МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ГАМИДОВ РУСЛАН АЛЛАХВЕРАН оглы

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

1211.01-дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени доктора философии по математике

БАКУ – 2014

Работа выполнена на кафедре «Физики, математики и информатики» Ленкоранского Государственного Университета.

Научный руководитель:	**Доктор физико-математических наук, профессор А.Д.Искендеров**
Официальные оппоненты:	**Доктор физико-математических наук, профессор Т.К.Меликов**
	Кандидат физико-математических наук, доцент Н.А.Алиев
Ведущая организация:	**Азербайджанский Педагогический Университет кафедра «Математический анализ»**

Защита диссертации состоится 24 июня 2014 г. в 14^{00} часов на заседании Диссертационного Совета FD.02.016 по присуждению ученой степени доктора философии по математики при Бакинском Государственном Университете

Адрес: AZ 1148, г. Баку, ул. З. Халилова, 23

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Бакинского Государственного Университета

Автореферат разослан 21 мая 2014 г.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета FD.02.016,
доктор математических наук,
профессор: Н.Г.Ахмедов

ОСНОВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задача идентификация коэффициентов эллиптических уравнений ранее была рассмотрена в работах М.М.Лаврентьева, В.Г.Васильева, В.Г.Романова, А.Н.Тихонова, В.Я. Арсенина, А.Д.Искендерова, М.Д Мадатова и др. Были исследованы также различные вариационные формулировки этих задач. Вариационная постановка задач идентификации тесно связана с задачами оптимального управления коэффициентами соответствующих уравнений.

Основным отличием настоящей работы является выбор критерии качества, а также выбор функциональных пространств идентифицируемых коэффициентов, решений основной и сопряженной задач. Допустимый класс идентифицируемых коэффициентов включает неограниченные функции, что дает возможность рассмотреть уравнения состояния с сингулярным потенциалом. Известно, что вариационная формулировка задач идентификации, хотя и расширяет класс допустимых решений и дает возможность применить различные методы для их решения, не только не снимает некорректность исходной задачи, но даже усугубляет эту ситуацию. Поэтому выбор вида вариационной постановки исходной задачи идентификации имеет важное значение для ее исследования и решения.

В диссертационной работе, в вариационной постановке задачи идентификации, применена новая формулировка критерия качества. Непосредственным анализом нетрудно убедиться в естественности этого критерия качества, который является более эффективным для решения исходной задачи идентификации. Здесь эффективность критерия качества понимается в смысле широты классов исходных данных задачи идентификации.

Нагруженная система эллиптического уравнения, в том числе и система теории упругости, встречаются при решении различных практических задач. Вопросы идентификации объёмных сил, действующих в этих системах, связаны с решением линейных задач оптимального управления. Кроме того вариационные методы теории упругости связаны с теорией экстремальных задач для этих уравнений.

Цель работы: Исследование вопросов корректности задач идентификации коэффициентов эллиптического уравнения второго порядка; установить теоремы о существовании и регуляризации решения; доказать необходимое условие экстремумов для этих задач; исследование вопросов корректности задач в многомерных случаях оптимального управления систем, состояния которых описываются квазилинейными нагруженными уравнениями эллиптического типа; доказать теоремы единственности и существования; вывод достаточных условий дифференцируемости по Фреше критерия качества; установить необходимых условий оптимальности в виде вариационного неравенства для этих задач.

Методы исследования: В работе используются методы теории оптимального управления, функционального анализа, математической физики и теории дифференциальных уравнений.

Научная новизна работы:- Дается новая вариационная постановка рассматриваемой задачи идентификации коэффициентов эллиптического уравнения второго порядка;

- Исследуется корректность этой постановки;
- Устанавливаются теоремы о существовании и регуляризации решения;
- Доказываются необходимые условия оптимальности;
- Исследуется корректность задач оптимального управления систем, состояния которых описываются квазилинейными нагруженными уравнениями эллиптического типа в многомерных областях;
- Установлено необходимое условие оптимальности, получены достаточные условия для дифференцируемости по Фреше критерия качества.

Теоретическая и практическая ценность: Результаты, полученные в работе, могут быть применены при решении задач идентификации и при дальнейшей разработке методов решения задач оптимизации для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных с управлениями в их коэффициентах.

Апробация работы: Основные результаты докладывались на семинарах кафедры «Физика-математика и информатика» ЛГУ, на общем семинаре Института Кибернетики НАН Азербайджана, на семинарах кафедры «Оптимизация и управления» БГУ. Основные положения диссертационной работы доложены и обсуждены на VI республиканской научной конференции для молодых ученых и исследователей (Баку, 23-24 февраля 2000 г); научной конференции «Современные проблемы прикладной математики» (БГУ, Баку- декабрь 2002 г); 1-ой международной научной конференции «Обратные задачи теоретической и математической физики» (СГУ, Сумгаит, 5-6 мая 2003 г); республиканской научной конференции «Современные актуальные научные проблемы», посвященной 87-летней годовщине со дня рождения общенационального лидера Гейдара Алиева, (ЛГУ, Ленкорань, 2010 г); а также на международных конференциях проходивших в Европе: «Variational and iterative solution of the inverse problem for elliptic equation» İnternational Conference "İnverse Problems: Modelinq and Simulation" June 07-12, 2004 at Fethiye, Turkey; «Spesial identification problem for elliptik equations». 6^{th} international İSAAC Conqress, Middle east technical universiti. (Ankara, Turkey, 13-18 avqust 2007); «Numerical identifikation of unknown coefficients of elliptic type equation» İnternational Conference "İnverce Problems: Modeling and Simulation" held on (may 26-30, 2008 at Ölüdeniz, Fethiye, Turkey); "Education, science and economics at universities. Integration to international educational area" International conference (Płock, Poland, 20-25 September 2010); Четвертая Международная Конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования» (Москва, 25-29 марта 2013 г.).

Публикации: По теме диссертационной работы опубликованы 15 работ, в том числе 8 статей и 7 тезисов. Основные положения диссертационной работы доложены и обсуждены на международных научных конференциях. Некоторые из них напечатаны в международных журналах Европы с высоким импакт-фактором [5-6, 8, 12-14].

Структура и объем диссертации: Диссертационная работа состоит из списка сокращенных обозначений, введения, двух глав, выводов и списка используемых литератур. Работа изложена на 109 страницах компьютерного текста. Список литературы состоит из 100 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Диссертационная работа состоит из списка сокращенных обозначений, введения, двух глав, выводов и списка используемых литератур, содержащего 100 наименований.

В списке обозначений приводятся основные обозначения и определяются основные пространства, используемые в работе.

Во введение дается краткий обзор работ, примыкающих к теме диссертации, ее краткое содержание и обосновывается актуальность решаемых в диссертации задач.

Первая глава, состоящая из четырех параграфов, посвящена исследованию задачи оптимальной идентификации коэффициента эллиптического уравнения со специальным критерием качества.

В параграфе 1.1 рассматривается следующая задача: требуется определить функции $\{v(x), u(x)\}$ из условий

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + v(x)u = f(x), \ x \in D, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial D} = g_1(x), \quad x \in \partial D, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\partial D} = g_2(x), \quad x \in \partial D, \tag{3}$$

$$v = v(x) \in V_{ad} = \left\{ v(x) \in L_p(D) : v(x) \geq \gamma \geq 0, \|v\|_{L_p(D)} \leq d \right\}, \tag{4}$$

где $\gamma \geq 0$, $d > 0$, $p -$ заданные числа, причем $p = 2$ при $n = 2$ и $n = 3$, $p > n/2$ при $n \geq 4$, $D-$ ограниченная область в E_n, с достаточно гладкой границей ∂D, $N-$ конормаль границы ∂D, $a_{ij}(x) \in C(\overline{D})$ $(i, j = \overline{1,n})$, $f(x) \in L_2(D)$, $g_1(x) \in W_2^{1/2}(\partial D)$, $g_2(x) \in L_2(\partial D)-$ заданные функции, причем

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad (i, j = \overline{1,n}),$$

$$\mu_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu_2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \forall x \in \overline{D},$$

$$\forall \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in E_n, \quad \mu_1, \mu_2 = const > 0.$$

Задачу об определении функции $u(x)$ при заданном $v = v(x) \in V_{ad}$ из условий (1), (2) назовем редуцированной задачей Дирихле, а задачу об определении функции $u(x)$ при заданном $v = v(x) \in V_{ad}$ из условий (1), (3) назовем редуцированной задачей Неймана. Под решениями редуцированных задач (1), (2) и (1), (3) понимается обобщенные решения этих задач из пространства $W_2^1(D)$.

Задача (1) – (4) ставиться в вариационной формулировке: требуется минимизировать функционал

$$J_\alpha(v) = \|u_1 - u_2\|_{L_2(D)}^2 + \alpha \|v - w\|_{L_2(D)}^2 \tag{5}$$

на множестве V_{ad}, где $\alpha \geq 0$ - заданное число, $w \in L_2(D)$ – заданный элемент, $u_1 = u_1(x) = u_1(x,v)$, $u_2 = u_2(x) = u_2(x,v)$ - решения редуцированных задач Дирихле (1), (2) и Неймана (1), (3) при заданном $v = v(x) \in V_{ad}$.

В параграфе 1.2 исследуются вопросы корректности постановки задачи (5). При этом верна

Теорема 1. Пусть выполнены условия принятые при постановке задачи (1)-(5). Тогда функционал (5) слабо непрерывен на V_{ad}, множество оптимальных управлений задачи (1)-(5) $V_* = \{v_* \in V_{ad} : J(v_*) = \inf \{J(v) : v \in V\}\}$ непусто, V_* слабо компактно в $L_p(D)$ и любая минимизирующая последовательность слабо в $L_p(D)$ сходится к множеству V_*.

Для единственности решения задачи (1)-(5) имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\alpha > 0$. Тогда существует плотное подмножество K пространства $L_p(D)$ такое, что для любого $w \in K$ задача (1)-(5) имеет единственное решение.

В параграфе 1.3 устанавливаются необходимое условие оптимальности в задаче (5). Для задачи (1)-(5) введем сопряженное состояние $\psi_1 = \psi_1(x) = \psi_1(x,v)$, как обобщенное решение из $W_2^1(D)$ следующей задачи Дирихле:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}(x) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \right) + v(x)\psi_1 = 2\big(u_1(x) - u_2(x)\big), \quad x \in D, \qquad (6)$$

$$\psi_1 \big|_{\partial D} = 0, \qquad (7)$$

и сопряженное состояние $\psi_2 = \psi_2(x) = \psi_2(x,v)$, как обобщенное решение из $W_2^1(D)$ задачи Неймана:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}(x) \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \right) + v(x)\psi_2 = 2\big(u_1(x) - u_2(x)\big), \quad x \in D, \qquad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_2}{\partial N} \right|_{\partial D} = 0, \qquad (9)$$

где $u_1(x) = u_1(x,v)$, $u_2(x) = u_2(x,v)$ - есть решения редуцированных задач.

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина для задачи (1)-(5):

$$H(x,u_1,u_2,\psi_1,\psi_2,v) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_j}\right) -$$

$$- v(x)(u_1\psi_1 - u_2\psi_2) + f(x)(\psi_1 - \psi_2) - \alpha(v(x) - v_0(x))^2. \qquad (10)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия, принятые при постановке задачи (1)-(5) и $V_{ad} = \{ v = v(x) \in L_p(D):$ $w \le v(x) \le v_1$ п. в. на $D\}$ где $w, v_1\ (0 \le w < v_1)$ – заданные числа. Тогда для оптимальности управления $v^* = v^*(x) \in V_{ad}$ в задаче (1)-(5), необходимо, что при почти всех $v \in V_{ad}$ выполнялось условие

$$H(x,u_1^*(x),u_2^*(x),\psi_1^*(x),\psi_2^*(x),v^*(x)) =$$
$$= \max_{w \le v \le v_1} H(x,u_1^*(x),u_2^*(x),\psi_1^*(x),\psi_2^*(x),v), \qquad (11)$$

где $u_1^*(x), u_2^*(x)$ - соответственно решения редуцированных задач, $\psi_1^*(x), \psi_2^*(x)$ - соответственно решения задач (6), (7) и (8), (9) при $v = v^*(x)$.

Дифференцируемость по Фреше функционала (5) устанавливает

Теорема 4. Пусть выполнены условия при постановке задачи (1)-(5). Тогда функционал (5) непрерывно дифференцируем по Фреше на множестве V_{ad} в пространстве $L_p(D)$ и его градиент в точке $v \in D$ определяется выражением

$$J'_\alpha(v) = -\frac{\partial H}{\partial v} = u_1\psi_1 - u_2\psi_2 + 2\alpha(v - w)$$

В параграфе 1.4 приведены ряд примеров, показывающие, что рассматриваемая задача (1)-(5) является неустойчивой в классическом смысле и решение этой задачи при $\alpha = 0$ в общем случае не единственно.

Вторая глава, состоящая из четырех параграфов, посвящена исследованию одномерным и многомерным случаям задачи оптимального управления систем, состояния которых описываются квазилинейными нагруженными уравнениями эллиптического типа. Изучены вопросы корректности этих задач, доказаны теоремы единственности и существования решения, получены достаточные условия дифференцируемости по Фреше критерия качества и установлено необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

В параграфе 2.1 поставлена следующая задача оптимального управления систем, состояния которых описывается нагруженными уравнениями эллиптического типа в многомерном случае: требуется минимизировать функционал

$$J_\alpha(v) = \int_D f_0(x, u, q, v)dx + \int_{\partial D} f_1(s, u(s), q)ds + \alpha \|v - w\|_B^2, \tag{12}$$

на $V = \left\{ v : v = v(x) = (v_0(x), v_1(x)),\ v_m = \left(v_m^1, v_m^2, ..., v_m^{r_m}\right) \in L_\infty^{(r_m)}(D), \right.$

$\left. v_m(x) \in B_m,\ \overset{\circ}{\forall} x \in D,\ m = 0,1 \right\}$, где $B_0,\ B_1$ – некоторые ограниченные, замкнутые множества и $B_0 \subset E_{r_0},\ B_1 \subset E_{r_1},\ B = B_0 \times B_1,\ r = r_0 + r_1$, при условиях

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,u,v_0)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u,v_0)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x,u,q,v_1),\ x \in D, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\partial D} \equiv \left.\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,v_0)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n \overset{\wedge}{,} x_i)\right|_{\partial D} = \varphi(s), \quad s \in \partial D. \tag{14}$$

Здесь $\alpha > 0$, $q = (q_1, q_2, ..., q_\rho),\ q_k = u(\xi_k),\ k = \overline{1,\rho}$ – есть значения функции $u(x)$, взятые в фиксированных точках области $\overline{D}$; f_0–заданная функция, при каждом $(u,q,v) \in E_1 \times E_\rho \times B$ измерима по $x \in D$ и при $\overset{\circ}{\forall} x \in D$ непрерывная по $(u,q,v) \in E_1 \times E_\rho \times B$; имеет непрерывные производные по u,q и $f_0(x,u(x),q,v(x)) \in L_1(D)$. Функция $f_1(s,u,q)$ при каждом $(u,q) \in E_1 \times E_\rho$ измерима по $s \in \partial D$ и при $\overset{\circ}{\forall} s \in \partial D$ непрерывна по $(u,q) \in E_1 \times E_\rho$, имеет непрерывные производные по u,q при $\overset{\circ}{\forall} s \in \partial D$ и $f_1(s,u(s),q) \in L_1(\partial D)$. $\varphi(s) \in L_2(\partial D)$, $a_{ij}(x,u,v_0)$, $a_i(x,u,v_0)$, $f(x,u,q,v_1)$ – заданные функции. Функция $a_{ij}(x,u,v_0)$ при каждом $(u,v_0) \in E_1 \times B_0$ имеет непрерывную ограниченную производную по u,v_0 при почти всех $x \in D$ и для $\forall (u,v_0) \in E_1 \times B_0$. Функция $f(x,u,q,v_1)$ при каждом $(u,q,v_1)\in E_1\times E_\rho\times B_1$ измерима по $x\in D$ и при $\forall\overset{\circ}{x}\in D$ непрерывна по $(u,q,v_1)\in E_1\times E_\rho\times B_1$, имеет непрерывные и ограниченные производные по u,q при $\forall\overset{\circ}{x}\in D$ и для $\forall(u,q,v_1)\in E_1\times E_\rho\times B_1$.

Кроме того, выполняются следующие условия:

$$a_{ij}(x,u,v_0)=a_{ji}(x,u,v_0),\qquad i,j=\overline{1,n},$$

$$\gamma\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,u,v_0)\beta_i\beta_j\le\mu\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2,\quad \forall\overset{\circ}{x}\in D,\ \forall(u,\,v_0)\in E_1\times B_0,$$

где $\gamma,\,\mu=const>0,$ $\beta_1,...,\beta_n$- произвольные вещественные числа.

В параграфе 2.2 рассматривается следующая задача: требуется минимизировать функционал

$$J_\alpha(v)=\int_0^l f_0(x,u,q,v)dx+f_1(u(0),u(l))+\alpha\|v-w\|_B^2 \tag{15}$$

на множества V при условиях

$$-\frac{d}{dx}\left(a_{11}(x,\,u,v_0)\frac{du}{dx}\right)+a_1(x,u,v_0)\frac{du}{dx}=f(x,u,q,v_1),\ \ x\in D, \tag{16}$$

$$a_{11}(x,u,v_0)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=0}=\varphi_1,\qquad a_{11}(x,u,v_0)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=l}=\varphi_2, \tag{17}$$

где $\alpha>0$ –заданное число, $f_0(x,u,q,v)$, $f_1(p_1,p_2)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям $f_0(x,u,q,v)\ge C_1>-\infty$, $f_1(p_1,\,p_2)\ge C_2>-\infty$, $\forall u,p_1,p_2\in E_1$, $\forall q\in E_\rho$, $\forall\overset{\circ}{x}\in D$, $\forall v\in B$, $f_1\in W_2^{1/2}(\partial D)$, $\varphi_1,\varphi_2=const$, $a_{11}(x,u,v_0)$ – удовлетворяет целовую $\lambda\le a_{11}(x,u,v_0)\le\mu$, $\forall\overset{0}{x}\in[0,\,l]$, $u\in E_1$, $v_0\in B_0$, $\lambda,\mu=const>0-$ заданные числа. Кроме того выполнены следующие условия:

$$|a_1|\le\mu_0,\ \left|\frac{\partial a_{11}}{\partial u}\right|\le\mu_1,\ \left|\frac{\partial a_1}{\partial u}\right|\le\overline{\mu}_1,\ 0<\mu_2<-\frac{\partial f}{\partial u},\ \ \left|\frac{\partial f}{\partial q_k}\right|\le\mu_3,\ k=\overline{1,\rho},$$

где $\mu_0, \mu_1, \overline{\mu}_1, \mu_2, \mu_3 = const > 0$ - заданные числа.

Задачу (16), (17) при заданном $v \in V$ назовем редуцированной задачей. Под решением редуцированной задачи (16), (17) будем понимать обобщенное решение этой задачи из пространства $W_2^1(0, l)$.

<u>Теорема 5.</u> Существует плотное подмножество K пространства $L_2^{(r)}(0,l)$ такое, что для любого $w \in K$ задача о минимизации функционала (15) на множестве V при условиях (16), (17) при $\alpha > 0$ имеет единственное решение.

Пусть $\psi = \psi(x)$ - обобщенное решение из $W_2^1(0, l)$, сопряженной к (15) – (17) задачи:

$$\frac{d}{dx}\left(a_{11}(x, u, v_0)\frac{d\psi}{dx}\right) - \frac{\partial a_{11}(x, u, v_0)}{\partial u}\frac{du}{dx}\frac{d\psi}{dx} + a_1(x, u, v_0)\frac{du}{dx}\psi -$$
$$-\frac{da_1}{du}(x, u, v_0)\frac{du}{dx}u\psi + \frac{\partial f(x, u, q, v_1)}{\partial u}\psi +$$
$$+\int_0^l \sum_{k=1}^{\rho} \delta(x-\xi_k)\frac{\partial f(\overline{\eta}, u(\overline{\eta}), u(x), v_1(\overline{\eta}))}{\partial q_k}\psi(\overline{\eta})d\overline{\eta} = -\frac{\partial f_0(x,u,q,v)}{\partial u} -$$
$$-\int_0^l \sum_{k=1}^{\rho} \delta(x-\xi_k)\frac{\partial f_0(\overline{\eta}, u(\overline{\eta}), u(x), v(\overline{\eta}))}{\partial q_k}\, d\overline{\eta}\,, \tag{18}$$

$$\left(a_{11}(x,u,v_0)\frac{d\psi}{dx} + a_1(x,u,v_0)\psi \right)\Bigg|_{x=0} = -\frac{\partial f_1(p_1,p_2)}{\partial p_1},$$
$$\left(a_{11}(x,u,v_0)\frac{d\psi}{dx} + a_1(x,u,v_0)\psi \right)\Bigg|_{x=l} = \frac{\partial f_1(p_1,p_2)}{\partial p_2}\,, \tag{19}$$

где $p_1 = u(0)$, $p_2 = u(l)$, $u = u(x)$ решение редуцированной задачи (16), (17) соответствующей управлению $v \in V$; $\delta(x)$ - Дельта-функция.

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина для задачи(15)–(17).

$$H(x, u, q, \psi, v) = -\left[-a_{11}(x,u,v_0)\frac{du}{dx}\frac{d\psi}{dx} + a_1(x, u, v_0)\frac{du}{dx}\psi + \right.$$
$$\left. + f(x, u, q, v_1)\psi + f_0(x, u, q, v) \right].$$

Теперь укажем достаточные условия дифференцируемости по Фреше функционала (15) и найдем выражение для его градиента. Предположим, что выполняются следующие условия:

1) Функции $a_{11}(x, u, v_0), a_1(x, u, v_0),\ f(x, u, q, v_1)$ вместе с частными производными

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial u},\ \frac{\partial a_1}{\partial u},\ \frac{\partial f}{\partial u},\ \frac{\partial f}{\partial q_k},\quad k=\overline{1,\ \rho} \qquad \text{и} \qquad f_0(u(0),\ u(1),\ q)$$

удовлетворяют условия Липшица по $u,\ q,\ v_0, v_1$ соответственно;

2) Первые производные по $v_0,\ v_1$ соответственно функций $a_{11}(x, u, v_0), a_1(x,u,v_0),\quad f(x, u, q, v_1),\quad f_0(x, u, q, v),\ \forall x \in \overset{\circ}{(0, l)}$ непрерывны по $(u, q, v) \in E_1 \times E_\rho \times B$ и для всех $(u, q, v) \in E_1 \times E_\rho \times B$ измеримы по $x \in D$;

3) Операторы $\dfrac{\partial a_{11}(x, u,\ v_0(x))}{\partial v_0},\quad \dfrac{\partial a_1(x, u,\ v_0(x))}{\partial v_0},$

$$\frac{\partial f(x, u, q, v(x))}{\partial v_1},\quad \frac{\partial f_0(x, u, q, v(x))}{\partial v_i},\quad i=0,1$$

ограниченно и непрерывно действуют в $L_\infty^{(r_m)}(D),\ m=0,1,\ L_\infty^{(r)}(D)$ соответственно.

<u>Теорема 6.</u> При условиях 1) – 3) функционал (15) дифференцируем по Фреше и для его градиента справедливо выражение

$$J'(v) = -\frac{\partial H}{\partial v} = \left(-\frac{\partial H}{\partial v_0},\ -\frac{\partial H}{\partial v_1}\right).$$

<u>Теорема 7.</u> (Необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенство.) Пусть выполнены все условия теоремы 6 и множество $B_0,\ B_1$ выпуклы. Тогда для оптимальности управления $v^*(x) \in V$ необходимо выполнение неравенства

$$\int_0^l \left[\left\langle \frac{\partial a_{11}(x, u^*(x), v_0^*(x))}{\partial v_0} \frac{du^*}{dx} \frac{d\psi^*}{dx} + \frac{\partial a_1(x, u^*(x), v_0^*(x))}{\partial v_0} \frac{du^*}{dx} \psi^*, \right.\right.$$

$$v_0(x)-v_0^*(x)\Big\rangle_{E_{r_0}} - \left\langle \frac{\partial f\left(x,\, u^*(x),\, q^*,\, v_1^*(x)\right)}{\partial v_1}\psi^*,\; v_1(x)-v_1^*(x) \right\rangle_{E_{r_1}} -$$

$$-\left\langle \frac{\partial f_0\left(x,\, u^*(x),\, q^*,\, v^*(x)\right)}{\partial v},\quad v(x)-v^*(x) \right\rangle_{E_r} \Bigg] dx \le 0\,,$$

для $\forall\, v=v(x)\in V$. Здесь $u^*=u^*(x),\quad \psi^*=\psi^*(x)$ решения редуцированной и сопряженной задачи, при $v^*=v^*(x)\in V$, соответственно, $q^*=\left(q_1^*,\, q_2^*,\, \dots,\, q_\rho^*\right),\ q_k^*=u^*(\xi_k),\ k=\overline{1,\,\rho}$.

В параграфе 2.3 рассматривается многомерный случай задачи (15) – (17). Пусть требуется минимизировать функционал

$$J_0(v)=\int\limits_D f_0(x,\, u,\, q,\, v)dx+\int\limits_{\partial D} f_1(s,\, u(s),\, q)ds\,, \tag{20}$$

на множестве

$$V=\left\{v:\ v=v(x)=\left(v^1,\, v^2,\, \dots,\, v^r\right)\in L_\infty^{(r)}(D),\quad v(x)\in B,\quad \overset{\circ}{\forall}\, x\in D\right\}$$

где B - некоторое замкнутое и ограниченное множество в E_r, при условиях

$$-\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+b(x)u=f(x,v),\ x\in D, \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\partial D}\equiv\left.\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos\left(n,^\wedge x\right)\right|_{\partial D}=\varphi_1(s),\quad s\in\partial D\,, \tag{22}$$

где $f_0\,(x,u,q,v)\ge C_0>-\infty\,, f_1(s,u(s),q)\ge C_0>-\infty\,,\forall(u,q)\in E_1\times E_r\,,$

$\overset{\circ}{\forall}\, s\in\partial D,\overset{\circ}{\forall}\, x\in D,\ \forall v\in B\in E_r\,,\ a_{ij}\in W_p^1(D),\ f\in L_p(D),$

$\varphi_1\in W_p^{1-1/p}(\partial D),\ b\in L_p(D),\ p\ge n+2.$

Задачу об определение функции $u=u(x)$ из условий (21) – (22) при заданном $v\in V$ назовем редуцированной задачей.

Под решением редуцированной задачи $u=u(x,\, v)$, соответствующим заданному управлению $v\in V$, будем понимать функцию $u(x)$ из пространства $W_p^2(D)$.

Теорема 8. Существует плотное подмножества K пространства $L_p^{(r)}(D)$ такое, что для любого $\omega \in K$ задача о минимизации функционала $J_\alpha(v) = J(v) + \alpha \| v - \omega \|_{L_p(D)}^p$ на множестве V при $\alpha > 0$ имеет единственно решение.

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина для задачи (20)–22).

$$H(x, u, q, \psi, v) = -f(x, v)\psi - f_0(x, u, q, v),$$

где $\psi = \psi(x)$- обобщенное решение сопряженной к (20)-(22) задачи.

Теперь укажем достаточные условия дифференцируемости по Фреше функционала (20) и найдем выражение для его градиента. Предположим, что выполняются следующие условия:

1) Функция $f(x, v)$, $f_0(x, u, q, v)$ удовлетворяют условия Липшица по v и u, q, v соответственно.

2) Первые производные по v функция $f(x, v)$, $\forall x \in \overset{\circ}{D}$ непрерывны по $v \in B$ и первые производные по v функция $f_0(x, u, q, v)$, $\overset{\circ}{\forall} x \in D$ непрерывны по $(u, q, v) \in E_1 \times E_\rho \times B$ и для всех $(u, q, v) \in E_1 \times E_\rho \times B$ измеримы по $x \in D$.

3) Операторы $\dfrac{\partial f(x, v)}{\partial v}$, $\dfrac{\partial f_0(x, u, q, v)}{\partial v}$ ограниченно и непрерывно действуют в $L_\infty^{(r)}(D)$ соответственно.

Теорема 9. При условиях 1) – 3) функционал (20) дифференцируем по Фреше и для его градиента справедливо выражение

$$J'(v) = -\frac{\partial H}{\partial v}.$$

Теорема 10. (Необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.) Пусть выполнены все условия теоремы 9 и множества B, выпукло $u^* = u^*(x)$, $\psi^* = \psi^*(x)$ решения редуцированной и сопряженной задач при $v^* = v^*(x) \in V$, соответственно, $q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_\rho^*)$, $q_k^* = u^*(\xi_k)$, $k = \overline{1, \rho}$. Тогда для оптимальности управления $v^* \in V$ необходимо выполнение условия

$$\int_D \left\langle -\frac{\partial f\left(x,v^*(x)\right)}{\partial v}\psi^* - \frac{\partial f_0\left(x,u^*(x),q^*,v^*(x)\right)}{\partial v}, \right.$$

$$\left. v(x)-v^*(x) \right\rangle_{E_r} dx \geq 0, \quad \text{для} \quad \forall v = v(x) \in V.$$

В параграфе 2.4 рассматривается задача оптимального управления для нагруженной стационарной системы теории упругости.

Пусть D-ограниченная область n-мерно евклидово пространств с достаточной гладкой границей ∂D, γ - внешняя ко нормаль границы, $n \leq 3$.

Рассмотрим процесс, описываемый следующей системой уравнений стационарной теории упругости с последствием:

$$-\mu(x)\Delta u - (\lambda(x)+\mu(x)) grad div\, u + a(x)u + \int_D G(x, \xi)u(\xi)d\xi +$$

$$+b(x)u(\xi_0) = v(x), \quad x \in D, \tag{23}$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$, $u_i = u_i(x)$, $i = \overline{1,3}$ вектор смещения, λ, μ - переменные коэффициенты Ламэ. $a(x), b(x), G(x, \xi)$ заданные функции своих аргументов, $\xi_0 \in \overline{D}$ фиксированная точка.

$$v(x) \in V = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3), \quad v_i = v_i(x) \in L_2(D), \quad \|v_i(x)\|_2 \leq 1, \quad i = \overline{1, 3} \right\}$$

вектор управления. К уравнению (23) присоединим граничное условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \gamma}\right|_{\partial D} = g(s), \qquad s \in \partial D, \tag{24}$$

где $g(s) \in L_2(\partial D)$ -заданная функция.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_0(v) = \left\| u - f_0 \right\|^2_{L_2^{(3)}(\partial D)} \tag{25}$$

на множестве V при условиях (23), (24). $f_0 \in L_2^{(3)}(\partial D)$ заданный элемент.

Под решением задачи (23) – (25) при заданном $v \in V$ будем подразумевать почти всюду решения из $W_2^2(D)$.

Очевидно что u линейно зависит от v, то есть: $u = Av + u_0$, где A - линейный оператор, u_0 - заданный элемент, определяемый лишь функцией $g(s)$. Если $g = 0$, тогда $u_0 = 0$. Из оценки $\|u\|_{L_2^3(D)} \le C\|v\|_{L_2^3(D)}$ следует ограниченность оператора A.

Пусть $u = u(x, v)$. Подставим это выражение в функционал (25), тогда получим

$$J_0(v) = \left\| Bv - f_1 \right\|^2_{L_2^{(3)}(\partial D)} \tag{26}$$

где $Bv = Av\big|_{\partial D}$, $f_1 = f_0 + u_0\big|_{\partial D}$. Таким образом, задача (23)-(25) сводится к задаче минимизации квадратичного функционала (26) в пространстве $L_2^{(3)}(\partial D)$. При этом оператор B является линейным ограниченным оператором. Задача (23)–(25) изучается с помощью минимизации функционала (26).

Функционал $J_0(v)$ является выпуклым. Получены выражения для первой и второй производной функционала (37).

Используя формулы для градиента функционала (26) описаны методы скорейшего спуска и проекция градиента для приближенного решения задачи (23) – (25).

В заключении автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.м.н., проф.А.Д.Искендерову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Список работ опубликованных по теме диссертации

1. Madatov A.D., Jumshudov J.S., Hamidov R.A. Determination of the sizes of a zone of ecological changes// Abstracts National Conference on environmental pollution, 16-18 june 1999, İslamik Azad Universiti of Ardabil, p.237
2. Гамидов Р.А. Нелокальные краевые задачи для уравнений диффузии и терлорпроводности// VI республиканской научной конференции для молодых ученых и исследователей. Баку, 23-24 февраля 2000 г., с.14-15
3. Джумшудов Дж.С., Гамидов Р.А. Вариационный метод определения неизвестной границы области в задачах фильтрации несжимаемой жидкости // Матер. науч. конф. Современные проблемы прикл. мат. Бакинский гос. ун-т. Баку-2002. С. 96–98.

4. Джумшудов Дж.С., Гамидов Р.А. Об одной задаче для систем эллиптических уравнений с неизвестной границей области// "Обратные задачи теоретической и математической физики" 1-ой международной научной конференции, Сумгаит 5-6 мая 2003 г., с.48

5. İskenderov A.D., Mahmudov N.M., Hamidov R.A. Variational and iterative solution of the inverse problem for elliptic equation// Abstracts of the İnternational Conference "İnverse Problems: Modelinq and Simulation" June 07-12, 2004 at Fethiye, Turkey, p. 88-90

6. İskenderov A.D., Hamidov R.A. Spesial identification problem for elliptik equations// Abstracts 6th international İSAAC Conqress, 13-18 avqust 2007, Middle east technical universiti, Ankara, Turkey, p.51

7. Искендеров А.Д., Гамидов Р.А. Вариационный метод решения обратной задачи для эллиптических уравнений со специальным функционалом качества// Вестник Ленкоранского Госуд. Ун-та, сер. естеств. наук 2007, с.57-72

8. İskenderov A.D., Hamidov R.A. Numerical identifikation of unknown coefficients of elliptic type equation// Abstracts Of the İnternational Conference "İnverce Problems: Modeling and Simulation" held on may 26-30, 2008 at Ölüdeniz, Fethiye,Turkey, p.79-80

9. Гамидов Р.А. Оптимальное управление нагруженными обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка// Вестник Ленкоранского Госуд. Ун-та, сер. естеств. наук 2009, с. 14-29

10. Гамидов Р.А. Оптимальное управление нагруженными общими эллиптическими уравнениями в многомерных областях// Вестник Ленкоранского Госуд. Ун-та, сер. естеств. наук 2010, с.17-26

11. Искендеров А.Д., Тагиев Р.К., Гамидов Р.А. Об одной задаче оптимального управления для линейного уравнения параболического типа// Вестник Ленкоранского Госуд. Ун-та, сер. естеств. наук, 2010, с.45-54

12. Hamidov R.A. Optimal control of the loaded general elliptik equationsin multidimensional domans// International conference "Education, science and economics at universities. Integration to

international educational area" Płock, Poland, 20 -25 September 2010, p. 397-403

13. Искендеров А.Д., Гамидов Р.А. Оптимальная идентификация коэффициентов эллиптических уравнений// Автоматика и Телемеханика, 2011, № 12, Москва-2011, с.144–155. (Eng. Optimal Identification of Coefficients of Elliptic Equations// Automation and Remote control. Vol.72 No.12 2011. p.2553-2562)

14. Искендеров А.Д., Гамидов Р.А. Вариационный метод решения обратной задачи для эллиптических уравнений// Четвертая Международная Конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», РУДН, Москва, 25-29 марта 2013 г. с.420-421

RUSLAN ALLAHVERƏN oğlu HƏMİDOV

ÇOXÖLÇÜLÜ OBLASTDA XƏTTI ELLIPTIK TIP TƏNLIKLƏR ÜÇÜN ƏMSALLA OPTIMAL IDENTIFIKASIYA MƏSƏLƏSİ

Xülasə

Dissertatsiya işində çoxölçülü oblastda xətti elliptik tip tənliklər üçün əmsalla optimal identifikasiya məsələsinə baxılır. Əsasən ikinci tərtib sadə elliptik tip tənliklər ücün ifadələr tədqiq olunur. Baxılan identifikasiya məsələsinin yeni variasiya qoyuluşu verilir və bu məsələnin korrektliyi tədqiq olunur. Bu işdə əsas fərq axtarılan məsələdə variasiya ifadəsinə yeni yanaşmadan, keyfiyyət kriterinin seşilməsindən, bundan başqa əsas və qoşma məsələnin həllində identifikasiya əmsallarının funksional fəzasının seşiıməsindən ibarətdir.

Birinci fəsildə xüsusi keyfiyyət kriteriyalı xətti elliptik tip tənliklər üçün əmsalla optimal identifikasiya məsələsi tədqiq olunur. Məsələnin korrektliyi araşdırılır, həllin varlığı və requlyarizasiyası haqqında teoremlər verilir, ekstremumun varlığı üçün zəruri şərt isbat olunur və konkret misallar göstərilir.

İkinci fəsildə isə birölçülü və çoxölçülü hallar üçün yüklənmiş elliptik tip tənliklərlə ifadə olunan optimal idarəetmə sistemləri tədqiq olunur. Belə ki, məsələnin korrektliyi tədqiq olunur, optimal idarəetmə məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər isbat olunur. Keyfiyyət kriterinin Freşe mənada diferensiallanması üçün kafi şərt tapılır, qradientin ifadəsi aşkar şəkildə alınır, variasiya bərabərsizlikləri şəklində optimallıq üçün zəruri şərt isbat edilir.

HAMİDOV RUSLAN ALLAHVERAN oglu

PROBLEMS OF OPTIMAL IDENTIFICATION OF COEFFICIENTS OF LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS IN MULTIDIMENSIONAL DOMAINS

Summary

The optimal identification of coefficients of elliptic type equation in multidimensional domains is considered in the work. Mainly we investigate the problems for simple elliptic type equations of the second order. The new variation statement is given for the considered problem of identification and we investigate the correctness of this problem. The main advantages of current work are the new approach to variation formulation of an initial problem, the selection of quality criteria, and also the selection of functional space of identified coefficients, the solution to the main and adjoint problems.

In the first chapter we study the problem of optimal identification of the coefficients by the special criteria of quality for linear equation of elliptic type. The correctness of the statement of the problem is investigated, the theorems on existence and regularization of the solution are proved, the necessary conditions of the optimality are obtained and the concrete examples are given.

In the second chapter we investigate the systems of optimal control by quasilinear loaded equations of elliptic type for one and multidimensional cases. The correctness of the problem is investigated, the theorems on existence and uniqueness of the solution to the optimal control problem are proved. The sufficient conditions of differentiability by Fresher of the criteria of quality, the obvious expression for the gradient of the target functional is obtained, the necessary conditions of optimality in the form of variation inequalities are proved.

Capa imzalanmışdır: **21.05.2014**
Formatı: **64×80 1/16**
Tirajı: **100 nüsxə**

Bakı Dövlət Universitetinin nəşriyyatı
AZ 1148, Bakı ş. Z.Xəlilov 23

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Əlyazma hüququnda

HƏMİDOV RUSLAN ALLAHVERƏN OĞLU

ÇOXÖLÇÜLÜ OBLASTDA XƏTTI ELLIPTIK TIP TƏNLIKLƏR ÜÇÜN ƏMSALLARIN OPTIMAL IDENTIFIKASIYASI MƏSƏLƏLƏRI

1211.01 - diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim olunmuş dissertasiyanın

A B T O P E Ф E P A T Ы

BAKI– 2014