**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ТУНЗАЛЯ МАГЕРРАМ кызы ГУСЕЙНОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ ПРОЦЕССАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

1211.01 – Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

**диссертации на соискание учёной степени
доктора философии по математике**

Баку - 2015

Работа выполнена на кафедре «Дифференциальные и интегральные уравнения» Бакинского Государственного Университета.

Научный руководитель:	**Доктор физико-математических наук, профессор Г.Ф.Кулиев**
Официальные оппоненты:	**Доктор физико-математических наук, профессор А.Я.Ахундов**
	Доктор математических наук, профессор Р.К.Тагиев
Ведущая организация:	**Азербайджанский Технический Университет (кафедра «Математика»)**

Защита диссертации состоится «22» декабря 2015 г. в 14^{00} часов за заседании Диссертационного Совета FD.02.016 при Бакинском Государственном Университете.

Адрес: АЗ 1148, Баку, ул.З.Халилова, 23.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Бакинского Государственного Университета.

Автореферат разослан «20» ноября 2015 года.

**Учёный секретарь
Диссертационного Совета
FD 02.016, д.м.н., профессор Н.К.Ахмедов**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Дифференциальные уравнения с частными производными играют важную роль в решении ряда задач физики, механики, техники, экономики, медицины, биологии и т.д. Поэтому исследование задач управления в процессах, описываемых такими уравнениями имеет большое значение. Среди таких задач, изучение задачи управления в процессах описываемых гиперболическими уравнениями по сравнению с процессами, описываемыми эллиптическими и параболическими уравнениями являются более сложными. Основная причина этого связано со сложностью теории решения гиперболических уравнений. Как следствие этого в задачах управления, связных с гиперболическими уравнениями исследование существования оптимального управления, вывод необходимых условий оптимальности, задачи управляемости и т.д. значительно сложны.

Впервые одна из таких задач для уравнения колебаний струны решена с помощью L-проблемы моментов А.Г.Бутковским. Далее, различные задачи теории управления для процессов, описываемых гиперболическими уравнениями, изучены Ж.Л.Лионсом, В.А.Ильиным и В.В.Тихомировым, К.К.Гасановым и Т.М.Гасымовым, А.И.Егоровым, Г.Ф.Кулиевым и К.Ш.Джаббаровой, О.Эммануиловым, Л.Н.Знаменской, V.Komornik, R. Apoloya, E.Zuazua и т.д. В работе В.А.Ильина и В.В.Тихомирова найдены управления в явном виде в задаче с граничным управлением. В работе К.К.Гасанова и Т.М.Гасымова изучена задача управляемости для волнового уравнения с неклассическим краевым условиям, в работе R. Apoloya изучена задача точной управляемости, а в работе Ж.Л.Лионса задача точной управляемости и стабилизации для волнового уравнения.

В работах К.Т.Ахмедова, С.С.Ахиева, Ф.П.Васильева, К.Г.Гасанова, А.И.Егорова, А.Д.Искендерова, Г.Ф.Кулиева, Ж.Л.Лионса, К.А.Лурье, А.Дж.Мамедова, К.Б.Мансимова, М.Дж.Марданова, Т.Г.Меликова, М.А.Садыкова, С.Я.Серовайского, Т.К.Сиразедтинова, М.Б.Сурянаряна, Р.Г.Тагиева, А.А.Толстоногова, З.И.Халилова, Я.А.Шарифова, Ш.Ш.Юсубова, М.А.Ягубова и др. для гиперболических уравнений второго порядка изучены различные задачи оптимального управления.

Предлагаемая диссертация посвящена исследованию задачи управляемости, связанной с линейными гиперболическими уравнениями второго порядка, доказательству теорем существования оптимального управления с управлением в правой части линейных и слабо нелинейных гиперболических уравнений, выводу необходимых условий оптимальности, изучению задачи оптимальной стабилизации с фазовым ограничением, выводу формулы градиента функционала с введением штрафных функций и выводу необходимых условий оптимальности с его помощью.

Отметим, что теоремы существования оптимального управления, доказанные в работе, обосновывают содержательность выведенных необходимых условий и дают возможность применить эти необходимые условия к решению практических задач.

Как в выше перечисленных работах, так и в предлагаемой диссертации, рассматриваемые задачи существенно отличаются друг от друга, присущие только им особенностями. Поэтому тема диссертационной работы является актуальной.

Цель работы. Целью работы является

- построить решение задачи управляемости для уравнения колебаний струны с минимальной энергией;
- построить решение задачи граничного управления для системы волновых уравнений;
- исследовать задачи управляемости для некоторых гиперболических уравнений второго порядка с применением проблемы моментов;
- доказать существование оптимального управления в эволюционной системе второго порядка;
- изучить задачи оптимальной стабилизации и аппроксимации для слабо нелинейного гиперболического уравнения с фазовым ограничением;
- вывести формулу для градиента функционала в задаче оптимального управления для гиперболического уравнения с помощью метода штрафных функций.

Общая методика исследований.

В диссертационной работе использованы методы функционального анализа, метод проблемы моментов, метод Фурье, методы математической теории оптимального управления.

Научная новизна.

- построено решение задачи управляемости для уравнения колебаний струны с минимальной энергией;
- построено решение задачи граничного управления для систем волновых уравнений;
- исследована задача управляемости для некоторых гиперболических уравнений второго порядка с применением проблемы моментов;
- доказано существование оптимального управления в эволюционной системе второго порядка;
- изучена задача оптимальной стабилизации и аппроксимации для слабо нелинейного гиперболического уравнения с фазовым ограничением;
- выведена формула для градиента функционала в задаче оптимального управления для гиперболического уравнения с помощью метода штрафных функций.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в работе результаты носят, в основном, теоретический характер. Используемая в работе схема, может быть применена для исследования задач оптимального управления в системах, описываемых другими уравнениями. Кроме этого, практическая ценность задач, рассматриваемых в работе состоит в том, что полученные в работе результаты могут быт использованы для приближенного решения задач управления в различных колебательных и волновых процессах.

Апробации работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры «Дифференциальные и интегральные уравнения» (рук., проф. Н.Ш.Искендеров) и «Математические методы теории управления» (рук., проф. М.А.Ягубов) БГУ, в Институте прикладной математики БГУ (рук., акад. Ф.А.Алиев), на научной конференции «Актуалные проблемы математики и механики» студентов, магистров, аспирантов и молодых ученых, посвященной 90-летию БГУ (Баку 2009), международной научной конференции, посвященной 80-летию академика Ф.Г.Магсудова (Bakı 2010), на научной конференции «Актуалные проблемы математики и механики» студентов, магистров, аспирантов и молодых ученых (Баку 2011), на XV Республиканской научной конференции докторантов и молодых ученых (Баку 2011), на международном конгресса "IV congress of the Turkic World

Mathematical Society" (Bakı, 2011).

Публикация. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 113 страницах, состоит из списка обозначений, введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 88 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава работы, состоящая из четырех разделов, посвящена задачам управляемости и задачам оптимального управления.

В разделе 1.1 рассматривается следующая задача.

Пусть управляемый процесс описывается функцией $u(x,t)$, которая внутри области $Q_T=\{0<x<1,\ 0<t<T\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_{tt}=u_{xx}+\upsilon(x,t) \tag{1}$$

начальным условиям

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad 0<x<1 \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(1,t)=0,\quad 0<t<T, \tag{3}$$

где $u_0(x)\in W_2^1(0,1)$, $u_1(x)\in L_2(0,1)$ - заданные функции, а $\upsilon(x,t)$ управляющая функция.

Под решением задачи (1.1)-(1.3) для каждого управления $\upsilon(x,t)$ понимается функция $u(x,t)$ из $W_2^1(Q_T)$, которая для любой функции $\psi(x,t)\in W_2^1(Q_T)$, $\psi(x,T)=0$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint_{Q_T}\left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\upsilon\psi\right)dxdt-\int_0^1 u_1(x)\psi(x,0)dx=0,$$

а выполнение условия $u(x,0)=u_0(x)$ понимается в обычном смысле.

Ставится задача: требуется найти такое допустимое управление $\upsilon_1(t)\in L_2(0,T)$, чтобы соответствующее ему решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3), удовлетворяло условиям

$$u(x,T)=\varphi_0(x),\quad u_t(x,T)=\varphi_1(x) \tag{4}$$

и при этом функционал

$$I(\upsilon_1)=\|\upsilon_1\|^2_{L_2(0,T)} \tag{5}$$

принимал наименьшее возможное значение, где $\varphi_0\in W_2^1(0,1)$, $\varphi_1\in L_2(0,1)$.

Эта задача называется задачей с минимальной энергией.

Рассматривается задача оптимального управления для следующих различных случаев управляющей функции:

а) $\upsilon(x,t)=q(x)\upsilon_1(t)$ б) $\upsilon(x,t)=\upsilon_1(t)\delta(x-x_0)$,

где $q(x)$- заданная функция из $L_2(0,1)$, а $\upsilon_1(t)$ произвольная управляющая функция из $L_2(0,T)$ (допустимое управление), а $\delta(x)$ -функция Дирака.

Каждое допустимое управление в случае а) определяет единственное обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3), которое можно представить в виде :

$$u(x,t)=\int_0^1 u_0(\xi)G_t(x,\xi,t)d\xi+\int_0^1 u_1(\xi)G(x,\xi,t)d\xi+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 q(\xi)\upsilon_1(s)G(x,\xi,t-s)d\xi ds, \tag{6}$$

где

$$G(x,\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\sin\pi nt\cos\pi nx\cos\pi n\xi \tag{7}$$

функция влияния, а $\{\cos\pi nx\}$ являются собственными функциями спектральной задачи:

$$X''+\lambda^2X=0,\quad X'(0)=X'(1)=0. \tag{8}$$

В случае а) доказана

Теорема 1. При $T=2$ задача (1)-(3), (4), (5) имеет решение в виде ряда

$$\upsilon_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n\sin\pi nt+b_n\cos\pi nt),\ 0\le t\le 2$$

где

$$a_n=\frac{\pi n\psi_n^0}{q_n},\ b_n=\frac{\psi_n^1}{q_n},\quad \psi_n^0=2\int_0^1\psi_0(x)\cos\pi nxdx,$$
$$\psi_n^1=2\int_0^1\psi_1(x)\cos\pi nxdx,\ q_n=2\int_0^1 q(x)\cos\pi nxdx,\ n=1,2,\ldots,$$

$\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$– заданные функции, причем предполагается, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)<\infty\,. \tag{9}$$

В случае б) решение задачи (1)-(3) представляется в виде:

$$u(x,t)=\int_0^1 u_0(\xi)G_t(x,\xi,t)d\xi+\int_0^1 u_1(\xi)G(x,\xi,t)d\xi+$$
$$+\int_0^t\upsilon_1(s)G(x,x_0,t-s)ds. \tag{10}$$

Требуется найти такое управление $\upsilon_1(t)\in L_2(0,T)$, чтобы соответствующее ему решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3), представленное в виде (10), удовлетворяло условиям (4) и при этом функционал (5) принимал наименьшее возможное значение.

Теорема 2. При $T=2$ задача (1)-(3), (4), (5) имеет решение в виде ряда

$$\upsilon_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\sin\pi nt+\beta_n\cos\pi nt),$$

где

$$\alpha_n=\frac{\pi n\psi_n^0}{\cos\pi nx_0},\quad \beta_n=\frac{\psi_n^1}{\cos\pi nx_0},$$

причем предполагается, что $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n^2+\beta_n^2\right)<\infty$. Здесь x_0-такая точка из (0,1), что $\cos\pi nx_0\ne 0$, $0<x_0<1$, а ψ_n^0, ψ_n^1 определены в формулировке теоремы 1.1.

В разделе 1.2 диссертации рассматривается смешанная задача

$$u_{tt}=u_{xx}+f(x,t,\upsilon(x,t)), \tag{11}$$
$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad 0<x<1, \tag{12}$$

$$u_x(0,t)=0, \quad u_x(1,t)+\alpha u(1,t)=0, \quad 0<t<T, \tag{13}$$

где $u_0(x)\in W_2^1(0,1)$, $u_1(x)\in L_2(0,1)$, $f(x,t,\upsilon)$- заданные функции, $\alpha \neq 0$ - заданное число, $\upsilon(x,t)$ - управляющая функция.

В этом разделе рассматривается задачи оптимального управления для следующих различных частных случаев:

а) $f(x,t,\upsilon)=\upsilon(x,t)$, где в качестве допустимых управлений $\upsilon(x,t)$ берется функции из $L_2(Q_T)$;

Требуется найти такое допустимое управление $\upsilon(x,t)$, чтобы соответствующее ему решение $u(x,t)\in W_2^1(Q_T)$ задачи (11)-(13) удовлетворяло условиям

$$u(x,T)=\varphi_0(x), \quad u_t(x,T)=\varphi_1(x) \tag{14}$$

и при этом функционал

$$I(\upsilon)=\|\upsilon\|^2_{L_2(Q_T)} \tag{15}$$

принимал наименьшее возможное значение, где $\varphi_0 \in W_2^1(0,1), \varphi_1 \in L_2(0,1)$.

В этом случае каждое допустимое управление определяет единственное решение задачи (11)-(13), аналогичное (6).

Теорема 3. Пусть управляемый процесс описывается краевой задачей (11)-(13), где $\upsilon=\upsilon(x,t)\in L_2(Q_T)$.

Тогда задача об управлении с минимальной энергией имеет единственное решение и это решение представляется в виде

$$\upsilon=\upsilon^0(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n^0\sin\lambda_n(T-t)+\beta_n^0\cos\lambda_n(T-t)\right)X_n(x),$$

где

$$\alpha_n^0=\frac{2\psi_n^0\lambda_n^3T+\psi_n^0\lambda_n^2\sin 2\lambda_nT-2\psi_n^1\lambda_n\sin^2\lambda_nT}{\lambda_n^2T^2-\sin^2\lambda_nT},$$

$$\beta_n^0=\frac{2\psi_n^1\lambda_n^2T-\psi_n^1\lambda_n\sin 2\lambda_nT-2\psi_n^0\lambda_n^2\sin^2\lambda_nT}{\lambda_n^2T^2-\sin^2\lambda_nT},$$

$$\psi_n^0=\int_0^1\psi_0(x)X_n(x)dx, \quad \psi_n^1=\int_0^1\psi_1(x)X_n(x)dx.$$

а $X_n(x)$ и λ_n собственная функция и собственное значение спектральной задачи:

$$X''+\lambda^2X=0,$$
$$X'(0)=0, \quad X'(1)+\alpha X(1)=0.$$

б) $f(x,t,\upsilon)=\Psi(t)\upsilon(x)$, где $\Psi(t)$ - заданная функция из $L_2(0,T)$, а допустимыми управлениями являются любые функции $\upsilon(x)$, принадлежащие $L_2(0,1)$.

Требуется найти такое управление $\upsilon(x)\in L_2(0,1)$, чтобы соответствующее ему решение $u(x,t)$ задачи (11)-(13) удовлетворяло условию

$$u(x,T)=\varphi_0(x)$$

и при этом функционал

$$I(\upsilon)=\|\upsilon\|^2_{L_2(0,1)}$$

принимал наименьшее возможное значение.

Теорема 4. Пусть управляемый процесс описывается краевой задачей (11)-(13), в которой $f(x,t,\upsilon)=\Psi(t)\upsilon(x)$.

Тогда, если не существует такого n $(n=1,2,...)$, что $\psi_n^0\neq 0$ и $\alpha_n=0$ и ряд

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n\psi_n^0)^2}{\alpha_n^2}$$

сходится, где $\alpha_n=\int_0^T\sin\lambda_n(T-s)\Psi(s)ds$, то задача об управлении с минимальной энергией имеет единственное решение и оптимальное управление имеет вид

$$\upsilon(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\psi_n^0}{\alpha_n}X_n(x).$$

Если же хотя бы при одном n одновременно выполнены соотношения $\psi_n^0\neq 0$, $\alpha_n=0$, то задача об управлении с минимальной энергией не имеет решения.

в) $f(x,t,\upsilon)=\upsilon(x)\delta(t-t_0)$, где t_0 - произвольная точка из интервала $(0,T)$, где в качестве допустимого управления $\upsilon(x)$ берется произвольная функция из $L_2(0,1)$, а $\delta(t)$ - функция Дирака.

Доказана теорема, аналогичная теореме 4.

В разделе 1.3 рассматривается следующая задача. Пусть процесс описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (16)$$

в области $Q_T = (0,l)\times(0,T)$, где $u = [u_1(x,t), u_2(x,t)]$- вектор-функция, A -постоянная, положительно-определенная, квадратная матрица второго порядка. Пусть

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (17)$$

$$u(x,T) = \varphi_2(x), \quad \frac{\partial u(x.T)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (18)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ и $\psi_1(x), \psi_2(x)$ произвольные вектор-функции из классов $W_2^2(0,l)$ и $C^1[0,l]$ соответственно.

Вектор-функцию $\left\{u(x,t), \frac{\partial u(x.t)}{\partial t}\right\}$, заданную на отрезке $[0,l]$ при фиксированном t, будем называть состоянием колебательной системы в момент времени t.

В качестве граничных условий рассмотрим условия

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = \nu(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad (19)$$

в которых $\mu(t)$, $\nu(t)$ считаем граничными управлениями.

Требуется найти вектор-функции $\mu(t) \in C^1[0,T]$ и $\nu(t) \in W_2^2(0,T)$ такие, чтобы для решения $u(x,t)$ уравнения (16) с начальными условиями (17) в момент времени T выполнялись финальные условия (18).

Теорема 5. Управляющие функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ в условиях рассматриваемой краевой задачи можно представить в виде:

$$\mu(t) = P(\underset{\sim}{\mu} + \tilde{\tilde{\mu}}), \; \nu(t) = P(\underset{\sim}{\nu} + \tilde{\tilde{\nu}}),$$

где P - матрица перехода при диагонализации матрицы A,

$$\underset{\sim}{\mu} = (\underset{\sim}{\mu}_1, \underset{\sim}{\mu}_2), \qquad \underset{\sim}{\nu} = (\underset{\sim}{\nu}_1, \underset{\sim}{\nu}_2), \qquad \tilde{\tilde{\mu}} = (\tilde{\tilde{\mu}}_1, \tilde{\tilde{\mu}}_2), \qquad \tilde{\tilde{\nu}} = (\tilde{\tilde{\nu}}_1, \tilde{\tilde{\nu}}_2),$$

$$\underset{\sim}{\mu}_i(z) = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}'_{i1}(\lambda_i z) + \frac{1}{\lambda_i}\tilde{\psi}_{i1}(\lambda_i z), \quad \underset{\sim}{\nu}_i(t) = \frac{\tilde{\varphi}_{i1}(l-\lambda_i t)}{2} + \frac{1}{2\lambda_i}\int_{l-\lambda_i t}^{l}\tilde{\psi}_{i1}(z)dz,$$

$$\tilde{\tilde{\mu}}_i(z) = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}'_{i2}(l-\lambda_i z) - \frac{1}{2\lambda_i}\tilde{\psi}_{i2}(l-\lambda_i z_i),$$

$$\tilde{\tilde{\nu}}_i(z) = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}_{i2}(\lambda_i z) - \frac{1}{2\lambda_i}\int_{\lambda_i z}^{l}\tilde{\psi}_{i2}(\xi)d\xi, \; i = 1,2,.$$

В разделе 1.4 рассматривается следующая задача правляемости:

Пусть управляемый процесс описывается гиперболическим уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \Omega\times(0,T), \qquad (20)$$

где Ω - ограниченная открытая область в R^2, с кусочно-гладкой границей S; коэффициенты $a_{ij}(x)$, $i, j = \overline{i,n}$ измеримые, ограниченные функции в Ω и $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \alpha\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2$, $\forall\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$, $\alpha = const > 0$, $a(x) \ge 0$ измеримая, ограниченная функция; $f \in L_2(Q_T)$.

На границе S области Ω решение уравнения удовлетворяет граничному условию

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x)u\right)\right|_S = g(x)\upsilon(t), x \in S, \; t \in (0,T), \qquad (21)$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \; x \in \Omega, \qquad (22)$$

где $\sigma(x)$ измеримая, ограниченная, неотрицательная функция, $g \in L_2(S)$- заданная функция, за допустимое управление берутся функции $\upsilon(t)$ из $L_2(0,T)$, ν - нормаль к S, $u_0(x)\in W_2^1(\Omega)$, $u_1(x)\in L_2(\Omega)$- заданные функции.

Пусть $T>0$-произвольный, но фиксированный момент времени. Требуется найти управление $\upsilon(t)\in L_2(0,T)$ такое, чтобы решение задачи (20) - (22) удовлетворяло условиям

$$u(x,T)=\psi_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,T)=\psi_1(x),\ x\in\Omega, \qquad (23)$$

где $\psi_0(x)\in W_2^1(\Omega)$, $\psi_1(x)\in L_2(\Omega)$- заданные функции.

Применяя метод Фурье получено решения задачи (20)-(22) в виде ряда и подставляя это решение в условиях (23) получены моментные соотношения и нахождение $\upsilon(t)$ сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений

$$Ma=b\,,$$

где

$$M=\begin{pmatrix} M^1 & M^2 \\ M^2 & M^3 \end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix},$$

M^1, M^2, M^3 - бесконечномерные матрицы и $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\dots)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n,\dots)$, $b^1=(b_1^1,\dots,b_n^1,\dots)$, $b^2=(b^2{}_1,\dots,b_n^2,\dots)$.

Теорема 6. Оператор M в уравнении $Ma=b$ отображает $l_2\times l_2$ в $l_2\times l_2$ и является положительным, но не положительно определенным.

Далее введя специальный класс последовательностей h_M доказана

Теорема 7. Если хотя бы одна из последовательностей $\frac{b_n^1}{g_n}\sqrt{\lambda_n}$, $\frac{b_n^2}{g_n}\sqrt{\lambda_n}$ не ограничена, то уравнение $Ma=b$ не имеет решения в h_M, где

$$b_n^1=\lambda_n\psi_{0n}-\lambda_n u_{0n}\cos\lambda_n T-u_{1n}\sin\lambda_n T-\int_0^T f_n(\tau)\sin\lambda_n(T-\tau)d\tau,$$

$$b_n^2=\psi_{1n}-\lambda_n u_{0n}\sin\lambda_n T-u_{1n}\cos\lambda_n T-\int_0^T f_n(\tau)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau,,$$

$$\psi_{0n}=\int_\Omega \psi_0(x)X_n(x)dx,\quad \psi_{1n}=\int_\Omega \psi_1(x)X_n(x)dx\,, n=1,2,\dots$$

$$u_{0n}=\int_\Omega u_0(x)X_n(x)dx,\ u_{1n}=\int_\Omega u_1(x)X_n(x)dx,\ f_n(t)=\int_\Omega f(x,t)X_n(x)dx.$$

Глава II диссертации, состоящая из двух разделов, посвящена доказательству существования оптимального управления в задаче оптимального управления для линейного и слабо нелинейного гиперболического уравнения.

В разделе 2.1 изучается существование оптимального управления в эволюционной системе второго порядка без предположения выпуклости.

Рассмотрим управляемую систему

$$\ddot{x}(t)+A(t)x(t)=u(t), \qquad (24)$$

$$x(0)=x_0,\ \ \dot{x}(0)=x_1 \qquad (25)$$

с ограничениями на управления

$$u(t)(z)=u(t,z)\in U(t,z) \quad \text{почти всюду (п.в.)}, \qquad (26)$$

где $t\in[0,T]$, $0<T<\infty$, $z\in\Omega$, $\Omega\subset R^n$- ограниченная область в R^n, $A(t)\in L(V,V^*)$, V - сепарабельное гильбертово пространство, которое плотно, непрерывно и компактно вложено в $H=L^2(\Omega)$, V^*- пространство, сопряженное к V, $U:[0,T]\times\Omega\to R=(-\infty,+\infty)$ является многозначным отображением с замкнутыми, необязательно выпуклыми значениями.

В работе изучается задача минимизации функционала

$$J(x,u)=G(x)+I(u) \qquad (27)$$

на решениях управляемой системы (33)-(35).

Здесь $G:C([0,T];H)\to\overline{R}=R\cup\{-\infty,+\infty\}$ является квазивогнутой функцией, $I(u)=\int_0^T\int_\Omega f(t,z,u(t,z))dzdt$, причем $f:[0,T]\times\Omega\times R\to\overline{R}$ является невыпуклым нормальным интегрантом.

Налагая некоторые условия на оператор $A(t)$, на функции

$G(x)$, $f(t,z,u)$, на решениях задачи (24), (25) составляется релаксационная задача

$$J^{**}(x,u)=G(x)+I^{**}(u)\to\min$$
$$u(t)(z)=u(t,z)\in\overline{co}U(t,z) \text{ п.в.,}$$

и доказывается, что как релаксационная задача, так и исходная задача (24)-(27) имеют решения, где $I^{**}(u)=\int_0^T\int_\Omega \tilde{f}^{**}(t,z,u(t,z))dzdt$, а $\overline{co}U(t,z)$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества $U(t,z)$, $\tilde{f}^{**}(t,z,u)$ - вторая сопряженная функции

$$u\to\tilde{f}(t,z,u)=\begin{cases} f(t,z,u), & u\in U(t,z)\\ +\infty, & u\notin U(t,z)\end{cases}.$$

В разделе 2.2 изучается разрешимость задачи оптимальной стабилизации и ее аппроксимационная задача.

Рассматривается гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f_1(x,t,u)+f_2(x,t)\upsilon,\ (x,t)\in Q_T, \quad (30)$$

с краевыми условиями

$$u(x,0)=u_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),\ x\in\Omega, \quad (31)$$

$$u=0,(x,t)\in\Sigma, \quad (32)$$

где $\Omega\subset R^n$ - ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $Q_T=\Omega\times(0,T)$ - цилиндр, $0<T<\infty$, $\Sigma=\partial\Omega\times(0,T)$ - боковая поверхность цилиндра Q_T, $u_0\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $u_1\in L_2(\Omega)$, $f_1(x,t,u)$ - непрерывная функция в $Q_T\times R$, имеет ограниченную производную по u для всех $(x,t,u)\in Q_T\times R$, $f_2(x,t)$ непрерывная функция в Q_T, функции $a_{ij}(x,t)$, $\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t}, i,j=\overline{1,n}$ непрерывны в Q_T и для всех $(x,t)\in Q_T$ удовлетворяют условиям $a_{ij}(x,t)=a_{ji}(x,t)$.

За управление берутся функции $\upsilon(x,t)$ из выпуклого замкнутого подмножества V_{ad} пространства $V=L_2(Q_T)$.

Задача (30)-(32) имеет единственное решение $u=u(\upsilon)$ из пространства

$$Y=\left\{u\middle|u\in L_\infty([0,T]:\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)),\ \frac{\partial u}{\partial t}\in L_\infty([0,T]:L_2(\Omega))\right\}.$$

Состояние системы принадлежить выпуклому замкнутому подмножеству Y_{ad} пространства Y. Конечное состояние системы является нулевым, т.е. выполнены условия

$$u(x,T)=0,\ \frac{\partial u(x,T)}{\partial t}=0,\ x\in\Omega. \quad (33)$$

Задача оптимальной стабилизации состоит в отыскании такого допустимого управления, которое минимизирует функционал

$$I(\upsilon)=\int_{Q_T}F(x,t,\upsilon,u(\upsilon))dxdt, \quad (34)$$

где F - заданная функция в $Q_T\times R\times R$.

Вводится аппроксимационная задача и доказываются

Теорема 8. Задача оптимальной стабилизации и аппроксимационная задача разрешимы.

Третья глава диссертации, состоящая из двух разделов, посвящена выводу необходимых условий оптимальности для некоторых гиперболических уравнений второго порядка.

В разделе 3.1 вычисляется производная Гато функционала $I_k(\upsilon,u)$ построенного при помощи (30), (33), (34) и выводится необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства в задаче, поставленной в разделе 2.2 второй главы.

В разделе 3.2 предполагается, что управляемый процесс в $Q_T=(0,l)\times(0,T)$ описывается гиперболическим уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t,u(x,t),\upsilon(x,t)) \quad (35)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x,0)=u_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),\ x\in(0,l), \quad (36)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0,\ t\in(0,T), \tag{37}$$

где $u_0 \in W_2^1(0,l)$, $u_1 \in L_2(0,l)$- заданные функции, $f(x,t,u,\upsilon)$- заданная функция Каратеодори, т.е. измерима по $(x,t)\in Q_T$ при всех $(u,\upsilon)\in R\times R$, непрерывна по $(u,\upsilon)\in R\times R$ почти при всех $(x,t)\in Q_T$, имеет ограниченную производную по u и производную по υ почти при всех $(x,t)\in Q_T$ и при всех $(u,\upsilon)\in R\times R$, причем $\frac{\partial f(x,t,u,\upsilon)}{\partial u}$, $\frac{\partial f(x,t,u,\upsilon)}{\partial \upsilon}$ почти для всех $(x,t)\in Q_T$ и для всех $(u,\upsilon)\in R\times R$ удовлетворяют условию Липшица.

За класс допустимых управлений U_d берется множество функции $\upsilon(x,t)$ из $L_2(Q_T)$, т.е. $U_d \subseteq L_2(Q_T)$.

На множестве U_d требуется минимизировать функционал

$$J_\alpha(\upsilon)=\int_0^T\left\{\beta_0[u(0,t)-f_0(t)]^2+\beta_1[u(l,t)-f_1(t)]^2\right\}dt+ \\ +\alpha\int_0^l\int_0^T[\upsilon(x,t)-w(x,t)]^2dxdt \tag{38}$$

при дополнительном фазовом ограничении

$$r_1\le u(x,t)\le r_2, \tag{39}$$

где $f_0(t), f_1(t)\in L_2(0,T)$, $w(x,t)\in L_2(Q_T)$ - заданные функции, $\alpha>0, \beta_0\ge 0,\ \beta_1\ge 0, \beta_0+\beta_1>0$, r_1, r_2- заданные числа.

С помощью функции штрафа задача (35)-(39) сводится к следующей задаче: найти минимум функционала

$$\tilde{J}(\upsilon)=J_\alpha(\upsilon)+P_k(\upsilon) \tag{40}$$

при ограничениях (35)-(37), где

$$P_k(\upsilon)=A_k\int_0^l\int_0^T\left[\varphi^1(u)+\varphi^2(u)\right]dxdt,$$

$A_k>0$ - такие числа, что $\lim\limits_{k\to\infty}A_k=\infty$, $\varphi^1(u)=[\max(r_1-u(x,t);0)]^2$, $\varphi^2(u)=[\max(u(x,t)-r_2;0)]^2$.

Вводится сопряженная задача:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial f(x,t,u,\upsilon)}{\partial u}\psi=-A_k\left[\varphi_u^1(u)+\varphi_u^2(u)\right],\ (x,t)\in Q_T,$$

$$\psi(x,T)=0,\quad \frac{\partial\psi(x,T)}{\partial t}=0,\quad x\in(0,l),$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=0}=2\beta_0[u(0,t)-f_0(t)],\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=l}=-2\beta_1[u(l,t)-f_1(t)],t\in(0,T).$$

Теорема 9. Пусть выполняются выше наложенные условия на данные задачи (35)-(40). Тогда функционал $\tilde{J}(\upsilon)$ дифференцируем по υ в $L_2(Q_T)$ и его градиент вычисляется по формулой $\frac{\partial\tilde{J}(\upsilon)}{\partial\upsilon}=-\frac{\partial H(x,t,u,\upsilon,\psi)}{\partial\upsilon}$, где $H=\psi f-\alpha(\upsilon-w)^2$.

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Г.Ф.Кулиеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в следующих работах:

1. Мустафаева Т.М. Задача управляемости для колебаний струны с минимальной энергией / Bakı Dövlət Universitetinin 90-illik yubileyinə həsr olunmuş tələbə, magistirant, aspirant və gənc tədqiqatçıların “Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri” adlı elmi konfransının materialları, 2009, səh. 75.
2. Mustafayeva T.M. Minimal energy controllability problem for string`s vibration equation // Transactions of NAS of Azerbaijan., series of physical-technical and mathematical science, 2010, XXX, №1, p. 221-226.
3. Mustafayeva T.M. Задача управляемости для уравнения колебаний струны с минимальной энергией // Вестник Бакинского Университета., серия физико-математических наук, 2010, №2, с. 67-75.
4. Гулиев Г.Ф., Мустафаева Т.М. Задача граничного управления для системы волновых уравнений / Akademik

F.Q.Maqsudovun 80-illik yubileyinə həsr olunmuş beynəlxalq konfrans, 2010, I, с.190-191.
5. Mustafayeva T.M. Задача граничного управления для системы волновых уравнений / Материалы XV Республиканской научной конференции докторантов и молодых ученых, 2011, I, с.7-10.
6. Гулиев Г.Ф., Мустафаева Т.М. О существовании оптимального управления в эволюционной системе второго порядка без предположения выпуклости // Вестник Бакинского Университета., серия физико-математических наук, 2011, №4, с. 12-23.
7. Мустафаева Т.М. Hiperbolik tənliklər üçün faza məhdudiyyəti olan idarəetmə məsələsi / Bakı Dövlət Universitetinin mexanika-riyaziyyat fakultəsinin tələbələr, magistirantlar, aspirantlar və gənc tədqiqatçıların "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı ənənəvi elmi konfransının materialları, 2011, səh. 95-96.
8. Mustafayeva T.M. Problem of controllability for some linear hyperbolic equations / "IV congres of the Turkic World Mathematical Society" beynəlxalq konqresi, Bakı, 2011, s.392.
9. Mustafayeva T.M. An optimal control problem for a hyperbolic equation with phase restriction // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2012,vol.XXXVI, pp. 117-124.
10. Guliyev H.F, Mustafayeva T.M. Optimal stabilization for a weak nonliner hyperbolic equation with phase restriction // Transactions of NAS of Azerbaijan., series of physical-technical and mathematical science, 2012,XXXII, №1, pp.53-60.
11. Кулиев Г.Ф., Мустафаева Т.М. Задача управляемости для некоторых линейных гиперболических уравнений // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики», 2013,№6,с.41-49.
12. Гусейнова Т.М. О существовании оптимального управления в эволюционной системе второго порядка без предположения выпуклости / Bakı Dövlət Universitetinin 95-ci ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" mövzusunda elmi konfransının materialları, 2014, s.96-97.

TÜNZALƏ MƏHƏRRƏM QIZI MUSTAFAYEVA

HIPERBOLIK TƏNLIKLƏ TƏSVIR OLUNAN BƏZI PROSESLƏRDƏ IDARƏOLUNMA MƏSƏLƏLƏRININ TƏDQIQI

XÜLASƏ

Dissertasiya işi hiperbolik tip tənliklərlə təsvir olunan bəzi proseslərdə idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə həsr olunub.

Dissertasiya işində aşağədakı elmi yeniliklər alınmışdır:

- simin rəqs tənliyi üçün minimal energjili idarəetmə məsələsinin həllinin göstərilişi alınmışdır;
- dalğa təlikləri sistemi üçün sərhəd idarəetmə məsələsinin həlli qurulmuşdur;
- ikitərtibli hiperbolik tənliklər üçün idarəolunma məsələsi momentlər üsulu ilə tədqiq edilmişdir;
- ikitərtibli evalyusion sistemlərdə optimal idarəedicinin varlığı isbat olunmuşdur;
- faza məhdudiyyətli zəif qeyri-xətti hiperbolik tənlik üçün optimal stabilizasiya və approksimasiya məsələsi öyrənilmişdir;
- hiperbolik tənlik üçün optimal idarəetmə məsələsində cərimə funksiyası daxil edildikdən sonra alınan funksionalın qradienti üçün düsturu çıxarılmışdır.

TUNZALA MAHARRAM QIZI HUSEYNOVA

INVESTIGATION OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS IN SOME PROCESSES DESCRIBED BY HYPERBOLIC EQUATIONS

S U M M A R Y

The dissertation work is devoted to the investigation of the optimal control problems in some processes described by hyperbolic equations.

The following main results have been obtained in the work:

- the solution for the minimal energy control problem for string`s vibration equation is obtained;
- the solution of the boundary control problem for the system of wave equations is found;
- problem of controllability for a second order hyperbolic equations is investigated by moments method;
- the existence of optimal control for a second order evolutionary systems is proved;
- optimal stabilization and approximation problems for a weak nonliner hyperbolic equation with phase restriction are studied;
- formula for the gradient of functional for control problem for hyperbolic equation by penalty function method is obtained;

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Əlyazması hüququnda

TÜNZALƏ MƏHƏRRƏM QIZI HÜSEYNOVA

HİPERBOLİK TƏNLİKLƏRLƏ TƏSVİR OLUNAN BƏZİ PROSESLƏRDƏ İDARƏOLUNMA MƏSƏLƏSİNİN TƏDQİQİ

1211.01 – Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2015