overline{P}_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \overline{\Pi}_{fi\alpha}}{\partial x_\alpha} - \overline{R}_i + \rho_s\left(1-\overline{\varphi}\right)F_i \qquad (14)$$

şəklindədir.

(11)-(14) tənliklərində R_i-bərk hissəciyin mayedə hərəkətinin ortalaşma müqavimətidir:

$$\overline{R}_i = \overline{\varphi' \frac{\partial \overline{P}'_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}} \qquad (15)$$

$\Pi_{si\alpha}$, $\Pi_{fi\alpha}$ -uyğun olaraq maye və bərk fazaların turbulent gərginlik tenzorlarıdır:

$$\Pi_{si\alpha} = \rho_s \overline{\varphi}\left(\overline{u'_{si} u'_{s\alpha}}\right); \qquad (16)$$

$$\Pi_{fi\alpha} = \rho_s\left(1-\overline{\varphi}\right)\left(\overline{u'_{fi} u'_{f\alpha}}\right); \qquad (17)$$

F_i-vahid kütlənin həcm qüvvəsidir.

İkifazalı mühitin hesablama və eksperimentlərini öyrənmək üçün, nəzəriyyənin inkişafına əsaslı elmi zənginlikləri M.E.Deyç və

onun tələbələri, məsələn, Q.A.Filippov, V.İ.Kiryuxin, Q.A.Saltanov, L.İ.Seleznov, R.Ş.İsmayılov və s. gətirmişlər və daxili kütlədəyişməni nəzərə almaqla ikifazalı axının fazada qeyri-stasionar hərəkətinin tənliklərini almışlar.

Qısa tədqiqatı yekunlaşdıraraq qeyd etmək olar ki, indiki zamanda bütöv ikifazalı sistemin hidroistilik dinamikasının əsas tənlikləri mühitin axınında xarici kütlə mənbə (şırnaqlar), impuls və enerji (yəni kütlənin sabitliyini gözləməklə) nəzərə alınmamaqla tərtib edilmişdir. Beləliklə, məşhur işlərin (məqalələrin və monoqrafiyaların) analizi göstərir ki, hal-hazırda xarici kütləmübadiləsini nəzərə almaqla ikifazalı sistemin hərəkəti üçün tənlik və riyazi model tam işlənilməmişdir. Nəzəri və tətbiqi hidrodinamika və ikifazalı sistemlərin kütlədaşınması məsələlərinin kompleks həlli üçün bu məsələlərin araşdırılması vacibdir.

I fəsildə kütləmübadiləsi olan ikifazalı sistemlərin ümumiləşmiş tənliklərinin çıxarılışı verilmişdir. Bunlara kəsilməzlik, hərəkət miqdarı, kinetik moment və enerji tənlikləri aiddir. Bu tənliklər hər bir faza üçün ayrılıqda, həm də bütöv mühit üçün tapılmışdır.

1.1. yarımfəslində ikifazalı hidrodinamik sistemlərin başlanğıc vəziyyəti və ikifazalı sistemlərin əsas tənliklərinin qurulması verilmişdir. Mühiti təşkil edən fazaların hərəkət tənliklərinin çıxarılışı zamanı fazaların sərhəddində kütlə, hərəkət miqdarı və enerji mübadiləsi də nəzərə alınmışdır. Bunun üçün ikifazalı sistem müxtəlif qrup hissəciklərinin böyük birləşmələrinin qarışığı şəklində (molekul, atom, qabarcıq, bərk maddələr və s.) verilmişdir ki, bunlar da dayanmadan xaotik hərəkətlərdədir. Bu sistemin vəziyyətini müəyyən zaman anında xarakterizə etmək üçün hər bir hissəciyin vəziyyətini və sürətini vermək lazımdır. Lakin bu hissəciklərin çox olması və onların başlanğıc verilənlərini (sürət, koordinat) təyin etmək mümkün olmadığından bu üsul yararlı deyil. Ona görə də qarışığın hərəkətinin riyazi təsviri üçün çoxsürətli kontinuum və onu təşkil edən qarşılıqlı nüfuz hərəkətinə baxmaq lazımdır. Çoxsürətli (və ya ikisürətli) kontinuum, özünün təşkil olunduğu qarışığa (faza və ya komponent) aid olan ayrı-ayrı kontinuumların birləşməsindən ibarətdir. Qarışığa daxil olan hər bir belə kontinuum üçün orta sıxlıq, sürət, temperatur və başqa komponentləri dördölçülü $f_i(x, y, z, t)$ fəzada təyin etmək olar. Bu deyilənlər və ümumi fiziki təsəvvürlər əsasında ikifazalı sistemləri xarakterizə edən parametrləri, yəni sıxlıq, sürət, xarici həcm konsentrasiya müqavimətini və s. təyin etmək olar.

Beləliklə, ikifazalı sistemin hidrodinamik tənliyini qurarkən sistemə bir neçə fazanın təşkil etdiyi kontinium kimi baxmaq olar. Daşıyanın (maye, qaz və ya buxar) və daşıyıcının (bərk hissəcik, damcı) kütləsi onlara birləşən və onlardan ayrılan hissəciklərin hesabına dəyişilir. Bu o deməkdir ki, mühitin hər bir x, y, z koordinatlı nöqtəsində verilmiş t anında $\vec{u}_i$ sürət vektoru kütlənin elementar sürətinə $\vec{u}_{*i}$ sürəti ilə birləşir (və ya ayrılır). Bu halda $\vec{u}_{*i}$ sürət vektoru kütlə hissəciyinin əsas sürətindən müəyyən qədər fərqlənir, yəni $\vec{u}_i \neq \vec{u}_{*i}$. Onda elementar əlavə kütlə qeyd olunmuş hissəciyə istənilən istiqamətdən birləşə bilər. Onda q_{*i}-kütlə axınına, $\vec{u}_{*i} q_{*i}$- impuls axınına və $\left(e_{*i} + u_{*i}^2/2\right)q_{*i}$-vahid zamanda vahid həcmə birləşən (və ya ondan ayrılan) enerji axınına baxılır. Həmçinin fərz olunur ki, mühitin daxilində fazalar arası keçid (kütlə və istilik) də baş verir. Bu şərtlər daxilində saxlanma qanunu həcmin daxilinə təsir edən, həcm və "mənbə" ilə məhdud olan həmin kəmiyyətin səthə "axını" vasitəsilə hər hansı həcmdə fiziki kəmiyyətlərə uyğun olan (faza və ya mühit) "tam miqdarda" sürətin dəyişməsini əlaqələndirən balans tənliyi şəklində yazılır. Onda ikifazalı mühitin (S səthi ilə hüdudlanmış ixtiyari V həcmdə) i-fazası üçün balans tənliyinin inteqral formasını yaza bilərik:

1) Kütlənin balans tənliyi

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho_i\varphi_i)dV = -\int_S (\rho_i\varphi_i u_{in})dS + \int_V \left(q_{*i} + (-1)^i \chi\right)dV, \quad i = 1,2. \tag{18}$$

2) İmpulsun balans tənliyi

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho_i\varphi_i\vec{u}_i)dV = -\int_S \left[(\rho_i\varphi_i\vec{u}_i)u_{in} - \varphi_i\sigma_{in}\right]dS + \int_V \left[\left(\rho_i\varphi_i\vec{F}_i + \vec{u}_{*i}q_{*i}\right) + (-1)^i\left(\vec{R}_i + \vec{u}_\chi \chi\right)\right]dV \tag{19}$$

3) Kinetik momentin balans tənliyi

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{r}_i \times \vec{u}_i\rho_i\varphi_i\right)dV = -\int_S \left[\left(\vec{r}_i \times \vec{u}_i\rho_i\varphi_i\right)u_{in} - \vec{r}_i \times \varphi_i\vec{\sigma}_{in}\right]dS + \int_V \left[\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\rho_i\varphi_i\right) + \left(\vec{r}_i \times \vec{u}_{*i}q_{*i}\right) + (-1)^i\left(\vec{r}_i \times \vec{R}_i + \vec{r}_i \times \vec{u}_\chi \chi\right)\right]dV \tag{20}$$

4) Kinetik enerjinin balans tənliyi

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_i\varphi_i u_i^2/2\right)dV = -\int_S \left[\left(\rho_i\varphi_i u_i^2/2\right)u_{in} - \varphi_i\vec{u}_i\sigma_{in}\right]dS + \int_V \left[\left(\rho_i\varphi_i\vec{F}_i\vec{u}_i + N_{*i} + q_{*i}u_{*i}^2/2\right) + (-1)^i\left(\vec{R}_i\vec{u}_i + \chi u_\chi^2/2\right)\right]dV \tag{21}$$

5) Tam enerjinin balans tənliyi

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(e_i + u_i^2/2)\rho_i\varphi_i dV = -\int_S \left[\rho_i\varphi_i(e_i + u_i^2/2)u_{in} - \varphi_i\vec{u}_i\sigma_{in} + \varphi_i\vec{q}_{in}^{\,*}\right]dS + \int_V \left[\rho_i\varphi_i\vec{F}_i\vec{u}_i + (e_{*i} + u_{*i}^2/2)q_{*i} + (-1)^i\left(\vec{R}_i\vec{u}_i + Q_i^* + (e_\chi + u_\chi^2/2)\chi\right)\right]dv \tag{22}$$

Bu tənliklərdə ρ_i, φ_i, u_i-həqiqi sıxlıq, həcmi konsentrasiya və i-fazasının sürətidir; $\vec{u}_{*i}$-birləşən (və ya ayrılan) kütlənin sürəti, q_{*i}-birləşən (və ya ayrılan $q_{*i} < 0$) kütlənin xüsusi çəkisi; χ-faza keçidinin xüsusi kütləsi; $\vec{F}_i, \vec{\sigma}_i$-kütləvi və səth qüvvəsinin müqavimət tenzorunun xüsusi vektorları, $\vec{u}_\chi$-faza keçidinin kütlə sürəti, $\vec{R}_i$-fazalararası qüvvənin xüsusi vektoru; $\vec{r}_i$-radius vektor; n-xarici normal; e_i-i fazasının daxili enerjisi; e_{*i}, e_χ-uyğun olaraq birləşən və ya ayrılan daxili xüsusi enerji və fazalar çevrilməsi; Q_i^*-fazalar arası istilikdəyişmə intensivliyi, N_{*i}-daxili qüvvələrin xüsusi gücü; $\vec{q}_i^{\,*}$-fazalı qarışığın istilik axınının xüsusi vektorudur.

Kəsilməz hərəkət oblastında kütlənin balans moment və enerji tənliklərinin i-ci faza üçün yazılmış (18)-(22) inteqral şəkli diferensial tənliklərə ekvivalentdir. Ona görə Qaus-Ostraqradski düsturundan istifadə edərək (18)-(22) tənliklərinin sağ tərəfində $V(t)$ həcmi üzrə inteqralları $S(t)$ səthi üzrə inteqrallara çevirməklə və uyğun çevirmələr aparmaqla i fazası üçün aşağıdakı diferensial tənlikləri alarıq:

1. Kütlənin köçürülməsi tənliyi (kəsilməzlik tənliyi)

$$\frac{d}{dt}(\rho_i\varphi_i) + div(\rho_i\varphi_i\vec{u}_i) = q_{*i} + (-1)^i \chi, \; i = 1,2, \tag{23}$$

2. İmpulsun köçürülməsi tənliyi

$$\rho_i\varphi_i\left[\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t}+(\vec{u}_i\cdot\nabla)\vec{u}_i\right]=\rho_i\varphi_i\vec{F}_i+div\,(\varphi_i\vec{\sigma}_i)+ \\ +(\vec{u}_{*i}-\vec{u}_i)q_{*i}+(-1)^i\left[\vec{R}_i+(\vec{u}_\chi-\vec{u}_i)\chi\right] \qquad (24)$$

3. Tenzorun simmetriklik tənliyi

$$(\sigma_i)_{jk}=(\sigma_i)_{kj},k,j=1,2,3 \qquad (25)$$

4. Kinetik enerjinin köçürülməsi tənliyi

$$\rho_i\varphi_i\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)+(\vec{u}_i\cdot\nabla)\frac{u_i^2}{2}\right]=\rho_i\varphi_i\vec{F}_i\vec{u}_i+div(\varphi_i\vec{\sigma}_i\vec{u}_i)+ \\ +N_{*i}+0,5(u_{*i}^2-u_i^2)q_{*i}+(-1)\left[\vec{R}_i\vec{u}_i+0,5(u_\chi^2-u_i^2)\chi\right] \qquad (26)$$

5. Tam enerjinin köçürülməsi tənliyi

$$\rho_i\varphi_i\left[\frac{\partial E_i}{\partial t}+(\vec{u}_i\cdot\nabla)E_i\right]=\rho_i\varphi_i\vec{F}_i\vec{u}_i+div\left[\varphi_i(\vec{\sigma}_i\vec{u}_i-\vec{q}_i^{\,*})\right]+ \\ +(E_{*i}-E_i)q_{*i}+(-1)^i\left[\vec{R}_i\vec{u}_i+Q_i^*+(E_\chi-E_i)\chi\right] \qquad (27)$$

burada $E_i=e_i+u_i^2/2;\;\; E_\chi=e_\chi+u_\chi^2/2;\;\; E_{*i}=e_{*i}+u_{*i}^2/2$.

Teorem 1.1. İkifazalı mühitin

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\vec{u})=q_*$$

tam kəsilməzlik tənliyi fazanı təşkil edən kəsilməzliyin

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=q_*$$

tənliyindən və ya onların

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=q_*$$

diferensial şəklindən alınır.

1.2 yarımfəslində bütöv mühitin hərəkətinin diferensial tənliklərinin çıxarılmasına baxılmışdır.

Bütöv mühit üçün hərəkətin diferensial tənliyini tapmaq üçün onu ya (18)-(22) inteqral faza tənliklərini cəmləməklə, ya da onların (23), (24) və (27) diferensial tənliklərini cəmləməklə almaq olar. Nəticədə alırıq:

1. Kəsilməzlik tənliyi

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,div\,\vec{u}=q_* \qquad (28)$$

2. Dinamika tənliyi

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt}=\rho\vec{F}+div\vec{\sigma}+(\vec{u}_*-\vec{u})q_*; \qquad (29)$$

3. Daxili enerji tənliyi

$$\rho\frac{de}{dt}=-div\,\vec{q}^{\,*}-N_{*i}-(e-e_*)q_*, \qquad (30)$$

burada

$$N_*=-\vec{\sigma}div\vec{u}-0,5(\vec{u}-\vec{u}_*)^2q_*. \qquad (31)$$

ρ -ikifazalı sistemin sıxlığı $\rho=\sum\rho_i\varphi_i$, $\vec{F},\vec{\sigma}$ -ikifazalı mühitə təsir edən xarici kütlələrin və mühitin səthi qüvvələrinin vektor müqavimətidir: $\vec{F}=\left(\sum\rho_i\varphi_i\vec{F}_i\right)/\rho$ və $\vec{\sigma}=\sum\varphi_i\vec{\sigma}_i$; $\vec{u}$ -ikifazalı mühitin vektor sürəti $\vec{u}=\left(\sum\rho_i\varphi_i\vec{u}_i\right)/\rho$; e -ikifazalı mühitin xüsusi daxili enerjisi $e=\left(\sum\rho_i\varphi_i e_i\right)/\rho$; e_* -mühitə birləşən (və ya ayrılan) kütlələrin xüsusi daxili enerjisi; q_* -kütlənin dəyişmə intensivliyi; $\vec{u}_*$ -birləşən (və ya ayrılan) kütlələrin vektor sürəti; $\vec{q}^{\,*}$ -istilik axınının vektor sürətidir.

Teorem 1.2. İkifazalı mühit üçün dinamika tənliyi i fazalı qarışıq üçün

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-\varphi)+div\left[(1-\varphi)\vec{u}_f\right]=0$$

dinamika tənliyinin inteqral şəklindən istifadə etməklə alınır.

1.3 yarımfəslində ikifazalı enerji tənliyi və əsas tənliklər sisteminin çıxarılması verilmişdir. Aydındır ki, makroskopik mühitə keçəndə bir enerji növü başqa enerji növünə keçir (birinci növbədə mexaniki enerji istilik enerjisinə keçir), bu isə enerjinin dəyişilməsi teoremindən çıxarılmış balans tənliyi bazasında baş verir. Verilmiş zaman anında mühitin enerjisini (kütlənin istiliyini) $T_0=mu^2/2$ kinetik enerji ilə $E_0=em$ daxili enerjinin cəmi $E=(e+u^2/2)m$ kimi təyin edək, burada e və $u^2/2$ əsas mühitin uyğun olaraq xüsusi daxili və kinetik enerjiləridir. Onda hərəkət edən dəyişən kütləli mühit üçün enerji haqqında teoremi aşağıdakı kimi söyləmək olar.

Teorem 1.3. Tam enerjinin zamana görə xüsusi törəməsi $\left(\dot{E}\right)$, xarici qüvvələrin gücü ($N = \vec{R} \cdot \vec{u}$), istilik miqdarı (Q) və vahid zamanda daşınan (və ya ayrılan) hissəciklərin enerjisi $E_* = \left(e_* + u_*^2 / 2\right)m_*$ cəminə bərabərdir, yəni $\dot{E} = N + Q + E_*$.

Teorem 1.4. Kütlə mübadiləli ikifazalı mühitin tam enerjisi

$$\rho \frac{d}{dt}\left(e + u^2 / 2\right) = \rho(\overline{F} \cdot \overline{u}) + div(\overline{\sigma}_n \cdot \overline{u} - \overline{q}_*) + \\ + \left[(e_* + u_*^2 / 2) - \left(e + u^2 / 2\right)\right]q_*$$

diferensial tənliyi ilə ifadə olunur.

II fəsildə I fəsildə verilən ümumi hidrodinamika tənlikləri tətbiq edilməklə, xarici kütlə daşınmaları nəzərə alınmaqla, bir və ikifazalı mühitlərin qapalı tənliklər sistemi alınmışdır. Bu tənliklər əsasında baxılan mühiti xarakterizə edən ölçüsüz parametrlər müəyyən edilmişdir.

2.1 yarımfəslində asılı hissəciklərlə qarışığı olan maye (qaz) qarışığının hərəkətinin riyazi modeli işlənmişdir. Maye-bərk hissəcik, qaz-bərk hissəcik və qaz-maye damcısı olan hallar üçün qapalı tənliklər sistemini almaq üçün aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur.

Teorem 2.1. Ayrı-ayrı faza qarışığının hərəkət tənliklər sistemindən buxar-maye sistemin və ölçülmüş bərk hissəciklər maye hərəkətinin təsviri üçün qapalı tənliklər sistemi

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_1(1-\varphi)\right] + div\left[\rho_1(1-\varphi)\vec{u}_1\right] = q_{*1}, \ \rho_2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + div(\varphi\vec{u}_2)\right] = q_{*2}; \\
&\rho_1(1-\varphi)\frac{d\vec{u}_1}{dt} = \rho_1(1-\varphi)g - \nabla(1-\varphi)P - \vec{R} + (k_1 - 1)\vec{u}_1 q_{*1}; \\
&\rho_2\varphi\frac{d\vec{u}_2}{dt} = \rho_2\varphi g - \nabla(\varphi P) + \vec{R} + (k_2 - 1)\vec{u}_2 q_{*2}; \\
&\rho_1(1-\varphi)\frac{dE_1}{dt} = \rho_1(1-\varphi)g\vec{u}_1 - \nabla\left[(1-\varphi)P\vec{u}_1\right] - \vec{R}\vec{u}_1 + Q^* + (E_{*1} - E_1)q_{*1}; \\
&\rho_2\varphi\frac{dE_2}{dt} = \rho_2\varphi g\vec{u}_2 - \nabla\left[\varphi P\vec{u}_2\right] - \vec{R}\vec{u}_2 + Q^* + (E_{*2} - E_2)q_{*2};
\end{aligned} \tag{32}$$

harada ki,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla), \vec{R} = k_R(\vec{u}_1 - \vec{u}_2), Q^* = k_Q(T_1 - T_2)$$

$$\rho_2 = const, P = \rho_1 RT_1, E_i = e_i + u_i^2/2, E_{*i} = e_{*i} + u_{*i}^2/2,$$

$$e_i = C_{Vi}T_i, e_{*i} = C_{Vi}T_{*i}, \vec{u}_{*i} = ku_i, i = 1,2.$$

Bu sistemdə $P = \rho_i RT_i$ o vaxt qəbul olunur ki, mikroprosesin xarakterik vaxtı fazalar arası təzyiqin tarazlaşma vaxtından dəfələrlə çox olsun. Başqa hallarda fazalardakı təzyiqləri əlaqələndirən tənlik verilməlidir. Laplas düsturu $\left(P_1 - P_2\right) = 2\ \delta / r$ buna misal ola bilər.

2.2. yarımfəslində kütləmübadiləli ikifazalı tam mühitin axınının riyazi modeli işlənmişdir. Bir çox kütləmübadiləli mühit axınının hərəkət məsələsinin həllində hökmən köçürmə tənliyində maddənin kütləsinin dəyişməsini nəzərə almaq lazımdır. Bu prosesi təsvir edən qapalı tənliklər əsas olduğunda elə hidrodinamik məsələyə baxılır ki, maddənin termodinamik xassəsini təyin etmək lazım deyil. Riyazi olaraq bu o deməkdir ki, ancaq kəsilməzlik və dinamika tənliklərindən istifadə etmək lazımdır, enerji tənliyinə isə baxılmır.

Teorem 2.2. Kütləmübadiləli ikifazalı tam mühitin axınının riyazi modeli

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = F_i + \left(u_{*i} - u_i\right)q + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}$$

kəsilməzlik və

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = F_i + \left(u_{*i} - u_i\right)q + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}$$

dinamika tənliklərindən alınır.

Bütöv mühitin bir və ikifazalı hidrodinamikasının riyazi modeli işlənilmişdir. Kütləmübadiləsi ilə hərəkət edən özlü mühit üçün aşağıdakı qapalı sistem alınmışdır

$$\begin{aligned}
&div\vec{u} = q \\
&\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} - \frac{\lambda}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u} + \left(\vec{u}_* - \vec{u}\right)q \\
&\frac{dT}{dt} = a\nabla^2 T + \left(T_* - T\right)q + D_* / \rho c
\end{aligned} \tag{33}$$

burada $a = \lambda / \rho c$, λ -istilikeçirmə əmsalı, ρ, c -sıxlıq və mühitin istilik tutumu, D_*-mühitin axınının dissipasiya enerjisi, ν -kinematik özlülük əmsalı; T_*, T -mühitə əsas birləşən (və ya ayrılan) kütlənin temperaturudur.

(32) sistemi $\vec{u}\left(u_x, u_y, u_z\right), P, T$ funksiyalarını tapmaq üçün beş tənlikdən ibarətdir və qapalı sistemdir (burada q, T_*, u_* -verilmiş

kəmiyyətlərdir). Sıxılmayan kiçik özlü mayenin dissipasiya enerjisi az olduğundan onu nəzərə almamaq da olar.

2.3 yarımfəslində maye axının oxşarlıq kriterisi alınmışdır. Kütləmübadiləli hidrodinamik proseslər məsələsinin analitik həlli böyük çətinliklərlə qarşılaşır. Hərəkət tənliyinə əlavə hədlərin daxil edilməsi sərhəd şərtinin özlü dəyişdirilməsi bu cür proseslərin analitik tədqiqatı ancaq təqribi məsələnin qoyuluşunda mümkündür. Bu imkan verir ki, verilən tənlikdə bəzi sadələşdirmə aparaq. Belə ki, verilən məsələ üçün o qədər də lazım olmayan hədləri atmağa, təqribi kəmiyyətlər arasındakı mürəkkəb dəqiq əlaqələri daha sadələri ilə dəyişməyə imkan verir. Nəzərə alınmayan ayrı-ayrı hədlərin tənliyə təsirinin qiymətləndirilməsi ya eksperiment yolu ilə yoxlanılır, ya da ədədi həll üsulu ilə yerinə yetirilir. Qeyd etmək lazımdır ki, özülsüz mühitin axını üçün (32) sistemi sadələşir. Bu halda $\nu\nabla^2\vec{u}$ və $D_*/\rho c$ parametrləri sistemdən çıxarılır. Onda kütləmübadiləsi olan hidrodinamik proseslərin oxşarlıq kriterisinin çıxarılışı sadələşir. Bunun üçün (32) tənliyi ölçüsüz şəklə gətirilir. Ölçüsüz parametrləri ölçülü parametrlərdən fərqləndirmək üçün dəyişənlərin üstündə xətt qoymaqla aşağıdakı parametrləri alarıq:

$$Sh = l_0\upsilon_0/t_0,\ Fr = \upsilon_0^2/gl_0,\ Eu = P_0/\rho\upsilon_0^2,\ \mathrm{Re} = \upsilon_0 l_0/\nu,$$

$$Pe = \upsilon_0 l_0/a,\ J_* = q_{*0}l_0/\upsilon_0,\ \upsilon_{*0}/\upsilon_0 = k_*,\ T_{*0}/T_0 = \theta_* \tag{34}$$

Oxşar hadisələr üçün verilmiş parametrlərə görə tapılmış bu ədədlər eyni olmalıdır, buna görə də həmin ədədlər oxşarlıq kriteriləri adlanır: $Sh = idem$, $Fr = idem$, $Eu = const$, $\mathrm{Re} = idem$, $Pe = idem$, $J_* = idem$, $k_* = idem$, $\theta_* = idem$. Burada yeni J_*, k_*, θ_* ədədləri mühitin daxil olan (birləşən və ya ayrılan) və əsas axınları arasında kütlə sərfi, surət və temperatur (birləşən və ya ayrılan) arasında uyğunluğu göstərir. Bu ədədlər uyğunluq kriteriləridir. (34) münasibətləri hidrodinamik hadisələrin modelləşdirilməsinin zəruri və kafi şərtlərini təmin edirlər.

Teorem 2.3.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = F_i + (u_{*i} - u_i)q + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}$$

dinamika,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - q\right) = 0$$

kəsilməzlik və

$$\rho\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\left(\nabla\vec{q}^{\,*} + N_*\right) + (e_* - e)q_*$$

enerji tənliklərindən, xarici kütləmübadiləli hərəkət edən (ideal və özlü maye) müxtəlif mühit modeli üçün qapalı tənliklər sistemi alınır.

III fəsildə bütöv mühitdə kütlə mübadiləsinin ədədi üsulla hesablanmasına baxılır. Bu fəsil beş paraqrafdan ibarətdir. Burada mümkün mənbələri (və ya axarları) və istilikkeçirməsi (və ya diffuziyası) olan bütöv mühitin birölçülü axını zaman istiliyinin (və ya konsentrasiyasını) konvektiv köçürülməsi məsələsi sonlu fərqlər üsulu ilə həll edilir.

3.1. yarımfəslində Navye-Stoks tənliyi üçün fərqlər sxemi verilmişdir. Nyutonun sürtünmə qanuna əsasən özlü mayenin axını özlülük az olduqda sərhəd layına yaxınlaşmaqla, özlülük çox olduqda isə Stoks yaxınlaşması ilə əlaqəlidir və Navye-Stoks tənliyi ilə təsvir olunur.

Bunun üçün x, y dekart koordinat sistemində aşağıdakı kimi tənliklərlə verilən ikiölçülü hərəkətə baxaq:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f_x, \tag{35}$$

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial x} + u\frac{\partial\upsilon}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\upsilon}{\partial y^2}\right) + f_y, \tag{36}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\upsilon}{\partial y} = 0 \tag{37}$$

Burada u, υ-surət vektorunun komponentləridir. Konkret fiziki haldan asılı olaraq bəzi sərhəd şərtləri fərqlənir ki, biz də bunlardan birinə baxacağıq. (35),(36),(37) tənlikləri $u^0 = u(x, y, 0)$, $\upsilon^0 = \upsilon(x, y, 0)$, $p^0 = p(x, y, 0)$ başlanğıc şərtləri ilə birlikdə sahə süræti və təzyiqinə uyğun sərhəd şərtləri üçün qapalı sistem yaradır ki, bu da sıxılmayan özlü mayenin surət və təzyiqinin təyin olunmasına, kəsilməzliyin (37) şəklində formasının dəyişdirilməsi hesablama aparılmasında çətinlik yaradır və həmin sistemin ekvivalent sistemlə əvəz olunmasına gətirib çıxarır. Bunun üçün (35) tənliyini x-ə, (36) tənliyini y-ə görə diferensiallasaq və (37) tənliyindən istifadə etsək alarıq:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=-\rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial x} \qquad (38)$$

(35), (36), (38) tənliklər sistemi Navye-Stoks tənliklərinin hesablama praktikasında istifadə olunan dəyişən surətli, təzyiqli sistemi təsvir edir. (38) tənliyi üçün aşağıdakı sərhəd şərtinə baxaq:

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\varphi \text{ açıq } \Gamma^+ \text{ əyrisi üzərində} \qquad (39)$$

$$u\Big|_{AB}=\psi \qquad (AB-OX \text{ oxu üzərində parabolik hissədir} \qquad (40)$$

burada, n -Γ^+ əyrisinin daxili normalı, φ və ψ-iki dəfə diferensiallanan verilmiş funksiyalar, $f(x,y,t)$ - $\overline{D}$ oblastında verilmiş kəsilməz və kifayət qədər hamar funksiyadır.

$\overline{D}_h$ oblastında alınmış şəbəkədə $y>0$ olduqda (38) tənliyinin fərqlə+r analoqunu aşağıdakı kimi yazaq:

$$\overline{R}_h u_h \equiv a u_{h\bar{x}x}+b u_{h\bar{y}y}=-\bar{f}_h\,,\quad (x,y)\in D_h^+\,, \qquad (41)$$

Burada a,b-verilmiş əmsallardır. İndi (39) şərtini approksimasiya edək.

$$L u\equiv\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)-\varphi=0 \qquad (42)$$

Sadəlik üçün Γ^+ əyrisinin tənliyini $y=\sin x$ şəklində seçək və $0<x<\frac{\pi}{2}$, $0<y<1,\ 0<y'<1$ olduqda sadə approksimasiyanı quraq:

$$l_h u_h\equiv u_{hx}\cos(n,x)+u_{h\bar{y}}\cos(n,y)-\varphi_h=0 \qquad (43)$$

$\frac{\pi}{2}<x<\pi,\quad -1<y'<0$ olduqda (42) ifadəsindən alırıq:

$$\bar{l}_h u\equiv u_{h\bar{x}}\cos(n,x)+u_{h\bar{y}}\cos(n,y)=\varphi_h\,.$$

Teorem 3.1. Fərqlər analoqu ilə alınmış

$$l_h u_h\equiv u_{hx}\cos(n,x)+u_{h\bar{y}}\cos(n,y)-\frac{hy'f_h}{2(1+y'^2)^{1/2}}=\varphi_h$$

sərhəd şərti $\frac{\partial u}{\partial n}=\varphi$ açıq Γ^+ əyrisi üzərində şərtini $O(h^2+l^2)$ xətası ilə approksimasiya edirsə, onda

$$\overline{L}_h u_h\equiv L_h u_h+\frac{hy'f_h}{2(1+y'^2)^{1/2}}=\varphi_h\,. \qquad (44)$$

Bütün hallarda approksimasiya xətası $O(h^2+l^2)$ olur. Onda aşağıdakı sxemi alarıq:

$$R_h u_h=-f_h\,, \qquad (45)$$

$$u_h\Big|_{\dot{\Gamma}_h^+}=\overline{\psi}_h\,, \qquad (46)$$

(45), (46) fərqlər sxeminin keyfiyyətini yoxlamaq üçün ədədi eksperiment aparaq. Fərz edək ki, sadə Γ^+ əyrisi $y=\sin x$ tənliyi ilə verilmişdir. (38), (39), (40) məsələsinin həllini $u(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{1}{2}arctg\frac{y}{x}\right)+(x^2+y^2)^2$ şəklində seçək.

(45), (46) məsələsinin Zeydel üsulu ilə kompyuterdə aparılan eksperimentinin nəticəsi aşağıdakı cədvəldə verilir (cədvəl 1):

Cədvəl 1.

Düyün nöq.	***Dəqiq həll***	***Təqribi həll***	***Mütləq xəta***	***Düyün nöq.***	***Dəqiq həll***	***Təqribi həll***	***Mütlə q xəta***
$u_{1,3}$	0,00010	0,00009	0,00001	$u_{1,19}$	0,6561	0,6558	0,0003
$u_{1,5}$	0,0016	0,0015	0,0001	$u_{3,3}$	0,1443	0,1440	0,0003
$u_{1,7}$	0,0081	0,0079	0,0002	$u_{3,5}$	0,1111	0,1107	0,0004
$u_{1,9}$	0,0256	0,0253	0,0003	$u_{3,7}$	0,1000	0,1009	0,0009
$u_{1,11}$	0,0625	0,0621	0,0004	$u_{3,9}$	0,1074	0,1070	0,0004
$u_{1,13}$	0,1296	0,1292	0,0004	$u_{3,11}$	0,1380	0,1377	0,0003
$u_{1,15}$	0,2401	0,2403	0,0002	$u_{3,13}$	0,2012	0,2008	0,0004
$u_{1,17}$	0,4096	0,4091	0,0005	$u_{3,15}$	0,3096	0,3091	0,0005

Cədvəldən aydın olur ki, fərqlər analoqu ədədi eksperimentlə tam təsdiq olunur.

3.2. yarımfəslində fərqlər sxemi sərhəd stasionar axınlı mühitə tətbiq olunur, yığılma tərtibi verilir, qurulan sxemin dəqiqliyini Zeydel üsulu ilə kompyuterdə alırıq və iterasiyaların sayını göstərilir.

Teorem 3.2. İxtiyari $\{u_{hk,m}^{(0)}\}$ ($k=\overline{1,N_p}$, $m=\overline{1,p}$) üçün

$$V_{k,m}^{(i)}=u_{k,m}^{(i)}-u_{k,m}\to 0\,,\quad i\to\infty\,.$$

Həllin verilmiş dəqiqliklə tapılması üçün minimal iterasiyaların sayı $m_0(\varepsilon)=\left[\dfrac{\ln\varepsilon/M}{\ln(1-\rho)}\right]$ olmalıdır. Əgər dəqiq həlli

$$u(x,y)=(x^2+y^2)^{1/4}\sin\left(\frac{1}{2}arctg\frac{y}{x}\right)+x^2+y^2\,,$$

kimi götürsək kompyuterdə Zeydel iterasiya üsulu ilə aşağıdakı nəticəni alarıq (cədvəl 2):

Cədvəl 2.

Zeydelin iterasiya üsulu ilə alınan təqribi həllə təqribi həllin müqayisəsi

Düyün nöqtələri	*Dəqiq həll*	*Ədədi həll*	*Mütləq xəta*	*Nisbi xəta*
1	*2*	*3*	*4*	*5*
$u_{1,5}$	0,0400	0,0395	0,0005	1,2500
$u_{1,7}$	0,0900	0,0896	0,0004	0,4444
$u_{1,9}$	0,1600	0,1592	0,0008	0,5000
$u_{1,11}$	0,2500	0,2489	0,0011	0,4400
$u_{1,13}$	0,3600	0,3593	0,0007	0,4400
$u_{1,15}$	0,4900	0,4908	0,0008	0,2632
$u_{1,17}$	0,6400	0,6395	0,0005	0,0781
$u_{1,19}$	0,8100	0,8115	0,0015	0,1851
$u_{1,21}$	1,0000	0,9889	0,0111	1,1100

Nəticə dəqiq həllin bütöv xassələrini ödəyir.

3.3. yarımfəslində sərhəd zonasında hərəkət tənliyinin ədədi həlli verilmişdir. Məlumdur ki, özlü mühitin (maye və ya qaz) axını zamanı bərk səthin (kanal, boru və s.) yaxınlığında nazik lay əmələ gəlir (özlülük xassəsinə əsasən), bu da ideal qazda olduğu kimi verilmiş səthi isladan sıfırıncı sürətdən lazım olan qiymətə keçən sürəti əmələ gətirir. Mayenin həmin layı, hərəkətin sürəti nəzərə çarpacaq dərəcədə dəyişir və dinamik sərhəd layı adlanır.

Əvvəlcə sıxılmayan özlü laminar mühitin axın tənliyi ilə təsvir olunan dinamik sərhəd zonasının ədədi həllinə baxaq:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,;\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0 \qquad (47)$$

Sərhəd şərtləri

$$\begin{aligned} &u=\upsilon=0, && y=0 \quad olduqda \\ &u=u_0, && y=\infty \quad olduqda \end{aligned} \qquad (48)$$

kimidir və məsələnin həllini qovma üsulu ilə tapırıq.

3.4. yarımfəslində xarici kütləli mübadiləli hidrodinamik maye selinin texniki və texnoloji proseslərin müxtəlif sahələrinə praktiki tətbiqinə baxılır. Burada $f(x,t)$ xarici mənbə olduqda mayenin köçürmə tənliyinin ədədi həllinə baxılır. Bu halda köçürmə tənliyini (xüsusi halda xətti dalğa tənliyini) aşağıdakı formada göstərmək olar:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t),\quad c>0\,. \qquad (49)$$

Bu tənlik bircins mühitdə xətti dalğaların (c sürətlə hərəkət edən) yayılması prosesini təsvir edir. Məlumdur ki, bircins dalğa tənliyi x oxu boyunca c sürətlə yayılan dalğanı təsvir edir. (49) tənliyinin ədədi həlli üçün Laks üsulunu tətbiq edək. Aydındır ki, (49) tənliyini approksimasiya etdikdə $O(\Delta t,\Delta x)$ alınır

$$\frac{u_j^n-u_j^{n-1}}{\Delta t}+c\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}=f_j^n \qquad (50)$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+c\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}=f_j^n \qquad (51)$$

və fərqlər sxeminin Neyman üsulu ilə dayanıqlığını yoxlasaq həmin sxemin tamamilə dayanıqlı olmadığını və dalğa tənliyinin ədədi həlli üçün yararsız olduğunu görərik. (51)-də u_j^n–i $\dfrac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2}$ ilə əvəz etsək, Eyler üsulu ilə həmin sistemi dayanıqlı etmək olar

$$\frac{u_j^{n+1}-\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right)/2}{\Delta t}+c\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}=f_j^n$$

$$u_h\Big|_{OA}=\varphi_h(x);\quad u_h\Big|_{OC}=\psi_h(x). \qquad (52)$$

Əgər $u(x,y)$ və $f(x,y)$ funksiyaları (x,y) dəyişənlərinin kifayət qədər hamar funksiyadırsa, onda şəbəkə həllinin dəqiqlik dərəcəsini artırmaq üçün eyni bir (52) məsələsini $\overline{\omega}_h$, $\overline{\omega}_{h_1}$, $\overline{\omega}_{h_2}$ şəbəkələr ardıcıllığı üçün hesablamaqla almaq olar. Fərz edək ki,

$$u_h = u + \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_s(t)\, h^s + \alpha_n(t,h)\, h^n, \tag{53}$$

asimptotik ayrılışı doğrudur, Burada $\alpha_s(t)$ h-dan asılı deyil, $|\alpha_n(t,h)| \le M$ və həlli $O(h^n)$ dəqiqliklə almaq üçün fərqlər məsələsini $h_1, h_2, ..., h_n$ addımları üçün n dəfə hesablamaq lazımdır. $u(x,y)$ və $f(x,y)$ funksiyalarının hamarlığındam ψ approksimasiya xətası üçün aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$\psi = \sum_{s=1}^{n-1} \beta_s(t)\, h^s + \beta_n(t,h)\, h^n, \tag{54}$$

Burada $\beta_s(t)$ h-dan asılı deyil, $|\beta_n(t,h)| \le M$. $\alpha_s(t)$ funksiyası $s = 1,2,...,n-1$ olduqda $L\alpha_s = \beta_s(t) \sum_{m=1}^{s-1} \gamma_m(t)$ tənliyinin həllidir. Qeyd edək ki, (54) ifadəsində h^s-in bütöv tərtibləri iştirak etməyə də bilər, onda uyğun əmsallar $\beta_s \equiv 0$ olur. (53) ifadəsini uyğun olaraq $\overline{\omega}_h$, $\overline{\omega}_{h_1}$, $\overline{\omega}_{h_2}$ şəbəkələrinə tətbiq etsək, (52) məsələsinin həllini

$$\left.\begin{aligned} u_h &= u + \alpha_1(t)\, h^{\frac{2}{3}} + \alpha_2(t)\, h^{\frac{4}{3}} + o(h^2), \\ u_{h_1} &= u + \alpha_1(t)\, h_1^{\frac{2}{3}} + \alpha_2(t)\, h_1^{\frac{4}{3}} + o(h_1^2), \\ u_{h_2} &= u + \alpha_1(t)\, h_2^{\frac{2}{3}} + \alpha_2(t)\, h_2^{\frac{4}{3}} + o(h_2^2) \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

(55)-ə əsaslanaraq $\overline{\omega}_{\tilde{h}} = \overline{\omega}_h \cap \overline{\omega}_{h_1} \cap \overline{\omega}_{h_2}$ şəbəkə oblastında

$$\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n$$

$$u_h\Big|_{OA} = \varphi_h(x); \qquad u_h\Big|_{OC} = \psi_h(x). \tag{56}$$

məsələsinin həllini

$$u_{\tilde{h}} = c_1 u_h + c_2 u_{h_1} + c_3 u_{h_2}, \tag{57}$$

şəkildə axtara bilərik, Burada c_1, c_2, c_3 -məlum olmayan əmsallardır və asanlıqla hesablanır.

Teorem 3.3.

$$u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2} + \Delta t \cdot f_j^n$$

$$u\Big|_{(OA)_h} = \varphi_h(x); \qquad u\Big|_{(OC)_h} = \psi_h(x).$$

məsələsinin həlli φ_h, ψ_h başlanğıc qiymətlərinə və fərqlər tənliyinin f_h sağ tərəfinə görə dayanıqlıdır, yəni φ_h, ψ_h və f_h funksiyalarının kiçik dəyişməsində fərqlər tənliyinin u_h həlli kiçik dəyişir.

$$\max_{\overline{\omega}_h} |u_j^{n+1}| \le M_7 \max\left(|\varphi_h|, |\psi_h|, \widetilde{M}_3 |f_j^n|\right).$$

3.5 yarımfəslində ikinci tərtib dəqiqliyi olan sxemin hamarlaşdırılması verilmişdir, parametrin hamarlaşdırıcı həddə təsiri cədvəl şəkildə verilmiş və kompyuterdə eksperiment aparılmışdır.

Sonda elmi rəhbərim riyaziyyat elmləri doktoru, prof. P.F.Qəhrəmanova məsələlərin qoyuluşuna və dissertasiya işinə diqqətinə görə dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

Dissertasiyanın əsas nəticələri müəllifin aşağıdakı elmi işlərində nəşr olunmuşdur:

1. Qəhrəmanov P.F., Hacıyeva G.F. İkinci tərtib dəqiqliyi olan sxemin hamarlaşdırılması // Azərbaycan Texniki Universiteti, Elmi əsərlər fundamental elmlər, № 1, Cild VIII (29), Bakı, 2009, səh. 47-50.
2. Гахраманов П.Ф., Гаджиева Г.Ф. Применение разностной схемы для расчета стационарных течений однородного сжимаемого газа в пограничном слое / Механика Наноструктурированных материалов и систем. Сборник трудов Всероссийской конференции, Москва, 2011, с. 99-105.
3. Гахраманов П.Ф., Гаджиева Г.Ф. Об одном подходе к построению разностных схем для уравнений Навье-Стокса / Материалы VIII международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ 2012), Москва, 2012, стр. 209-212.
4. Гахраманов П.Ф., Исмайлов Р.Ш., Гаджиева Г.Ф. Численное решение уравнения переноса методом конечных разностей / Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Том 2. Материалы VII Международного симпозиума. Москва, 2012, с.136-142.
5. Гаджиева Г.Ф. Численный метод решение уравнений динамического пограничного слоя / "Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları" II Respublika Elmi Konfransı, Sumqayıt, 2012, səh. 69-71.
6. Гахраманов П.Ф., Гаджиева Г.Ф., Гадиева С.С., Исмайлова Ш.Г., Исмайлов Р.Ш. Численный метод решения уравнений движения вязкой среды в ламинарным пограничном слое // Sumqayıt Dövlət Universiteti, Elmi xəbərlər, Cild 12, № 4, Sumqayıt, 2012, səh.41-46.
7. Гахраманов П.Ф., Исмайлов Р.Ш., Гаджиева Г.Ф., Исмайлова Ш.Г., Багирова Г.Г. Математические модели механики сплошных двухфазных сред с переменной массой / Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Том 2. Материалы VIII Международного симпозиума. Москва, 2013, с.13-23.
8. Hacıyeva G.F. İkifazalı mühitin kəsilməzlik tənliklərinin çıxarılışı / Doktorantların və gənc tədqiqatçıların XVII Respublika elmi konransının materialları, Bakı, 2013, s. 3-4.
9. Гахраманов П.Ф., Гаджиева Г.Ф., Исмайлова Ш.Г., Исмайлов Р.Ш. Основные уравнения динамики сплошных неоднородных сред с переменной массой // Azərbaycan Texniki Universiteti. Elmi əsərlər, fundamental elmlər, №2, cild 2, Bakı, 2013, s.216-224.
10. Гаджиева Г.Ф. Уравнения движения неньютоновских вязкопластичных несжимаемых сред с внешным источником массы / Doktorantların və gənc tədqiqatçıların XVIII Respublika elmi konransının materialları, Bakı, 2013, s. 7-9.
11. Исмайлов Р.Ш., Гаджиева Г.Ф., Исмайлова Ш.Г., Гахраманов П.Ф. К гидромеханике одно-и двухфазных сплошных сред с тепломассообменом // Избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. Москва, 2014, Том 1. с. 38-60.
12. Hajiyeva G.F. Application of the finite difference method for solving stationary one-dimensional flow // AMEA xəbərlər, Fizika-texnika və riyaziyyat elmləri seriyası riyaziyyat və mexanika buraxılışı, XXXV, No1, Bakı, 2015, səh. 127-132.
13. Гахраманов П.Ф., Гаджиева Г.Ф., Гулиев Э.Ф. Применение методов конечных разностей для решения модельных уравнений тепломассопереноса // Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Том 1. Материалы X Международного симпозиума. Москва, 2015, с.57-65.
14. Hacıyeva G.F. Sıxılan özlü mayenin hərəkəti // Sumqayıt Dövlət Universiteti, Elmi xəbərlər, Cild 15, № 4, Sumqayıt, 2015, səh.9-14.
15. Hacıyeva G.F. Byurqers tənliyinin müxtəlif fərqlər sxemi ilə həlli / Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları III Respublika Elmi Konfransı, Sumqayıt, 2016, s. 75-77.
16. Gahramanov P.F., Hajiyeva G.F. On solving heat-conduction problems under variable transfer coefficients // Applied mathematics, informatics and mechanics, Vol. 21, No.2, Tbilisi, 2016, p.47-55.

ГЮНАЙ ФИКРЕТ кызы ГАДЖИЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СРЕДЫ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ И РАЗРАБОТКА МЕТОДА ЕГО РЕШЕНИЯ

РЕЗЬЮМЕ

Диссертация посвящена разработке теоретических основ гидродинамических и массообменных процессов в двухфазных системах, численных методов решения математических моделей и их компьютерной реализации. Круг проблем этой темы весьма обширен и в связи с разработкой новой техники и технологии особенно интенсивно развивается в последнее время. Это вызвано важными практическими задачами при: трубопроводном транспорте нефти, газа и других сред, бурении нефтяных и газовых скважин (с целью снижения гидродинамических сопротивлений), интенсификации тепломассопереноса в технологических устройствах и аппаратах, прогнозировании динамики паводковых потоков, массозащите элементов конструкций машин и оборудований от воздействия потоков высокой температуры и др.

Целью работы является разработка математических основ гидродинамических и массообменных процессов в двухфазных системах с учетом внешнего переноса тепла и массы. Для достижения этой цели были сформулированы и решены следующие задачи: получены общие уравнения движения двухфазных дисперсных систем с учетом как внутреннего, так и внешнего массообмена; разработаны математические модели и условия подобия двухфазных систем; разработаны численные методы решения уравнений конвективного тепломассообмена, струйного течения и погран слоя в сплошных средах; проведены математические (численные) эксперименты гидродинамики поводковых потоков.

GUNAY FIKRAT HAJIYEVA

MATHEMATICAL MODELING OF THE MEDIUM WITH VARIABLE MASS AND DEVELOPMENT OF THE METHOD ITS SOLUTIONS

SUMMARY

The dissertation is devoted working out of theoretical bases hydrodynamic and weight of exchange processes in biphasic systems, numerical methods of the decision of mathematical models and their computer realization. The circle of problems of this theme is rather extensive and in connection with working out of new technics and technology especially intensively develops recently. It is caused by the important practical problems at: pipeline transport of oil, gas and other environments, drilling of oil and gas chinks (for the purpose of decrease in hydrodynamic resistance), intensifications warmly weight of carrying over in technological devices and devices, forecasting of dynamics of freshet streams, weight to protection of elements of designs of cars and equipment from influence of streams of a heat, etc.

The work purpose is working out of mathematical bases hydrodynamic and warmly weight of exchange processes in biphasic systems taking into account external carrying over of heat and weight. For achievement of this purpose following problems have been formulated and solved: the general equations of movement of biphasic disperse systems with the account both internal, and external heat weight of an exchange are received; mathematical models and conditions of similarity of biphasic systems are developed; numerical methods of the decision of the equations convention warmly weight of an exchange, a jet current and boundary a layer in continuous environments are developed; Mathematical (numerical) experiments of hydrodynamics waterway streams are made.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ

АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ГЮНАЙ ФИКРЕТ кызы ГАДЖИЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СРЕДЫ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ И РАЗРАБОТКА МЕТОДА ЕГО РЕШЕНИЯ

1211.01 – Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени

доктора философии по математике

БАКУ – 2017