МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЗАХИРА ВАХИД гызы МАМЕДОВА

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ БАЗИСНЫХ СВОЙСТВ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1211.01-Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

**Диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике**

БАКУ – 2014

Работа выполнена на кафедре «Дифференциальные и интегральные уравнение» Бакинского Государственного Университета

Научные руководитель: Член корр.НАНА, профессор **Б.Т.Билалов**

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук, профессор **И.М.Набиев**

Доктор математических наук **В.Э.Исмаилов**

Ведущая организация: Азербайджанский Государствкнный Педагогический Университет (кафедра «Математический анализ»)

Защита диссертации состоится «23» сентября 2014 г. в 14^{00} часов на заседании Диссертационного Совета FD.02.016 по присуждению ученой степени доктора философии при Бакинском Государственном Университете.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Бакинского Государственного Университета

Адрес: AZ1148, г.Баку, ул. З. Халилова, 23.

Автореферат разослан «09» июля 2014 года.

Ученый секретарь Диссертационного Совета FD.02.016 **Доктор математических наук, профессор Н.К.Ахмедов**

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Əlyazma hüququnda

ZAHIRƏ VAHID QIZI MƏMMƏDOVA

DİFERENSİAL OPERATORLARIN MƏXSUSİ ELEMENTLƏR SİSTEMİNİN BAZİSLİK XASSƏLƏRİNİN ÜMUMİLƏŞMƏLƏRİ HAQQINDA

1211.01 - Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim olunmuş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

BAKI – 2014

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из методов часто применяемых при решении задач математической физики, механики и уравнений в частных производных является метод разделения переменных (метод Фурье). Как обычно, решение задачи сводится к изучению спектральной задачи относительно дифференциального оператора, порождённого пространственными переменными. Обоснование метода Фурье требует изучение базисных свойств (полнота, минимальность, базисность и др.) корневых элементов (если оператор дискретный) соответствующих дифференциальных операторов в различных функциональных пространствах. Хорошими примерами этому кругу вопросов являются известные задачи Штурма - Лиувилля и Шредингера. Эти задачи соответствуют дифференциальным операторам второго порядка. В одномерном случае общее выражение линейного дифференциального оператора имеет вид

$$Ly = a_0(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t), \tag{1}$$

где a_k, $k = \overline{0,2}$ – заданные на сегменте (a,b) функции. В зависимости от рассматриваемого пространства определяется область определения D_L оператора L. С помощью известных преобразований выражение (1) сводится к виду

$$Lu = r^{-1}(t)\left(-(pu')' + qu\right). \tag{2}$$

При так называемом регулярном случае с $(r(t) \equiv 1)$ некоторыми краевыми условиями (напр. с разделёнными краевыми условиями) спектральная задача, соответствующая оператору (2), достаточно хорошо изучена и этой теории посвящены монографии известных математиков как, Левинсон, Тамаркин, Наймарк и др. Сингулярные случаи (т.е. либо сегмент (a,b) является бесконечным, либо $p(t)$ на концах (a,b) может обращаться в бесконечность) являются более сложными и возможны разные картинки относительно соответствующих спектральных задач. Достаточно напомнить, что специальные полиномы как Лагерра, Лежандра, Гегенбауэра, функции Бесселя и др. связаны именно с такими задачами. Если $r \in C[a,b]$ ($C(M)$ – пространство непрерывных на M функций) и $r(t) > 0, \forall t \in [a,b]$, то изучение спектральной задачи относительно оператора (2) сводится к регулярному случаю. Если же $r; p \in C(a,b)$ и на концах (a,b) могут обращаться в бесконечность, то естественно этот случай не является регулярным и не сводится к регулярному случаю. В подобных обстоятельствах возможны случаи, когда собственные функции соответствующего оператора полны и минимальны в надлежащем пространстве, но не образуют базис в нём. Даже возможно случай, когда система из собственных функций полна и неминимальна, имеет конечный дефект, но при этом не является атомарным разложением, т.е. не имеет место разложение произвольного элемента пространства по этой системе. Продемонстрируем вышеизложенные на следующем примере.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Lu = u'' - 2\alpha x^{-1}u' + \alpha(\alpha+1)x^{-2}u,\ x \in (0,\pi),$$

где $\alpha \in (-1,+\infty)$. С этим выражением связываем оператор L с областью определения D_L:

$$D_L \equiv \left\{ u \in W_p^2(\varepsilon,\pi) : \forall \varepsilon \in (0,\pi),\ \lim_{x\to+0}\left[x^{-\alpha}u(x)\right] = 0,\ \left[x^{-\alpha}u(x)\right]'\Big|_{x=\pi} = 0 \right\}.$$

Нетрудно заметить, что $u_n = x^{\alpha}\cos nx, n \in Z$ (Z – целые числа), являются собственными функциями оператора L. Базисные свойства этой системы в $L_p(0,\pi)$ непосредственно зависят от параметра α. При этом возникает случай дефекта. Естественно возникает вопрос об исследовании всевозможных вариантов относительно базисных свойств подобных систем. В диссертационной работе подробно изучаются фреймовые свойства вырожденных систем экспонент и косинусов в пространствах Лебега $L_p, 1 \le p < +\infty$.

Хорошо известно, что каждый базис в банаховом пространстве порождает соответствующее банахово пространство коэффициентов. Базисы двух банаховых пространств изоморфны тогда и только тогда, когда их пространства коэффициентов совпадают. Таким образом, пространство коэффициентов играет особую роль при изучении тех или иных свойств базисов. Естественно возникает потребность к изучению следующих вопросов:

1. Пространство коэффициентов базиса в линейных метрических пространствах;

2. Вообще говоря, какие системы обладают пространство коэффициентов в банаховых и метрических пространствах.

В диссертационной работе подробно изучаются эти вопросы.

Следует отметить, что вопрос, поставленный Н. К. Бари ещё 1946 г. о существовании нормированного базиса в $L_2(a,b)$, не являющимся базисом Рисса, имеет непосредственное отношение к сингулярным задачам. Впервые, контрпример этому вопросу был построен К. И. Бабенко. Этим примером является вырождающаяся система экспонент $\left\{|t|^{\alpha} e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$, где $\alpha \neq 0, |\alpha| < \frac{1}{2}$. Совершенно очевидно, что $u_n(t) = |t|^{\alpha} e^{\mathrm{int}}$, $n \in Z$, является собственной функцией следующей спектральной задачи

$$\left(|t|^{-\alpha} u\right)' = \lambda |t|^{-\alpha} u,\ t \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi),$$
$$\lim_{t\to-\pi+0} |t|^{-\alpha} u(t) = \lim_{t\to\pi-0} t^{-\alpha} u(t),$$
$$\lim_{t\to-0} |t|^{-\alpha} u(t) = \lim_{t\to+0} |t|^{-\alpha} u(t).$$

К. И. Бабенко доказал, что при $\alpha \neq 0, |\alpha| < \frac{1}{2}$, система $\left\{|t|^{\alpha} e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$ образует базис в $L_2(-\pi,\pi)$, но не является базисом Рисса. Затем этот результат обобщил Г. Ф. Гапошкин. Отметим, что фреймовые свойства вырождающейся системы экспонент в лебеговых пространствах функций крепко связаны с соответствующими свойствами обычной системы экспонент в весовых пространствах, вес которых определяется вырождающимся коэффициентом. В этом смысле к числу подобных работ можно отнести результаты авторов Е. И. Моисеев, Пухов, А. М. Седлецкий, К. С. Казарян, П. И. Лизоркин и др. Более сложный случай системы экспонент с двумя разными вырождениями рассмотрен в работах Б. Т. Билалова и С. Г. Велиева.

В связи с растущими приложениями в различных областях естествознания понятие фрейма последнее время играет особую роль в теории аппроксимации. В некотором смысле оно обобщает понятие базиса. Более подробно о приложениях и свойствах фреймов можно ознакомиться в монографиях Ch. K.Chui, Heil Ch., Christensen O. и в обзорной статье Дремин И. М., Иванов О. В., Нечитайлов В.А. .

С понятием пространство коэффициентов базиса в банаховых пространствах можно познакомиться из монографий Люстерник, I. Singer, Heil Ch., Б. Т. Билалов, С. Г. Велиев. Понятие пространство коэффициентов относительно произвольной невырожденной системы в банаховых пространствах встречается в работах I.Singer, Б. Т. Билалов, З.В.Мамедова и Heil Ch. .

В связи с вышеприведенными соображениями считаем, что тема диссертационной работы является актуальной.

Цель работы. Целью диссертационной работы является изучение фреймовых свойств в лебеговых пространствах $L_p, 1 \leq p < +\infty$, систем экспонент и косинусов, являющиеся собственными функциями сингулярных дифференциальных операторов, а также изучение пространство коэффициентов базиса и систем элементов в банаховых и линейных метрических пространствах.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие основные результаты.

-найдены критерия полноты и минимальности системы экспонент с вырождающимся коэффициентом в $L_p, 1 \leq p < +\infty$;

-найден критерий фреймовости этой же системы в $L_p, 1 \leq p < +\infty$;

-найдены критерия полноты и минимальности системы из косинусов с вырождением в $L_p, 1 \leq p < +\infty$;

-найден критерий фреймовости этой системы в том же пространстве;

-доказано, что произвольная невырожденная (т.е. ненулевая) система в банаховом пространстве обладает соответствующее банахово пространство коэффициентов;

-доказано, что произвольный базис в полных линейных пространствах с инвариантной метрикой обладает подобное же пространство коэффициентов.

Методика исследования. При получении основных результатов применяются методы теории базисов и фреймов, так же методы функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертационной работе носят теоретический характер. Их можно использовать в спектральной теории сингулярных дифференциальных операторов, при обосновании метода Фурье для решения соответствующих уравнений в частных производных, в теории аппроксимации, в теориях базиса и фреймов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались: на семинарах отделов «Функциональный анализ» (рук. д.ф.-м.н., проф. Н.Ш.Искендеров) и «Негармонический анализ» ИММ НАНА (рук. д.ф.-м.н., проф. Б.Т.Билалов), на межд. конф., посвящ. 100 летию М.М.Боголюбова в г. Киев (2009), на межд. конф., " Mathematical Analysis, differential Equations and their Applications " в г. София (2010), на между. конф. "Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları, II Respublika Elmi Konfransı" в г. Сумгаит (2012), на межд. конф., "Актуальные проблемы математики и информатики" посвящ. 90-летию со дня рождения Гейдара Алиева в г. Баку (2013).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 94 наименований. Объем диссертации 116 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения и трех глав. Во ведении обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована её цель и дан обзор работ, связанных с темой диссертационной работы.

Глава I посвящена изучению, вообще говоря, фреймовых свойств систем из экспонент и косинусов с вырождающимся коэффициентом, которые являются собственными функциями сингулярных дифференциальных операторов второго и первого порядков.

В **1.1** приводятся необходимые понятия и факты из теорий сингулярных дифференциальных операторов и фреймов, которыми будем пользоваться в диссертационной работе.

Итак, рассмотрим линейное дифференциальное выражение общего вида

$$\ell_1(y) = a_1(t)y'' + a_2(t)y' + a_3(t)y(t),$$

где $a_k,\ k=\overline{1,3}$ – непрерывные (не ограничивая общности) на (a,b) функции. После соответствующих обозначений и замены функций, это выражение приводится к виду

$$\ell_2(y)=\frac{1}{r(t)}\left[-(py')'+qy\right].$$

Рассматривая весовое пространство $L_{p;r}(a,b)$ с весовой функцией $r(t)$, изучение спектральных свойств оператора, порождённого выражением ℓ_2, приводится к изучению аналогичных свойств оператора, порождённого выражением

$$\ell(y)=-(py')'+qy,$$

в весовом пространстве.

Под сингулярным случаем будем понимать тот, когда либо $p(t)$ может иметь нулевые предельные значения на концах интервала (a,b), либо $p(t)$ является неограниченным на (a,b), либо промежуток (a,b) является бесконечным. Более подробно относительно сингулярных дифференциальных операторов или задач можно узнать из монографий В. С. Владимиров, М. А. Наймарк , А. Ф. Никифоров и В. Б. Уваров, П. И. Лизоркин и др. Следует отметить, что многие специальные функции или же многочлены как функции Бесселя с соответствующими параметрами, многочлены Лежандра, Эрмита, Лагерра и др. являются собственными функциями сингулярных дифференциальных операторов второго порядка.

Пусть X банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Определим понятие равномерно-минимальности.

Система $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ *называется равномерно-минимальной в* X*, если*

$$\exists\delta>0:\ \inf_{\forall u\in L\left[\{x_n\}_{n\neq k}\right]}\|x_k-u\|_X\geq\delta\|x_k\|_X,\ \forall k\in N.$$

Критерий 1. *Полная система* $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ *равномерно-минимальна в* $X \Leftrightarrow \sup\limits_n\|x_n\|_X\|y_n\|_{X^*}<+\infty$*, где* $\{y_n\}_{n\in N}\subset X^*$ *– биортогональная к ней система.*

Если система $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ образует базис в X, то она равномерно-минимальна.

Приведем также некоторые понятия и факты из теории фрейма. Сперва определим понятие атомарного разложения.

Определение 1. *Пусть X $B-$пространство и $\mathscr{K}$ $B-$пространство последовательностей из скаляров. Пусть $\{f_k\}_{k\in N} \subset X$, $\{g_k\}_{k\in N} \subset X^*$. Тогда $\left(\{g_k\}_{k\in N}; \{f_k\}_{k\in N}\right)$ является атомарным разложением X относительно $\mathscr{K}$, если выполнены :*

(i) $\{g_k(f)\}_{k\in N} \in \mathscr{K}$, $\forall f \in X$;

(ii) $\exists A, B > 0 : A\|f\|_X \le \left\| \{g_k(f)\}_{k\in N} \right\|_{\mathscr{K}} \le B\|f\|_X$, $\quad \forall f \in X$;

(iii) $f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(f) f_k$, $\forall f \in X$.

Понятие фрейма является обобщением понятия атомарного разложения.

Определение 2. *Пусть X $B-$пространство и $\mathscr{K}$ $B-$пространство последовательностей из скаляров. Пусть $\{g_k\}_{k\in N} \subset X^*$ и $S : \mathscr{K} \to X$ некоторый ограниченный оператор. Пара $\left(\{g_k\}_{k\in N}; S\right)$ образует банаховый фрейм в X относительно $\mathscr{K}$ если выполнены :*

(i) $\{g_k(f)\}_{k\in N} \in \mathscr{K}$, $\forall f \in X$;

(ii) $\exists A, B > 0 : A\|f\|_X \le \left\| \{g_k(f)\}_{k\in N} \right\|_{\mathscr{K}} \le B\|f\|_X$, $\quad \forall f \in X$;

(iii) $S\left[\{g_k(f)\}_{k\in N}\right] = f$, $\forall f \in X$.

Справедливо следующее

Утверждение 1. *Пусть X есть $B-$пространство и $\mathscr{K}$ $B-$пространство последовательностей из скаляров с каноническим базисом $\{e_n\}_{n\in N}$, где $e_n \equiv \{\delta_{kn}\}_{k\in N}$, $\delta_{ij}-$ символ Кронекера. Пусть $\{g_k\}_{k\in N} \subset X^*$ и $S \in L(\mathscr{K}; X)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\left(\{g_k\}_{k\in N}; S\right)$ *образует банаховый фрейм в X относительно $\mathscr{K}$;*

(ii) $\left(\{g_k\}_{k\in N}; \{S(\delta_k)\}_{k\in N}\right)$ *является атомарным разложением X относительно $\mathscr{K}$.*

Более подробно этими и другими фактами можно познакомится из монографий O.Christensen, Ch. Heil, Ch.K.Chui и др.

В **1.2** рассматриваются системы экспонент вида $\left\{\mu(x)e^{inx}\right\}_{n\in N_0}$, где $\mu(x)-$коэффициент вырождения, $N_0 \subset N -$подмножество натуральных чисел N. Изучаются базисные свойства этих систем в пространствах $L_p(-\pi,\pi)$, $1\le p<+\infty$, в зависимости от параметра $\alpha \in R$ и подмножества N_0.

А именно, рассмотрим систему экспонент

$$\{E_n(\mu)\}_{n\in Z} \equiv \left\{\mu(t)e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}, \qquad (3)$$

с коэффициентом вырождения

$$\mu(t)=\prod_{k=0}^{r}|t-t_k|^{\alpha_k},$$

где $t_0=0,\ 0\ne t_k\in[-\pi,\pi],\ k=\overline{1,r}-$различные точки.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если имеет место условие*

$$\{\alpha_k\}_{k=0}^{r}\subset\left(-\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right),$$

то система $\{E_n(\mu)\}_{n\in Z}$ *образует базис в* $L_p, 1<p<+\infty$. *Если же имеет место соотношение*

$$\alpha_0\in\left[\frac{1}{q},1+\frac{1}{q}\right),\ \ \{\alpha_k\}_1^r\subset\left(-\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right),$$

то эта система полна, но неминимальна в $L_p, 1<p<+\infty$. *В этом случае система*

$$\left\{\mu(t)e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\ne 0}, \qquad (4)$$

полна и минимальна в L_p, *но в нем не образует базис.*

Если имеет место условие

$$\{\alpha_k\}_{k=0}^{r}\subset(-1,0], \qquad (5)$$

то относительно системы $\{E_n(\mu)\}_{n\in Z}$ справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть имеет место условие (5). Тогда система* $\{E_n(\mu)\}_{n\in Z}$ *полна и минимальна в* L_1, *но в нем не образует базис. Если* *же выполнено условие* $\alpha_0 \in (0,1]$, $\{\alpha_k\}_1^r \subset (-1,0]$, *то система (4) полна и минимальна в* L_1, *но в нем не образует базис.*

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 3 . *Пусть выполнено* $\{\alpha_k\}_1^r \subset \left(-\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right)$. *Тогда система* $\{E_n(\mu)\}_{n\in Z}$ *образует фрейм в* L_p *относительно* $\mathscr{K}(E_\mu)$ *только тогда, когда* $\alpha_0 \in \left(-\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right)$, $1 < p < +\infty$.

В **1.3** рассматривается система косинусов с вырождающимся коэффициентом степенного вида. Найдено необходимое и достаточное условие на показатель вырождения, когда эта система является фреймом в лебеговых пространствах.

Рассмотрим систему косинусов

$$\left\{c_n^\omega\right\}_{n\in Z_+} \equiv \{\omega(t)\cos nt\}_{n\in Z_+},$$

($Z_+ \equiv 0;1;...$) с вырождающимся коэффициентом ω:

$$\omega(t) = t^{\alpha_0}\prod_{k=0}^{r}|t-t_k|^{\alpha_k},$$

где

$$\{t_k\}_1^r \subset (0,\pi]: t_i \neq t_j \text{ при } i \neq j.$$

Запись $f \sim g$, $t \to a$, означает, что для достаточно малой окрестности точки $t = a$ имеет место

$$0 < \delta \le \left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \le \delta^{-1} < +\infty.$$

Ясно, что система $\left\{c_n^\omega\right\}_{n\in Z_+}$ принадлежит пространству $L_p \equiv L_p(0,\pi), 1 \le p < +\infty$, только тогда, когда

$$\{\alpha_k\}_0^r \subset \left(-\frac{1}{p},+\infty\right). \tag{6}$$

Следующий результат легко получить из аналогичных результатов относительно системы экспонент.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие (6). Тогда система* $\left\{c_n^{\omega}\right\}_{n\in Z_+}$ *полна в* L_p, $1\le p<+\infty$. *Если имеет место*

$$\left\{\alpha_k\right\}_0^r \subset \left(-\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right),$$

то при $p\in(1,+\infty)$ *она образует базис в* L_p, *а в случае* $p=1$ *она полна и минимальна в* L_1, *но в нем не образует базис.*

Дефектный случай. Будем рассматривать дефектную систему косинусов $\left\{c_n^{\omega}\right\}_{n\in N_{(k_0)}}$, где $N_{(k_0)}\equiv Z_+\setminus\{k_0\}$, $k_0\in Z_+$ – некоторое число.

Справедлива следующая основная

Теорема 5. *Пусть выполнено необходимое условие* $\alpha_0\in\left(-\dfrac{1}{p},+\infty\right)$, $\left\{\alpha_k\right\}_1^r\subset\left(-\dfrac{1}{p};\dfrac{1}{q}\right)$. *Тогда система* $\left\{c_n^{\omega}\right\}_{n\in Z_+}$ *является фреймом (базисом) в* L_p *только тогда, когда* $\alpha_0\in\left(-\dfrac{1}{p},\dfrac{1}{q}\right)$. *При* $\alpha_0\in M_p^{(k)}$, $k\in N$, *она имеет дефект равный* (k), *где* $M_p^{(k)}\equiv\left[\dfrac{1}{q}+2(k-1),\dfrac{1}{q}+2k\right)$.

Глава II в целом посвящена изучению пространства коэффициентов систем в топологических и банаховых пространствах.

В **2.1** рассматривается банаховый случай пространства X. Примем следующее понятие. Определим

$$\mathscr{K}_{\vec{x}}\equiv\left\{\left\{\lambda_n\right\}_{n\in N} : \textit{ряд } \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n \textit{ сходится в } X\right\}.$$

$\mathscr{K}_{\vec{x}}$ *назовем пространством коэффициентов системы* $\vec{x}$.

Систему $\left\{x_n\right\}_{n\in N}$ *назовем невырожденной, если* $x_n\ne 0$, $\forall n\in N$.

Обозначим через $\left\{e_n\right\}_{n\in N}\subset\mathscr{K}_{\vec{x}}$, где $e_n=\left\{\delta_{nk}\right\}_{k\in N}$, ($\delta_{nk}$ – символ Кронекера) каноническая система в $\mathscr{K}_{\vec{x}}$. Справедливо следующее

Утверждение 2. *Пусть* $\left\{x_n\right\}_{n\in N}\subset X$ *невырожденная система. Тогда соответствующее пространство коэффициентов*

$\mathscr{K}_{\vec{x}}$ является банаховым с каноническим базисом $\{e_n\}_{n\in N}$, иначе говоря, каждая невырожденная система $S_{\vec{x}}$ порождает банахово пространство коэффициентов $\mathscr{K}_{\vec{x}}$ с каноническим базисом.

Рассмотрим оператор: $T:\mathscr{K}_{\vec{x}}\to X$: $T\vec{\lambda}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n$, $\vec{\lambda}=\{\lambda_n\}_{n\in N}\in\mathscr{K}_{\vec{x}}$. T назовем коэффициентным оператором. Доказано

Утверждение 3. *Пусть $S_{\vec{x}}\equiv\{x_n\}_{n\in N}$ невырожденная система, $\mathscr{K}_{\vec{x}}$ соответствующее пространство коэффициентов, $T:\mathscr{K}_{\vec{x}}\to X$ коэффициентный оператор. $S_{\vec{x}}$ образует базис в X только тогда, когда T осуществляет изоморфизм между $\mathscr{K}_{\vec{x}}$ и X.*

В **2.2** доказывается, что произвольная невырожденная система в линейных топологических пространствах имеет полное топологическое пространство коэффициентов с каноническим базисом. На языке коэффициентного оператора приводится критерий базисности систем в подобных пространствах.

Пусть $(X;\tau)$ полное линейное топологическое пространство и $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ некоторая невырожденная система. Определим пространство коэффициентов $\mathscr{K}_{\vec{x}}$:

$$\mathscr{K}_{\vec{x}}\equiv\left\{\{\lambda_n\}_{n\in N}\subset K:\ \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n \text{ сходится в } X\right\}.$$

Очевидно, что относительно обычных операций покомпонентного сложения и умножения на скаляр, $\mathscr{K}_{\vec{x}}$ превращается в линейное пространство. Каждая окрестность нуля O_ε в X порождает соответствующую окрестность нуля $O_\varepsilon^{\mathscr{K}}$ в $\mathscr{K}_{\vec{x}}$:

$$O_\varepsilon^{\mathscr{K}}\equiv\left\{\vec{\lambda}\equiv\{\lambda_n\}_{n\in N}\in\mathscr{K}_{\vec{x}}:\sum_{n=1}^{m}\lambda_n x_n\in O_\varepsilon,\forall m\in N\right\}.$$

Множество окрестностей $O_\varepsilon^{\mathscr{K}}$ нуля в $\mathscr{K}_{\vec{x}}$ порождает соответствующую топологию $\tau_{\mathscr{K}}$ в $\mathscr{K}_{\vec{x}}$.

Доказана следующая

Теорема 6. *Пространство* $\mathscr{K}_{\vec{x}}$ *с топологией* $\tau_{\mathscr{K}}$ *обладает свойствами: 1) оно полное; 2) каждое одноточечное множество в нем замкнуто; 3) линейные операции непрерывны в нем.*

Доказана также справедливость следующей теоремы.

Теорема 7. *Пусть* $(X;\tau)$ *полное ЛТП и* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *некоторая невырожденная система. Тогда соответствующее ей пространство коэффициентов* $\left(\mathscr{K}_{\vec{x}};\tau_{\mathscr{K}_{\vec{x}}}\right)$ *тоже является полным ЛТП с каноническим базисом.*

Рассмотрим оператор $T:\mathscr{K}_{\vec{x}} \to X$, определенный выражением

$$T\vec{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \text{ , } \vec{\lambda} \equiv \{\lambda_n\}_{n\in N} \in \mathscr{K}_{\vec{x}} \text{ .}$$

Справедлив следующий критерий базисности

Теорема 8. *Пусть* $(X;\tau)$ *полное ЛТП,* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *невырожденная система,* $\left(\mathscr{K}_{\vec{x}};\tau_{\mathscr{K}_{\vec{x}}}\right)$ *соответствующее ей пространство коэффициентов и* $T:\mathscr{K}_{\vec{x}} \to X$ *соответствующий коэффициентный оператор. Система* $\{x_n\}_{n\in N}$ *образует базис в* X *только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) она полна в X *; 2) она* ω *-линейно независима; 3)* $\mathrm{Im}\,T = \overline{\mathrm{Im}\,T}$.

В **2.3** рассматриваются обобщенные понятия как b *-полнота*, b *-независимость*, b *-минимальность*, b *-базисность.* Определяется соответствующее понятие пространство коэффициентов. Приводятся некоторые их свойства.

Пусть X,Y,Z – некоторые банаховы пространства и $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, $\|\cdot\|_Z$ – соответствующие нормы. Предположим, что задано некоторое ограниченное билинейное отображение $b: X\times Y \to Z$, т.е.

$$\|b(x;y)\|_Z \le c\|x\|_X \|y\|_Y , \ \forall x\in X, \quad \forall y \in Y ,$$

где c – абсолютная постоянная. Для простоты примем обозначение $xy \equiv b(x;y)$. Пусть $M \subset Y$ некоторое множество. b *-оболочку* M обозначим через $L^b[M]$ и по определению

$$L^b[M] \equiv \left\{ z\in Z : \exists \{x_k\}_1^n \subset X , \exists \{y_k\}_1^n \subset M , z = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right\}.$$

Через $\left(\overline{\cdot}\right)$ – обозначим замыкание в соответствующем пространстве.

Систему $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$ *назовем* b*-линейно-независимой, если из* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = 0$ *в* Z *следует* $x_n = 0, \forall n \in N$.

Определение 3. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$ *назовем* b*-полной в* Z*, если* $\overline{L^b\left[\{y_n\}_{n\in N}\right]} \equiv Z$.

Нам понадобятся также понятия b*-биортогональной* системы и b*-базиса.*

Определение 4. *Систему* $\{y_n^*\}_{n\in N}\subset L(Z;X)$ *назовем* b*-биортогональной к системе* $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$*, если* $y_n^*(xy_k)=\delta_{nk}x$, , $\forall n,k\in N$ $\forall x\in X$*, где* δ_{nk} *– символ Кронекера.*

Определение 5. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$ *назовем* b*-базисом в* Z*, если для* $\forall z\in Z$, $\exists!\ \{x_n\}_{n\in N}\subset X : z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

При получении основных результатов будем пользоваться следующим понятием.

Определение 6. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$ *назовем невырожденной, если* $\exists c_n > 0 : \|x\|_X \le c_n \|xy_n\|_Z$, $\forall x\in X$, $\forall n\in N$.

Пространство коэффициентов. Пусть $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$ некоторая система. Положим

$$\mathscr{K}_{\vec{y}} \equiv \left\{\{x_n\}_{n\in N}\subset X : \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \text{ сходится в } Z\right\},$$

$$\|\vec{x}\|_{\mathscr{K}_{\vec{y}}} = \sup_m \left\| \sum_{n=1}^{m} x_n y_n \right\|_Z,$$

где $\vec{x}\equiv\{x_n\}_{n\in N}\in\mathscr{K}_{\vec{y}}$. Рассмотрим оператор $K:\mathscr{K}_{\vec{y}}\to Z$, определенный выражением $K\vec{x}=\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $\vec{x}\equiv\{x_n\}_{n\in N}$. K назовем коэффициентным оператором. Справедлива

Теорема 9. *Каждой невырожденной системе* $S_{\bar{y}} \equiv \{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ *соответствуют банахово пространство коэффициентов* $\mathscr{K}_{\bar{y}}$ *и коэффициентный оператор* $K \in L(\mathscr{K}_{\bar{y}}; Z)$, $\|K\| = 1$. *Если система* $S_{\bar{y}}$ b*-линейно,* b*-независима или имеет* b*-биортогональную систему, то* $\exists K^{-1}$. *Кроме того, если* $\operatorname{Im} K$ *замкнуто, то* $K^{-1} \in L(\operatorname{Im} K; \mathscr{K}_{\bar{y}})$.

В последующем нам понадобится понятие b*-базиса* в пространстве коэффициентов $\mathscr{K}_{\bar{y}}$.

Определение 7. *Систему* $\{T_n\}_{n\in N} \subset L(X; \mathscr{K}_{\bar{y}})$ *назовем* b*-базисом в* $\mathscr{K}_{\bar{y}}$, *если для* $\forall \vec{x} \in \mathscr{K}_{\bar{y}}$, $\exists! \{x_n\}_{n\in N} \subset X$: $\vec{x} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n x_n$ *(сходимость в* $\mathscr{K}_{\bar{y}}$ *).*

Рассмотрим операторы

$$E_n : X \to \mathscr{K}_{\bar{y}} :\ E_n x = \{\delta_{nk}\}_{k\in N},\ n \in N.$$

Эту систему будем называть канонической системой. Доказана следующая

Теорема 10. *Пусть* $\mathscr{K}_{\bar{y}}$ *является пространством коэффициентов невырожденной системы* $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$. *Тогда каноническая система* $\{E_n\}_{n\in N}$ *образует* b*-базис в нем.*

Пусть невырожденная система $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b*-базис* в Z. Рассмотрим коэффициентный оператор $K : \mathscr{K}_{\bar{y}} \to Z$. Доказана

Теорема 11. *Пусть* $\mathscr{K}_{\bar{y}}$ *пространство коэффициентов невырожденной системы* $\{y_n\}_{n\in N}$ *и* K *соответствующий коэффициентный оператор. Тогда эта система образует* b*-базис в* Z *только тогда, когда* K *является изоморфизмом в* $L(\mathscr{K}_{\bar{y}}; Z)$.

Справедлива так же

Теорема 12. *Невырожденная система* $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ *образует* b*-базис в* Z *только тогда, когда выполнены:*

1) *она* b*-полна в* Z;

2) *она имеет* b*-биортогональную систему* $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z;X)$*;*

3) *семейство проекторов* $M = \sup_m \|S_m\| < +\infty$ *,*

равномерно ограничено.

Глава III в целом посвящена близким базисам.

В **3.1** рассматриваются базисные свойства систем, получающиеся при фредгольмовом отображении из базиса некоторого $B-$пространства. Полученные результаты применяются к случаю лебегово пространства.

Пусть X некоторое банахово пространство и $T: X \to T$ вполне непрерывный оператор. Рассмотрим $\Phi_\lambda = I + \lambda T$, $\lambda \in C-$комплексный параметр. Известно, что Φ_λ фредгольмовый оператор. Если λ является регулярным значением T, то Φ_λ обратим, и следовательно он переводит любой базис $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ в базис $\{\Phi_\lambda x_n\}_{n\in N}$. Если же λ является собственным значением T, то система $\{\Phi_\lambda x_n\}_{n\in N}$ одновременно не полна и неминимальна в X, причем она имеет конечный дефект. Множество таких значений $\{\lambda_k\}_{k\in N}$ дискретно и $\lim\limits_{k\to\infty}|\lambda_k| = \infty$.

Предположим, что $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ образует базис в банаховом пространстве X и $S_x \equiv \{x_n^*\}_{n\in N} \subset X^*$ сопряженная к ней система, где X^* сопряженное к X пространство. Рассмотрим оператор $\Phi: X \to X$:

$$\Phi x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) y_n \,, \qquad (7)$$

где $S_y \equiv \{y_n\}_{n\in N} \subset X$ некоторая система. Очевидно, что область определения D_Φ оператора Φ состоит из тех $x \in X$, для которых ряд (7) сходится в X. Ясно, что $\Phi = I + T$, где

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)(y_n - x_n), \ \forall x \in D_\Phi \,. \qquad (8)$$

Примем следующее

Определение 8. *Систему* S_y *назовем* S_x^**-близкой к системе* S_x*, если для* $\forall x \in X$ *сходится ряд (8), т.е.* $D_T = X$*. При этом, если оператор* T*, определенный выражением (8), является вполне непрерывным, то такую близость назовем* σS_x^* *- близостью.*

Нетрудно заметить, что если для

$$\forall x \in X: \left\{x_n^*(x)\right\}_{n\in N} \in l_p \text{ и } \left\{\left\|y_n - x_n\right\|\right\}_{n\in N} \in l_q,$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \le p \le +\infty$, то система S_y и S_x σS_x^*-близки.

Итак, если система S_y σS_x^*-близка к минимальной системе S_x, то оператор Φ фредгольмовый. В этом случае имеет место

Утверждение 4. *Пусть* S_x *образует базис в* X *и* S_y σS_x^**-близка к нему. Тогда следующие свойства системы* S_y *эквивалентны:*

1) S_y *полна;*

2) S_y *минимальна;*

3) S_y ω*-линейно независима;*

4) S_y *образует базис в* X*, изоморфный к базису* S_x*;*

5) оператор $\Phi = I + T$ *обратим в* $L(X)$*, где* $L(X)$ *алгебра ограниченных операторов действующих из* X *в* X*.*

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из вышеприведенных соображений и соотношений $\Phi x_n = y_n$, $\forall n \in N$.

Аналогичный результат получен относительно σS_x^* *- близких* систем.

В **3.2** рассматривается конкретный случай пространства X, а именно в качестве X берется лебегово пространство $L_p : X = L_p$, $1 \le p < +\infty$. Итак $X^* = L_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Произвольный непрерывный функционал l_g на X реализуется функцией $g \in L_q$ выражением

$$l_g(f) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt, \ \forall f \in L_p.$$

Пусть система $\{x_n(t)\}_{n\in N} \subset L_p$ образует базис в L_p и $\{x_n^*\}_{n\in N} \subset L_q$ соответствующая сопряженная к нему система. Возьмем $\forall f \in L_p$ и рассмотрим оператор

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} l_{x_n^*}(f) z_n , \tag{9}$$

где $\{z_n\}_{n\in N} \subset L_p$ некоторая система. Если выражение (9) порождает вполне непрерывный оператор в L_p, то из Утверждения 4 непосредственно получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 13. *Пусть $\{x_n(t)\}_{n\in N}$ образует базис в L_p и оператор (9) вполне непрерывен в L_p, и*

$$f_n^{\lambda} = x_n + \lambda z_n, \forall n \in N .$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны $\left(\Phi_\lambda \equiv \{f_n^{\lambda}\}_{n\in N}\right)$:

1) Φ_λ полна в L_p;

2) Φ_λ минимальна в L_p;

3) Φ_λ ω-линейно независима;

4) Φ_λ образует базис в L_p;

5) $\lambda \in \rho(T)$.

В **3.3** рассматривается близость относительно пространства коэффициентов. Приводится матричные аналоги полученных результатов. С помощью естественного изоморфизма эти результаты формулируются на языке пространство коэффициентов.

Пусть X банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и система $\{x_n\}_{n\in N}$ образует базис в нем. Обозначим через $\mathscr{K}_{\vec{x}}$ пространство коэффициентов, соответствующее этому базису. Известно, что между X и $\mathscr{K}_{\vec{x}}$ есть естественный изоморфизм $T_0 : X \leftrightarrow \mathscr{K}_{\vec{x}}$. Возьмем $\forall A \in L(X)$. Пусть

$$x \in X : x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \Rightarrow Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A x_n .$$

Примем $a_{kn} = x_k^*(Ax_n)$, где $\{x_k^*\}_{k\in N} \subset X^*$ сопряженная к $\{x_n\}_{n\in N}$ система, т.е.

$$Ax_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} x_k, \ \forall n \in N .$$

Обозначим через $A_{\vec{\lambda}} \equiv (a_{nk})_{n,k=\overline{1,\infty}}$ бесконечную матрицу. Положим

$$T_0 x = \{\lambda_n\}_{n\in N} \equiv \vec{\lambda} \in \mathscr{K}_{\vec{x}} .$$

Пусть

$$A_{\vec{\lambda}}\vec{\lambda} \equiv \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\lambda_n \right\}_{k\in N} .$$

Нетрудно заметить, что

$$A_{\vec{\lambda}}\vec{\lambda} = T_0(Ax) = \left(T_0 A T_0^{-1}\right)\vec{\lambda} ,$$

т.е. $A_{\vec{\lambda}} = T_0 A T_0^{-1}$ есть композиция ограниченных операторов, и значить $A_{\vec{\lambda}} \in L(\mathscr{K}_{\vec{x}})$, более того $\|A_{\vec{\lambda}}\| \le \|A\|\|T_0\|\|T_0^{-1}\|$. Наоборот, каждый оператор $A_{\vec{\lambda}} \in L(\mathscr{K}_{\vec{x}})$ порождает оператор

$$A \in l(X): A = T_0^{-1} A_{\vec{\lambda}} T_0 .$$

Имеет место следующее

Также справедливо

Утверждение 5. *Пусть система* $\{x_n; x_n^*\}_{n\in N} \subset X \times X^*$ *образует базис в* X *и* $S_y \equiv \{x_n + \lambda z_n\}_{n\in N}$. *Если матрица* $\left(x_i^*(z_j)_{i,j=\overline{1,\infty}}\right)$ *порождает вполне непрерывный оператор в* $\mathscr{K}_{\vec{x}}$, *то следующие предположения эквивалентны:*

1) S_y *полна;*

2) S_y *минимальна;*

3) S_y ω *- линейно независима;*

4) S_y *базис;*

5) $\lambda \in C$ *не является собственным значением матрицы* $\left(x_i^*(z_j)\right)_{i,j=\overline{1,\infty}}$.

Справедлива также

Теорема 14. *Пусть система* $S_{\vec{x}} \equiv \{x_n\}_{n\in N}$ *образует базис в банаховом пространстве* X *с пространством коэффициентов* $l_p, p>1$*; и* $\{z_n\}_{n\in N} \subset X$ *некоторая система. Если выполнены следующие условия:*

2) $\exists \lim_{i\to\infty} x_i^*(z_j), \forall j \in N$*;*

3) ряды $\sum_{j=1}^{\infty} \left| x_i^*(z_j) \right|^q$ *равномерно относительно* $i \in N$ *сходятся,*

то для системы $S_y \equiv \{x_n + \lambda z_n\}_{n\in N}$ *справедливо Утверждение 5, где* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю проф. Б.Т.Билалову за постановки задач и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Билалов Б.Т., Мамедова З.В. Об эквивалентных базисах /Тезисы межд. конф. посвящ., 100 летию М.М.Боголюбова, Украина, Киев, 2009, сентябрь, с.45
2. Mamedova Z.V. On approximate properties of systems in Banach spaces //Trans. of NAS of Az., vol. XXX, №1, 2010, pp. 133-138
3. Мамедова З.В. , Тагиева А.А. О пространстве коэффициентов /Mathematical Analysis, differential Equations and their Applications, 15-20 September, 2010, Sunny Beach, Bulgaria, p. B-68
4. T.M.Ahmedov, Mamedova Z.V. On generalized approximative properties of systems // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 2012 (2012), Article ID 729235, 7 pages doi: 10.1155/2012/729235
5. Bilalov B.T., Sadigova S.R., Mamedova Z.V. The space of coefficients in a linear topological space //Journal of Mathematics Research, Vol. 4, No. 6, December 2012, pp. 83-88. doi:10.5539/jmr.v4n6p83.

6. Mamedova Z.V. On basis properties of degenerate exponential system //Applied Mathematics, 2012, 3, 1963-1966 doi:10.4236/am.2012.312269 Published Online December 2012 (http://www.SciRP.org/journal/am).
7. Билалов Б.Т., Мамедова З.В. О фреймовых свойствах некоторых вырождающихся тригонометрических систем //Доклады НАН Азербайджана, т.LXVIII, №5, 2012, с. 14-18
8. Билалов Б.Т., Мамедова З.В. О базисных свойствах вырождающейся системы экспонент /Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları, II Respublika Elmi Konfransı, Sumqayıt, 27-28 noyabr, 2012.
9. Sadigova S.R., Mamedova Z.V. Frames from Cosines with the Degenerate Coefficients //American Journal of Applied Mathematics and Statistics, 2013, Vol. 1, No. 3, 36-40.
10. Mamedova Z.V. On basis properties of degenerate exponential system /International Conference on Actual Problems of Mathematics and Informatics, dedicated to the 90th Anniversary of Heydar Aliyev and organized by the Azerbaijan Mathematical Society, will be held on 29-31 May, 2013, in Baku, Azerbaijan, pp. 73-74.

ZAHİRƏ VAHİD qızı MƏMMƏDOVA

DİFERENSİAL OPERATORLARIN MƏXSUSİ ELEMENTLƏR SİSTEMİNİN BAZİSLİK XASSƏLƏRİNİN ÜMUMİLƏŞMƏLƏRİ HAQQINDA

XÜLASƏ

Dissertasiya işi müəyyən diferensial operatorların məxsusi funksiyalar sisteminin və onların ümumiləşmələrinin approksimativ xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiyada alınan əsas nəticələr aşağıdakılardır:

- cırlaşan əmsallı eksponent sisteminin $L_p, 1 \le p < +\infty$ fəzasında tamlığı və minimallığı üçün kriteriya tapılmışdır;

-bu sistemin $L_p, 1 \le p < +\infty$ fəzasında freymliliyi üçün kriteriya tapılmışdır;

-cırlaşma əmsallı kosinus sisteminin $L_p, 1 \le p < +\infty$ fəzasında tamlığı və minimallığı üçün kriteriya tapılmışdır;

- bu sistemin həmin fəzada freymliliyi üçün kriteriya tapılmışdır;

- ixtiyari cırlaşmayan (daha doğrusu, sıfır olmayan) sistemin Banax fəzasında uyğun olaraq əmsalların Banax fəzasına malik olması isbat edilmişdir;

-ixtiyari bazisin invariant metrikalı tam xətti fəzalarda oxşar əmsallar fəzasına malik olması isbat edilmişdir.

ZAHIRA VAHID kızı MAMEDOVA

ON GENERALIZED BASIS PROPERTIES OF EİGENELEMENTS OF THE DIFFERENTIAL OPERATORS

SUMMARY

This thesis is focused on the study of the approximation properties of the eigenfunctions of certain differential operators and their generalizations.

The following results are obtained:

- a completeness and a minimality criterion of the systems of exponents with a degenerate coefficient is obtained in $L_p, 1 \le p < +\infty$;

-a frameness criterion of the same system is obtained in $L_p, 1 \le p < +\infty$;

- a completeness and a minimality criterion of the system of cosines with a degenerate coefficient is obtained in $L_p, 1 \le p < +\infty$;

- a frameness criterion of this system in the same space;

-proved that an arbitrary nondegenerate (i.e. non-zero) system in a Banach space has a corresponding Banach space of coefficients;

-proved that an arbitrary basis in a complete linear spaces with an invariant metric has a similar space of coefficients.