AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Əlyazma hüququnda

VAHAB MEHTİ OĞLU HƏBİBOV

QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ PARABOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİ

1211.01-Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı-2018

Dissertasiya işi Lənkəran Dövlət Universitetinin "Fizika, riyaziyyat və informatika" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: Riyaziyyat elmləri doktoru, professor **Rafiq Qələndər oğlu Tağıyev**

Rəsmi opponentlər: Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor **İbrahim Mayıl oğlu Nəbiyev**

Riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor **Vaqif Maarif oğlu Abdullayev**

Aparıcı təşkilat: Sumqayıt Dövlət Universiteti ("Diferensial tənliklər və optimallaşdırma" kafedrası)

Dissertasiyanın müdafiəsi 29 iyun 2018-ci il saat 14^{00}-da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdindəki riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün FD.02.016 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ 1148, Bakı şəhəri, Z.Xəlilov küç., 23, Bakı Dövlət Universiteti

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin elmi kitabxanasında tanış olmaq olar.

Avtoreferat 25 may 2018-ci ildə göndərilmişdir.

FD.02.016 Dissertasiya Şurasının elmi katibi: **dosent A.T.Əfəndiyeva**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Müasir riyaziyyatın əsas nəzəriyyələrindən biri optimal idarəetmənin riyazi nəzəriyyəsidir. Bu nəzəriyyə müxtəlif idarə olunan sistemlər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin qoyuluşunun korrektliyinin öyrənilməsi, optimallıq şərtlərinin çıxarılması və baxılan məsələlərin təqribi həlli üçün ədədi üsulların hazırlanması ilə məşğul olur.

Hazırda adi diferensial tənliklərlə təsvir olunan toplanmış parametrli idarə olunan sistemlər üçün yuxarıda göstərilən məsələlər kifayət qədər tam tədqiq olunmuşdur. Lakin, xüsusi törəməli tənliklərlə təsvir olunan paylanmış parametrli idarə olunan sistemlər üçün çox sayda optimal idarəetmə məsələləri var ki, onlar üçün yuxarıda göstərilən problemlər nisbətən az tədqiq olunmuşdur. Parabolik tip tənliklərlə təsvir olunan sistemlər üçün optimal idarəetmə məsələləri paylanmış parametrli sistemlərlə optimal idarəetmə nəzəriyyəsində xüsusi yer tutur. İstilikkeçirmə, diffuziya, süzülmə və s. kimi idarə olunan prosesləri öyrənərkən parabolik tənliklər üçün müxtəlif optimal idarəetmə məsələləri yaranır. Klassik sərhəd şərtli parabolik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələləri V.İ.Aqoşkov, A.Q.Butkovskiy, A.D.İsgəndərov, İ.N.Qoliçev, J.-L.Lions, F.B.Lubışev, M.Mateos, A.A.Niftiev, D.A.Nomirovski, M.M.Novojenov, V.İ.Plotnikov, S.Y.Serovayski, M.İ.Sumin, V.İ.Sumin, R.Q.Tağıyev, F.P.Vasilyev, V.N.Vasilyeva, A.İ.Yeqorov, E.Gasus, R.J.Hew, J.P.Raymond, J.Sokolovski, G.Wang, H.Zidani, T.Zolezzi və başqalarının işlərində geniş tədqiq olunmuşdur.

Məlumdur ki,fizikanın,biologiyanın və başqa sahələrin bəzi məsələləri qeyri-lokal şərtli parabolik tip tənliklərlə təsvir olunur. O.Y.Danilkinanın, M.İ.İonkinın, N.İ.İvançovun, L.İ.Kamınının, A.İ.Kojanovun, Ye.İ.Moiseyevin, L.A.Muraveyin, L.S.Pulkinanın, A.A.Samarskinin və başqalarının işlərində qeyri-lokal sərhəd şərtli parabolik tənliklər üçün sərhəd məsələləri öyrənilmişdir. Qeyri-lokal sərhəd şərtli parabolik tip tənliklər içərisində inteqral sərhəd şərtli məsələlər xüsusi yer tutur. Hal-hazırda inteqral sərhəd şərtli parabolik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələləri az öyrənilmişdir.

Optimal idarəetmə məsələlərinin təqribi həlli üçün onların sonlu ölçülü approksimasiyaları olmadan ədədi usullar işləyib hazırlamaq praktik olaraq mümkün deyil. Belə effektiv approksimasiyalardan biri fərqlər approksimasiyasıdır. R.A.Qasımov, S.Q.Labuzov, F.V.Lubışev, M.M.Potapov, R.Q.Tağıyev və başqalarının işlərində klassik sərhəd şərtli parabolik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin fərqlər approksimasiyalarının yığılması öyrənilmişdir. Lakin bu problemlər inteqral sərhəd şərtli parabolik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələlərində nəzərə çarpacaq dərəcədə zəif tədqiq olunmuşdur.

Tərs məsələlərin həlli üçün optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsullarından istifadə etmə ideyası A.N.Tixonov tərəfindən təklif edilmişdir. Xüsusi törəməli tənliklər üçün tərs məsələlər variasional şəkildə, yəni uyğun sistemlər üçün optmial idarəetmə məsələləri kimi də qoyula bilər. V.M.Abdullayevin,O.A.Alifanovun, K.R.Ayda-zadənin,A.D.İsgəndərovun, S.İ.Kabanixinin, H.F.Quliyevin R.Q.Tağıyevin, Q.Y.Yaqubovun və başqalarının işlərində xususi törəməli tənliklər üçün idarəetmə tipli tərs məsələlər tədqiq olunmuşdur. Lakin parabolik tənliklər üçün əlavə inteqral şərtli idarəetmə tipli tərs məsələlər az öyrənilmidir.

Təqdim olunan dissertasiya işi inteqral sərhəd şərtli parabolik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə, onların fərqlər approksimasiyalarının yiğılmasına və parabolik tənlik üçün ikinci növ əlavə inteqral şərtli idarəetmə tipli bəzi tərs məsələlərin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.Yuxarıda deyilənləri nəzərə alaraq hesab etmək olar ki, dissertasiya işinin mövzusu aktualdır.

İşin məqsədi. İnteqral sərhəd şərtli parabolik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin qoyuluşunun korrektliyini araşdırmaq, optimallıq şərtlərini çıxarmaq, baxılan optimal idarəetmə məsələləri üçün sonlu fərqlər usulunun yığılmasını öyrənmək və parabolik tənliklər üçün ikinci növ əlavə inteqral şərtli idarəetmə tipli tərs məsələləri araşdırmaqdır.

Tədqiqatın ümumi metodikası. Dissertasiya işində optimal idarəetmənin riyazi nəzəriyyəsinin, xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin, funksional analizin, fərq sxemləri nəzəriyyəsinin və korrekt olmayan məsələlər nəzəriyyəsinin üsulları tətbiq olunmuşdur.

Elmi yeniliklər

-inteqral sərhəd şərtli parabolik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin qoyuluşunun korrektliyi tədqiq edilmişdir;

-məqsəd funksionallarının diferensiallanması isbat edilmiş və onların qradiyentləri üçün ifadələr tapılmışdır;

-variasiya bərabərsizliyi tipli optimallıq şərtləri çixarılmışdır;

-baxılan optimal idarəetmə məsələləri üçün fərqlər üsulunun yığılması öyrənilmiş, fərqlər approksimasiyalarının vəziyyətə və funksionala görə yığılma sürəti üçün qimətləndirmələr alınmışdır;

-fərqlər approksimasiyasının idarəediciyə görə zəif yığılması isbat edilmiş, onların requlyarlaşdırılması prosesi aparılmış və güclü yığılan minimumlaşdırıcı idarəedicilər ardıcıllığının qurulması qaydası göstərilmişdir;

-parabolik tənliklər üçün ikinci növ əlavə inteqral şərtli idarəetmə tipli tərs məsələlərə baxılmış, bu məsələlərin korrektliyi tədqiq olunmuş, məqsəd funksionallarının diferensiallanması isbat edilmiş və idarəedicinin optimallığı şərtləri göstərilmışdir.

İşin nəzəri və paktik əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, alınan nəticələr qeyri-lokal şərtli parabolik tənliklər üçün optimal idarəetmə və tərs məsələlər nəzəriyyəsini və onların həlli üsullarını inkişaf etdirir. Onlar istilikkeçirmə, diffuziya, süzülmə və bu kimi başqa nəzəriyyələrdə meydana çıxan optimal idarəetmə və tərs məsələlərin təqribi həllinə tətbiq oluna bilər.

İşin aprobasiyası. Dissertasiyanın əsas nəticələri haqqında LDU-nun "Riyazi-iqtisadi təhlil və iqtisadi inkişafın problemləri" elmi-tədqiqat laboratoriyasının (pəhbər prof.A.D.İsgəndərov), LDU-nun "Fizika, riyaziyyat və informatika" (rəhbər dos.A.H.Heydərov), BDU-nun "Optimallaşdırma və idarəetmə" (rəhbər prof.A.D.İsgəndərov, prof.R.Q.Tağıyev) kafedralarının seminarlarında, "XXI əsrin elmi tədqiqatlarının aktual istiqamətləri: nəzəriyyə və praktika" beynəlxalq qiyabi elmi-praktik konfransında (Voronej, 2014), Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 91-ci ildönümünə həsr edilmiş "Müasir elmin aktual problemləri" adlı respublika konfransında (Lənkəran, 2014), "Dinamik sistemlərin analizi, texnikaya və texnologiyaya tətbiqlərinin müasir problemləri" beynəlxalq qiyabi elmi-praktik konfransında (Voronej, 2014), Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci ildönümünə həsr edilmiş "Azərbaycanın pegionlarında təhsilin və elmin inkişafı" respublika konfransında (Lənkəran, 2015), Doktorantların və gənc tədqiqatçıların XIX və XX Respublika elmi konfranslarında (Bakı, 2015, 2016), Əməkdar elm xadimi, professor Ə.Ş. Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü ildönümünə həsr olunmuş "Funksional analiz və onun tətbiqləri" adlı respublika elmi konfransında (Bakı, 2016), Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 93-cü ildönümünə həsr olunmuş "Müasir elmin aktual problemləri" adlı Respublika Elmi Praktik Konfransında (Lənkəran, 2016), Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 94-cü ildönümünə həsr olunmuş" Təbiət və humanitar elm sahələrinin inkişafı problemləri" Respublika Elmi Konfransında (Lənkəran, 2017) məruzələr edilmişdir.

Dissertasiyanın həcmi və quruluşu. Dissertasiya işi işarələmələr siyahısından, girişdən, üç fəsildən və 119 adda ədəbiyyat siyahısından ibarət olmaqla 118 səhifədən ibarətdir.

Çap olunmuş elmi əsərlər. Dissertasiyanın əsas nəticələri 19 elmi işdə nəşr olunmuşdur. Onlardan 8-i məqalə, 11-i tezisdir.

DİSSERTASİYANIN MƏZMUNU

Girişdə mövzunun aktuallığı əsaslandırılmış və dissertasiyanın qısa məzmunu şərh olunmuşdur.

Birinci fəsil üç bölmədən ibarət olub, inteqral sərhəd şərtli parabolik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

1.1 bölməsində inteqral sərhəd şərtli istilikkeçirmə tənliyi üçün idarəedicilər hal tənliyinin və sərhəd şərtinin sağ tərəfinə daxil olan halda optimal idarəetmə məsələsi öyrənilir.

Tutaq ki idarə olunan proses $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < \ell, 0 < t \le T\}$ oblastında inteqral sərhəd şərtli istilikkeçirmə tənliyi üçün aşağıdakı sərhəd məsələsi ilə izah olunur:

$$u_t = u_{xx} + f(x,t), (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le \ell, \tag{2}$$

$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(\ell,t) = \int_0^\ell K(x) u_x(x,t)dx + g(t), 0 < t \le T, \tag{3}$$

burada, $\varphi(x) \in L_2(0,\ell)$, $K(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)$ - verilmiş funksiyalar, $f(x,t), g(t)$ – idarəedici funksiayalar, $\upsilon = (f(x,t), g(t))$ -idarəedici, $u = u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$ – (1)-(3) məsələsinin υ idarəedicisinə uyğun həllidir. Fərz olunur ki,

$$\upsilon = (f(x,t), g(t)) \in V \subseteq H = L_2(Q_T) \times L_2(0,T), \tag{4}$$

burada *V*, *H* fəzasından olan verilmiş çoxluqdur.

Tutaq ki, (1)-(3) məsələsinin bütün $\upsilon \in V$ idarəedicilərinə uyğun $u = u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$ həlləri çoxluğunda

$$J(\upsilon) = \int_0^\ell \left| u(x,T;\upsilon) - u_T(x) \right|^2 dx \tag{5}$$

funksionalının minimallaşdırılması tələb olunur, burada $u_T(x) \in L_2(0,\ell)$ - verilmiş funksiyadır.

(1)-(3) sərhəd məsələsinin $\upsilon \in H$ idarəedicisinə uyğun həlli kimi $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan ümumiləşmiş həlli, yəni $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan və ixtiyari $\eta = \eta(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, $\eta(x,T) = 0$ funksiyası üçün

$$\int_{Q_T} (-u\eta_t + u_x \eta_x) dxdt = \int_{Q_T} f\eta dxdt + \int_0^\ell \varphi(x)\eta(x,0)dx +$$
$$+ \int_0^T \left[\int_0^\ell K(x) u_x(x,t)dx + g(t) \right] \eta(\ell,t)\, dt$$

inteqral eyniliyini ödəyən $u = u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$ funksiyasını başa düşəcəyik.

Teorem 1. Tutaq ki, (1)-(5) məsələsinin qoyuluşu zamanı qəbul edilmiş şərtlər ödənilir və V çoxluğu H-da qabarıq, qapalı, məhdud çoxluqdur. Onda

$$V_* = \{\upsilon_* \in V : J(\upsilon_*) = J_* \equiv \inf\{J(\upsilon) : \upsilon \in V\}\} \neq \varnothing,$$

V_* çoxluğu H-da zəif kompaktdır və (5) funksionalının ixtiyari minimallaşdırıcı $\{\upsilon_n\}$ ardıcıllığı H-da V_* çoxluğuna zəif yığılır.

Tutaq ki, $\psi = \psi(x,t) = \psi(x,t;\upsilon)$ -(1)-(5) məsələsinə uyğun aşağıdakı qoşma sərhəd məsələsinin $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan ümumiləşmiş həllidir:

$$\psi_t + \psi_{xx} - K'(x)\psi(\ell,t) = 0, \ (x,t) \in Q_T, \tag{6}$$

$$\psi(x,T) = 2[u(x,T;\upsilon) - y(x)], \ 0 \le x \le \ell, \tag{7}$$

$$\psi_x(0,t) = 0, \ \psi_x(\ell,t) = 0, \quad 0 \le t < T. \tag{8}$$

(6)-(8) sərhəd məsələsinin $\upsilon \in H$ idarəedicisinə uyğun həlli dedikdə $V_2^{1,0}(Q_T)$-dən olan ümumiləşmiş həlli başa düşürük.

Teorem 2. Tutaq ki (1)-(5).məsələsinin qoyuluşunda qəbul edilmiş şərtlər ödənilir. Onda (5) funksionalı (1)-(3) şərtləri daxilində H-da Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $\upsilon \in H$ nöqtəsində qradiyenti

$$J'(\upsilon) = (\psi(x,t;\upsilon), \psi(\ell,t;\upsilon))$$

şəklindədir.

Teorem 3. Tutaq ki,(1)-(5) məsələsinin qoyuluşunda qəbul edilmiş şərtlər ödənilir və V çoxluğu H-da qabarıqdır. Onda (1)-(5) məsələsində $\upsilon_* = (f_*(x,t), g_*(t)) \in V$ idarəedicisinin optimallığı üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari $\upsilon = (f(x,t), g(t)) \in V$ üçün

$$\int_{Q_T} \psi(x,t,\upsilon_*)(f(x,t) - f_*(x,t))dxdt + \int_0^T \psi(\ell,t,\upsilon_*)(g(t) - g_*(t))dt \ge 0$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir.

1.2 bölməsində inteqral sərhəd şərtli xətti parabolik tənlik üçün idarəedicilər hal tənliyində həllin qarşısındakı əmsala və sağ tərəfə, həmçinin sərhəd şərtinin sağ tərəfinə daxil olan halda optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məsələnin qoyuluşunun korrektliyi öyrənilmiş, məqsəd funksionalının diferensiallanması isbat edilmiş və optimallıq üçün zəruri şərt çıxarılmışdır.

1.3 bölməsində idarəedicilərі əmsallarda olan inteqral sərhəd şərtli xətti parabolik tənlik üçün optimal idarəetmə məsələsinə baxılır.

Tutaq ki,

$$J(\upsilon)=\int_0^\ell |u(x,T;\upsilon)-u_T(x)|^2\ dx \tag{9}$$

funksionalını

$$u_t-(k(x,t)u_x)_x+q(x,t)u=f(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \tag{10}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le \ell, \tag{11}$$

$$u_x(0,t)=0,\ k(\ell,t)u_x(\ell,t)=\int_0^\ell K(x)u_x(x,t)dx+g(t),\ 0<t\le T, \tag{12}$$

sərhəd məsələsinin

$$V=\{\upsilon(x,t)=(k(x,t),q(x,t))\in H=W_2^1(Q_T)\times L_2(Q_T):0<\nu\le k(x,t)\le\mu,\ |k_x(x,t)|\le\mu_1,$$
$$|k_t(x,t)|\le\mu_2,|q(x,t)|\le\mu_3\ \ Q_T\text{-}də\ sanki\ hər\ yerdə\ \} \tag{13}$$

çoxluğundan olan bütün mümkün $\upsilon=\upsilon(x,t)=(k(x,t),q(x,t))$ idarəedicilərinə uyğun $u=u(x,t)=u(x,t;\upsilon)-$ həlləri çoxluğunda minimallaşdırmaq tələb olunur. Burada $\ell,T,\nu,\mu,\mu_1,\mu_2,\mu_3>0$ verilmiş ədədlər, $u_T(x),\varphi(x)\in W_2^1(0,\ell)$, $K(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)$, $f(x,t)\in L_2(Q_T)$, $g(t)\in W_2^1(0,T)$ - məlum funksiyalar, $u=u(x,t)=u(x,t;\upsilon)-$isə (10)-(12) sərhəd məsələsinin $\upsilon=\upsilon(x,t)$ idarəedicisinə uyğun həllidir.

Hər bir qeyd olunmuş $\upsilon(x,t)\in V$ mümkün idarəedicisi üçün (10)-(12) sərhəd məsələsinin həlli dedikdə $V_2^{1,0}(Q_T)$-dən olan ümumiləşmiş həlli, yəni $V_2^{1,0}(Q_T)$-dən olan elə $u=u(x,t)=u(x,t;\upsilon)$ funksiyasını başa düşürük ki, ixtiyari $\eta(x,t)\in W_2^1(Q_T)$, $\eta(x,T)=0$ funksiyası üçün aşağıdakı inteqral eyniliyi ödəyir:

$$\int_{Q_T}(-u\eta_t+k(x,t)u_x\eta_x+q(x,t)u\eta)dxdt=\int_{Q_T}f(x,t)\eta dxdt+$$
$$+\int_0^\ell\varphi(x)\eta(x,0)dx+\int_0^T\left[\int_0^\ell K(x)u_x(x,t)dx+g(t)\right]\eta(\ell,t)dt.$$

Teorem 4. Tutaq ki, (9)-(13) məsələsinin qoyuluşunda qəbul edilən şərtlər ödənilir. Onda (9)-(13) məsələsinin optimal idarəedicilər çoxluğu $V_*=\{\upsilon_*\in V:J(\upsilon_*)=J_*\equiv\inf\{J(\upsilon):\upsilon\in V\}\}$ boş deyil, V_* çoxluğu *H*-

da zəif kompaktdır və $J(\upsilon)$ funksionalının ixtiyari minumumlaşdırıcı $\{\upsilon_n = (k_n(x,t), q_n(x,t))\} \subset V$ ardıcıllığı H-da V_*-coxluğuna zəif yığılır.

(9)-(13) məsələsi üçün aşağıdakı qoşma sərhəd məsələsini daxil edək:

$$\psi_t + (k(x,t)\psi_x)_x - q(x,t)\psi - K'(x)\psi(\ell,t) = 0, \ (x,t) \in Q_T, \tag{14}$$

$$\psi(x,T) = -2[u(x,T;\upsilon) - u_T(x)], \ 0 \le x \le \ell, \tag{15}$$

$$\psi_x(0.t) = 0, \ \psi_x(\ell,t) = 0, \ 0 \le t < T \ . \tag{16}$$

(14)-(16) sərhəd məsələsinin $\upsilon = \upsilon(x,t) \in V$ idarəedicisinə uyğun həlli dedikdə $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan ümumiləşmiş həlli başa düşürük.

Teorem 5. Tutaq ki, teorem 4-ün şərtləri ödənilir. Onda (9) funksionalı V-də Freşe mənada diferensiallanandır və onun $\upsilon \in V$ nöqtəsində diferensialı $\Delta\upsilon = (\Delta k, \Delta q) \in H$ artımı üçün aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$dJ(\upsilon, \Delta\upsilon) = \int_{Q_T} (u_x \psi_x \Delta k + u\psi\Delta q) dxdt \ .$$

Aşağıdakı şərtlərdən $\omega = \omega(x,t) = \omega(x,t;\upsilon)$ funksiyasını təyin etmək üçün köməkçi sərhəd məsələsini daxil edək:

$$-\omega_{xx} - \omega_{tt} + \omega = u_x \psi_x, \ (x,t) \in Q_T, \tag{17}$$

$$\omega_x\big|_{x=0} = \omega_x\big|_{x=l} = 0, \quad 0 < t < T, \tag{18}$$

$$\omega_t\big|_{t=0} = \omega_t\big|_{t=T} = 0, \quad 0 < x < \ell. \tag{19}$$

Verilmiş $\upsilon = \upsilon(x,t) \in V$ üçün (17)-(19) məsələsini həlli dedikdə $W_2^1(Q_T)$ -dən olan ümumiləşmiş həlli başa düşürük.

Teorem 6. Tutaq ki, teorem 4-ün şərtləri ödənir. Onda (9) funksionalının $\upsilon \in V$ nöqtəsində qradiyenti

$$J'(\upsilon) = (\omega(x,t;\upsilon), u(x,t;\upsilon)\psi(x,t;\upsilon))$$

bərabərliyi ilə təyin olunur və $\upsilon \to J'(\upsilon)$ inikası V–dən H-a kəsilməz təsir edir.

Teorema 7. Tutaq ki, teorem 4-ün şərtləri ödənir. Onda (9)-(13) məsələsində $\upsilon_* = (k_*, q_*) \in V$ idarəedicisinin optimallığı üçün

$$\int_{Q_T} [\omega_{*x}(k_x - k_{*x}) + \omega_{*t}(k_t - k_{*t}) + \omega_*(k - k_*) + u_*\psi_*(q - q_*)] dxdt \ge 0, \forall \upsilon = (k,q) \in V$$

bərabərsizliyinin ödənilməsi zəruridir, burada $u_* = u(x,t;\upsilon_*)$, $\psi_* = \psi(x,t;\upsilon_*)$,

$\omega_* = \omega(x,t;\upsilon_*)$ - uyğun olaraq (10)-(12), (14)-(16), (17)-(19) məsələlərinin υ_* idarəedisinə uyğun həlləridir.

İkinci fəsil üç bölmədən ibarət olub inteqral sərhəd şərtli parabolik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin fərqlər approksimasiyalarının yığılması və onların requlyarlaşdırılmasına həsr olunmuşdur.

2.1 bölməsində idarəediciləri hal tənliyinin və sərhəd şərtinin sağ tərəfində olan inteqral sərhəd şərtli istilikkeçirmə tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. İlkin optimal idarəetmə məsələsinin fərqlər approksimasiyasının yığılması öyrənilmiş və onların A.N.Tixonov mənada requlyarlaşdırılması prosesi aparılmışdır.

2.2 bölməsində idarəediciləri həllin qarşısında və sağ tərəflərdə olan inteqral sərhəd şərtli parabolik tənlik üçün optimal idarəetmə məsələsinin fərqlər approksimasiyasının yığılması öyrənilmiş və onların requlyarlaşdırılması prosesi aparılmışdır.

2.3 bölməsində idarəediciləri əmsallarda olan inteqral sərhəd şərtli parabolik tənlik üçün (9)-(13) optimal idarəetmə məsələsi üçün fərqlər approksimasiyasının yığılması və requlyarlaşdırılması öyrənilir.

(9)-(13) məsələsini approksimasiya etmək və fərqlər approksimasiyasının yığılmasını tədqiq etmək üçün $[0,\ell]$-də, $[0,T]$-də və $\overline{Q}_T$ -də aşağıdakı şəbəkələri daxil edək:

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih \in [0,\ell]:\ i = 0,1,\cdots,N_1,\ N_1 h = \ell\},$$

$$\omega_h = \overline{\omega}_h \cap (0,\ell),\ \omega_h^+ = \overline{\omega}_h \cap (0,\ell], \omega_h^- = \omega \cap [0,\ell)\,,$$

$$\overline{\omega}_{h*} = \{\overline{x}_i = (i-0.5)h : i = 1,2,...,N_1, N_1 h = \ell\},$$

$$\overset{\circ}{\omega}_{h*} = \overline{\omega}_{h*} \setminus \{\overline{x}_{N_1} = (N_1 - 0.5)h\}, \omega_\tau = \overset{\circ}{\omega}_\tau \cap (0,T)\,,$$

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau \in [0,T]:\ j = 1,2,\cdots,N_2,\ N_2\tau = T\}$$

$$\omega_T = \omega_h \times \omega_\tau, \overline{\omega}_T = \overline{\omega}_h \times \omega_\tau, \omega_T^+ = \omega_h^+ \times \omega_\tau,$$

$$\omega_{T*} = \overline{\omega}_{h*} \times \omega_\tau, \gamma^{(-1)} = \{x = 0\} \times \omega_\tau, \gamma^{(+1)} = \{x = \ell\} \times \omega_\tau$$

Tutaq ki, $\hbar = \hbar(x) = h$, əgər $x \in \omega_h$ olarsa və $\hbar = 0{,}5h$, əgər $x = 0$ yaxud $x = \ell$ olarsa. $\overline{\omega}_T$ -şəbəkəsində və ya onun hissələrində təyin olunmuş şəbəkə funksiyaları üçün aşağıdakı skalyar hasilləri və normaları daxil edək:

$$(y,\upsilon)_{\overline{\omega}_h} = \sum_{\overline{\omega}_h} \hbar y \upsilon,\ \|y\|_{L_2(\overline{\omega}_h)} = (y,y)_{\overline{\omega}_h}^{1/2}\,,$$

$$(y,\upsilon)_{\omega_h^+} = \sum_{\omega_h^+} \hbar y \upsilon,\ \|y\|_{L_2(\omega_h^+)} = (y,y)_{\omega_h^+}^{1/2}\,,$$

$$(y,\upsilon)_{\omega_\tau}=\sum_{\omega_\tau}\tau y\upsilon,\ \|y\|_{L_2(\omega_\tau)}=(y,y)_{\omega_\tau}^{1/2},$$
$$(y,\upsilon)_{\omega_T^+}=\sum_{\omega_\tau}\tau(y,\upsilon)_{\omega_h^+},\ \|y\|_{L_2\left(\omega_T^+\right)}=(y,y)_{\omega_T^+}^{1/2}$$
$$\|y\|_{L_{2,1}(\overline{\omega}_T)}=\sum_{\omega_\tau}\tau\|y(x,t)\|_{L_2(\overline{\omega}_h)},\|y\|_{L_2(\overline{\omega}_T)}=(\sum_{\omega_\tau}\tau\|y(x,t)\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|y\|_{L_\infty(\overline{\omega}_T)}=\|y\|_{\infty,\overline{\omega}_T}=\max_{(x,t)\in\overline{\omega}_T}|y(x,t)|,$$
$$\|y\|_{V_2^{1,0}(\overline{\omega}_T)}=\max_{t\in\omega_\tau}\|y(x,t)\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\|y_{\bar{x}}\|_{L_2\left(\omega_T^+\right)},$$
$$\|y\|_{W_2^1(\omega_\tau)}=\left(\|y\|_{L_2(\omega_\tau)}^2+\|y_{\bar{t}}\|_{L_2(\omega_\tau)}^2\right)^{1/2}.$$

$L_2(\overline{\omega}_h)$, $L_2\left(\omega_h^+\right)$, $L_2(\omega_\tau)$, $L_2\left(\omega_T^+\right)$, $V_2^{1,0}(\omega_T),W_2^1(\omega_\tau)$-ilə uyğun şəbəkələrdə təyin olunmuş $\|\cdot\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}$, $\|\cdot\|_{L_2\left(\omega_h^+\right)}$, $\|\cdot\|_{L_2(\omega_\tau)}$, $\|\cdot\|_{L_2\left(\omega_T^+\right)}$, $\|\cdot\|_{V_2^{1,0}(\omega_T)}$, $\|\cdot\|_{W_2^1(\omega_\tau)}$ normalarına malik şəbəkə funksiyaları fəzalarını işarə edək. Tutaq ki, S^x, S_-^x və S_-^t, x və t dəyişənlərinə nəzərən Steklov mənada birölçülü ortalama operatorlarıdır.

(9)-(13) optimal idarəetmə məsələsinə aşağıdkı fərqlər approksimasiyasını qarşı qoyaq:

$$J_{h\tau}(\upsilon_{h\tau})=\left\|y(x,T;\upsilon_{h\tau})-u_T^h(x)\right\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 \tag{20}$$

şəbəkə funksionalını

$$\begin{gathered}V_{h\tau}=\{\upsilon_{h\tau}=(k_{h\tau}(x,t),q_{h\tau}(x,t))\in H_{h\tau}=W_2^1(\omega_{T*})\times L_2(\overline{\omega_T}):0<\nu\le k_{h\tau}(x,t)\le\mu,\\ (x,t)\in\overline{\omega}_{T*},|k_{h\tau x}(x,t)|\le\mu_1,(x,t)\in\overset{\circ}{\omega}_{h*}\times\omega_\tau,|k_{h\tau t}(x,t)|\le\mu_2,(x,t)\in\overline{\omega}_{h*}\times\overset{\circ}{\omega}_\tau,\\ |q_{h\tau}(x,t)|\le\mu_3,(x,t)\in\overline{\omega}_T\},\end{gathered} \tag{21}$$

şəbəkə idarəedicilər çoxluğunda, $y=y(x,t)=y(x,t;\upsilon_{h\tau})$ şəbəkə funksiyası

$$y_{\bar{t}}-(k_{h\tau}(x-0{,}5h,t)y_{\bar{x}})_x+q_{h\tau}(x,t)y=f_{h\tau}(x,t),\ (x,t)\in\omega_T, \tag{22}$$

$$y(x,0)=\varphi_h(x),\ x\in\overline{\omega}_h, \tag{23}$$

$$\begin{gathered}k_{h\tau}(0{,}5h,t)y_x(0,t)=0{,}5h[y_{\bar{t}}(0,t)-q_{h\tau}(0,t)y(0,t)-f_{h\tau}(0,t)],\\ k_{h\tau}(\ell-0.5h,t)y_{\bar{x}}(\ell,t)=\sum_{x\in\omega_h^+}hK_h(x)y_{\bar{x}}(x,t)-\\ -0{,}5h[y_{\bar{t}}(\ell,t)-q_{h\tau}(\ell,t)y(\ell,t)-f_{h\tau}(\ell,t)]+g(t),\ t\in\omega_\tau,\end{gathered} \tag{24}$$

fərqlər sərhəd məsələsinin həlli olması şərti ilə minimallaşdırmaq tələb olunur. Burada

$$u_T^h(x)=S^x u_T(x),\ \varphi_h(x)=S^x\varphi(x)\ \ K_h(x)=S_-^x K(x),\ \ x\in\omega_h^+,$$

$$f_{h\tau}(x,t)=S^{xt}f(x,t),\ (x,t)\in\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau,\quad g_\tau(t)=S_-^t g(t),t\in\omega_\tau.$$

Fərz edəcəyik ki, t dəyişəninə görə τ addımı

$$\tau<\tau_0=\frac{\nu^3\ell}{4\|K\|^2_{2,(0,\ell)}(4\|K\|^2_{2,(0,\ell)}+\nu^2)(2+\nu^{-1/2})^2}. \tag{25}$$

şərtini ödəyir.

Teorem 8. Tutaq ki, (9)-(13) məsələsinin qoyuluşundakı şərtlər və (25) bərabərsizliyi ödənilir. Onda (22)-(24) məsələsinin hər bir $\upsilon_{h\tau}(x,t)\in V_{h\tau}$ üçün yeganə həlli vardır və aşağıdakı aprиor qiymətləndirmə doğrudur:

$$\|y(x,t;\upsilon_{h\tau})\|_{V_2^{1,0}(\overline{\omega}_T)}+\sqrt{\tau}\|y_{\bar t}(x,t;\upsilon_{h\tau})\|_{L_2(\overline{\omega}_T)}\le$$

$$\le M\left[\|\varphi_h\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\|f_{h\tau}\|_{L_{2,1}(\overline{\omega}_T)}+\|g_\tau\|_{L_2(\omega_\tau)}\right].$$

Burada və aşağıda M ilə mümkün idarəedicilərdən və h,τ addımlarından asılı olmayan müsbət sabitlər işarə olunur.

Tutaq ki, $\upsilon(\xi,\theta)=(k(\xi,\theta),q(\xi,\theta))\in V,\quad \upsilon_{h\tau}(x,t)=(k_{h\tau}(x,t),q_{h\tau}(x,t))\in V_{h\tau}$- ixtiyari idarəedicilər, $u(\xi,\theta)=u(\xi,\theta;\upsilon),\quad y(x,t)=y(x,t;\upsilon_{h\tau})$-isə (9)-(13) və (22)-(24) məsələlərinin $\upsilon(\xi,\theta)$ və $\upsilon_{h\tau}(x,t)$ idarəedicilərinə uyğun həlləridir. $\overline{u}(x,t)=\overline{u}(x,t;\upsilon)$-ilə (10)-(12) məsələsinin $u=u(x,t)$ dəqiq həllinin aşağıdakı bərabərliklə təyin edilən ortalamasını işarə edək:

$$\overline{u}(x,t)=\begin{cases}S_-^t u(x,t), & (x,t)\in\overline{\omega}_T,\\ S^x\varphi(x), & x\in\omega_h,\quad t=0.\end{cases}$$

Teorem 9. Tutaq ki, teorem 8-in şərtləri ödənilir. Onda ixtiyari $\upsilon\in V$ и $\upsilon_{h\tau}\in V_{h\tau}$ idarəediciləri üçün fərqlər üsulunun vəziyyətə görə aşağıdakı xəta qimətləndirməsi doğrudur:

$$\|y(x,t;\upsilon_{h\tau}-\overline{u}(x,t;\upsilon)\|_{V_2^{1,0}(\overline{\omega}_T)}+\sqrt{\tau}\|y_{\bar t}(x,t;\upsilon_{h\tau}-\overline{u}_{\bar t}(x,t;\upsilon)\|_{L_2(\overline{\omega}_T)}\le$$

$$\le M\left[h+\frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}}+\tau^{1/2}+\|k_{h\tau}(x,t)-S_-^t k(x,t)\|_{L_\infty(\omega_{T*})}+\|S^{tx}q-q_{h\tau}\|_{L_\infty(\overline{\omega}_T)}\right]\equiv M\gamma_{h\tau}.$$

Nəticə 1. Tutaq ki, $k_{h\tau}(x,t)=S_-^t k(x,t),(x,t)\in\omega_{T*},\quad q_{h\tau}(x,t)=$ $=S^{tx}q(x,t),\ (x,t)\in\overline{\omega}_T$. Onda (22)-(24) fərqlər sxemi $V_2^{1,0}(\overline{\omega}_T)$ fəzasının normasında $\tau\sim h^{3/2}$ olduqda yığılma sürəti üçün $O(h^{3/4})$ qiymətləndirməsinə, $\tau \sim h^2$ olduqda isə yığılma sürəti üçün $O\left(\sqrt{h}\right)$ qimətləndirilməsinə malikdir.

Teorem 10. Tutaq ki, teorem 8–in şərtləri ödənilir. Onda (20)-(24) approksimasiyası üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\left|J_{h\tau*} - J_*\right| \le M\left[h + \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} + \tau^{1/2}\right],$$

burada $J_{h\tau*} = \inf\{J_{h\tau}(\upsilon_{h\tau}) : \upsilon_{h\tau} \in V_{h\tau}\}$.

Nəticə 2. Əgər $\tau \sim h^{3/2}$ və ya $\tau \sim h^2$, onda (20) - (24) şəbəkə idarəetmə məsələləri (9)-(13) məsələsini funksionala görə approksimasiya edir, belə ki, $\tau \sim h^{3/2}$ olduqda $\left|J_{h\tau*} - J_*\right| \le Mh^{3/4}$ qiymətləndirməsi, $\tau \sim h^2$ olduqda isə $\left|J_{h\tau*} - J_*\right| \le Mh^{1/2}$ qiymətləndirməsi doğrudur. Əgər bundan başqa, $\{\upsilon_{h\tau}\} \subset V_{h\tau}$ idarəedicilər ardıcıllığı $J_{h\tau*} \le J_{h\tau}\left(\upsilon_{h\tau}\right) \le J_{h\tau*} + \varepsilon_{h\tau}$, $\varepsilon_{h\tau} \ge 0$ və $h,\tau \to 0$ olduqda $\varepsilon_{h\tau} \to 0$ şərtlərindən təyin edilərsə, onda $\{P_{h\tau}\upsilon_{h\tau}\}$ idarəedicilər ardıcıllığı (9)-(13) məsələsi üçün minimallaşdırıcı ardıcıllıq olur, H-da V_*-a zəif yığılır və $\tau \sim h^{3/2}$ olduqda $\left|J_{h\tau*} - J_*\right| \le Mh^{3/4} + \varepsilon_{h\tau}$ qiymətləndirməsi, $\tau \sim h^2$ olduqda isə $\left|J_{h\tau*} - J_*\right| \le Mh^{1/2} + \varepsilon_{h\tau}$ qiymətləndirməsi doğrudur. Burada $P_{h\tau} : H_{h\tau} \to H$ inikası dissertasiyanın 2.2.4 bəndində təyin olunur.

İndi isə H-ın normasına görə yığılan minimumlaşdırıcı ardıcıllığın qurulma qaydasını izah edək. Bunun üçün Tixonov üsulundan istifadə edək və (20)-(24) məsələsini requlyarlaşdıraq. V-də $\Omega(\upsilon) = \|\upsilon\|_H^2 = \left(\|k\|_{2,Q_T}^{(1)}\right)^2 + \|q\|_{2,Q_T}^2$ stabilləşdirici funksionalını və onun $\Omega_{h\tau}(\upsilon_{h\tau}) = \|\upsilon_{h\tau}\|_{H_{h\tau}}^2 = \left(\|k_{h\tau}\|_{W_2^1(\omega_{T*})}^2\right)^2 + \|q_{h\tau}\|_{L_2(\overline{\omega}_T)}^2$ şəbəkə analoqunu daxil edək.

Hər bir (h,τ) üçün (20)-(24) məsələsinin Tixonov şəbəkə funksionalına baxaq:

$$T_{h\tau\alpha_{h\tau}}\left(\upsilon_{h\tau}\right) = J_{h\tau}\left(\upsilon_{h\tau}\right) + \alpha_{h\tau}\Omega_{h\tau}(\upsilon_{h\tau}),\ \upsilon_{h\tau} \in V_{h\tau},$$

burada $\{\alpha_{h\tau}\}$ – ardıcıllığı $h, \tau \to 0$ olduqda sıfra yığılan ixtiyarı müsbət ədədlər ardıcıllığıdır.

Tutaq ki, hər bir (h,τ) üçün elə $\widetilde{\upsilon}_{h\tau} \in V_{h\tau}$ şəbəkə idarəedicisi tapılmışdır ki,

$$T_{h\tau\alpha_{h\tau*}} \equiv \inf\{T_{h\tau\alpha_{h\tau}}(\upsilon_{h\tau}) : \upsilon_{h\tau} \in V_{h\tau}\} \le T_{h\tau\alpha_{h\tau}}(\widetilde{\upsilon}_{h\tau}) \le T_{h\tau\alpha_{h\tau*}} + \xi_{h\tau} \qquad (26)$$

şərti ödənilir. Burada $\xi_{h\tau} \ge 0$ və $h, \tau \to 0$ olduqda $\xi_{h\tau} \to 0$.

Teorem 11. Tutaq ki, $\{\widetilde{\upsilon}_{h\tau}\}$ şəbəkə idarəedicilər ardıcıllığı (26) şərtindən təyin olunmuşdur və $h, \tau \to 0$ olduqda $(\xi_{h\tau} + \varepsilon_{h\tau})/\alpha_{h\tau} \to 0$. Onda $\{P_{h\tau}\widetilde{\upsilon}_{h\tau}\}$ idarəedicilər ardıcıllığı (9)-(13) məsələsi üçün minimallaşdırıcı ardıcıllıqdır və H-da (9)-(13) məsələsinin $V_{**} = \{\upsilon_{**} \in V_* : \Omega(\upsilon_{**}) = \inf\{\Omega(\upsilon_*) : \upsilon_* \in V_*\}\}$ Ω-normal həllər çoxluğuna güclü yığılır.

Üçüncü fəsil iki bölmədən ibarət olub parabolik tənliklər üçün ikinci növ əlavə inteqral şərtli idarəetmə tipli tərs məsələlərin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

3.1 bölməsində xətti parabolik tənlik üçün idarəetmə tipli sərhəd tərs məsələyə baxılır.

Tutaq ki,

$$J(\upsilon) = \int_0^T \left| u(\ell, t; \upsilon) - \int_0^\ell K(x,t) u(x,t;\upsilon) dx \right|^2 dt \qquad (27)$$

funksionalını aşağıdakı şərtlər ödənilməklə minimumlaşdırmaq tələb olunur:

$$u_t - (\kappa(x,t) u_x)_x + q(x,t) u = f(x,t), \ (x,t) \in Q_T, \qquad (28)$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ 0 \le x \le \ell, \qquad (29)$$

$$u_x\big|_{x=0} = 0, \ k(x,t) u_x\big|_{x=\ell} = \upsilon(t), \ 0 < t \le T, \qquad (30)$$

$$\upsilon = \upsilon(t) \in V \subseteq L_2(0,T), \qquad (31)$$

Burada $\ell, T > 0$-verilmiş ədədlər, V-çoxluğu $L_2(0,T)$-dən olan verilmiş çoxluq, $K(x,t), k(x,t), q(x.t), f(x,t), \varphi(x)$-məlum funksiyalar, $\upsilon = \upsilon(t)$-idarəedici, $u = u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$ isə (28)-(30) sərhəd məsələsinin $\upsilon = \upsilon(t) \in L_2(0,T)$ idarəedicisinə uyğun həllidir.

Fərz edəcəyik ki, məlum funksiyalar aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$K(x,t), k(x,t), q(x,t) \in L_\infty(Q_T), \ f(x,t) \in L_2(Q_T), \varphi(x) \in L_2(0,\ell);$$

$$|K(x,t)| \le \mu_1, \quad 0 < \nu \le k(x,t) \le \mu, \quad 0 \le \mu_2 \le q(x,t) \le \mu_3 \quad Q_T\text{-də}$$

sanki hər yerdə, burada $\nu \ge \mu > 0, \mu_1, \mu_3 > 0, \mu_2 \ge 0$ məlum ədədlərdir.

(28)-(30) məsələsinin, $\upsilon = \upsilon(t) \in L_2(0,T)$ idarəedicisinə uyğun həlli dedikdə $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan ümumiləşmiş həll, yəni $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan elə $u = u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$ funksiyası başa düşülür ki, o ixtiyari $\eta = \eta(x,t) \in W_2^1(Q_T),\ \eta(x,T) = 0$ funksiyası üçün aşağıdakı inteqral eyniliyini ödəyir:

$$\int_{Q_T} [-u\eta_t + k(x,t)u_x\eta_x + q(x,t)u\eta - f(x,t)\eta]dxdt =$$

$$= \int_0^\ell \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int_0^T \upsilon(t)\eta(\ell,t)dt.$$

Qeyd edək ki, (27)-(31) məsələsində, (27) məqsəd funksionalı $L_2(0,T)$ -də

$$u(\ell,t;\upsilon) = \int_0^\ell K(x,t)u(x,t;\upsilon)dx,\quad 0 < t \le T. \tag{32}$$

ikinci növ inteqral şərti əsasında tərtib olunmuş uyğunsuzluq funksionalıdır. (28)-(31) şərtlərini ödəyən $\{u(x,t;\upsilon),\upsilon(t)\}$ funksiyalarının tapılması haqqında məsələ parabolik tənlik üçün sərhəd tərs məsələsi, (27)-(31) məsələsi isə bu tərs məsələnin variasional qoyuluşu və ya idarəetmə tipli tərs məsələdir .

Teorem 12. Tutaq ki, (27)-(31) məsələsinin qoyuluşundakı şərtlər ödənilir. Onda (27) funksionalı (28)-(30) şərtləri daxilində $L_2(0,T)$ -də aşağıdan zəif yarımkəsilməzdir. Bundan başqa, V-çoxluğu $L_2(0,T)$ -dən olan qabarıq, qapalı və məhdud çoxluqdursa, onda (27)-(31) məsələsinin optimal idarətdicilər çoxluğu $V_* = \{\upsilon_* \in V : J(\upsilon_*) = J_*\}$ boş deyil, $L_2(0,T)$ -də qabarıq, qapalı, məhduddur və (27) funksionalının ixtiyari minimallaşdırıcı $\{\upsilon_n\}$ ardıcıllığı $L_2(0,T)$ -də V_* -a zəif yığılr.

Tutaq ki, $\psi = \psi(x,t) = \psi(x,t;\upsilon)$ funksiyası (27)-(31) məsələsinə uyğun qoşma sərhəd məsələsinin $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan ümumiləşmiş həllidir:

$$\psi_t + (k(x,t)\psi_x)_x - q(x,t)\psi =$$

$$= 2\left[u(\ell,t;\upsilon) - \int_0^\ell K(\xi,t)u(\xi,t;\upsilon)d\xi\right]K(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{33}$$

$$\psi\big|_{t=T} = 0,\ 0 \le x \le \ell, \tag{34}$$

$$\psi_x\big|_{x=0} = 0, k(\ell,t)\psi_x\big|_{x=\ell} =$$
$$= 2\left[u(\ell,t;\upsilon) - \int_0^\ell K(\xi,t)u(\xi,t;\upsilon)d\xi\right], 0 \le t < T. \tag{35}$$

Teoreм 13. Tutaq ki, teorem 12-nin şərtləri ödənilir və V qabarıq çoxluqdur. Onda (27)-(31) məsələsində $\upsilon_* = \upsilon_*(t) \in V$ idarəedicisinin optimallığı üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari $\upsilon = \upsilon(t) \in V$ üçün

$$\int_0^T \psi(\ell,t;\upsilon_*)[\upsilon(t) - \upsilon_*(t)]dt \ge 0$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir, hansı ki, $\upsilon_* = \upsilon_*(t) \in \operatorname{int} V$ halında bu bərabərsizlik aşağıdakı bərabərlik ilə eynigüclüdür:

$$\psi(\ell,t;\upsilon_*) = 0, 0 < t \le T.$$

3.2 bölməsində xətti parabolik tənlik üçün idarəetmə tipli əmsal tərs məsələyə baxılır.

Tutaq ki,

$$J(\upsilon) = \int_0^T \left| u(\ell,t;\upsilon) - \int_0^\ell K(x,t)u(x,t;\upsilon)dx \right|^2 dt \tag{36}$$

funksionalını

$$u_t - (\kappa(x,t)u_x)_x + q(x,t)u = f(x,t), (x,t) \in Q_T \tag{37}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ 0 \le x \le \ell, \tag{38}$$

$$u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\ell} = 0, \ 0 < t \le T \tag{39}$$

sərhəd məsələsinin

$$V = \{\upsilon(x,t) = (k(x,t), q(x,t)) \in E = W_\infty^1(Q_T) \times L_\infty(Q_T) : 0 < \nu \le k(x,t) \le \mu,$$
$$|k_x(x,t)| \le \mu_1, |k_t(x,t)| \le \mu_2, 0 \le q_0 \le q(x,t) \le q_1 \ Q_T\text{-}də \ sanki \ hər \ yerdə\} \tag{40}$$

çoxluğundan olan bütün mümkün $\upsilon(x,t) = (k(x,t), q(x,t))$ idarəedicilərinə uyğun $u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$ həlləri çoxluğunda minimallaşdırmaq tələb olunur. Burada $\ell, T > 0, \mu \ge \nu > 0, q_1 \ge q_0 \ge 0$ -verilmiş ədədlər, $K(x,t), f(x,t), \varphi(x)$ isə aşağıdakı şərtləri ödəyən verilmiş funksialardır:

$$K(x,t) \in L_\infty(Q_T), |K(x,t)| \le \mu_3 \ \ Q_T\text{-}də \ sanki \ hər \ yerdə,$$
$$\mu_3 = const > 0, f(x,t) \in L_2(Q_T), \varphi(x) \in W_2^1(0,\ell).$$

(37)-(39) sərhəd məsələsinin $\upsilon \in V$ idarəedicisinə uyğun həlli dedikdə $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan ümumiləşmiş həlli başa düşürük.

Teorem 14. Tutaq ki,(36)-(40) məsələsi üçün qəbul edilmiş şərtlər ödənilir. Onda (36)-(40) məsələsinin optimal idarəedicilər çoxluğu $V_* = \{\upsilon_* \in V : J(\upsilon_*) = J_*\}$ boş deyil, $H = W_2^1(Q_T) \times L_2(Q_T)$ fəzasında zəif kompaktdır və (36) funksionalının ixtiyarı minimumlaşdırıcı $\{\upsilon_n\} \subset V$ ardıcıllığı H -da V_* -çoxluğuna zəif yığılır.

(36)-(40) məsələsi üçün $\psi = \psi(x,t) = \psi(x,t;\upsilon)$ qoşma vəziyyətini aşağıdakı məsələnin həlli kimi daxil edək:

$$\psi_t + (k(x,t)\psi_x)_x - q(x,t)\psi = -2\left[u(\ell,t;\upsilon) - \int_0^\ell K(\xi,t)u(\xi,t;\upsilon)d\xi\right]K(x,t),\ (x,t) \in Q_T\ , \quad (41)$$

$$\psi\big|_{t=T} = 0,\ \ 0 \le x \le \ell\,, \quad (42)$$

$$\psi_x\big|_{x=0} = 0\,,\ k(x,t)\psi_x\big|_{x=\ell} = -2\left[u(\ell,t;\upsilon) - \int_0^\ell K(\xi,t)u(\xi,t;\upsilon)d\xi\right], 0 \le t < T. \quad (43)$$

(41)-(43) sərhəd məsələsinin $\upsilon \in V$ idarəedicisinə uyğun həlli dedikdə $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan ümumiləşmiş həlli başa düşürük.

Tutaq ki, $\omega = \omega(x,t) = \omega(x,t;\upsilon)$ funksiyası aşağıdakı köməkçi sərhəd məsələsinin $W_2^1(Q_T)$ -dən olan ümumiləşmiş həllidir:

$$-\omega_{xx} - \omega_{tt} + \omega = u_x\psi_x, (x,t) \in Q_T, \quad (44)$$

$$\omega_x\big|_{x=0} = \omega_x\big|_{x=\ell} = 0, 0 < t < T, \quad (45)$$

$$\omega_t\big|_{t=0} = \omega_t\big|_{t=T} = 0, 0 < x < \ell\,. \quad (46)$$

Teorem 15. Tutaq ki, teorem 14-ün şərtləri ödənir. Onda (36) funksionalı V çoxluğunda H fəzasının normasına görə kəsilməz diferensiallanandır və onun qradiyenti ixtiyari $\upsilon \in V$ nöqtəsində aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$J'(\upsilon) = (\omega(x,t;\upsilon), u(x,t;\upsilon)\psi(x,t;\upsilon)), (x,t) \in Q_T.$$

(36)-(40) məsələsində optimallıq üçün zərurı şərt aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem 16. Tutaq ki, teorem 14-ün şərtləri ödənilir. Onda (36)-(40) məsələsində $\upsilon_* = (k_*, q_*) \in V$ idarəedicisinin optimallığı üçün zəruri şərt ixtiyari $\upsilon = (k,q) \in V$ üçün

$$\int_{Q_T}[\omega_*(k-k_*)+\omega_{*x}(k_x-k_{*x})+\omega_{*t}(k_t-k_{*t})+u_*\psi_*(q-q_*)]dxdt\geq 0$$

bərabərsizliyinin odənilməsidir, burada $u_*=u_*(x,t)=u(x,t;\upsilon_*)$, $\psi_*=\psi_*(x,t)=\psi(x,t;\upsilon_*)$, $\omega_*=\omega_*(x,t)=\omega(x,t;\upsilon_*)$ uyğun olaraq (37)-(39), (41)-(43), (44)-(46) məsələlərinin $\upsilon\in\upsilon_*$, olduqda həlləridir.

Sonda elmi rəhbərim riyaziyyat elmləri doktoru, prof. R.Q.Tağıyevə məsələlərin qoyuluşuna və dissertasiya işinə diqqətinə görə dərin təşəkkürümü bildirirəm.

Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakı elmi işlərdə nəşr olunmuşdur:

1. Həbibov V.M. Qeyri lokal sərhəd şərtli istilikkeçirmə tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsi / Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 91-ci ildönümünə həsr olunmuş "Müasir elmin aktual problemləri"Respublika Elmi Konfransının materialları, Lənkəran, 2014, s. 25.
2. Həbibov V. M. İnteqral sərhəd şərtli istilikkeçirmə tənliyi üçün əmsalla optimal idarəetmə məsələsi / Doktorantların və gənc tədqiqatçıların XIX Respublika elmi konfransının materialları, 7-8 aprel 2015, Bakı, s. 9-10.
3. Həbibov V.M. Inteqral sərhəd şərtli istilikkeçirmə tənliyi üçün əmsalla optimal idarəetmə məsələsinin fərqlər approksimasiyası / Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci ildönümünə həsr olunmuş "Azərbaycanın bölgələrində təhsilin və elmin ikişafı" Respublika Elmi Praktik Konfransının materialları, Lənkəran, 2015,s. 17-19.
4. Həbibov V.M. İstilikkeçirmə tənliyi üçün əlavə inteqral şərtli idarəetmə tipli tərs məsələ / Lənkəran DövlətUniversiteti, Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 93-ci ildönümünə həsr olunmuş " Müasir elmin aktual problemləri"Respublika elmi konfransı, Lənkəran, 2016, s.63.
5. Həbibov V. M. İstilikkeçirmə tənliyi üçün əlavə inteqral şərtli tərs məsələnin variasiya qouluşu haqqında / Bakı Dövlət Universiteti, Əmkdar elm xadimi, professor Əmir Şamil oğlu Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü ildönümünə həsr olunmuş "Funksional analiz və onun tətbiqləri" adlı Respublika elmi konfransı. Bakı-2016, s. 27-29.

6. Габибов В.М. Разностная аппроксимация задачи оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием / Актуальные направления научных исследований XXI века: Теория и Практика. Сборник научных трудов по материалам международной заочной практической конференции, Воронеж, 2014 г. №5 часть 1(10-1), с. 29-31.
7. Габибов В.М., Разностная аппроксимация и регуляризация задачиоптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием // Lənkəran Dövlət Universitetinin Elmi Xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası, Lənkəran-2015, с. 47-62.
8. Габибов В.М. Об одной граничной обратной задаче типа управления для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием // Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti,Pedaqoji Universitet xəbərləri,Təbiət elmləri bölməsi. Bakı- 2015, №3, с. 6-11.
9. Габибов В.М. Об одной граничной обратной задаче типа управления для уравнения теплопроводности. / Doktarantların və gənc tədqiqatçıların XX Respublika elmi konfransı. Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti. 24-25 may 2016, с. 22-24.
10. Габибов В.М. Разностная аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для уравнения теплопроводности с нелокальным граничным условием / Lənkəran Dövlət Universiteti "Ali təhsildə keyfiyyətin təminatı" mövzusunda Respublika Elmi Konfransı, Lənkəran-2016, s. 59-60.
11. Габибов В.М. Коэффициентная обратная задача типа управления для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием / Lənkəran Dövlət Universiteti, Ümummilli lider H.Əliyevin anadan olmasının 94-cü ildönümünə həsr olunmuş "Təbiət və humanitar elm sahələrinin inkişafı problemləri" Respublika elmi konfransı, Lənkəran-2017, s. 35-37.
12. Габибов В.М "Коэффициентная обратная задача типа управлния для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием" // Bakı Universiteti Xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2017, №2, s. 80-91.
13. Тагиев Р.К., Габибов В.М. Об одной задаче оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием / «Актуальные направления научных исследований XXI века: Теория и практика» Сборник научных трудов по мате-

риалам международной заочной научно-практической конференции, 2014, Воронеж, № 4 часть 1 (9-1), с. 337-339.

14. Тагиев Р.К., Габибов В.М. Задача оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием // Lənkəran Dövlət Universitetinin Elmi Xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası, Lənkəran-2014, s. 70-77
15. Тагиев Р.К., Габибов В.М. Вопросы корректности и необходимое условие оптимальности в задаче оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием / Международный молодежный симпозиум «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения» ,Воронеж, 2015, №5 часть 1(16-1), с. 60-63.
16. Тагиев Р.К., Гашимов С.А, Габибов В.М. Об одной задаче оптимального управлений для параболического уравнения с интегральным условием и с управлениями в коэффициентах // Вестник Томского Государственного Университета, Математика и механика. 2016, №3(41), с. 31-41.
17. Тагиев Р.К., Габибов В.М. Об одной задаче оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием // Вестник Самарского Государственного Технического Университета, Серия «Физико-математические науки». 2016 ,Т.20, №1, с. 54-62.
18. Тагиев Р.К., Габибов В.М. Сходимость разностных аппроксимаций и рейгуляризация задачи оптимального управления для уравнения теплопроводности с управлениями при решении и в правых частях. // Bakı Universiteti Xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası. 2017, №2 , s. 27-43.
19. Тагиев Р К., Габибов В.М “Разностная аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для параболического. // Вестник Томского Государственного Университета. Математика и механика. 2017, № 50, с. 30-44.

ВАХАБ МЕХТИ ОГЛЫ ГАБИБОВ

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

РЕЗЮМЕ

Предлагаемая диссертационная работа посвящена исследованию задач оптимального управления для параболических уравнений с интегральным граничным условием, вопросом сходимости их разностных аппроксимаций и изучению некоторых обратных задач типа управления для параболических уравнений с дополнительным интегральным условием второго рода.

В диссертационной работе получены следующие результаты:

-исследованы вопросы корректности постановки задач оптимального управления для параболических уравнений с интегральным граничным условием;

-доказана дифференцируемость целевых функционалов и найдены выражения для их градиентов в рассматриваемых задач оптимального управления;

-установлены условия оптимальности управления типа вариационного неравенства;

-изучены вопросы сходимости разностного метода в рассматриваемых задач оптимального управления, получены оценки скорости сходимости разностных аппроксимаций по состоянию и по функционалу;

-доказана слабая сходимость разностных аппроксимаций по управлению, проведены процессы регуляризации разностных аппроксимаций и указаны правила построения сильно сходящейся минимизирующей последовательности управлений ;

-рассмотрены обратные задачи типа управления для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием второго рода, исследованы вопросы корректности постановки этих задач, доказана дифференцируемость целевых функционалов и установлены условия оптимальности управления.

VAHAB MEKHTI OGLU HABIBOV
OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR PARABOLIK EQUATIONS WITH A NON-LOCAL BOUNDARY CONDITION

RESUME

The proposed thesis is devoted to the study of optimal control problems for parabolic equations with an integral boundary condition, the convergence question of their difference approximations, and the study of variation statements of certain inverse problems with an additional integral condition of the second kind.

In the thesis the following results were obtained:

-the questions of the correctness of the formulation of optimal control problems for parabolic equations with an integral boundary condition are investigated;

-the differentiability of objective functional is proved and expressions are found for their gradients in the optimal control problems under consideration;

-conditions for optimality of control of the type of variation inequality are established;

-the questions of the convergence of the difference method in the optimal control problems under study are estimated, estimates of the rate of convergence of the difference approximations by the state and by the functional are obtained;

-weak convergence of difference approximations in control is proved, regularization processes of difference approximations are carried out, and rules for constructing a strongly convergent minimizing control sequence are indicated;

-inverse problems of control type for a parabolic equation with an additional integral condition are considered, questions of the correctness of the statement of these problems are investigated, differentiability of objective functional is proved, and conditions for optimality of control are established.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ВАХАБ МЕХТИ ОГЛЫ ГАБИБОВ

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

1211.01-Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора философии по математическим наукам

Баку-2018