

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

На правах рукописи

ФИРАНА МАНСИМ КЫЗЫ МАМЕДОВА

**НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ
НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА
С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ**

1202.01-Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2016

Работа выполнена в отделе «Математический анализ»
Института Математики и Механики НАН Азербайджана.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, проф.

Фарман И.Мамедов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф. **Рагим М. Рзаев**

(Азербайджанский Государственный Педагогический
Университет);

кандидат физико-математических наук, доц.

Мубариз Г.Гаджибеков

(Национальная Авиационная Академия Азербайджана).

Ведущая организация: Азербайджанский Архитектурно
Строительный Университет кафедра «Высшая математика».

Защита диссертации состоится 08 апреля 2016 г. в 14⁰⁰
часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по при-
суждению ученой степени доктора наук и доктора философии
при Институте Математики и Механики Национальной
Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
Института Математики и Механики Национальной Академии
Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 07 марта 2016 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА

д.м.н., доц. Ровшан Бандалиев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В последнее время в связи с созданием и изучением необходимого математического аппарата уравнений для математических моделей новых электрореологических жидкостей, которые могут мгновенно менять свои постоянные физические параметры под воздействием внешнего электромагнитного поля. Первые результаты по созданию математических моделей электрореологических жидкостей были получены в работах Рузички, Ражогопал и Жикова. Математические модели для таких жидкостей характеризуются присутствием в них новых нелинейных уравнений с нестандартными условиями роста. В отличие от прежних моделей, в таких моделях постоянные физические параметры являются функциями от времени и координат. Соответствующий интеграл энергии для таких моделей выражается в виде $\iiint_{\Omega} |Du|^{p(t,x)} dx$, где экспонента $p(t,x)$ не яв-

ляется постоянной величиной в отличие от традиционного случая, а наоборот - функцией от времени и координаты. В таких моделях эта константа может зависеть также от других физических параметров, такие как, давление, температура и т.д. Использование упомянутых математических моделей является более адекватным в смысле применений к прикладным задачам.

История вопроса. Пространства функций для исследования и постановки задач для моделей с нестандартным условием роста могут быть не замкнутыми в смысле плотности в них гладких функций. Поэтому, решение вопросов обобщенной разрешимости, единственности, а также непрерывной зависимости от начальных и граничных данных, их регулярностные свойства и т. д. для решений этих краевых задач могут быть проблематичными. И, следовательно, соответствующие вопросы гармонического анализа, такие как, ограниченность максимального оператора Харди-Литтльвуда, сингулярного оператора типов Кальдерона Зигмунда, коммутаторов для них и др. потребовали новых исследований и подходов. В этом плане мы хотим отметить основополагающие работы Д. Круз-Урибе, Л.Диениг, С.Самко, В.Кокилашвили, В.В.Жиков, П.Хасто, И.И. Шаропуддинов и др.

Вопросы ограниченности оператора Харди в пространствах Лебега с переменным показателем были начаты в работах авторов С.Самко, Д.Е.Едмундс, В.Кокилашвили, М.Месхи, П.Хасто, П.Харжунето, М.Коскеножа, Л.Диениг, С.Боса, Ж.Сория, Д.Круз-Урибе, Ф.И.Мамедов, А.Харман, Ю.Зерен и др.

Цель работы. Изучение необходимых и достаточных условий для ограниченности оператора Харди в пространствах Лебега с переменным показателем с целью создания в дальнейшем общей теории уравнений с нестандартным условием роста.

Методика работы. В работе использованы методы и подходы теории функциональных пространств, современного гармонического анализа, функционального анализа и качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

-получены необходимые и достаточные условия для ограниченности оператора Харди в пространствах Лебега с переменным показателем и в случае монотонно *возрастающих* показателей суммируемости;

-получены необходимые и достаточные условия для ограниченности оператора Харди в пространствах Лебега с переменным показателем и в случае монотонно *убывающих* показателей суммируемости;

-получены необходимые и достаточные условия для ограниченности оператора Харди в пространствах Лебега с переменным показателем и в случае *слабо меняющихся* показателей суммируемости;

- получены необходимые и достаточные условия для ограниченности оператора *общего весового* оператора Харди в пространствах Лебега с переменным показателем и в случае монотонно *убывающих* показателей суммируемости;

-о характеризованы различные логорифмические условия с точки зрения ограниченности оператора Харди в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости.

Теоретическая и практическая ценность работы. Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Полученные результаты служат созданию научной основы для задач использования и внедрения электрореологических жидкостей.

Апробация работы. Диссертационная работа была обсуждена в отделах “Математический анализ” (рук. чл.-корр. НАНА, проф. В.С.Гулиев), “Уравнения математической физики” (рук. чл.-корр. НАНА, проф. Р.В.Гусейнов), “Негармонический анализ” (рук. чл.-корр. НАНА, проф. Б.Т.Билалов). Некоторые результаты были доложены в научной конференции 45-летнему юбилею ИММ НАН Азербайджана.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 6 научных работах автора, приведенных в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 111 наименований. Объем диссертации 107 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении диссертации дается краткая характеристика основных результатов по данной тематике, показывается актуальность работы, его научная новизна, прикладные и теоретические ценности.

В первой главе диссертации рассматриваются монотонно возрастающие и монотонно убывающие экспоненциальные функции. Нормы в полученных неравенствах подразумеваются в смысле нормы $L^{p(x)}$ пространства Лебега с переменным показателем, а веса типа $\chi^{\beta(x)}$ -обобщения показательных функций. Из классики известно, что

при $\beta < 1 - \frac{1}{p}$, $p > 1$ оператор типа Харди

$H_\beta f(x) = x^{\beta-1} \int_0^x \frac{f(t)}{t^\beta} dt$ ограничен в пространстве $L^p(0, \infty)$. Это

означает справедливость неравенства

$$\left\| x^{\beta-1} \int_0^x f(t) dt \right\|_{L^p(0, \infty)} \leq C \|x^\beta f(x)\|_{L^p(0, \infty)}$$

В диссертации предыдущий результат переносится на случай параметров β, p являющиеся функциями от переменной x . В силу качественного различия подходов и результатов отдельно рассматриваются случаи монотонного возрастания и монотонного убывания показательной функции. Отметим что, условие монотонности в полученных результатах ставится вблизи нуля.

В 1.1 дается необходимый материал по освоению основных результатов связанные с нормой пространства Лебега с переменным показателем. В 1.2 рассматриваются монотонно возрастающие в малой окрестности нуля показательные функции, где в частности установлено, что для справедливости основного результата параграфа никаких условий регулярности не требуется.

В 1.3 и 1.4 рассматриваются монотонно возрастающие показательные функции. В 1.3 охватывает достаточность основного результата, а 1.4 –необходимость. Как следствие этих двух параграфов, утверждается некоторая система условий являющихся необходимым и достаточным для справедливости неравенства типа Харди в нормах пространства Лебега с переменным показателем. В отличие от предыдущих результатов П. Харжулехто, П.Хасто, М.Коскеножа здесь показывается, что имеет место другая система из 5 условий, каждая из которых является необходимым и достаточным.

Во второй главе рассматриваются немонотонные показательные функции и доказываются также необходимые и достаточные условия, В этой главе показательная функция не обязана быть монотонной, а вместо него удовлетворяет следующему условию слабой осцилляции:

$$\limsup_{x \rightarrow +0} \sup_{\left\{ y : |y-x| < \frac{x}{2} \right\}} |g(y) - g(x)| \ln \frac{1}{x} < \infty \quad (1)$$

Например, функции

$$g(x) = C_1 + \frac{C_2}{\left(\ln \frac{2l}{x} \right)^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

удовлетворяют условию (1). В предыдущих исследованиях допускалось, в лучшем случае, условие

$$\limsup_{x \rightarrow +0} |g(x) - g(0)| \ln \frac{1}{x} < \infty. \quad (2)$$

Нетрудно видеть что условие (2) более жестче чем (1).

В 2.1 диссертации сравниваются различного вида логарифмические условия с точки зрения их взаимосвязи с неравенством типа Харди. В 2.2 доказывается необходимость, а в 2.3 достаточность для справедливости неравенства типа Харди, -основного результата этого параграфа. Всюду в данной главе показательные функции удовлетворяют условию слабой осцилляции, вместо условия монотонности первой главы. Последняя 2.4 посвящена неравенству типа Харди с общими весами и с монотонно возрастающим показателем.

Основные результаты диссертации

В диссертации получены следующие основные результаты. В первой главе диссертации получен следующий основной результат.

Теорема 1. Пусть $p : (0, l) \rightarrow [1, \infty)$ -монотонно возрастающая функция, $\beta - \frac{1}{p'(0)} \leq 0$. Тогда для справедливости неравенства

$$\left\| x^{\beta-1} \int_0^x f(t) dt \right\|_{L^{p(x)}(0,l)} \leq C \|x^\beta f(x)\|_{L^{p(x)}(0,l)} \quad (3)$$

для любой положительно измеримой функции $f(x)$ необходимо и достаточно каждая из следующих условий:

$$a) \int_a^l t^{\beta-\frac{1}{p'(t)}} \frac{dt}{t} \leq C a^{\beta-\frac{1}{p'(a)}}, \quad 0 < a < l;$$

b) найдется $\varepsilon > 0$ такое, что функция $x^{\beta-\frac{1}{p'(x)}+\varepsilon}$ почти монотонно убывает:

$$x_2^{\beta-\frac{1}{p'(x_2)}+\varepsilon} \leq C x_1^{\beta-\frac{1}{p'(x_1)}+\varepsilon},$$

где $0 < x_1 < x_2 < l$;

$$c) \int_a^l \left[x^{\beta-\frac{1}{p'(x)}} a^{\frac{1}{p'(a)}-\beta} \right]^{p(x)} \frac{dx}{x} \leq C, \quad 0 < a < l;$$

$$d) \|x^{\beta-1} \mathcal{X}_{(a,l)}\|_{L^{p(x)}(0,l)} \leq C a^{\beta-\frac{1}{p'(a)}}, \quad 0 < a < l.$$

Из предыдущего результата следует следующий интересное обобщение классического неравенства Харди на случай нормы обобщенных пространств Лебега

$$\int_0^l \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq C_p \int_0^l f(x)^p dx, \quad 1 < p < \infty$$

Следствие 2. Пусть $p: (0, l) \rightarrow [1, \infty)$ -монотонно возрастающая функция, такая что $1 < p^- = \inf p$, $p^+ = \sup p < \infty$. Тогда для справедливости неравенства

$$\left\| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right\|_{L^{p(x)}(0, l)} \leq C \|f(x)\|_{L^{p(x)}(0, l)} \quad (4)$$

для любой положительно измеримой функции $f(x)$ необходимо и достаточно чтобы:

$$\int_a^l t^{-\frac{1}{p'(t)}} \frac{dt}{t} \leq C a^{-\frac{1}{p'(a)}}, \quad 0 < a < l; \quad (5)$$

Нижеследующий результат в случае убывающей показательной функции, интересен тем, что в ней не требуется никакие условия на показательную функцию.

Теорема 3. Пусть $p: (0, l) \rightarrow [1, \infty)$, $(l < \infty)$ -некоторая измеримая функция, монотонно убывающая в малой $(0, \varepsilon)$ -окрестности вблизи нуля. Пусть далее, $\varepsilon > 0$ и выполняются условия $1 < p^- = \inf p$, $p^+ = \sup p < \infty$.

Тогда для любой измеримой функции $f(x) \geq 0$ выполняется неравенство

$$\left\| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right\|_{L^{p(x)}(0, l)} \leq C \|f(x)\|_{L^{p(x)}(0, l)},$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от ε, p^-, p^+ .

Следующие вспомогательные утверждения существенно используются в ходе рассуждений основных результатов.

Лемма 4. Пусть $\beta \in R$ и монотонно возрастающая функция $p(x)$ таковы, что выполняется условие :

$$\int_a^l t^{\beta - \frac{1}{p'(t)}} \frac{dt}{t} \leq C a^{\beta - \frac{1}{p'(a)}}, \quad 0 < a < l;$$

Тогда имеет место неравенство:

$$\left[\frac{1}{p(a)} - \frac{1}{p(2a)} \right] \ln \frac{1}{a} \leq C, \quad 0 < a < \frac{l}{4} \quad (4)$$

А также, существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $x^{\beta - \frac{1}{p'(x)} + \varepsilon}$ - почти всюду монотонно убывает:

$$x_2^{\beta - \frac{1}{p'(x_2)} + \varepsilon} \leq C x_1^{\beta - \frac{1}{p'(x_1)} + \varepsilon}, \quad \text{где } 0 < x_1 < x_2 < l;$$

Лемма 5. Пусть для функции $p(x)$ выполняется условие (11)

и, $\frac{x}{2} < y < 2x$, $0 < x < \frac{l}{2}$. Тогда имеет место:

$$C_1 x^{-\frac{1}{p'(x)} + \beta} < y^{-\frac{1}{p'(y)} + \beta} \leq C_2 x^{-\frac{1}{p'(x)} + \beta}$$

Предложение 6. Пусть $p(x) : (0, l) \rightarrow (1, \infty)$ - некоторая измеримая функция и число $\beta < 1 - \frac{1}{p(0)}$, а также,

$1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$. Тогда следующее неравенство с нормой обобщенных пространств Лебега

$$\left\| x^{\beta-1} \right\|_{p(\cdot);(a,l)} \leq C \frac{1}{p^-} a^{\beta-\frac{1}{p^+}} \frac{dy}{p'(y)}$$

необходимо для справедливости неравенства (3); если, кроме этого, функция $p(x)$ монотонна, то следующее логарифмическое условие

$$\left[\frac{1}{p(a)} - \frac{1}{p(2a)} \right] \ln \frac{1}{a} \leq C$$

также будет необходимой.

Во второй главе диссертации доказан следующий основной результат.

Теорема 7. Пусть функции $\beta : (0, l) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ и $p : (0, l) \rightarrow (1, \infty)$ измеримы и $\beta(x)p'(x) \leq 1$. Кроме того, пусть для этих функций выполняются условия

$$\left| g(y) - g(x) \right| \ln \frac{2l}{x} \leq C, \quad |y - x| < \frac{1}{2}x, \quad 0 < x < l .$$

Тогда для выполнения неравенства

$$\left\| x^{\beta(x)-1} \int_0^x f(t) dt \right\|_{L^{p(x)}(0,l)} \leq C \left\| x^{\beta(x)} f(x) \right\|_{L^{p(x)}(0,l)} \quad (5)$$

для любой положительной и измеримой функции $f(x)$ необходимо и достаточно что

$$\int_a^l x^{\beta(x)-\frac{1}{p'(x)}} \frac{dx}{x} \leq Ca^{\beta(a)-\frac{1}{p'(a)}}, \quad 0 < a < l.$$

Из этой теоремы получается следующее обобщение на пространства Лебега с переменным показателем классического неравенства Харди

Теорема 8. Пусть измеримая функции $p : (0, l) \rightarrow (1, \infty)$ удовлетворяющая условию

$$|p(y) - p(x)| \ln \frac{2l}{x} \leq C, \quad |y - x| < \frac{1}{2}x, \quad 0 < x < l .$$

Тогда для выполнения неравенства(4) для любой положительной измеримой функции $f(x)$ необходимо и достаточно выполнение условия (5).

Теорем 9. Пусть положительная измеримая функция $\omega : (0, l) \rightarrow (0, \infty)$ и $\sigma(x) = \omega^{-\frac{1}{p(x)-1}}(x) \in L^1(0, a)$; $0 < a < l$, кроме того, $W(x) = \int_0^x \sigma(t) dt$. Пусть функция $p : (0, l) \rightarrow (1, \infty)$ монотонно убывает на $(0, \varepsilon)$; причем $\varepsilon \in (0, l)$ -некоторое фиксированное число.

Тогда для любой измеримой функции $f : (0, l) \rightarrow (0, \infty)$ выполняется следующее неравенство

$$\left\| W(x)^{-1} \sigma(x)^{\frac{1}{p}} \int_0^x f(t) dt \right\|_{L^p(0, l)} \leq C \left\| \omega(x)^{\frac{1}{p}} f(x) \right\|_{L^p(0, l)}, \quad f(x) \geq 0,$$

где положительная константа не зависит от положительной измеримой функции.

При доказательстве приводимого результата используется также следующее предложение.

Предложение 10. Пусть функция $p: (0, l) \rightarrow (1, \infty)$ монотонно возрастает на $(0, l)$. Тогда условие

$$\left[\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(x_{(1)})} \right] \ln \frac{1}{W(x)} \leq C, \quad 0 < W(x) < 1 \quad W(x_{(1)}) = \frac{1}{2} W(x)$$

является необходимой для выполнения неравенства типа Харди:

$$\left\| W(x)^{-1} \sigma(x)^{\frac{1}{p}} \int_0^x f(t) dt \right\|_{L^p(0, l)} \leq C \left\| \omega(x)^{\frac{1}{p}} f(x) \right\|_{L^p(0, l)}, \quad f(x) \geq 0$$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю проф. Фарману Мамедову за постоянное внимание и помощь при выполнении данной работы.

По теме диссертации опубликованы следующие работы автора:

1. Mamedova F.M. A Hardy type variable exponent inequality for decreasing exponents // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 37(65), 85-88, 2012.
2. Mamedova F.M. "On variable exponent Hardy tupe inequality" AMEA, akademik İ.İ.İbrahimovun 100-illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq Konfransın Materialları, səh. 188 -189, 2012.
3. Mamedov F.İ., İsmailova S.H., Mamedova F.M. and Aliyev M.J. On some log regularity condition and the boundedness of weighted Hardy operator in $L^{p(\cdot)}(0,1)$ // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 39(67), 87-92, 2013.
4. Mamedov F.İ. and Mamedova F.M. A Hardy type general weighted inequality $L^{p(\cdot)}(0,1)$ with decreasing exsponent // Transactions of NAS of Azerbaijan, 33(1), 45-50, 2013.
5. Mamedov F.İ. and Mamedova F.M. A necessary and sufficient condition for Hardy's operator in $L^{p(\cdot)}(0,1)$, // Mathematische Nachrichten, 287(5-6), 666-676, 2014.
6. Mamedov F.İ.and.Mamedova F.M. Boundedness criterions for the Hardy operator in weighted space $L^{p(\cdot)}(0,1)$, // Journal of Convex Analysis, 22(2), 553-568, 2015.

FİRANƏ MƏNSİM qızı MƏMMƏDOVA

DƏYİŞƏN ÜSTLÜ LEBEQ FƏZALARINDA HARDİ TIPLİ BƏRABƏRSİZLİK ÜÇÜN ZƏRURİ VƏ KAFİ ŞƏRTLƏR

XÜLASƏ

Dissertasiya işi, dəyişən üstlü Lebeq fəzalarında çəkili Hardi operatorunun məhdudluq məsələlərinə həsr edilmişdir. Burada aşağıdakı əsas nəticələr əldə edilmişdir:

-monoton artan üst funksiyaları halında Hardi operatorunun dəyişən üstlü Lebeq fəzalarında məhdud olması üçün zəruri və kafilik şərti isbat edilmişdir;

- monoton azalan üst funksiyaları halında Hardi operatorunun dəyişən üstlü Lebeq fəzalarında məhdud olması üçün zəruri və kafilik şərti isbat edilmişdir;

- monoton artan üst funksiyaları üçün və ümumi çəkilər halında dəyişən üstlü Hardi bərabərsizliyinin doğru olması üçün kafilik şərti isbat edilmişdir;

-zəif ossilyasiyalı funksiyalar sinfindən olan üst funksiyaları halında Hardi operatorunun dəyişən üstlü Lebeq fəzalarında məhdud olması üçün zəruri və kafilik şərti isbat edilmişdir;

-Hardi operatorunun dəyişən üstlü Lebeq fəzalarında məhdud olması üçün zərurilik şərtləri isbat edilmişdir;

- dəyişən üstlü Lebeq fəzalarında Hardi operatorunun məhdud olması üçün müxtəlif logarifmik şərtləri xarakterizə edilmişdir.

FIRANE MANSIM kızı MAMEDOVA

**NECESSARY AND SUFFICENCY CONDITIONS FOR THE
BOUNDEDNESS OF THE WEIGHTED HARDY OPERATOR IN
THE LEBESGUE SPACES WITH VARIABLE EXPOENT OF
SUMMABILITY**

SUMMARY

The dissertation work is devoted to the study of boundedness problems for the weighted hardy operator in the variable exponent Lebesgue spaces. In this thesis is obtained following main results:

-necessary and sufficiency conditions for the weighted Hardy's operator to be bounded in variable expoent Lebesgue spaces in case of monoton increasing expoent functions.

- necessary and sufficiency conditions for the weighted Hardy's operator to be bounded in variable expoent Lebesgue spaces in case of monoton decreasing expoent functions.

- necessary and sufficiency conditions for the general weighted Hardy's operator to be bounded in variable expoent Lebesgue spaces in case of monotonic expoent functions.

-necessary and sufficiency conditions for the Hardy's operator to be bounded in variable the weak variating and not monotone expoent functions in Lebesgue spaces

- necessary and sufficiency conditions for the general weighted hardy's operator bounded in variable Lebesgue spaces in case of monotone expoent functions

-It is given a full characterization of different logarithmic conditions on boundedness of weighted Hardy operator in variable expoent Lebesgue spaces.