AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

SAMİN TELMAN oğlu MƏLİK

GECİKMƏSİ OLAN BƏZİ SİSTEMLƏRDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRTLƏR

1214.01– Dinamik sistemlər və optimal idarəetmə

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2018

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun «Optimal idarəetmə»** şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:
AMEA-nın müxbir üzvü, prof. **Misir Mərdanov**

Rəsmi opponentlər:
- fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Hamlet Quliyev**
(Bakı Dövlət Universiteti)
- AMEA-nın professoru, r.e.d. **İlqar Məmmədov**
(AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutu)

Aparıcı təşkilat:
Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin «Ümumi və tətbiqi riyaziyyat » kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 16 noyabr 2018-ci il saat 14^{00}-da AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün fəaliyyət göstərən D.01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç., 9

Avtoreferat göndərilib 12 oktyabr 2018-ci il.

Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı: Optimal proseslərin tədqiqatında ən vacib istiqamətlərdən biri zəruri şərtlər nəzəriyyəsidir. Bu nəzəriyyənin inkişafında akademik L. S. Pontryaqinin maksimum prinsipi (optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərt) xüsusi dəyər və əhəmiyyət kəsb etmişdir. Maksimum prinsipinin isbatı ilk dəfə adi diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan optimal proseslər üçün göstərilmişdir. Sonralar Pontryaqinin maksimum prinsipinin analoqu və digər nəticələr daha mürəkkəb sistemlərlə, məsələn, gecikən arqumentli diferensial tənliklər, müxtəlif tip fərq tənliklər, inteqro-diferensial tənliklər, həmçinin, xüsusi törəməli tənliklər və s. başqa tip tənliklər sistemləri ilə təsvir olunan proseslər üçün alınmışdır. Bu istiqamətdə L.T.Aşepkov, V.M.Alekseev, S.S.Haxıyev, K.R.Ayda-zadə, A.G.Butkovski, V.G.Boltyanski,D.H.Chang,F. A.Əliyev,Fam Xıu Şak,Q.T.Əhmədov,H.Halkin,K.Q.Həsənov, G.L.Xaratişvili, A.D.İsgəndərov, M.H.İmanov, F.M.Kirillova, R.Qabasov, R.V. Qamkrelidze,H.F.Quliyev, N.N.Moiseyev, L.İ.Rozonoer, T.A.Tadumadze, A.S.Matveyev, K.B.Mənsimov, M.C.Mərdanov, T.Q.Məlikov, A.I.Propoy, M.A.Sadıqov,V.A.Sroçko, Y.Ə.Şərifov,V.M.Tixomirov, T.A.Tadumadze, R.Q.Tağıyev, O.V.Vasilyev, M.H.Yaqubov,Ş.Ş.Yusubov və s. müəlliflərin işlərini göstərə bilərik.

Zəruri şərtlər nəzəriyyəsində vacib məqsədlərdən biri də optimallıq üçün yüksək tərtib zəruri şərtlərin alınmasıdır. Bu isə, bir qayda olaraq, məxsusi idarəedici funksiyaların optimallığının tədqiqi ilə bilavasitə əlaqəlidir. Məxsusi idarəedici anlayışı ilk dəfə L.I.Rozonoer tərəfindən verilmişdir. İlk nəticələr, idarəedici funksiyaların qiymətlər çoxluğu U açıq çoxluq olduqda Kelli (Kelley H.J.) tərəfindən, Uçoxluğu ixtirayi olduqda isə R. Qabasov tərəfindən alınmışdır.

H.J.Kelli və R.Qabasovun ideyaları, ümumi optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqi zamanı A.A.Aqraçev, R.V.Qamkrelidze, L.T.Aşepkov, A.A.Balonkin, R.Qabasov və F.M.Kirillova, K.Q.Həsənov və B.M.Yusifov, B.S.Qox, V.V.Qoroxovik və S.Y.Qoroxovik, R.E.Kopp və H.G.Moyer, A.Krener, K.B.Mənsimov, M.C.Mərdanov, T.Q.Məlikov, V.A.Sroçko, I.B.Vapnyarski, Ş.Ş.Yusubov və başqaları tərəfindən ümumiləşdirilmiş və inkişaf etdirilmişdir.

Optimal idarəetmə nəzəriyyəsində həm nəzəri, həm də praktiktətbiqinə görə xüsusi əhəmiyyətə malik olan diskret optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqi ilə 1959-cu ildə L.I. Rozonoer məşğul olmuş və yalnız xətti məsələ üçün Pontryaqinin maksimum prinsipinin analoqunu almışdır. 1963-cü ildə A.G. Butkovski göstərmişdir ki, Pontryaqinin maksimum prinsipinin analoqu qeyri-xətti diskret idarəetmə məsələləri üçün ənənəvi şərtlər daxilində ümumiyyətlə doğru deyildir. Diskret optimal idarəetmə məsələlərinin belə xarakterik xüsusiyyəti tədqiqatçıların böyük marağına səbəb olmuşdur. İlk dəfə H.Halkin və həmçinin, A.I. Propoy mümkün sürətləri çoxluğu qabarıq olan qeyri-xətti diskret optimal idarəetmə məsələləri üçün diskret maksimum prinsipinin doğrulunu isbat etmişlər.

Sonralar, tədqiqatlar əsasən, iki istiqamətdə aparılmışdır. Birinci istiqamətdə yuxarıda qeyd etdiyimiz qabarıqlıq şərtini zəiflədərək, diskret maksimum prinsipi və məxsusi (maksimum prinsipi mənada) idarəedicinin optimallığı üçün zəruri şərtlər alınmışdır. İkinci istiqamətdə isə əsasən xəttiləşdirilmiş maksimum prinsipi, Eyler tənliyinin analoquvə ikinci tərtib zəruri şərtlər həmcinin, kvaziməxsusi idarəedicinin optimallığı üçün zəruri şərtlər alınmışdır.

Qeyd edək ki, bir çox tədqiqatçılar, məsələn, A.S.Matveyev, Fam Xıu Şak, G.L.Xaratişvili və T.A.Tadumadze, M.C.Mərdanov və T.Q.Məlikov tərəfindən alınmış nəticələrin təhlili göstərir ki, gecikməyə malik idarəedici funksiyalarla ifadə olunan kəsilməz və diskret optimal idarəetmə məsələləri xarakteriq xüsusiyyətlərə malikdir və onların ətraflı öyrənilməsi üçün yeni daha mükəmməl tədqiqat üsullarına ehtiyac vardır. Həmçinin,çox saylı praktiki tətbiqləri olmasına baxmayaraq belə məsələlər, məsələn, faza dəyişənində gecikməyə malik olan optimal idarəetmə məsələləri ilə müqayisədə az tədqiq olunmuşdur. Bütün bunlara görə gecikməyə malik idarəedici funksiyalarla ifadə olunan kəsilməz və diskret optimal idarəetmə məsələlərinin öyrənilməsi bugün də aktualdır.

İşin məqsədi: Gecikməsi olan idarəedici funksiyalara malik kəsilməz və diskret sistemlərdə verilmiş idarəetmə məsələlərində optimallıq üçün birinci və yüksək tərtib yeni və daha konstruktiv zəruri şərtlərin alınmasıdır.

Ümumi tədqiqat üsulları. İşdə gecikən arqumentli diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin, fərq tənliklər nəzəriyyəsinin və optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin bəzi üsullarından istifadə olunmuşdur.

Elmi yeniliklər. İşin əsas elmi yenilikləri aşağıdakılardır:

- gecikməsi olan idarəedici funksiyalara malik diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərində Pontryaqinin maksimum prinsipinin gücləndirilmiş analoqu və maksimum prinsipi mənada məxsusi idarəedicinin optimallığı üçün R.Qabasov tipli zəruri şərt alınmışdır;
- həmçinin klassik mənada məxsusi idarəedicinin optimallığı üçün daha ümumi halda Kelli tipli və bərabərlik formasında zəruri şərtlər alınmışdır;
- gecikməsi olan idarəedici funksiyalara malik diskret tənliklər

sistemi ilə verilmiş məsələlərdə mümkun idarəedicinin optimallığı üçün Hamilton-Pontryaqin funksiyası ilə ifadə olunmayan və məsələnin məlumlarından hamarlıq, qabarıqlıq tipli fərziyələr tələb etmədən yeni zəruri şərtlər alınmışdır.

- həmçinin diskret məsələlərdə Eyler tənliyinin və xəttiləşmiş maksimum prinsipinin gücləndirilmiş analoqları alınmışdır. Funksionalın ikinci variasiyasına əsasən ikinci tərtib zəruri şərtlər həmcinin, kvaziməxsusi idarəedicinin optimallığı üçün zəruri şərt alınmışdır.

İşin nəzəri və praktiki əhəmiyyəti: Artım üsuluna əsaslanaraq gecikməyə malik idarəedici funksiyalarla ifadə olunan kəsilməz və diskret proseslərin optimal həllinin tapılması üçün yeni tədqiqat sxemləri təqdim olunur. Nəticədə optimallıq üçün yeni, daha güclü və konstruktiv olan birinci və yüksək tərtibli zəruri şərtlər alınmışdır. İş nəzəri xarakter daşıyır. Lakin onun nəticələri müxtəlif təyinatlı texnoloji proseslərin, iqtisadiyyatın, sənayenin və digər məsələlərin optimal həlli zamanı istifadə oluna bilər.

İşin aprobasiyası: Dissertasiya işinin nəticələri Riyaziyyat və Mexanika İnstitunun 55 illiyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri” adlı beynəlxalq elmi konfransda (Bakı, 2014), “Riyazi analiz, Diferensial tənliklər və onların tətbiqi” adlı 7-ci beynəlxalq elmi konfransda (Bakı, 2015), AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun təşkilatçılığı ilə “Qeyri-harmonik analiz və diferensial operatorlar” adlı beynəlxalq elmi seminarda (Bakı, 2016), “Riyaziyyatın Tətbiqi və Nəzəri Problemləri” adlı beynəlxalq elmi konfransda (Sumqayıt, 2017),AMEA-nın müxbir üzvü prof. Q.T. Əhmədovun 100 illik yubileyinə həsr edilmiş “Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri” adlı beynəlxalq elmi konfransda (Bakı, 2017),AMEA, Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “Optimal idarəetmə” şöbəsinin elmi seminarında (rəhbər AMEA-nın müxbir üzvü prof. M.C. Mərdanov), AMEA, İdarəetmə Sistemləri İnstitutunda 2.1 saylı “İdarəetmənin riyazi məsələləri” laboratoriyasının seminarında (rəhbər AMEA-nın professoru İ.Q. Məmmədov) və Bakı Ali Neft Məktəbinin, Neft-qaz mühəndisliyi kafedrasının seminarlarında məruzə edilmişdir.

Çap olunmuş elmi əsərlər: Dissertasiyanin nəticələri müəllifin çap etdirdiyi 11 elmi işində öz əksini tapmışdır [1-11].

Dissertasiyanın həcmi və strukturu: Dissertasiya işi giriş, iki fəsil və 111 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiyanın həcmi 118 səhifədir.

İŞİN ƏSAS MƏZMUNU

Girişdə işin aktuallığı göstərilir, dissertasiya işi ilə əlaqədar olaraq məlum nəticələrin xülasəsi verilir və dissertasiyanın qisa məzmunu şərh olunur.

Birinci fəsildə kecikməyə malik funksiyalarla idarə olunan və adi diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan Mayer tipli aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsi tədqiq olunur:

$$S\big(u(\cdot)\big) = \varphi\big(x(t_1)\big) \to \min_{u(\cdot)} \quad , \qquad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), u(t-h), t), t \in I := [t_0, t_1], x(t_0) = x_0, \qquad (2)$$

$$u(t) \in U(t) \subset R^r, t \in I_h := [t_0 - h, t_1]. \qquad (3)$$

Burada$R^r - r$-ölcülü Evklid fəzası və $R^1 := R := (-\infty, +\infty)$; $x \in R^n$ faza dəyişəni, $u \in R^r$ idarəedici dəyişəni, $x_0 \in R^n$, $t_0, t_1 \in R$ və $h > 0$ qeyd olunmuş nöqtələrdir belə ki, $t_0 + h < t_1$; $\varphi(x): R^n \to R$ və $f(x, u, v, t): R^n \times R^r \times R^r \times I \to R^n$verilmiş funksiyalardır;

$U(t) = V,\ t \in I$ və $U(t) = W, t \in [t_0 - h, t_0)$, belə ki, $V \subset R^r$, $W \subset R^r$ verilmiş coxluqlardır.

$\tilde{C}^+([a,b], R^r)$ ilə hissə-hissə kəsilməz $c(t): [a,b] \to R^r$və hər bir kəsilmə nöqtəsində sağdan kəsilməz olan (b-nöqtəsində soldan kəsilməz) funksiyalar coxluğunu işarə edək.

$\tilde{C}^+(I_h, R^r)$ çoxluğunun (3)şərtini ödəyən hər bir $u(\cdot)$ elementi *mümkün idarəedici* adlanır. (2) sisteminin $u(\cdot)$ mümkün idarəedicisinə uyğun olan $x(\cdot)$ həlli *mümkün trayektoriya*, $\big(u(\cdot), x(\cdot)\big)$ cütü isə *mümkün proses* adlanır. Əgər $u^0(\cdot)$ mümkün idarəedicisi (1)-(3) məsələsinin həllidirsə, onda $u^0(\cdot)$*optimal idarəedici*, $u^0(\cdot)$-a uyğun olan $x^0(t), t \in I$,*optimal trayektoriya*, $\big(u^0(\cdot), x^0(\cdot)\big)$ cütü isə *optimal proses* adlanır.

Fərz olunur ki, (2) sisteminin hər bir mümkün idarəediciyə uyğun olan mütləq kəsilməz həlli$I$ parçasında təyin olunmuşdur.

Birinci fəsil iki bölmədən ibarətdir. Birinci bölmənin əsas nəticəsi kimi (1)-(3) məsələsində maksimum prinsipi mənada məxsusi idarəedicinin optimallığı üçün R.Qabasov tipli zəruri şərt alınmışdır. Bu bölmədə yeni tədqiqat sxemi tətbiq edərək (1) funksionalının artımı üçün ikinci tərtib ayrılış düsturu alınmış (bax dissertasiyada (1.25)) və həmin düsturdan istifadə edərək aşağıdakı teoremlər isbat olunmuşdur.

Teorem 1.1 (Pontryaqinin maksimum prinsipinin analoqu) Fərz edək ki, $\varphi(\cdot)$, $\varphi_x(\cdot)$, $f(\cdot)$ və $f_x(\cdot)$ kəsilməz funksiyalardır. Onda $\big(u^0(\cdot), x^0(\cdot)\big)$ mümkün prosesinin optimal proses olması üçün aşağıdakı bərabərsizliyin doğruluğu zəruridir

$$\chi(\theta)\Delta_{\left(\tilde{u}, u^0(\theta-h)\right)} H(\theta) + \chi(\theta + h)\Delta_{(u^0(\theta+h), \tilde{u})} H(\theta + h) \le 0 \,. \qquad (4)$$

Burada $\chi(\cdot)$ funksiyası $[t_0, t_1)$ çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır, $H(\psi, x, u, v, t) := \psi^T f(x, u, v, t)$ isə Hamilton-Pontryaqin funksiyasıdır;

$$\Delta_{\left(\tilde{u}, u^0(\theta-h)\right)} H(\theta) = \psi^{0^T}(t)[f(x^0(t), \tilde{u}, u^0(t-h), \theta) - f(x^0(\theta), u^0(\theta), u^0(\theta-h), t)],$$

$\Delta_{(u^0(t+h), \tilde{u})\}} H(\theta + h)$ ifadəsi analoji olaraq təyin olunur;

$$\dot{\psi}^0(t) = -H_x(\psi^0(t), x^0(t), u^0(t), u^0(t-h), t), t \in I,$$

$$\psi^0(t_1) = -\varphi_x(x^0(t_1)).$$

Qeyd edək ki, (4) optimallıq şərti başqa üsulla ilk dəfəG.L.Xaratişvili və T.A.Tadumadze tərəfindən alınmışdır.

Sonra

$$\mathrm{U}\big(x^0(\cdot)\big) = \{\, \hat{u}(t) \in U(t),\ t \in I_h :\ f(x^0(t), \hat{u}(t), \hat{u}(t-h), t) - f(x^0(t), u^0(t), u^0(t-h), t) = 0,\ t \in [t_0, t_1],\ \hat{u}(t) \in \tilde{C}^+(I_h, R^r)\}$$

çoxluğunu daxil edərək Teorem 1.1-in yəni Pontryaqinin maksimum prinsipinin gücləndirilmiş variantı verilmişdir (bax dissertasiyadateorem 1.2 və misal 1.1).

Məlumdur ki, (4) maksimum prinsipi bir çox optimal idarəetmə məsələlərində cırlaşır və (1)-(3) məsələsində hətta lokal minimumluq şərtini təmin etmir. Bu halın tədqiqi ilə əlaqədar olaraq aşağıdakı tərifi daxil edək.

Tərif 1.1Fərz edək ki, **a)**$u^0(\cdot)$ mümkün idarəedicisi (4) şərtini ödəyir, **b)**elə $\beta^* > 0$ ədədi, $\theta^* \in [t_0 - h,\ t_1]$ nöqtəsi və $U_0(\theta^*) \subseteq U(\theta^*)$ çoxluğu var ki, aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\chi(t)\Delta_{\left(\tilde{u}, u^0(t-h)\right)} H(t) + \chi(t+h)\Delta_{(u^0(t+h), \tilde{u})} H(t+h) = 0,$$
$$\forall t \in [\theta^*, \theta^* + \beta^*), \quad \forall \tilde{u} \in U_0(\theta^*),$$

burada $U_0(\theta^*) \setminus \{u^0(\theta^*)\} \neq \emptyset$. Onda $u^0(\cdot)$ idarəedicisi θ^* nöqtəsində $U_0(\theta^*)$ çoxluğu üzrə məxsusi (maksimum prinsipi mənada) idarəedici adlanır.

Teorem 1.2 Tutaq ki, $\varphi(\cdot)$ və $f(\cdot)$ funksiyaları və onların $\varphi_x(\cdot), \varphi_{xx}(\cdot), f_x(\cdot), f_{xx}(\cdot)$ xüsusi törəmələri kəsilməzdirlər. Həmçinin, fərz edək ki, $\big(u^0(\cdot),\ x^0(\cdot)\big)$*optimal prosesdir,* belə ki, $u^0(\cdot)$ idarəedicisi θ^*nöqtəsində $U_0(\theta^*)$ çoxluğu üzrə məxsusi (maksimum prinsipi mənada) idarəedicidir. Onda elə $\beta^* > 0$ ədədi var ki, ixtiyari $\theta \in [\theta^*, \theta^* + \beta^*]$ və ixtiyari $\tilde{u} \in U_0(\theta^*)$ üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\chi(\theta)M^0[p(\theta), p(\theta)](\theta, \theta, \tilde{u}) + 2\chi(\theta)\chi(\theta+h)M^0[p(\theta), q(\theta+h)](\theta, \theta + h, \tilde{u}) + \chi(\theta+h)M^0[q(\theta+h), q(\theta+h)](\theta+h, \theta+h, \tilde{u}) \leq 0,$$

$$M^0[p(\xi),q(\eta)](\xi,\eta,\tilde{u}) := \begin{cases} \Delta_{p(\xi)}f^T(\xi)\Psi^0(\xi,\eta)\Delta_{q(\eta)}f(\eta) + \Delta_{p(\xi)}f^T(\xi)\lambda^T(\xi,\eta)\Delta_{q(\eta)}H_x(\eta), & (\xi,\eta) \in D, \\ 0, & (\xi,\eta) \notin D, \end{cases} \tag{5}$$

burada$D := \{(s,\tau): t_0 \leq s \leq \tau \leq t_1\}$,

$$p(\xi) := \big(\tilde{u}, v^0(\xi)\big), \quad v^0(\xi) := u^0(\xi - h), \quad q(\eta) := (u^0(\eta), \tilde{u}),$$

$$\Delta_{p(\xi)}f(\xi) := f(x^0(\xi), \tilde{u}, u^0(\xi-h), \xi) - f(x^0(\xi), u^0(\xi), u^0(\xi-h), \xi),$$

$$\Delta_{q(\eta)}f(\eta) := f(x^0(\eta), u^0(\eta), \tilde{u}, \eta) - f(x^0(\eta), u^0(\eta), u^0(\eta-h), \eta),$$

$$\Delta_{q(\eta)}H_x(\eta) := H_x(\psi^0(\eta), x^0(\eta), u^0(\eta), \tilde{u}, \eta) - H_x(\psi^0(\eta), x^0(\eta), u^0(\eta), u^0(\eta-h), \eta).$$

$$\Psi^0(s,\tau) := \int_\tau^{t_1} \lambda^T(s,t)H_{xx}(t)\lambda(\tau,t)dt - \lambda^T(s,t_1)\varphi_{xx}(x^0(t_1))\lambda(\tau,t_1), \qquad (s,\tau) \in D,$$

$\lambda(s,t)$matris funksiyası aşağıdakı sistemin həllidir

$$\begin{cases} \lambda_t(s,t) = f_x(x^0(t), u^0(t), u^0(t-h), t)\lambda(s,t), \quad t_0 \leq s < t \leq t_1, \\ \lambda(s,s) = E, E - n \times n \text{ ölçülü } vahid\ matrisdir. \end{cases}$$

Qeyd edək ki, (1)-(3) məsələsində $h = 0$ olduqda (5) optimallıq şərtindən R. Qabasovun şərti alınır.

Oxşar nəticələr müxtəlif gecikən arqumentli diferensial tənliklər sistemləri ilə verilmiş optimal idarəetmə məsələləri üçün (başlanğıc çoxluqda idarəedici funksiyalar qeyd olunduqda) müxtəlif üsullarla Q.T. Əhmədov, T.Q. Məlikov və K. Q. Həsənov, K.B. Mənsimov, M.C. Mərdanov, V. Y. Quliyev, S.S.Haxıyev, V.A. Srocko tərəfindən alınmışdır.

Sonrakı alt bölmədə, yəni 1.1.4 alt bölməsində k tərtibli $(k \geq 1)$ cırlaşan məxsusi idarəedici anlayışı verilmiş və onun optimallığı üçün zəruri şərt alınmışdır (bax dissertasiyada tərif 1.3 və teorem 1.4).

Sonuncu alt bölmədə, yəni 1.1.5 də, birinci bölmənin nəticələrinin effektivliyini göstərən misallar verilmişdir.

Birinci fəslin ikinci bölməsində (1)-(3) məsələsinin tədqiqi davam etdirilir. Bu bölmədə klassik mənada məxsusi idarəedici anlayışı verilmiş və onun optimallığı üçün Kelli tipli və bərabərlik formasında zəruri şərtlər alınmışdır.Burada $(u^0(\cdot),x^0(\cdot))$ prosesinin optimallığının tədqiqi zamanı aşağıdakı fərziyyələrdən istifadə olunur.

(B1)$\varphi(\cdot),\ f(\cdot)$ funksiyaları və onların $\varphi_x(\cdot),\varphi_{xx}(\cdot),\ f_z(\cdot),\ f_{zz}(\cdot),(z\in\{x,u,v\})$ xüsusi törəmələri kəsilməzdirlər;

(B2) $f(\cdot)$ funksiyası $R^n\times R^r\times R^r\times I$-də üçüncü tərtib kəsilməz diferensiallanan funksiyadır;

(B3)W və V açıq çoxluqlardır və $\overline{U}_0\subset W,\overline{U}_1\subset V$, burada $U_0:=\{u=u^0(t): t\in[t_0-h,t_0)\},U_1:=\{u=u^0(t): t\in\ I\}$;

(B4) $\dot{u}^0(t)\in\tilde{C}^+(I_h,R^r)$.

Lemma 1.1 Fərz edək ki, (B1) və (B3) fərziyyələri ödənir. Onda $u^0(t),\ t\in\ I_h$, mümkün idarəedicisinin optimallığı üçün aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi zəruridir

$$\chi(t)H_u(t)+\chi(t+h)H_v(t+h)=0,\quad \forall t\in I_h, \tag{6}$$

$$\tilde{u}[\chi(t)H_{uu}(t)+\chi(t+h)H_{vv}(t+h)]\tilde{u}\le 0,\forall t\in I_h,\forall\tilde{u}\in R^r, \tag{7}$$

burada $H(t)=H(\psi^0(t),x^0(t),u^0(t),v^0(t),t)$,

$$H_\mu(t)=H_\mu(\psi^0(t),x^0(t),u^0(t),v^0(t),t),$$
$$H_{\mu\nu}(t)=H_{\mu\nu}(\psi^0(t),x^0(t),u^0(t),v^0(t),t),\quad \mu,\nu\in\{x,u,v\}.$$

Qeyd edək ki, (6) və (7) uyğun olaraq Eyler və Lejandr-Klebş şərtlərinin analoqlarıdır.

Tərif 1.2 Tutaq ki, $(u^0(\cdot),x^0(\cdot))$ prosesi boyunca (6), (7) və $rang[\chi(t)H_{uu}(t)+\chi(t+h)H_{vv}(t+h)]=r_1<r,\ \forall t\in I_h$ şərtləri ödənir. Onda $u^0(\cdot)$ idarəedicisi klassik mənada məxsusi idarəedici adlanır.

Fərz edək ki, $u=(p,q)^T,v=(\tilde{p},\tilde{q})^T$, belə ki, $p,\tilde{p}\in R^{r_0},\ q,\tilde{q}\in R^{r_1}$ və $r_0+r_1=r$. Həmçinin, fərz edək ki, $u^0(\cdot)$ idarəedicisinin məxsusiyyəti p komponentinə görədir, yəni

$$\chi(t)H_{pp}(t)+\chi(t+h)H_{\tilde{p}\tilde{p}}(t+h)=0,\ \forall t\in I_h \tag{8}$$

bərabərliyi ödənir.

Teorem 1.3 Tutaq ki, (B2)-(B4) fərziyyələri ödənir və$u^0(t),\ t\in\ I_h$, (8) şərtini odəyən klassik mənada məxsusi idarəedicidir. Onda $\big(u^0(\cdot),x^0(\cdot)\big)$optimal prosesi boyunca aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$\chi(t)Q_0[p](t)+\chi(t+h)Q_0[\tilde{p}](t+h)=0, \tag{9}$$

$$\xi^T\big(\chi(t)L_1[p](t)+\chi(t+h)L_1[\tilde{p}](t+h)\big)\xi+2\,\xi^T\big(\chi(t)P_1[p,q](t)+\chi(t+h)P_1[\tilde{p},\tilde{q}](t+h)\big)\eta-\eta^T\Big(\chi(t)H_{qq}(t)+\chi(t+h)H_{\tilde{q}\tilde{q}}(t+h)\Big)\eta\ge 0,$$
(10)

$$\forall t \in [t_0 - h, t_1), \forall \xi \in R^{r_0}, \quad \forall \eta \in R^{r_1}.$$

Burada $$L_1[\mu](\tau) := -g_0^T[\mu](\tau)H_{xx}(\tau)g_0[\mu](\tau) + 2g_1^T[\mu](\tau)H_{x\mu}(\tau) + \frac{d}{dt}(g_0^T[\mu](\tau)H_{x\mu}(\tau)),$$

$$P_1[p,q](t) := H_{xp}(t)f_q(t) - g_0^T[p](t)H_{xq}(t),$$

$$P_1[\tilde{p},\tilde{q}](t+h) := H_{x\tilde{p}}(t+h)f_{\tilde{q}}(t+h) - g_0^T[\tilde{p}](t+h)H_{x\tilde{q}}(t+h),$$

$$Q_0[\mu](\tau) := g_0^T[\mu](\tau)H_{x\mu}(\tau) - H_{x\mu}^T(\tau)g_0[\mu](\tau),$$

$$g_0[\mu](\tau) := f_\mu(\tau), \quad g_1[\mu](\tau) = f_x(\tau)g_0[\mu](\tau) - \frac{d}{dt}g_0[\mu](\tau),$$

$\tau \in \{t, t+h\}, \mu \in \{p, \tilde{p}\}$.

Qeyd edək ki, (9) və (10) optimallıq şərtləri məlum olan bərabərlik və Kelli tipli optimallıq şərtlərinin analoqlarıdır. Eyni zamanda, əgər (1)-(3) məsələsində $[t_0 - h, t_0)$ başlanğıc çoxluqda idarəedici funksiya qeyd olunarsa, yəni verilmiş bir funksiyaya bərabər olarsa, onda (9) və (10) optimallıq şərtlərindən M.C. Mərdanov və T.Q. Məlikovun uyğun nəticələri alınır.

İkinci fəsildə gecikməyə malik funksiyalarla idarə olunan və fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunan Mayer tipli aşağıdakı optimal idarəetməməsələsinə baxılır:

$$S\big(u(\cdot)\big) = \Phi\big(x(t_1)\big) \to \min_{u(\cdot)}, \tag{11}$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), u(t-h), t), \qquad t \in I := \{t_0, t_0+1, \dots, t_1 - 1\},$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{12}$$

$$u(t) \in U(t) \subseteq R^r, t \in \{t_0 - h, \dots, t_0, \dots, t_1 - 1\} =: I_h. \tag{13}$$

Burada $x \in R^n$ faza dəyişəni;$u \in R^r$ idarəedici dəyişən;$x_0 \in R^n, t_0, t_1 \in R, h \in \{1, 2, \dots\}$uyğun olaraq vektor və ədədlər olub$t_1 - t_0 > h$; $U(t), t \in I_h$ verilmiş çoxluqlardır;$\Phi(x) : R^n \to R$ və $f(x,u,v,t) : R^n \times R^r \times R^r \times I \to R^n$ verilmiş funksiyalar olub $\Phi(\cdot)$ və hər bir t üçün $f(\cdot, t)$ funksiyaları kəsilməzdir.

(13) şərtini ödəyən hər bir $u(t), t \in I_h$, funksiyası *mümkün idarəedici*adlanır. Əgər $x(t), t \in I \cup \{t_1\}$ funksiyası (12) sisteminin $u(t), t \in I_h$, mümkün idarəedicisinə uyğun həllidirsə, onda $\big(u \ \ (\cdot), x(\cdot)\big)$

cütü *mümkün proses* adlanır. Əgər $u^0(\cdot)$ (11)-(13) məsələsinin həllidirsə, onda $u^0(\cdot)$*optimal idarəedici*, (12) sisteminin ona uyğun olan $x^0(\cdot)$ həlli *optimal trayektoriya*, $\left(u^0 \quad (\cdot), x^0(\cdot)\right)$ isə *optimal proses* adlanır.

İkinci fəsil üç bölmədən ibarətdir. Birinci bölmənin əsas nəticələri (12) sisteminin spesifik xüsusiyyətlərini nəzərə alaraq (11)-(13) məsələsinin məlumlarından hamarlıq və qabarıqlıq tipli fərziyyələri tələb etmədən optimallıq üçün aşağıdakı yeni, lakinHamilton-Pontryaqin funksiyası ilə ifadə olunmayan zəruri şərtlərdir.

Teorem 2.1 Fərz edək ki, $\left(u^0 \quad (\cdot), x^0(\cdot)\right)$ optimal prosesdir. Onda hər biri $i \in \{0, 1, 2\}$üçün

$$\Phi\left(x^0(t_1) + z^{(i)}(t_1; \theta, v)\right) - \Phi\left(x^0(t_1)\right) \geq 0, \qquad (14)$$
$$\forall(\theta, v) \in I_i \times U(\theta)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Burada $z^{(i)}(t_1; \theta, v)$, $i \in \{0, 1, 2\}$ aşağıdakı sistemlərin həlləridir:

$$\begin{cases} z^{(0)}(t+1; \theta, v) = f\left(x^0(t) + z^{(0)}(t; \theta, v), u^0(t), u^0(t-h), t\right) - f(t), \\ t \in \{\theta + h + 1, \dots, t_1 - 1\}, \\ z^{(0)}(\theta + h + 1; \theta, v) = \Delta_{(u^0(\theta+h), v))} f(\theta + h), \qquad \theta \in I_0 = \{t_0 - h, \dots, t_0 - 1\}, \\ z^{(0)}(t; \theta, v) = 0, \quad t \leq \theta + h, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^{(1)}(t+1; \theta, v) = f\left(x^0(t) + z^{(1)}(t; \theta, v), u^0(t), u^0(t-h), t\right) - f(t), \\ t \in \{\theta + h + 1, \dots, t_1 - 1\}, \\ z^{(1)}(\theta + h + 1; \theta, v) = f\left(x^0(\theta + h) + z^{(1)}(\theta + h; \theta, v), u^0(\theta + h), v, \theta + h\right) \\ -f(\theta + h), \\ z^{(1)}(t+1; \theta, v) = f\left(x^0(t) + z^{(1)}(t), u^0(t), u^0(t-h), t\right) - f(t), \\ t \in \{\theta + 1, \dots, \theta + h - 1\}, \\ z^{(1)}(\theta + 1; \theta, v) = \Delta_{(v, u^0(\theta - h))} f(\theta), \qquad \theta \in I_1 = \{t_0, t_0 + 1, \dots t_1 - h - 1\}, \\ z^{(1)}(t; \theta, v) = 0, \quad t \leq \theta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^{(2)}(t+1;\theta,v) = f\big(x^0(t)+z^{(2)}(t;\theta,v),u^0(t),u^0(t-h),t\big) - f(t), \\ \qquad t \in \{\theta+1,\dots,t_1-1\}, \\ z^{(2)}(\theta+1;\theta,v) = \Delta_{(v,u^0(\theta-h),))} f(\theta), \qquad \theta \in I_2 = \{t_1-h,\dots t_1-1\}, \\ \qquad z^{(2)}(t;\theta,v) = 0, \quad t \le \theta, \end{cases}$$

$$\Delta_{(u^0(\theta+h),v)} f(\theta+h) := f(x^0(\theta+h),u^0(\theta+h),v,\theta+h) - f(\theta+h),$$

$$\Delta_{\left(v,u^0(\theta-h)\right)} f(\theta) := f(x^0(\theta),v,u^0(\theta-h),\theta) - f(\theta).$$

Göründüyü kimi (14) optimallıq şərti, diskret optimal idarəetmə məsələlərinin həlli üçün məlum olan zəruri şərtlərdən fərqli olaraq daha geniş tətbiq sferasına malikdir. Sonra, (14) optimallıq şərtindən Hamilton-Pontryaqin funksiyası ilə ifadə olunan optimallıq şərtləri alınmışdır (bax dissertasiyada nəticə 2.1 və 2.2) və göstərilmişdir ki, çox saylı optimal idarəetmə məsələlərindən fərqli olaraq (11)-(13) məsələsində $\Phi(x) = c^T x$və $f(\cdot)$ funksiyası faza dəyişəninə nəzərən xətti olduqda da Pontryaqinin maksimum prinsipinin analoqu onun üçün həmişə doğru olmur (bax dissertasiyada misal 2.1).

İkinci fəslin ikinci bölməsində (11)-(13) məsələsinin xüsusi halına baxılır və fərz olunur ki, (12) sistemi gecikməyə malik deyil, yəni $f(\cdot) = f(x,u,t)$, $h = 0$. Bu bölmədə, 2.1 bölməsindəki tədqiqat üsulundan istifadə edərək daha güclü və konstruktiv zəruri şərt və onun effektiv nəticələri alınmışdır.

Teorem 2.2Fərz edək ki, $\left(u^0 \quad (\cdot), x^0(\cdot)\right)$ mümkün prosesdir. Onda:

(a) $u^0(\cdot)$ mümkün idarəedicinin optimallığı üçün aşağıdakı bərabərsizliyin doğru olması zəruridir:

$$\Phi\big(x^0(t_1) + z(t_1;\hat{u},x^0,\alpha,\alpha_k)\big) - \Phi\big(x^0(t_1)\big) \ge 0, \tag{15}$$
$$\forall \hat{u}(\cdot) \in U[x^0(\cdot)](t), t \in I, \forall \alpha = (\theta,v) \in I \setminus \{t_1-1\} \times U(\theta),$$
$$\forall \alpha_k = (\theta_{k,}\tilde{v}) \in \{\theta_1,\theta_2,\dots\} \times U(\theta_k);$$

(b) əgər:**(1)**I çoxluğu iki nöqtədən ibarət olarsa, yəni $I = \{t_0, t_0+1\}$, $t_1 = t_0 + 2$; **(2)** (15) bərabərsizliyi, məsələn $\hat{u} = u^0(\cdot)$ boyuncabütün $\alpha = (t_0, v)$ $(v \in U(t_0))$ və $\alpha_1 = (t_0+1,\tilde{v})\big(\tilde{v} \in U(t_0+1)\big)$ üçün doğru olarsa, onda $u^0(t), t \in I$, optimal idarəedicidir.

Burada

$$U[x^0(\cdot)](t) = \{\hat{u} \in U(t): f(x^0(t),\hat{u},t) = f(x^0(t),u^0(t),t)\}, \qquad t \in I;$$

$z(t;\ \hat{u}, x^0, \alpha, \alpha_k), t \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, t_1\}$funksiyası aşağıdakı sistemin həllidir:

$$\begin{cases} z(t+1; \hat{u}, x^0, \alpha, \alpha_k) = f(x^0(t) + z(t; \hat{u}, x^0, \alpha, \alpha_k), u^0(t), t) - f(x^0(t), u^0(t), t), \\ \qquad t \in \{\theta_{k+1}, \theta_{k+2}, \dots\} \cap I, \\ z(\theta_k; \hat{u}, x^0, \alpha, \alpha_k) = f(x^0(\theta_k) + z(\theta_k; \hat{u}, x^0, \alpha), \tilde{v}, \theta_k) - f(x^0(\theta_k), u^0(\theta_k), \theta_k), \\ \qquad t = \theta_k \in I\ , \\ z(t+1; \hat{u}, x^0, \alpha) = f(x^0(t) + z(t; \hat{u}, x^0, \alpha), \hat{u}(t), t) - f(x^0(t), u^0(t), t), \\ \qquad t \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1}\} \cap I, \\ z(\theta_1; \hat{u}, x^0, \alpha) = \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta), \ \ \theta \in I. \end{cases}$$

Sonra (11)-(13) məsələsinin bəzi xüsusi hallarına baxılır:
(a) $f(\cdot) = A(u,t)x + b(u,t), \Phi(\cdot) = c^T x + x^T D x,\ x \in R^n$;
(b) $f(\cdot) = A(u,t)x + b(u,t), \Phi(\cdot) = c^T x,\ x \in R^n$;
(c) $f(\cdot) = A(u,t)x + b(u,t), \Phi(\cdot) = c^T x + |d^T x|,\ x \in R^n$.

Nəticədə (15) optimallıq şərtindən konstruktiv olan optimallıq şərtləri alınmışdır (bax dissertasiyada nəticə 2.4 – 2.5). Alınmış zəruri şərtlərin effektivliyi misallar vasitəsilə göstərilmişdir (bax alt bölüm 2.2.3).

İkinci fəslin son bölümündə (11)-(13) məsələsinin tədqiqi davam etdirilir. Burada Eyler tipli və ikinci tərtib zəruri şərtlər, həmçinin xəttiləşmiş diskret maksimum prinsipi və kvaziməxsusi idarəedicinin optimallığı üçün zəruri şərt alınmışdır. Tədqiqat zamanı aşağıdakı fərziyyələr qəbul olunur:

(C1) hər bir $t \in I$ üçün $f(\cdot,t)$ və onun $f_y(\cdot,t),\ y \in \{x,u,v\}$xüsusi törəməsi kəsilməz funksiyalardır, həmçinin$\Phi(\cdot)$ funksiyası birinci tərtib kəsilməz diferensiallanandır;

(C2) hər bir $t \in I$ üçün $f(\cdot,t),\ f_y(\cdot,t),\ f_{yy}(\cdot,t),\ y \in \{x,u,v\}$və $\Phi(\cdot),\ \Phi_x(\cdot),\ \Phi_{xx}(\cdot)$ funksiyaları kəsilməzdirlər;

(C3) hər bir $t \in I_h$ üçün $U(t)$açıq çoxluqdur;

(C4) hər bir $t \in I_h$ üçün $U(t)$qabarıq çoxluqdur.

Bu fərziyyələrdən istifadə edərək yeni tədqiqat sxeminin tətbiqi ilə aşağıdakı teoremlər isbat edilmişdir.

Teorem 2.3 Tutaq ki, (C1) və (C3) fərziyyələri ödənir və $(u^0(\cdot), x^0(\cdot))$optimal prosesdir. Onda $(\hat{u}(t), \hat{u}(t-h)) \in U[x^0(\cdot)](t), t \in I$, şərtini ödəyən hər bir $\hat{u}(\cdot)$ mümkün idarəedicisi və ixtiyari$\theta \in I_h$ üçün

$$\chi_I(\theta) H_u(\theta; \hat{u}) + \chi_I(\theta + h) H_v(\theta + h; \hat{u}) = 0 \qquad (16)$$

bərabərliyi doğrudur, burada$\chi_I(\cdot)$ funksiyası I çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır; $H(\psi, x, u, v, t) = \psi^T f(x, u, v, t)$,

$$H_\mu(\tau;\hat{u}) := H_\mu\big(\hat{\psi}(\tau), x^0(\tau), \hat{u}(\tau), \hat{u}(\tau-h), \tau\big), \tau \in I, \mu \in \{u,v\};$$

$\hat{\psi}(t), t \in I$ funksiyası aşağıdakı sistemin həllidir:

$$\hat{\psi}(t-1) = f_x(t;\hat{u})\hat{\psi}(t), \quad \hat{\psi}(t_1-1) = -\Phi_x\big(\hat{x}(t_1)\big), \tag{17}$$
$$f_x(t;\hat{u}) = f_x(x^0(t), \hat{u}(t), \hat{u}(t-h), t).$$

Teorem 2.4 Tutaq ki, (C2) və (C3) fərziyyələri ödənir və $\big(u^0(\cdot), x^0(\cdot)\big)$ optimal prosesdir.

Onda $\big(\hat{u}(t), \hat{u}(t-h)\big) \in U[x^0(\cdot)](t), t \in I$, şərtini ödəyən hər bir $\hat{u}(\cdot)$ mümkün idarəedicisi və ixtiyari $(\theta, \tilde{u}) \in I_h \times R^r$ üçün

$$\tilde{u}^T L\big(\theta; \hat{u}(\cdot)\big)\tilde{u} \le 0 \tag{18}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Burada

$$U[x^0(\cdot)](t) = \{(u,v) \in U(t) \times U(t-h): f(x^0(t), u, v, t) - f(x^0(t), u^0(t), u^0(t-h), t) = 0\}, t \in I;$$

$$L\big(\theta;\ \hat{u}(\cdot)\big) := \chi_I(\theta)\hat{\Gamma}[u](\theta) + 2\chi_I(\theta)\chi_I(\theta+h) \times \times \widehat{M}[u,v](\theta, \theta+h) + \chi_I(\theta+h)\hat{\Gamma}[v](\theta+h), \tag{19}$$

$$\hat{\Gamma}[p](t) := f_p^T(t;\hat{u})\widehat{\Psi}(t)f_p(t;\hat{u}) + H_{pp}(t;\hat{u}), \ \ p \in \{u,v\}, t \in I,$$

$$\widehat{M}[u,v](\theta,\theta+h) := f_u^T(\theta;\hat{u})\hat{Z}^T(\theta+h,\theta)\big[f_x^T(\theta+h;\hat{u})\widehat{\Psi}(\theta+h) \times f_v(\theta+h;\hat{u}) + H_{xv}(\theta+h;\hat{u})\big], \ \ \theta \in \{t_0, \dots, t_1-1-h\},$$

$$\hat{Z}(t+1,\theta) = \begin{cases} f_x(t;\hat{u})f_x(t-1;\hat{u}) \dots f_x(\theta+1;\hat{u}), & t \in \{\theta+1, \dots t_1-1\}, \\ E, \quad t = \theta \ \ (E \ \ vahid\ matrisdir), \end{cases}$$

$$H_{\mu\xi}(t;\hat{u}) := H_{\mu\xi}\big(\hat{\psi}(t), x^0(t), \hat{u}(t), \hat{u}(t-h), t\big), t \in I, \qquad \mu, \xi \in \{x,u,v\},$$

$\hat{\psi}(t), t \in I$ funksiyası (17) sisteminin həllidir, $\widehat{\Psi}(t), t \in I$ matris funksiyası isə aşağıdakı sistemin həllidir:

$$\widehat{\Psi}(t-1) = f_x^T(t;\hat{u})\widehat{\Psi}(t)f_x(t;\hat{u}) + H_{xx}(t;\hat{u}),$$
$$\widehat{\Psi}(t_1-1) = -\Phi_{xx}(x^0(t_1)).$$

Teorem 2.5 Tutaq ki, (C1) və (C4) fərziyyələri ödənir və$\left(u^0\ (\cdot), x^0(\cdot)\right)$optimal prosesdir. Onda $\left(\hat{u}(t), \hat{u}(t-h)\right) \in U[x^0(\cdot)](t), t \in I$ şərtini ödəyən hər bir $\hat{u}(\cdot)$ mümkün idarəedicisi və ixtiyari$(\theta, \tilde{u}) \in I_h \times U(\theta)$ üçün

$$[\chi_I(\theta)H_u^T(\theta;\tilde{u}) + \chi_I(\theta+h)H_v^T(\theta+h;\tilde{u})]\left(\tilde{u}-\hat{u}(0)\right) \leq 0 \quad (20)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Tərif 2.1. Fərz edək ki, $\left(\hat{u}(t), \hat{u}(t-h)\right) \in U[x^0(\cdot)](t), t \in I$şərtini ödəyən hər bir $\hat{u}(\cdot)$ mümkün idarəedicisi üçün (20) optimallıq şərti ödənir. Əgər $\theta \in I_h$ nöqtəsində və $U_0(\theta) \subseteq U(\theta)$, $U_0(\theta) \setminus \{\hat{u}(\theta)\} \neq \emptyset$ şərtlərini ödəyən $U_0(\theta)$çoxluğunun ixtiyari $\tilde{u}$ elementi üçün

$$[\chi_I(\theta)H_u^T(\theta;\tilde{u}) + \chi_I(\theta+h)H_v^T(\theta+h;\tilde{u})]\left(\tilde{u}-\hat{u}(0)\right) = 0$$

bərabərliyi doğrudursa, onda $\hat{u}(\cdot)$ mümkün idarəedicisinəθ nöqtəsində $U_0(\theta)$ çoxluğu üzrə *kvaziməxsusi idarəedici* deyəcəyik.

Teorem 2.6 Tutaq ki, (C2) və (C4) fərziyyələri ödənir və$\left(u^0\ (\cdot), x^0(\cdot)\right)$ optimal prosesdir. Əgər $\hat{u}(\cdot)$ mümkün idarəedicisi θ nöqtəsində $U_0(\theta)$ çoxluğu üzrə kvaziməxsusi idarəedici olarsa, onda

$$\left(\tilde{u}-\hat{u}(0)\right)^T L\left(\theta;\hat{u}(\cdot)\right)\left(\tilde{u}-\hat{u}(0)\right) \leq 0, \forall \tilde{u} \in U_0(\theta) \quad (21)$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada $L\left(\cdot\,;\hat{u}(\cdot)\right)$ funksiyası (19) vasitəsi ilə təyin olunur.

Qeyd edək ki, (16) optimallıq şərti Eyler tənliyinin analoqudur, (20) optimallıq şərti(11)-(13) məsələsi üçün xəttiləşdirilmiş diskret maksimum prinsipidir, (18) və (21) optimallıq şərtləri isə R.Qabasov tipli ikinci tərtib zəruri şərtlərdir. Sonuncu 2.3.5 alt bölməsində göstərilmişdir ki, (16), (18), (20) və (21) optimallıq şərtləri Fam Xıu Şakın uyğun nəticələrinin ümumiləşmiş və gücləndirilmiş variantlarıdır.

Sonda elmi rəhbərim əməkdar elm xadimi, AMEA-nın müxbir üzvü prof. Misir Mərdanova məsələnin qoyuluşu və işin yerinə yetirilməsində dəyərli məsləhətlərinə görə dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşagıdakı elmi işlərdə öz əksini tapmışdır.

1. Малик С.Т. К оптимизации дискретных систем / Актуальные Проблемы Математики и Механики, Международной конференции, посвященной 55-летию Института Математики и Механики, Баку, 2014, 15-16 май,с. 222-224.

2. Mardanov M.J., Malik S.T.On the Necessary Conditions of Optimality in Discrete Systems // Reports of National Academy of Science of Azerbaijan, 2015, v. LXXI, № 1, pp. 6-9.
3. Mardanov M.J., Malik S.T., Mahmudov N.I. On the Theory of Necessary Optimality Conditions in Discrete Systems // Advances in Difference Equations, Springer,2015: 28. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0363-4, pp.1-15.
4. Mardanov M.J., Malik S.T. Optimality Conditions for non-smooth Control with Discrete System / Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications,Azerbaijan-Turkey-Ukrainian International conference, Baku, 2015, September 08-13, pp. 110-111.
5. Malik S.T. On Necessary Optimality Conditions in discrete systems with retarded control / International Workshop on Non-Harmonic Analysis and Differential Operators, Baku, 2016, p. 68.
6. Malik S.T. The transformation of variation method for studying singular controls in dynamical systems with a delay in control/ Materials of "Theoretical and Practical Problems of Mathematics" International Scientific Conference, Sumqayit 2017, 25-26 May, p. 201.
7. Malik S.T. The Maximum Principle of Pontryagin type for Discrete Systems with Delay in Control / Materials of Scientific Conference "Actual problems of Mathematics and Mechanics" dedicated to the 100th jubilee of Goshgar Ahmedov, 2017, p.94.
8. Malik S.T. Kelley type Necessary Condition in Dynamic Systems with a Delay in Control // Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, 2017, v.37, No 4, pp. 87–101.
9. Mardanov M.J., Malik S.T. Necessary First- and Second-Order Optimality Conditions in Discrete Systems with a Delay in Control// Journal of Dynamical and Control Systems, Springer, 2018: https://doi.org/10.1007/s10883-017-9394-3, pp.1-15.
10. Malik S.T. On the theory of necessary optimality conditions in discrete systems with a delay in control // Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, 2018, v.38, No 1, pp. 105–113.
11. Malik S.T. On Necessary Optimality Conditions for Singular Controls in Dynamical Systems with a Delay in Control // Numerical Functional Analysis and Optimization, Taylor & Francis,2018: https://doi.org/10.1080/01630563.2018.1489415,pp.1-21.

САМИН ТЕЛМАН оглы МАЛИК

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

РЕЗЮМЕ

Диссертационная работе состоит из введения и двух глав.В первой главе исследуется задачи оптимального управления описываемые системами дифференциальных уравнений с запаздыванием в управлении. Предлагая новую схему вывода необходимых условий оптимальности получены следующиерезультаты:

- один усилений вариант аналога принципа максимума Понтрягина;
- необходимые условия оптимальности типа Р.Габасова для особых (в смысле принципа максимума) управлений;
- необходимые условия оптимальности типа Келли и типа равенства для особых (в классическом смысле) управлений.

В второй главе в диссертационной работы исследуется задачи оптимального управления описываемые системами дискретных уравнений с запаздыванием в управлении.

Здесь с довольно общими исходными данными (без предположений типа выпуклости и гладкости) и, учитывая специфику дискретных систем получены необходимые условия оптимальности, не сформулированные через функцию Гамильтона-Понтрягина.Показано, что эти условияоптимальности в часности, содержать некоторые известные, а также новые, более эффективне необходимые условии оптимальности. Кроме того, как специфическая особенностирассматриваемых задач, покозано, что дискретный аналог принципа максимума Понтрягина не всегда верно, даже для линейной дискретной задачи с запаздыванием в управлении. А также получены:

- усиленные дискретные аналоги уравнения Эйлера и линеаризованный принципа максимума;
- необходимые условия оптимальностивторого порядка, основанное на второй вариации функционала качества и условия оптимальности квази-особых управлений.

SAMIN TELMAN MALIK

NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN SOME SYSTEMSWITH A DELAY

SUMMARY

In the dissertation, firstly, the optimal control problems described by systems of differential equations with a delay in a control are studied. By proposing a new scheme for deriving the necessary conditions for an optimality, we obtain the followings:

• a strengthened version of analogue of Pontryagin's maximum principle;

• R.Gabasov type necessary optimality conditions for singular (in the sense of the maximum principle) controls;

• Kelly and equality type necessary optimality conditions for singular (in the classical sense) controls.

Then, in the dissertation work,the optimal control problems described by systems of discrete equations with a delay in control.Here, with rather general initial data (without assuming of convexity and smoothness), and taking into account the specifics of discrete systems, the necessary optimality conditions are obtained which are not formulated by the Hamilton-Pontryagin function.It is shown that these conditions, in particular, contain some known, as well as new, more efficient necessary conditions for optimality. In addition, as a specific feature, it is mooted that a discrete analogue of the Pontryagin's maximum principle is not always true, even for a linear discrete problem with a delay in control. Further, in conclusion,the followings are obtained:

(a) strengthened discrete analogues of Euler equation and the linearized maximum principle;

(b) second-order necessary optimality conditions, based on the second variation of an objective functional and the optimality condition for quasi-singular controls.

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

САМИН ТЕЛМАН ОГЛЫ МАЛИК

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

1214.01 – Динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математическим наукам

Баку– 2018