AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

AYNUR NİZAMİ qızı MƏMMƏDOVA

ÜMUMİLƏŞMİŞ SASS OPERATORLAR ARDICILLIĞININ APPROKSİMATİV XASSƏLƏRİ

1202.01 – Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Баку – 2018

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Riyazi analiz"** şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:
riyaziyyat üzrə elmlər doktoru **Rövşən Bəndəliyev**

Rəsmi opponentlər:

- fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Fərman Məmmədov**
(SOCAR "Neftqazelmitədqiqatlayihə İnstitutu");

- fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Fuad Abdullayev**
(Bakı Dövlət Universiteti).

Aparıcı təşkilat: Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti
"Ali riyaziyyat" kafedrası**.**

Dissertasiyanın müdafiəsi 14 sentyabr 2018-ci il saat 14^{00}-da Azərbaycan MEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D.01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat 14 iyun 2018-ci il tarixində buraxılıb.

D.01.111 Dissertasiya

Şurasının elmi katibi **dos. Tamilla Həsənova**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

İşin aktuallığı. Müasir konstruktiv funksiyalar nəzəriyyəsinin əsas istiqamətlərindən biri verilmiş sinifdən olan funksiyaya yaxınlaşan effektiv xətti aqreqatların qurulmasıdır. Bu tip sadə aqreqatlara misal olaraq klassik Puasson, Qauss-Veyerştrass, Landau, Pikar, Cekson, Feyer, Bernşteyn polinomları, Qelfand, Bernşteyn-Xlodovski, Sass operatoru və nəhayət Furye sırasının xüsusi cəmini göstərmək olar. Onların konstruksiyasının xarakterik xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, mənfi olmayan funksiyaya qarşı mənfi olmayan funksiya qoyur. Başqa sözlə desək bu operatorlar xətti müsbət operatorlardır. İlk dəfə 1912-ci ildə S. N. Bernşteyn tərəfindən qurulmuş polinomu misal göstərmək olar . Belə ki, bu polinom klassik yaxınlaşma nəzəriyyəsində Veyerştras teoreminin isbatında istifadə edilmişdir. Bu polinom son əsr ərzində kifayət qədər tədqiq olunmuşdur. Bu polinomlarla əlaqədar G.Lorents, S.N. Bernşteyn, İ.Natanson, G.Kirov, İ.İ. İbrahimov, A.C. Hacıyev, R.H. Məmmədov və başqaları tərəfindən geniş tədqiqat işləri aparılmışdır. Bu polinom riyaziyyatın müxtəlif istiqamətlərində öz tətbiqini tapmışdır. Keçən əsrin 50-ci illərində O. Sass tərəfindən sonralar onun adı ilə adlandırılmış Sass operatoru daxil edildi və bu operator klasssik Bernşteyn polinomunun ədəd oxu üzərində müsbət yarımoxda olan analoqudur. Bu operatorun daxil edilməsində əsas səbəb bu operatora ədəd oxunun müsbət yarımox hissəsində baxılması ilə əlaqədardır. Qeyd edə bilərik ki, Sass operatorunun müxtəlif modifikasiya olunmuş variantları mövcuddur. Belə modifikasiyalardan biri $C[0,\infty)$ fəzasında Ventzel tipli sərhəd şərti ilə verilmiş

$$Lu(x) := xu''(x) + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x)$$

cırlaşmış elliptik operatoru üçün baxılmışdır. F. Altomare və S. Milella işində isbat edilmişdir ki, belə operatorlar müsbət yarımqrup doğurur və bu yarımqrupu həmin işdə baxılan modifikasiya olunmuş Sass operatorunun iterasiyası vasitəsi ilə approksimasiya etmək olar.

Sonradan Bernşteyn polinomu müxtəlif riyaziyyatçılar tərəfindən kifayət qədər araşdırılıb və müxtəlif ümumiləşmələri qurulmuşdur. Ümumiyyətlə qeyd etmək lazımdır ki, Bernşteyn çoxhədlisinin ən mühüm cəhəti odur ki, onun forması başqa riyaziyyatçılara müxtəlif operatorların, o cümlədən Stanku çoxhədlisi, Sass operatoru, Kantoroviç çoxhədliləri, q-Bernşteyn çoxhədliləri, Durrmeyer çoxhədliləri, Baskakov operatorları, Meyer-König və Zeller operatorları, İbrahimov-Hacıyev operatorları və sair operatorların öyrənilməsinə ideya verib və hal-hazırda da verməkdədir.

Bernşteyn polinomları xətti müsbət operatorlar olduğu üçün bu operatorların köməyi ilə isbat edilmiş Korovkin tipli teoremlər funksiyaların yaxınlaşma nəzəriyyəsi sahəsində xüsusi yer tutur. Eyni zamanda bu polinomların ən yaxşı xassələrindən biri verilmiş funksiyalara da yaxınlaşma tərtibi $\frac{1}{\sqrt{n}}$ – dən yaxşı ola bilmədiyi də məlumdur. Korovkin tipli teoremlərə dair geniş informasiya Francesko Altomare və Michele Campitinin monoqrafiyasında verilmişdir və monoqrafiya bu istiqamətin müasir vəziyyətini özündə əks etdirir. Bu istiqamətdə A.C. Hacıyevin isbat etdiyi Korovkin tipli teoremlər funksiyaların yaxınlaşma nəzəriyyəsində xüsusi maraq kəsb edir. Qeyd edək ki, A.C. Hacıyevin bu mövzuya dair işləri H.H. Hacisalihoğlu və A.C. Hacıyevin monoqrafiyasına daxil edilmişdir. Ümumiyyətlə, azərbaycan riyaziyyatçılarından bu istiqamətdə İ.İ. İbrahimov, A.C.Hacıyev, R.H.Məmmədov, Ə.S.Cəfərov, A.S.Cəfərov və başqaları məşğul olmuşlar.

İşin məqsədi. Sass operatorunun ümumiləşməsini qurmaq və ümumiləşmiş Sass operatorunun kəsilməz funksiyaya yaxınlaşma tərtibinin Sass operatorunun momentlərinin köməyilə tapmaq. Ümumiləşmiş Sass operatoru üçün klassik Popoviçu tipli teoremi həm kəsilməz funksiyalar fəzasında, həm də çəkili kəsilməz funksiyalar fəzasında isbat etmək. Funksiyaların ümumiləşmiş Sass operatorlar ilə yaxınlaşması üçün asimptotik qiymətləndirmələr almaq. İkidəyişənli çəkili kəsilməz funksiyalar fəzasında kəsilməzlik modulunun xassələrini araşdırmaq. İkidəyişənli Sass operatorunun ümumiləşməsini qurmaq, klassik Popoviçu və Varanovskaya tipli teoremləri isbat etmək. İkidəyişənli Sass operatoru üçün Lebeq fəzasında approksimasiya teoremini isbat etmək.

Elmi yeniliklər. Dissertasiyada aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

- Sass operatorunun ümumiləşməsi qurulmuş və ümumiləşmiş Sass operatorunun kəsilməz funksiyaya yaxınlaşma tərtibinin Sass operatorunun momentləri vasitəsilə tapılmışdır.
- Ümumiləşmiş Sass operatoru üçün klassik Popoviçu tipli teorem həm kəsilməz funksiyalar fəzasında, həm də çəkili kəsilməz funksiyalar fəzasında isbat edilmişdir.
- Funksiyaların ümumiləşmiş Sass operatorlar ilə yaxınlaşması üçün asimptotik qiymətləndirmələr alınmışdır.
- İkidəyişənli çəkili kəsilməz funksiyalar fəzasında kəsilməzlik modulunun xassələri araşdırılmışdır.

- İkidəyişənli Sass operatorunun ümumiləşməsi qurulmuşdur, klassik Popoviçu və Varanovskaya tipli teoremlər isbat edilmişdir.
- İkidəyişənli Sass operatoru üçün Lebeq fəzasında approksimasiya teoremi isbat edilmişdir.

Tədqiqat üsulları: Dissertasiya işində funksiyaların konstruktiv nəzəriyyəsinin, funksional analizin üsullarından və çəkili fəzada kəsilməz funksiyaların xassələrindən istifadə olunmuşdur.

Nəzəri və praktiki əhəmiyyəti: Dissertasiya işində alınmış nəticələr nəzəri xarakter daşıyır. Lakin Sass operatorları üçün alınmış asimptotik düsturlar müəyyən adi diferensial tənliklərin araşdırılmasında, riyaziyyatın və informatikanın müxtəlif sahələrində, o cümlədən funksional analiz, diferensial və inteqral tənliklərin ədədi həlli üsullarında və alqoritmlər nəzəriyyəsində tətbiq oluna bilər.

İşin approbasiyası. Dissertasiya işinin nəticələri AMEA RMİ-nın "Riyazi analiz" (AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev), "Qeyri-harmonik analiz (AMEA-nın müxbir üzvü, prof. B.T.Bilalov), "Funksiyalar nəzəriyyəsi" (AMEA-nın professoru, r.e.d. V.E.İsmayılov), "Funksional analiz" (prof. H.İ.Aslanov) şöbələrinin seminarında və BDU-nun "Riyazi analiz" kafedrasının seminarında məruzə edilmişdir.

Dissertasiya işinin əsas nəticələri AMEA RMİ-nin 45 illiyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika üzrə X Beynəlxalq konfransda (Bakı 2004), akad. A.C.Hacıyevin 70 illik yubileyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika üzrə XIII Beynəlxalq konfransda (Bakı 2007), "Funksiyalar nəzəriyyəsi və harmonik analizin problemləri" mövzusunda akademik İ.İ.İbrahimovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransda (Bakı 2012), Azərbaycan xalqının ümummilli lideri Heydər Əliyevin 90 illik yubileyinə həsr olunmuş "Avropa Məkanında yeni çağrışlar" mövzusunda Gənc Alimlərin Beynəlxalq konfransda (Bakı 2013), "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" mövzusunda AMEA RMİ-nin 55 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransda (Bakı 2014), Azərbaycan-Türkiyə-Ukrayna- riyaziyyatçılarının birgə keçirdiyi "Riyazi analiz, Diferensial tənliklər və onların tətbiqləri" mövzusunda MADEA-7 VII Beynəlxalq konfransda (Bakı 2015), AMEA RMİ-də təşkil olunmuş "Qeyri harmonik analiz və diferensial operatorlar" mövzusunda Beynəlxalq işçi seminarında (Bakı 2016), Türkiyə Respublikasında "Analiz və onun tətbiqləri" mövzusunda keçirilmiş 2-ci Beynəlxalq konfransda (Kırşehir 2016), Türkiyə Respublikasında Ahi Evran Universitetində AMEA-nın müxbir üzvü, professor V.S. Quliyevin 60 illik yubileyinə həsr olunmuş "OMTSA-2017" Beynəlxalq konfransda, Akademik Akif Hacıyevin 80 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın müasir problemləri” mövzusunda beynəlxalq elmi konfransda (Bakı 2017) məruzə edilmişdir.

Çap. Dissertasiya işinin nəticələri ilə əlaqədar 17 elmi iş çap olunmuşdur. Siyahı əlavə olunur.

İşin strukturu və həcmi. Dissertasiya işi girişdən, iki fəsildən və 80 sayda istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. İşin həcmi 114 səhifədir.

İŞİN MƏZMUNU

Sass operatorunun yaxınlaşma nəzəriyyəsində əsas rolu əvvələr məlum olan approksimasiya teoremlərinin müsbət yarımoxa köçürülməsidir. Bu operator bütün yarımoxda kəsilməz funksiyalara yaxınlaşma aparatı kimi səmərəli obyektdir.

1950-ci ildə Otto Sass Bernşteyn polinomlarının $[0,\infty)$ yarımoxunda analoqunu aşağıdakı şəkildə vermişdir:

$$S_n(f;x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}, \quad 0\le x<\infty,$$

burada $f\in C[0,\infty)$. Qeyd edək ki, Sass operatorunun müxtəlif ümumiləşmələri daxil edilmişdir. Təqdim edilmiş dissertasiya işində isə aşağıdakı şəkildə verilmiş ümumiləşmiş Sass operatoruna baxılmışdır:

$$S_{n,r}(f;x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{r}\frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!}\left(x-\frac{k}{n}\right)^i\frac{(nx)^k}{k!},$$

burada $f\in C^r[0,\infty)$. Belə ümumiləşməyə 1992-ci ildə Kirov tərəfindən Bernşteyn polinomu üçün baxılmışdır.

1983-cü ildə isə klassık ikidəyişənli Sass operatoru Totik tərəfindən ədəbiyyata daxil edildi. Klassık ikidəyişənli Sass operatoru aşağıdakı şəkildədir :

$$S_{n,m}(f;x,y)=e^{-nx}e^{-my}\sum_{k,l=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{m}\right)\frac{(nx)^k}{k!}\frac{(my)^l}{l!},$$

burada $f\in C\left(R_+^2\right)$. Dissertasiya işində isə ikidəyişənli Sass operatorunun aşağıdakı şəkildə ümumiləşməsinə baxılmışdır:

$$S_{n,m,r}(f;x,y)=e^{-nx-my}\times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{r} \frac{1}{i!}\left[\left(x-\frac{k}{n}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(y-\frac{l}{m}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{i} f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{m}\right)\frac{(nx)^{k}}{k!}\frac{(my)^{l}}{l!},$$

burada $f \in C^{(r)}\left(R_{+}^{2}\right)$.

Belə ümumiləşmələrdən biri də 1970-ci ildə İ.İ.İbrahimov və A.C.Hacıyev tərəfindən verilmiş ümumiləşmədir. Belə ki, bu işdə elə xətti müsbət operatorlar ardıcıllığı qurulmuşdur ki, bu operatorlar xüsusi halda Bernşteyn, Bernşteyn-Xlodovski, Sass, Baskakov və digər operatorları özündə saxlayır. Indi isə bir qədər ətraflı şəkildə bu operatoru qeyd edək.

Fərz edək ki, $C[0,A]$ $(A<\infty)$ fəzasında $\{\psi_n(t)\}$ ardıcıllığı verilmişdir. Belə ki, $\psi_n(0)\neq 0,\ \psi_n(t)>0$ $(0\le t\le A,\ n=0,1,2,...)$. Tutaq ki, $\{\alpha_n\}$ aşağıdakı xassələrə malik müsbət ədədlər ardıcıllığıdır:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\psi_n(t)}=0.$$

Tutaq ki, $\{K_n(x,t,u)\}$ $(x,t\in[0,A],\ u\in R)$ üç dəyişənli funksiyalar ardıcıllığı aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1.Bu ardıcıllıq hər bir qeyd olunmuş x və t üçün u dəyişənlərinə nəzərən tam analitik funksiyadır;

2. $K_n(x,0,0)=1$ $(n=1,2,..)$ ixtiyari $x\in[0,A]$;

3. $\left\{(-1)^{\nu}\left[\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1\\ t=0}}\right\}\ge 0,\ \ (\nu,n=1,2,..;\ x\in[0,A])$;

4.$-\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\ t=0}}=n\,x\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1\\ t=0}}$

$(\nu,n=1,2,..;\ x\in[0,A])$, burada m natural ədəddir.

İndi isə aşağıdakı şəkildə verilmiş xətti müsbət operatorlar ardıcıllığına baxaq:

$$L_n(f,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\left\{\left[\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(0)\\ t=0}}\right\}\frac{[\alpha_n\psi_n(0)]^{\nu}}{\nu!}$$

Bu operator elmi ədəbiyyatda İbrahimov-Hacıyev operatoru adlanır. Xüsusi halları qeyd edək. Fərz edək ki,

$$\alpha_n = n, \ \psi_n(0) = \frac{1}{n}, \ K_n(x,t,u) = \left[1 - \frac{xu}{1+t}\right]^n .$$

Onda $L_n(f,x)$ klassik Bernşteyn polinomuna çevrilir.

Əgər

$$\alpha_n = n, \ \psi_n(0) = \frac{1}{n}, \ K_n(x,t,u) = e^{-n(t+xu)}$$

götürsək onda Sass operatoru alınır.

Birinci fəsildə Sass operatorunun yeni bir ümumiləşməsi qurulur və bu ümumiləşmiş operatorlar ardıcıllığı ilə diferensiallanan funksiyaların yaxınlaşması və yaxınlaşma tərtibi tədqiq olunmuşdur.

Tutaq ki, $R_+ = [0,+\infty)$, $\rho(x) = 1 + x^2$-isə çəki funksiyasıdır. $B_\rho(R_+)$ ilə $|f(x)| \le M_f \rho(x)$ şərtini ödəyən funksiyalar sinfini işarə edəcəyik, burada M_f müsbət sabitdir. Başqa sözlə $B_\rho(R_+) := \{f : |f(x)| \le M_f \rho(x)\}$. Bu sinifdə normanı aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\|f\|_p = \sup_{x \in R_+} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}.$$

Fərz edək ki,

$$C_\rho(R_+) := f : f \in B_\rho \wedge f \in C(R_+),$$

$$C_p^K(R_+) := \left\{ f : f \in C_p(R_+), \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f < \infty \right\}.$$

$$C_p^0(R_+) := \left\{ f : f \in C_\rho^K(R_+), \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = 0 \right\}.$$

Aşağıdakı teorem klassik Sass operatorunun sonlu parça halında analoqudur.

Teorem 1. Tutaq ki, $C^r[0,\infty)$ fəzası $[0,\infty)$ yarımintervalda r dəfə kəsilməz diferensiallanan funksiyalar fəzasıdır, $f \in C^r[0,\infty)$ və $S_{n,r}(f;x)$ ümumiləşmiş Sass operatorudur. Onda qeyd olunmuş istənilən $A > 0$ üçün aşağıdakı asimptotik bərəbərlik doğrudur:

$$\left\| f(\cdot)-S_{n,r}(f;\cdot)\right\|_{C[0,A]}=O\left(n^{-r/2}\omega\left(f^{(r)};n^{-1/2}\right)\right),$$

burada $\omega\left(f^{(r)};\delta\right)$ - $[0,A]$ parçasında adi kəsilməzlik moduludur.

Funksiya üzərinə əlavə şərt qoymaqla 0.1 teoreminin müsbət yarımoxa ümumiləşməsi alınmışdır.

Teorem 2. Tutaq ki, $f\in C^{r}[0,\infty)$ və sonlu $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(r)}(x)=B_r$ limiti var. Onda ümumiləşmiş $S_{n,r}(f;x),\ \ x\in[0,\infty)$ Sass operatoru üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\sup_{0\le x<\infty}\frac{\left|S_{n,r}(f;x)-f(x)\right|}{(1+x)^{\frac{r+2}{2}}}\le K(r)n^{-r/2}\omega\left(f^{(r)};n^{-1/2}\right),$$

burada $K(r)$ $r-$dən asılı sabitdir, ω isə adi kəsilməzlik moduludur.

Növbəti teorem 0.2 teoreminin çəkili kəsilməzlik modulu terminində analoqudur.

Teorem 3. Tutaq ki, $f\in C^{r}[0,\infty)$. Onda ümumiləşmiş $S_{n,r}(f;x),\ \ x\in[0,\infty)$ Sass operatoru üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\sup_{0\le x<\infty}\frac{\left|S_{n,r}(f;x)-f(x)\right|}{(1+x)^{\frac{r+8}{2}}}\le K(r)n^{-r/2}\Omega\left(f^{(r)};n^{-1/2}\right),$$

burada $K(r)$ $r-$dən asılı sabitdir və Ω isə $C_{\rho}^{K}(R_{+})$ sinfində təyin olunmuş çəkili kəsilməzlik moduludur:

$$\Omega(f;\delta)=\sup_{\substack{|t-x|\le\delta\\ x,t\in[0,\infty)}}\frac{\left|f(t)-f(x)\right|}{\left(1+x^2\right)\left(1+(t-x)^2\right)}.$$

Aşağıdakı teorem approksimasiya nəzəriyyəsində limit teoremləri adlanır. Bu teorem hamar funksiyaların ümumiləşmiş Sass operatorları ilə yaxınlaşmasının dəqiq tərtibini verir.

Teorem 4. Tutaq ki, $f\in C^{r+2}[0,\infty)$ və f funksiyası $[0,\infty)$ yarımintervalında məhduddur. Onda qeyd olunmuş x nöqtəsi üçün aşağıdakı asimptotik bərabərlik doğrudur:

$$S_{n,r}(f;x)=f(x)+\frac{(-1)^{r}f^{(r+1)}(x)T_{n,r+1}(x)}{(r+1)!\,n^{r+1}}+$$

$$+\frac{(-1)^r (r+1) f^{(r+2)}(x) T_{n,r+2}(x)}{(r+2)!\, n^{r+2}} + \frac{\rho_{n,r}(x)}{n^{r/4}}, \quad x \in [0,\infty),$$

burada $T_{n,r}(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} (k - nx)^r \frac{(nx)^k}{k!}$ və $\lim_{n\to\infty} \rho_{n,r}(x) = 0.$

İkinci fəsildə isə ikidəyişənli funksiyalar üçün çəkili kəsiməz funksiyalar fəzasında kəsilməzlik moduluna baxılmışdır və onun əsas xassələri tədqiq edilmişdir. Bundan əlavə ikidəyişənli Sass operatorunun ümumiləşməsi qurulur və momentləri tapılmışdır. Həmçinin, ikidəyişənli Sass operatorunun Lebeq fəzasında yığılması və məhdudluğu tədqiq olunmuşdur.

Fərz edək ki, $R_+^2 = \{(x,y); x \ge 0, y \ge 0\}$, $\rho(x,y) = 1 + x^2 + y^2$.

$$B_\rho\left(R_+^2\right) := \left\{ f : |f(x,y)| \le M_f \rho(x,y) \right\},$$

$$C_\rho\left(R_+^2\right) := \left\{ f : f \in B_\rho \wedge f \in C\left(R_+^2\right) \right\},$$

$$C_p^K\left(R_+\right) := \left\{ f : f \in C_\rho\left(R_+^2\right), \lim_{x+y\to+\infty} \frac{f(x,y)}{\rho(x,y)} = K_f < \infty \right\}.$$

Aşağıdakı teoremdə ikidəyişənli çəkili kəsilməzlik modulunun əsas xassələri verilmişdir.

Teorem 5. Fərz edək ki, $f \in C_\rho^K\left(R_+^2\right)$. Onda

$$\Omega(f;\delta_1;\delta_2) = \sup_{\substack{(x,y)\in R_+^2 \\ h_1\in[0,\delta_1],\, h_2\in[0,\delta_2]}} \frac{|f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y)|}{\rho(x,y)\rho(h_1,h_2)}$$

kəsilməzlik modulu aşağıdakı xassələri ödəyir:

1) $\lim_{\substack{\delta_1\to 0 \\ \delta_2\to 0}} \Omega(\delta_1,\delta_2) = 0$;

2) $\Omega(\delta_1;\delta_2)$ kəsilməzlik modulu δ_1 və δ_2 görə azalmayan funksiyadır;

3) $$\Omega(\delta_{11}+\delta_{12};\delta_{21}+\delta_{22}) \le A(\delta_{11},\delta_{12}) A(\delta_{21},\delta_{22}) \times$$
$$\times\Big(\left(1+\delta_{21}^2\right)\left[\left(1+\delta_{11}^2\right)\Omega(\delta_{11};\delta_{21}) + \left(1+\delta_{12}^2\right)\Omega(\delta_{12};\delta_{21})\right] +$$
$$+\left(1+\delta_{22}^2\right)\left[\left(1+\delta_{11}^2\right)\Omega(\delta_{11};\delta_{22}) + \left(1+\delta_{12}^2\right)\Omega(\delta_{12};\delta_{22})\right]\Big),$$

burada $\delta_{11},\delta_{12},\delta_{21},\delta_{22} > 0$, $A(\delta_{11},\delta_{12}) = \min\left\{1+\delta_{11}+\delta_{11}^2; 1+\delta_{12}+\delta_{12}^2\right\}$

və $A(\delta_{21},\delta_{22})=\min\left\{1+\delta_{21}+\delta_{21}^2;\,1+\delta_{22}+\delta_{22}^2\right\}.$

Aşağıdakı nəticə approksimasiya nəzəriyyəsində ikidəyişənli funksiyalar üçün Popoviçu teoreminin ümumiləşmiş kəsilməzlik modulu terminində analoqudur.

Teorem 6. Tutaq ki, $f\in C^{(r)}(R_+^2)$. Onda ümumiləşmiş ikidəyişənli $S_{n,m,r}(f;x,y)$ Sass operatoru üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\sup_{\substack{0\le x\le\infty\\ 0\le y\le\infty}}\frac{\left|S_{n,m,r}(f;x,y)-f(x,y)\right|}{\left(1+xy\right)^{\frac{i}{2}}}\le C(i,r)\left(nm\right)^{-\frac{i}{2}}\Omega\left(f^{(r)};n^{-\frac{1}{2}};m^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Aşağıdakı teorem ikidəyişənli klassik Sass operatoru üçün Voronovskaya teoreminin analoqudur.

Teorem 7. Tutaq ki, f funksiyası R_+^2-da təyin olunmuşdur, məhduddur və qeyd olunmuş hər hansı (x,y) nöqtəsində 2-ci tərtib də daxil olmaqla bütün tərtib törəmələrə malikdir. Onda aşağıdakı asimptotik bərabərlik doğrudur:

$$S_{n,m}\left(f;x,y\right)=f(x,y)+\frac{x}{2n}f''_{x^2}\left(x,y\right)+\frac{y}{2m}f''_{y^2}\left(x,y\right)+r_{n,m}\left(x,y\right),$$

burada $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}r_{n,m}\left(x,y\right)=0.$

Aşağıdakı teorem ikidəyişənli ümumiləşmiş Sass operatorunun momentlər terminində göstərilişidir.

Teorem 8. Tutaq ki, $f\in C^{(r+2)}\left(R_+^2\right)$, $\left(x,y\right)\in R_+^2$ və f funksiyasının $(r+2)-$tərtib törəmələri daxil olmaqla məhduddur. Onda ümumiləşmiş Sass operatoru üçün aşağıdakı asimptotik bərəbərlik doğrudur:

$$S_{n,m,r}(f;x,y)=f(x,y)+\frac{(-1)^r f^{(r+1)}(x,y)T_{n,m,r+1}(x,y)}{(r+1)!}+$$

$$+\frac{(-1)^r(r+1)f^{(r+2)}(x,y)T_{n,m,r+2}(x,y)}{(r+2)!}+R_{n,m,r}(x,y),$$

burada $$T_{n,m,r}(x,y)=e^{-nx-my}\sum_{k,l=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^{r}\left(\frac{l}{m}-y\right)^{p-r}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{(my)^l}{l!},$$

$r=0,1,...,p$ və $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} R_{n,m,r}(x,y)=0$.

Aşağıdakı teoremdə ikidəyişənli funksiyaların xüsusi törəmələrinin ikidəyişənli klassik Sass operatorunun uyğun xüsusi törəmələri vasitəsilə yaxınlaşdırılması verilmişdir.

Teorem 9. Tutaq ki, $f(x,y)$ funksiyası hər bir qapalı $0\le x\le R$, $0\le y\le R,\ R>0$ kvadratında məhduddur, müəyyən $u>0$ üçün $f(x,y)=O\left((x+y)^u\right)$, $x+y\to\infty$ münasibəti ödənilir. Əlavə olaraq fərz edək ki, hər bir $x=\xi,\ y=\eta$ nöqtəsində $f_x^{/}(\xi,0)$, $f_y^{/}(0,\eta)$, $f_{xy}^{//}(0,0)$, $f_{yx}^{//}(0,0)$ törəmələri var və kəsilməzdir.Onda aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial x}S_{n,m}(f;x,y)\Big|_{(x,y)=(\xi,0)}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\Big|_{(x,y)=(\xi,0)},\quad \forall m\in N\cup\{0\};$$

$$b)\ \lim_{m\to\infty}\frac{\partial}{\partial y}S_{n,m}(f;x,y)\Big|_{(x,y)=(0,\eta)}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\Big|_{(x,y)=(0,\eta)},\quad \forall n\in N\cup\{0\};$$

$$c)\ \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}S_{n,m}(f;x,y)\Big|_{(x,y)=(0,0)}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)\Big|_{(x,y)=(0,0)}.$$

Aşağıdakı operator birölçülü Kantoroviç operatorunun ikidəyişənli funksiyalar halında analoqudur:

$$W_{n,\mathrm{m}}(f;x,y)=nme^{-nx-my}\sum_{k,l=0}^{\infty}\left[\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_{\frac{l}{m}}^{\frac{l+1}{m}}f(s,t)ds\,dt\right]\frac{(nx)^k}{k!}\frac{(my)^l}{l!},$$

$n,m>0.$

Bu operator üçün aşağıdakı lokal teorem isbat edilmişdir.

Teorem 10. Tutaq ki, $1<p<\infty$ və $f\in L_p(R_+^2)$. Onda $W_{n,m}(f;x,y)$ operatoru üçün aşağıdakı hökmlər doğrudur:

1) $W_{n,m}(f;0,0)\to f(0,0)$, $n,m\to\infty$, $f\in L_p(R_+^2)$;

2) istənilən $f \in L_p\left(R_+^2\right)$ funksiyası üçün

$$\sup_{(n,m)\in N^2}\left|W_{n,m}(f;0,0)\right| \le \theta(f;0,0)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Burada

$$\theta(x,y;f) = \sup_{\substack{0<s,q<\infty \\ (s,q)\neq(x,y)}} \frac{1}{(s-x)(q-y)} \int_x^s \int_y^q \left|f(z,\gamma)\right| dz d\gamma.$$

Müəllif məsələlərin qoyuluşuna, işə daimi diqqətinə və dəyərli məsləhətlərinə görə elmi rəhbərləri mərhum akademik A.C. Hacıyevə və riyaziyyat üzrə elmlər doktoru R.Ə. Bəndəliyevə öz dərin təşəkkürünü bildirir.

Dissertasiyanin əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə dərc olunmuşdur:

1. Рагимова А.Н. Аппроксимация дифференцируемых функций обобщенными операторами Саса, Тезисы X Межд. конф. по мат. и мех. посв. 45 летию Института Математики и Механики. Баку 2004, с.134.
2. Рагимова А.Н. Об одном асимптотическом свойстве обобщенного оператора Сасса, Тезисы XIII Межд. конф. по мат. и мех. посв. 70-летию со дня рождения акад. НАНА А.Д.Гаджиева, Баку 2007, с.130.
3.Мамедова А.Н. Аппроксимационные теоремы для обобщенных операторов Сасса, Вестник Бакинского Университета, Баку 2010, № 2, с. 75-82.
4.Məmmədova A.N. Çəkili kəsilməzlik modulunun xassəsi. Funks. nəzəriy. və harmonik analizin prob. akademik İ.İ.İbrahimovun 100-illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransın material., Bakı 2012, səh.181-182.
5.Mammadova A.N. On Order of approximation function by generalized Szasz operator, İntern. Baku Forum of Young Scientists Dedic. to the 90-th Anniver. of National Leader Heydar Aliyev, Bakı 2013. səh. 59-60.
6. Abdullayeva A.E., Mammadova A.N. On order of approximation function by generalized Szasz operators and Bernstein-Chlodowsky polynomials. Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of ANAS. Baku 2013, p.3-8.

7.Mammadova A.N., Abdullayeva A.E. Approximation theorems for Bernstein-Chlodowsky and generalized Szasz operator. Advances and Applications in Mathematical Sciences, 2013, p.137-149.
8.Мамедова А.Н. Аппроксимационная теорема для обобщенных операторов Саса в случае функции двух переменных , Актуальные проблемы математики и механики Материалы Межд. конф., посв. 55-летию Института Математики и Механики, 2014, с. 228
9.Абдуллаева А.Э., Маммадова А.Н. О моментах полиномов Бернштейна-Хлодовского и свойства весового модуля непрерывнсти., Известия Педагогического Университета, Баку 2014, №4, с.24-28.
10.Bandaliyev R.A., Mammadova A.N, Abdullayeva A.E. On the denseness of $C_0^\infty(\Omega)$ in $L_{p(x)}(\Omega)$ for $0 < p(x) < 1$. Azerbaijan-Turkey-Ukrainian International Conference Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications. Baku-2015, p.30-31.
11.Abdullayeva A.E., Mammadova A. N. Moments operators Szasz and Bernstein-Chlodowsky. International Workshop on Non-Harmonic Analysis and Differential Operators. Baku-2016, p.1.
12.Mammadova A.N. Approximation by two dimensional generalized Szasz operators, 2nd International conference on analysis ant its Applications,2016,p. 66.
13.Mammadova A.N. Some properties of two-dimensional Szasz operator, Caspian J. of Appl. Math., Ecol. and Econ., Baku 2016, v.4, № 2, p. 65-73.
14.Mammadova A.N. On approximation theorem for two-dimensional Szasz type operator in Lebesgue spaces, Inter. Conf. on "Oper. in Morrey-type spaces and Appl.", Dedicated to 60-th Birthday of Prof. V.S. Guliyev, Turkey 2017, p.55.
15. Bandaliyev R.A., Mammadova A.N. On approximation theorems for two-dimensional Szasz operator, Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, Baku 2017, v. 37, №1, p. 53-62.
16. Mammadova A.N. On one approximation theorems for two variable Szasz operator, Inter. Conf. “Modern problems of Mathematics and Mechanics” dedicated to the 80-th anniversary of academician Akif Gadjiev, 2017, p.137.
17. Mammadova A.N. A Moments of Generalized Two Variable Szasz Operators, Journal of Scientific Research and Reports, 2017, v.17, №1 , p. 1-6.

АЙНУР НИЗАМИ кызы МАМЕДОВА

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ САССА

АННОТАЦИЯ

Диссертационная работа посвящена вопросам аппроксимации последовательности операторов Сасса и его обобщения в весовых функциональных пространствах, а также получению асимптотических оценок.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Построен обобщенный оператор Сасса и найден порядок приближения непрерывной функции с помощью моментов обобщенного оператора Сасса.

2. Доказаны теоремы типа классической теоремы Поповичу для обобщенных операторов Сасса в пространстве непрерывных функций, а также в весовом пространстве непрерывных функций.

3. Получены асимптотические оценки приближения функций обобщенными операторами Сасса.

4. Исследованы свойства модуля непрерывности в весовых функциональных пространствах непрерывных функций двух переменных .

5. Построены обобщенные операторы Сасса двух переменных и доказаны теоремы, типа классических теорем Поповичу и Вороновской.

6. Доказаны аппроксимационная теорема с помощью оператора Сасса двух переменных в пространстве Лебега.

AYNUR NIZAMI kizi MAMMADOVA

APPROXIMATION PROPERTIES OF SEQUENCE OF THE GENERALIZED SZASZ OPERATORS

ABSTRACT

The thesis is devoted to approximation of the sequence of the Szasz operators and their generalizations in functional weight spaces and obtaining of asymptotic estimations.

In the thesis the following main results were obtained:

1.One generalization of the Szasz operator is constructed and the order of approximation of a continuous function is found by the moments of generalized Szasz operators.

2.The classical Popoviciu type theorems are proved for generalized Szasz operators in the spaces of continuous functions and in the weight function of continuous functions.

3.Asymptotic formulas of the approximation of functions by generalized Szasz operators are obtained.

4.The properties of the modulus of continuity in the weighted functional spaces of continuous functions of two variables are studied.

5.The generalized Szasz operator of two variables are constructed and analog of the Popoviciu and Voronovskaya classic theorems are proved.

6.Approximation theorems are proved by the classical Szasz operator of two variables in the Lebesgue space.