МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЕ АЗЕРБАЙДЖАНСКИЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

НАТАВАН ГАДИМ гызы МАМЕДОВА

УСТРАНИМЫЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

1211.01-Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2014

Работа выполнена на кафедре «Вычислительная математика» Бакинского Государственного Университета

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор **Г.Ю. Мехтиева**
	доктор физико-математических наук, профессор. **Т.С. Гаджиев**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук **А.Я.Ахундов**
	доктор физико-математических наук, профессор **И.М.Набиев**
Ведущая организация:	Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет (кафедра «Высшая математика»)

Защита диссертации состоится «29» апреля 2014 г. в 14^{00} часов на заседании Диссертационного Совета FD.02.016 по присуждению ученой степени доктора философии при Бакинском Государственном Университете.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Бакинского Государственного Университета

Адрес: AZ1148, г.Баку, ул. З. Халилова, 23.

Автореферат разослан «17» март 2014 года.

Ученый секретарь Диссертационного Совета FD.02.016 — **Доктор наук по математике, профессор Н.К.Ахмедов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы: Теория устранимости компактов решений краевых задач для вырождающихся уравнений в частных производных второго порядка с неотрицательной характеристической формой в разных функциональных пространствах представляет собой в настоящее время интенсивно развивающийся раздел математики. Отметим, что стимулом подобным исследованиям служит не только внутренняя логика развития теории уравнений в частных производных и исследования в данном направлении является возможность использования полученных результатов в изучении различных прикладных задачах математической физики. К ним можно отнести многочисленные задачи электростатики, теплопередачи, теории фильтрации жидкостей и газа через пористую среду, Броуновского движения, теории Марковских процессов и т.д.

Одним из важных вопросов в качественной теории краевых задач для уравнений в частных производных является теория устранимости компактов решений краевых задач.

Предлагаемая диссертация посвящена изучению условий устранимости граничных компактов решений первой и второй краевой задачи для некоторых классов эллиптических и параболических уравнений 2-го порядка в пространствах весовых гельдеровых функций, и в весовых Соболевских пространства. Получены достаточные условия устранимости компакта в пространстве весовых гельдеровых функций, в весовом Соболевском пространстве в терминах меры Хаусдорфа для некоторого класса вырождающихся квазилинейных уравнений. В этой области отметим важные работы Л. Карлесона, Е.М. Ландиса, В.Г. Мазьи, Е.И. Моисеева, С.В. Гайденко, Ю.В. Егорова, А.И. Новрузова, И.Т. Мамедова, В. Кайзер, Б.Мюллера, Г.Е. Шилова, Б.Л. Гуревича, B.E.J. Dahlberg, R. Harvey, J. Polking, D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Т.С. Гаджиев и др.

Как показано в работах У. Хейман, П. Кеннеди в случае оператора Лапласа для устранимости компакта необходимо обращение в нуль его виперовской емкости. Условия устранимости компактов в классе ограниченных функций относительно недивергентных эллиптических операторов с разрывными коэффициентами было получено Е.М. Ландисом. Им было доказано, что для устранимости компакта достаточно обращение в нуль его риссовской емкости. Вопрос о нахождении условий устранимости компакта в пространстве гельдеровых функций оказался значительно более сложным. А именно Л. Карлесон в своей работе установил, что в случае оператора Лапласа для устранимости компакта в пространстве $C^{0,\lambda}$ необходимо и достаточно обращения в нуль его Хаусдорфовой меры.

Этот результат для квазилинейных уравнений был доказан T.Kilpelainen, X. Zong, а для вырождающихся квазилинейных уравнений был показан T. Makolainen. Для этого он ввел понятие весовой Хаусдорфовой меры.

Цель работы: Исследование вопросов устранимости компактов относительно некоторых классов вырождающихся эллиптических и параболических уравнений 2-го порядка в различных функциональных пространствах.

Общая методика исследования: В работе использованы методы качественной теории уравнений с частными производными, функционального анализа, нелинейного анализа.

Научная новизна: В диссертации исследованы устранимые компакты решений различных краевых задач для вырождающихся линейных и квазилинейных эллиптических и параболических уравнений 2-го порядка. Даны достаточные условия устранимости компакта в терминах меры Хаусдорфа. Получены следующие новые результаты:

- получены условия устранимости компактов для решений линейных вырождающихся недивергентных эллиптических уравнений;
- получены условия устранимости компактов для решений вырождающихся квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений;
- получены условия устранимости компактов для решений вырождающихся линейных параболических недивергентных уравнений;
- получены также условия устранимости компактов для решений вырождающихся квазилинейных дивергентных параболических уравнений.

Теоретическая и практическая ценность: Результаты работы носят теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в изучении различных прикладных задач математической физики.

Апробация работы: Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались в рамках III Международной конференции, посвященной проблемам кибернетики и информационных технологий, ИММ НАН Азербайджана, (Баку, 2010); II Республиканской научной конференции по математике и механике, (Баку, 2010); Турецко-украинской научной конференции, (Мерсин, 2012), XXI Международной конференции по проблемам принятия решений в условиях неопределенности, (Схидница, Украина, 2013).

Публикации: По теме диссертации опубликованы 10 работ, список которых которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации: Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и изложена на 129 страницах. Список литературы включает 68 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения и двух глав.

Во введении обосновывается актуальность темы, дается краткий обзор полученных результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

Прежде чем сформулировать основные результаты диссертации, условимся в следующих обозначениях и определениях.

Пусть E_n означает $n-$мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,...,x_n)$, $\overline{D}$ замыкание области D в E_n, ∂D граница области D, $E\subset\overline{D}$ некоторый компакт, $C^{0,\lambda}(D)$ пространство Гельдеровых функций заданных на D; R_{n+1} - $(n+1)$-мерное евклидовое пространство точек $(x,t)=(x_1,...,x_n,t)$. Рассмотрим цилиндрическую область $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $0<T<\infty$ где $\Omega\subset R^n$, $n\geq 2$ ограниченная область, $\partial\Omega$-ее граница.

Пусть E_0 некоторое компактное множество, лежащее на $\partial\Omega$, $E=E_0\times(0,T)$, $Q_0=\{(x,t): x\in\Omega, t=0\}$, $\Gamma(Q_T)=Q_0\cup\cup(\partial\Omega\times(0,T))$ параболическая граница Q_T; D ограниченная область в E_n и $\lambda\in(0,1)$-некоторое число. Обозначим через $C^{0,\lambda}_{\omega}(D)$ банахово пространство функций $u(x)$ заданных на D с конечной нормой

$$\|u\|_{C^{0,\lambda}_{\omega}(D)}=\sup_{x\in D}\omega(x)|u(x)|+\sup_{\substack{x,y\in D\\ x\neq y}}\frac{|\omega(x)u(x)-\omega(y)u(y)|}{|x-y|^{\lambda}},$$

где $\omega(x)$ весовая функция, удовлетворяющая условию Макенхаупта. Дадим определение A_p, класса Макенхаупта для $1<p<\infty$.

Функция $0\leq\omega\in L_{1,loc}(R^n)$ называется A_p-весом в смысле Макенхаупта, если существует константа $C>0$ такая, что

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\leq C,$$

для всех кубов $Q\in R^n$ с стороной параллельной к оси абцисс. Наименьшая константа C называется A_p-константой ω. Через $C^{0,\lambda}_{\omega}(D,\Gamma_1)$ обозначим замыкание функций из $C^{\infty}(D)$ превращающихся в ноль вблизи Γ_1 в норме $C^{0,\lambda}_{\omega}(D)$.

Пусть D- ограниченная область, расположенная в n-мерном евклидовом пространстве E_n точек $x=(x_1,..x_n)$, $n\geq 3$, ∂D ее граница. L_1 равномерно эллиптический оператор 2-го порядка коэффициенты которого определены в D. Рассмотрим в D следующую краевую задачу

$$L_1u=0, x\in D\setminus E; u|_{\partial D\setminus E}=0,\ u(x)\in C^{0,\lambda}_{\omega}(D), \qquad (1)$$

где E некоторое компактное множество лежащее на ∂D.

Определение 1. *Компакт E называется устранимым относительно оператора L_1 в пространстве, $C^{0,\lambda}_{\omega}(D)$ если задача (1) имеет только тривиальное решение, т.е. $u(x)\equiv 0$ в D.*

Можно дать аналогичное определение для других краевых задач и для параболического оператора.

Пусть Q_T ограниченная область в R_{n+1}. Обозначим через $C^{0,\lambda}_{\omega}(Q_T)$ банахово пространство функций $u(x,t)$ заданных на Q_T с конечной нормой.

$$\|u\|_{C^{0,\lambda}_{\omega(\lambda)}(Q_T)}=\sup_{(x,t)\in Q_T}\omega(x)|u(x,t)|+\sup_{\substack{(x,t),(y,\tau)\in Q_T\\(x,t)\neq(y,\tau)}}\frac{|\omega(x)u(x,t)-\omega(x)u(y,\tau)|}{|x-y|^{\lambda}+|t-\tau|^{\frac{\lambda}{2}}}.$$

Другими словами это пространство функций удовлетворяющих в области Q_T равномерному условию Гельдера (в параболическом смысле) с показателем $\lambda\in(0,1)$. Теперь дадим определение устранимости компакта.

Рассмотрим в Q_T равномерно параболический оператор второго порядка и следующую краевую задачу для него

$$L_2u=0,(x,t)\in Q_T\setminus E;u\big|_{\partial\Gamma(Q_T)\setminus E}=0,u(x,t)\in C^{0,\lambda}_{\omega}(Q_T), \qquad (2)$$

где E некоторый компакт.

Определение 2. *Компакт E называется устранимым относительно оператора L_2 в пространстве $C^{0,\lambda}_{\omega}(Q_T)$ если задача (2) имеет только тривиальное решение, т.е. $u(x,t)\equiv 0$ в Q_T.*

Аналогично определяется устранимость граничного множества относительно второй краевой задачи и смешанной краевой задачи.

Дадим определение меры Хаусдорфа.

Определение 3. *Пусть H ограниченное множество. Множество H покрываем шарами радиуса r_v, где $r_v<\varepsilon$.*

Число определяемым таким образом

$$m^s_H=\lim_{\varepsilon\to 0}\inf\sum_{v=1}^{\infty}r^s_v,$$

называется мерой Хаусдорфа множества H.

Обозначим через $B_R(z)$ и $S_R(z)$ соответственно шар $\{x:|x-z|<R\}$ и сферу $\{x:|x-z|=R\}$ радиуса R с центром в точке $z\in E_n$; через $m^s_H(A)$ будем обозначать меру Хаусдорфа множества A порядка $s>0$.

Обозначим через $W^1_{2,\omega(x)}(D)$ банахово пространство функций $u(x)$, заданных на D, с конечной нормой

$$\|u\|_{W^1_{2/\omega}}=\left(\int_D\omega(x)\left(u^2+\sum_{i=1i}^{n}u_i^2\right)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

и пусть $\overset{0}{W}{}^1_{2,\omega}(D)$-пополнение $C^0_{\infty}(D)$ по норме пространства $W^1_{2,\omega}(D)$.

Перейдем к формулировке основных результатов диссертации.

В первой главе диссертации рассматривается достаточное условие устранимости компакта относительно эллиптических уравнений второго порядка в пространстве $C^{0,\lambda}_{\omega}(D)$.

В 1.1 рассматриваем задачу Дирихле для недивергентного эллиптического уравнения второго порядка. Находится достаточное условие устранимости компакта относительно этого уравнения в пространстве весовых Гельдеровых функций.

Рассмотрим в $D\subset E_n$ следующую краевую задачу для вырождающегося эллиптического уравнения

$$L_1u=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{ij}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_i+c(x)u=0, \qquad (3)$$

предположив, что относительно его коэффициентов выполнены условия: $\|a_{ij}(x)\|-$действительная симметрическая матрица, причем

$$\gamma\omega(x)|\xi|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\le\gamma^{-1}\omega(x)|\xi|^2;\xi\in E_n,x\in D, \qquad (4)$$

$$a_{ij}(x)\in C^1_{\omega}(\overline{D});i,j=1,...n, \qquad (5)$$

$$|b_i(x)|\le b_0;-b_0\le c(x)\le 0;\ i=1,...,n;\ x\in D, \qquad (6)$$

где

$$x \in D, \xi \in E_n\, u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i},\ u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i},\, u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}; i, j = 1,\dots,n; \gamma \in (0,1]$$

и $b_0 \ge 0$-константы.

Доказывается, что для устранимости компакта E относительно задачи (3) в пространстве $C_{\omega}^{0,\lambda}(D)$ достаточно, чтобы

$$m_H^{n-2+\lambda}(E) = 0. \qquad (7)$$

В 1.2 рассматривается вырождающееся дивергентное квазилинейное эллиптическое уравнение второго порядка, старшие коэффициенты которого удовлетворяют равномерному условию Липшица.

Рассмотрим в D краевую задачу

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_i + c(x)u + b(x,u,\nabla u) = 0, \qquad (8)$$

$$u\big|_{\partial D \setminus E} = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям (4)-(6), а также условию

$$\left|b(x,u,\nabla u)\right| \le g(u)\omega(x)\left|\nabla u\right|^2,\ \int_0^a \omega(x)g(u)du < \infty,\ a < \infty\,. \ (9)$$

Теорема 2. *Пусть* D*-ограниченная область в* E_n, $E \subset \overline{D}$*-некоторый компакт. Если относительно коэффициентов оператора* L *выполнены условия (4)-(6), (9), то для устранимости компакта* E *относительно задачи (8) в пространстве* $C_{\omega}^{0,\lambda}(D)$ *достаточно, чтобы*

$$m_H^{n-2+\lambda}(E) = 0.$$

В 1.3 рассматривается задача Неймана для вырождающихся недивергентных эллиптических уравнений второго порядка с младшими членами и доказывается достаточное условие устранимости компакта.

Рассмотрим в D следующую краевую задачу

$$L_i u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_i + c(x)u = 0, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D \setminus E} = 0.$$

Для этой задачи доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* D *ограниченная область в* E_n, $n \ge 2$, $E \subset \overline{D}$ *некоторый компакт. Относительно коэффициентов выполняются условия (4)-(6). Тогда для устранимости компакта* E *относительно задачи (10) в пространстве* $C_{\omega}^{0,\lambda}(D)$*, достаточно, чтобы*

$$m_H^{n-2+\lambda}(E) = 0.$$

В 1.4 рассматривается задача Неймана для вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений дивергентной структуры.

В ограниченной области $D \subset R^n$, $n \ge 3$ рассмотрим следующую краевую задачу, коэффициенты которого удовлетворяют условиям (4)-(6) и (9)

$$L_1 u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_i + c(x)u + b(x,u,\nabla u) = 0, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D \setminus E} = 0. \qquad (12)$$

Решение второй краевой задачи (11), (12) ищем в классе $\left\{W_{2/\omega}^1(D) \cap C_{\omega}^{0,\lambda}(\overline{D} \setminus E); 0 \le u(x) \le k\right\}$.

Теорема 4. *Пусть* D *ограниченная область в* E_n, $n \ge 2$, $E \subset \overline{D}$ *некоторый компакт. Относительно коэффициентов выполняются условия (4)-(6), (9). Тогда для устранимости компакта* E *относительно задачи (11), (12) в пространстве* $C_{\omega}^{0,\lambda}(D)$*, достаточно, чтобы*

$$m_H^{n-2+\lambda}(E) = 0.$$

В 1.5 и 1.6 рассматривается смешанная краевая задача для вырождающихся линейных недивергентных эллиптических уравнений второго порядка, а также для квазилинейных эллиптических уравнений дивергентной структуры. Доказывается достаточное условие устранимости компакта.

Рассмотрим смешанную краевую задачу для вырождающихся недивергентных эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной области $D \subset R^n, n \geq 3$

$$L_1 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_1(x) u_i + c(x) u = 0, \tag{13}$$

$$u\big|_{\Gamma_1} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_2} = 0, \tag{14}$$

где Γ_1 и Γ_2 такие два множества, что $\partial D \setminus E = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ и $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \varnothing$, ∂D граница области D, E некоторый компакт лежащий на ∂D, а $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$-производная по конормали.

Относительно коэффициентов мы предположим, что они измеримы и выполняются условия (4)-(6). Решение смешанной краевой задачи (13), (14) ищем из класса $C^2(D) \bigcap C_{\omega}^{0}(\overline{D} \setminus E)$.

Теорема 5. *Пусть D ограниченная область в E_n, $n \geq 2$, $E \subset \overline{D}$ некоторый компакт. Относительно коэффициентов выполняются условия (4)-(6). Тогда для устранимости компакта E относительно смешанной краевой задачи для задачи (13) (14) достаточно, чтобы*

$$m_H^{n-2}(E) < \infty.$$

Рассмотрим следующую смешанную краевую задачу для вырождающегося квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной области $D \subset E_n^e, \ n \geq 3$

$$L_1 u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_i + c(x) u + b(x, u, \nabla u) = 0, \tag{15}$$

$$u\big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_2} = 0. \tag{16}$$

Решение задачи (15) и (16) мы будем искать в классе $W_{2,0,\omega}^{1}(D) \bigcap$ $\bigcap C_{\omega}^{0,\lambda}(\overline{D}), |u| \leq k$, где $W_{2,0,\omega}^{1}(D) -$ это пространство функций превращающихся в 0 вблизи Γ_1.

Теорема 6. *Пусть D ограниченная область в E_n, $n \geq 2$, $E \subset \overline{D}$ некоторый компакт. Относительно коэффициентов уравнения (15) условия (4)-(6), (9) выполняются. Тогда для устранимости компакта E относительно смешанной краевой задачи для уравнения (15), достаточно, чтобы*

$$m_H^{n-2}(E) < \infty.$$

Вторая глава диссертации посвящена вопросам устранимости компактов решений начально-краевых задач для параболических уравнений. Здесь рассматриваются задачи для вырождающихся недивергентных параболических уравнений второго порядка, а также задачи для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений дивергентной структуры второго порядка.

В 2.1 исследуется вырождающееся недивергентное параболическое уравнение второго порядка. Найдено достаточное условие устранимости компакта относительно этого уравнения в пространстве весовых гельдеровых функций.

Пусть Q_T ограниченная область в R_{n+1} с параболической границей $\Gamma(Q_T)$. Рассмотрим следующее параболическое уравнение и краевую задачу для него

$$L_2 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u_i + c(x,t) u - u_t = 0, \tag{17}$$

$$u\big|_{\Gamma(Q_T) \setminus E} = 0. \tag{18}$$

Относительно коэффициентов предполагается, что они измеримые, ограниченные функции, удовлетворяющие следующим условиям

$$\gamma\omega(x)|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le \gamma^{-1}\omega(x)|\xi|^2; \xi \in E_n, \qquad (19)$$

$$\left|a_{ij}(x,t) - a_{ij}(y,t)\right| \le k_1\omega(x)|x-y|, \qquad (20)$$

$$|b_i(x,t)| \le b_0,\ -b_0 \le c(x,t) \le 0 \qquad (21)$$

Здесь $\gamma \in (0,1]$, $i, j = \overline{1,n}$, k_1-постоянная; младшие коэффициенты измеримые в Q_T функции.

Теорема 7. *Пусть $Q_T = \Omega \times (0,T)$ цилиндрическая область в $R_{n+1}, n \ge 2, E \subset \overline{Q}_T$-некоторый компакт. Относительно коэффициентов выполняются условия (19)-(21). Тогда для устранимости компакта E относительно задачи (17)-(18) в пространстве $C_{\omega}^{0,\lambda}(Q_T)$, достаточно, чтобы*

$$m_H^{n-2+\lambda}(E) = 0.$$

В 2.2 рассматривается задача Дирихле для вырождающегося квазилинейного параболического уравнения дивергентной структуры.

Рассмотрим в области $Q_T \subset R_{n+1}, n \ge 2$ следующую краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения второго порядка

$$L_2 u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_i + c(x,t)u + b(x,t,u,\nabla u) - u_t = 0, \qquad (22)$$

$$u\big|_{\Gamma(Q_T)\setminus E} = 0. \qquad (23)$$

Предположим, что $b(x,t,u,\nabla u)$ удовлетворяет условию

$$|b(x,t,u,\nabla u)| \le g(u)\omega|\nabla u|,\ \int_0^q \omega g(u)du < \infty,\ a < \infty. \qquad (24)$$

Теорема 8. *Пусть $Q_T = \Omega \times (0,T)$ цилиндрическая область в $R_{n+1}, n \ge 2, E \subset \overline{Q}_T$-некоторый компакт. Относительно коэффициентов выполняются условия (19)-(21), (24). Тогда для устранимости компакта E относительно задачи (22)-(23) в пространстве $C_{\omega}^{0,\lambda}(Q_T)$, достаточно, чтобы*

$$m_H^{n-2+\lambda}(E) = 0.$$

В 2.3 и 2.4 были рассмотрены устранимые множества решений задачи Неймана для недивергентных параболических уравнений, а также для квазилинейных параболических уравнений дивергентной структуры.

В ограниченной области Q_T рассмотрим следующую краевую задачу для недивергентного параболического уравнения

$$L_2 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_i + c(x,t)u - u_t = 0, \qquad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma(Q_T)\setminus E} = 0, \qquad (26)$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ производная по конормали. $\partial\Omega$ достаточно гладкая поверхность.

Теорема 9. *Пусть $Q_T = \Omega \times (0,T)$ цилиндрическая область в $R_{n+1}, n \ge 2, E \subset \overline{Q}_T$-некоторый компакт. Относительно коэффициентов выполняются условия (19)-(21). Тогда для устранимости компакта E относительно задачи (25)-(26) в пространстве $C_{\omega}^{0,\lambda}(Q_T)$, достаточно, чтобы*

$$m_H^{n-2+\lambda}(E) = 0.$$

В ограниченной области Q_T рассмотрим следующую краевую задачу для вырождающегося квазилинейного параболического уравнения дивергентной структуры

$$L_2 u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_i + c(x,t)u + b(x,t,u,\nabla u) - u_t = 0, \qquad (27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma(Q_T)\setminus E} = 0. \qquad (28)$$

Решения задачи ищутся в классе $\left\{W_{2/\omega}^1(Q_T) \cap C_{\omega}^{0,\lambda}(\overline{Q}_T), 0 \le u(x,t) \le k\right\}$.

Теорема 10. *Пусть* $Q_T = \Omega \times (0,T)$ *цилиндрическая область в* $R_{n+1}, n \ge 2, E \subset \overline{Q}_T$ *-некоторый компакт. Относительно коэффициентов выполняются условия (19)-(21), (24). Тогда для устранимости компакта* E *относительно задачи (27)-(28) в пространстве* $C_\omega^{0,\lambda}(Q_T)$*, достаточно, чтобы*

$$m_H^{n-2+\lambda}(E) = 0.$$

В 2.5 и 2.6 рассматривается смешанная краевая задача для вырождающихся недивергентных параболических уравнений второго порядка с младшими членами, а также для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений дивергентной структуры. Доказывается достаточное условие, при котором компактное множество является устранимым относительно задачи с равномерно параболическим оператором.

Пусть Γ_1 и Γ_2 два таких множества, что $\Gamma(Q_T) \setminus E = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$. В Q_T

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$L_4 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u_i + c(x,t) u - u_t = 0, \qquad (29)$$

$$u\big|_{\Gamma_1} = 0, \; \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_2} = 0. \qquad (30)$$

Решение смешанной краевой задачи (29), (30) ищем из класса $C^{2,1}(Q_T) \cap C_\omega^0(\overline{Q}_T \setminus E)$.

Теорема 11. *Пусть* $Q_T \subset R_{n+1}, n \ge 2$ *ограниченный цилиндр,* $E \subset \overline{Q}_T$ *некоторый компакт. Относительно коэффициентов выполняются условия (19)-(21). Тогда для устранимости компакта* E *относительно смешанной краевой задачи для уравнения (29) достаточно, чтобы*

$$m_H^{n-2}(E) < \infty.$$

В ограниченной области Q_T рассмотрим следующую краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения дивергентной структуры

$$L_2 u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u_i + c(x,t) u + b(x,t,u,\nabla u) - u_t = 0, \qquad (31)$$

$$u\big|_{\Gamma_1} = 0, \; \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \qquad (32)$$

Решение смешанной краевой задачи для квазилинейного уравнения (31) ищем из класса $\{W_{2,0/\omega}^1(Q_T) \cap \cap C_\omega^{0,\lambda}(\overline{Q}_T \setminus E), 0 \le u(x,t) \le k\}$.

Теорема 12. *Пусть* $Q_T \subset R_{n+1}, n \ge 2$ *ограниченный цилиндр,* $E \subset \overline{Q}_T$ *некоторый компакт. Относительно коэффициентов выполняются условия (19)-(21), (24). Тогда для устранимости компакта относительно смешанной краевой задачи для уравнения (31) достаточно, чтобы*

$$m_H^{n-2}(E) < \infty.$$

Автор выражает глубокую признательность своим научным руководителям проф. Г.Ю Мехтиевой и проф. Т.С. Гаджиеву за постоянное внимание, постановку задач и ценные советы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Q.Y.Mehdiyeva, N.Q.Bayramova On Removable Sets For Degenerated Elliptic Equation// Transactions of NAS of Azerbaijan“Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences” v.XXXII, № 4 Baku-2012. p. 75-78.

2. T. S. Gadjiev, N.Q.Bayramova. Behavior Of Solutions Degenerated Parabolic Equations İn Classes Of Bounded Functions/ XXI İnternational ConferenceProblems Of Decision Making UnderUncertainties(PDMU-2013)ABSTRACTSMay 13-17, 2013 Skhidnytsia, Ukraine p.23-24

3. N.Q. Bayramova O.S. Aliyev /Behavior Of Solutions Degenerated Parabolic Equations./ Prossedings of İMM of NAS of Azerbaijan, v.XXXVII(XLV), Baku-2012, p. 21-24

4. N.Q. Bayramova. Об устранимых множествах решений краевых задачвырождающихся для эллиптических уравнений второго порядка/Вестник Бакинского Университета "Серия Физико-Математических наук "№ 1 Баку-2013, с.54-61
5.G.Y.Mehdiyeva,V.R.,İbrahimov,N.Q.Bayramova/ Construc-tion of a second derivative one-step method of fourth order accuaracy and its application to the solution of Volterra integral equation of second kind /The Third international Conference "Problem of Cybernetics and Informatics", September 6-8, 2010, Baku, Azerbaijan, p. 300-303
6. Г. Ю. Мехтиева, Т. М. Аскеров Н.Г. Байрамова /Об одной модификации многошагового метода /Научно-технический журнал "Технологии и Методики в Образовании" Воронеж 2011№4 с.27-30
7. T. S. Hajıyev , O. S. Aliyev, N.Q. Bayramova. On Removable Set's Of Solutions For Degenerate Equation/ARTN S.D.U. AMEA-nın İ.T.İ"Riyaziyyatın Tətbiqi Məsələləri və Yeni İnformasiya Texnologiyaları" II Respublika Elmi Konfransının Materialları c.30
8. Q.Y.Mehdiyeva, T.S. Hajıyev ,N.Q. Bayramova /On Removable Sets For Degenerated Elliptic Equation/News Of Baku University "Series of Physico-Mathematical Sciences" №3. Baku-2012 p.18-29
9. Gadjiev T.S., Bayramova N.Q. On removable sets for degenerated elliptic equation. Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications, Turkish-Ukrainian Scientific Conference 2012, p.49
10.Gadjiev T.S., Bayramova N.Q. On removable Sets for Generated Elliptic Equations, British Journal of Mathematics and Computer Science 3(2): p. 164-179, 2013

НАТƏВАН ГЯДИМ гызы МЯММЯДОВА

АРАДАН ГАЛДЫРЫЛА БИЛЯН ЧОХЛУГЛАРА МАЛИК ЕЛЛИПТИК ВЯ ПАРАБОЛИК ТЯНЛИКЛЯР ВЯ ОНЛАРЫН ТЯГРИБИ ЩЯЛЛИ

ХЦЛАСЯ

Диссертасийа ишиндя 2-ъи тяртиб хятти вя квазихятти еллиптик вя параболик тянликляр цчцн гойулмуш сярщяд мясяляляриндя арадан галдырыла билян чохлуглар тядгиг едилмишдир. Щаусдорф юлчцсц бахымындан aradan qaldırila билян олмасы цчцн kafi şərtляр мцяййян едилмишдир. Ашаьыдакы нятиъяляр алынмышдыр.

- xətti cırlaşan qeyri divergent elliptik tənliklər цчцн kompaktın aradan qaldırılması цчцн kafi şərtlər alınmışdır;
- kvazixətti cırlaşan divergent elliptik tənliklər цчцн kompaktın aradan qaldırılması цчцн kafi şərtlər tapılmışdır;
- xətti cırlaşan qeyri divergent parabolik tənliklər цчцн kompaktın aradan qaldırılması цчцн kafi şərtlər alınmışdır;
- kvazixətti cırlaşan divergent parabolik tənliklər цчцн kompaktın aradan qaldırılması цчцн kafi şərtlər tapılmışdır;

Mammadova NatavanQadim

The Removable Sets for elliptic and parabolic Equations and Their Approximate Solution.

Summary

In this dissertation, removable sets have been reaserched in boundary problems that are set for second order linear and quasi linear elliptic and parabolic equations. In terms of Hausdorf dimension, for its removability, sufficient results have been obtained. Followings are the results: is obtained

- For linear degenerate nondivergent elliptic equations, of removabilty of compact, sufficient results have been obtained.
- For quasiliner degenerate divergent elliptic equations, of removability of a compact, sufficient results have been obtained.
- For linear degenerate nondivergent parabolic equations of removabiity of a compact, sufficient results have been obtained.
- For quasiliner degenerate divergent parabolic equations of removability of a compact, sufficient results have been obtained.

In this dissertation removable of kompact set for boundary value problem of second order linear and quasilinear elliptic and parabolic equations is investigated.

АЗЯРБАЙЪАН РЕСПУБЛИКАСЫ ТЯЩСИЛ НАЗИРЛИЙИ

БАКЫ ДЮВЛЯТ УНИВЕРСИТЕТИ

Ялйазмасы щцгугунда

НАТӘВАН ГЯДИМ ГЫЗЫ МЯММЯДОВА

АРАДАН ГАЛДЫРЫЛАН ЧОХЛУГЛАРА МАЛИК ЕЛЛИПТИК ВЯ ПАРАБОЛИК ТЯНЛИКЛЯР ВЯ ОНЛАРЫН ТЯГРИБИ ЩЯЛЛИ

1211.01-Diferensial tənliklər

Рийазиййат цзря фялсяфя доктору елми дяряъяси алмаг цчцн тягдим

олунмуш диссертасийанын

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т Ы

БАКЫ -2014