НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

РОВШАН ГУЛУ оглы ПОЛАДОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1202.01 – Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2014

Работа выполнена на кафедре «Математический анализ» **Бакинского Государственного Университета.**

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, проф. **Назим Б. Керимов**

Научный консультант:
доктор наук по математике **Зиятхан С.Алиев**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, проф. **Билал Т.Билалов**
(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана);
доктор физико-математических наук, проф. **Али М.Ахмедов**
(Бакинский Государственнный Университет).

Ведущая организация:
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
кафедра «Математический анализ».

Защита состоится 23 мая 2014 г. в 14^{00} часов на заседании Диссертационного Совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана

Автореферат разослан 18 марта 2014 г.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доц. Тамилла Х.Гасанова**

ОБШАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из важных разделов спектральной теории дифференциальных операторов является исследование задач со спектральным параметром как в уравнений, так и в граничных условиях. Изучение краевых задач с параметром в граничных условиях имеет прикладной интерес, так как многие конкретные задачи математической физики приводят к задачам подобного типа. М.Пуассон в мемуаре, решает задачу о движении тела, подвешенного к концу нерастяжимой нити. А.Н.Крылов и С.П.Тимошенко рассматривают задачу о продольных колебаниях стержня, как одну из актуальных задач естествознания, к которой сводится теория индикатора паровой машины, изучение крутильных колебаний вала с маховиком на конце, разного рода «дрожащих» клапанов. Особую актуальность задачи подобного типа приобрели в связи с изучением устойчивости вибрации крыльев самолетов.

Изучение краевых задач для обыкновенных дифференциальных операторов со спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях в общем случае ведет начало от работ Дж.Биркгофа, Я.Д.Тамаркина, в которых изучались вопросы асимптотики собственных значений и спектральных разложений для различных классов краевых задач.

Задачи на собственные значения для уравнения второго порядка со спектральным параметром в граничных условиях рассматренные в работах Ж. Уолтера, Ч.Т.Фултона, А.Шнайдера, Д.Б.Хинтона приводились к задаче на собственные значения для оператора действующего в гильбертовом пространстве $L_2 \oplus \mathsf{C}$. В работах Е.М.Руссаковского, П.А.Байдинга, П.Дж.Брауна и Б.А.Ватсона допускался случай полиномиального вхождения спектрального параметра λ в краевые условия и соответствующие операторы строились в пространстве $L_2 \oplus \mathsf{C}^{\mathsf{N}}$. В этих работах установлена также базисность Рисса системы корневых векторов соответствующего оператора в $L_2 \oplus \mathsf{C}$ и в $L_2 \oplus \mathsf{C}^{\mathsf{N}}$.

В работе А.А.Шкаликова, опубликованной в 1983 г., построена общая теория краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях, где определены различные классы задач (регулярные, почти регулярные, нормальные), построены пространства $W_{2,U}^{r} \oplus \mathsf{C}^{\mathsf{N}_r}$, в которых эти задачи допускают естественную линеаризацию, и доказаны теоремы о полноте, разложении и базисности корневых векторов операторов-линеаризаторов в этих пространствах.

При этом естественно возникает вопрос об установлении базисности Рисса в L_2 и базисности в L_p, $1 < p < \infty$, систем корневых функций исследуемых спектральных задач.

В недавних работах Е.И.Моисеева и Н.Ю.Капустина впервые установлена базисность Рисса в L_2 системы собственных функций, с одной произвольной удаленной функцией, задачи на собственные значения для уравнения второго порядка со спектральным параметром в граничном условии. Этот результат в случае наличие потенциала также установлен в работах Н.Ю. Капустина, Н.Б.Керимова и В.С.Мирзоева. Далее, Е.И.Моисеевым и Н.Ю. Капустиным для этих задач установлена базисность в пространстве L_p, $1 < p < \infty$, систем собственных функций с одной произвольной удаленной функцией. Ими найдено также необходимое и достаточное условие, обеспечивающее равномерную сходимость спектральных разложений на замкнутом отрезке по системе корневых функций с одной удаленной функцией. В дальнейшем, Н.Ю.Капустиным и З.С.Алиевым исследована задача Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в обоих граничных условиях (в частном случае). В этих работах найдены условия при которых система собственных функций после удаления двух функций образует базис в пространстве $L_p, 1 < p < +\infty$.

В работах Н.Б.Керимова и З.С.Алиева, З.С.Алиева найдены необходимое и достаточное условия базисности в $L_p, 1 < p < \infty$, систем корневых функций, с одной удаленной функцией, задач на собственные значения для уравнения четвертого порядка со спектральным параметром в граничном условии.

Отметим, что вышеуказанному вопросу, в более общей форме, посвящены работы Ч.Треттера, Б.Т.Билалова и Т.Р.Мурадова, Т.Б.Гасымова, З.С.Алиева, в которых найдены условия, обеспечивающие базисность систем корневых функций первоначальных задач.

Таким образом, исследование спектральных свойств задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в обоих граничных условиях, является актуальным.

Цель работы. Изучение осцилляционных свойств собственных функций, получение асимптотических формул для собственных значений и собственных функций, исследование базисных свойств в пространствах L_p, $1 < p < \infty$, систем корневых функций задачи задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях.

Методы исследования. В работе использованы методы теории функции действительного переменного, методы спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и спектральной теории линейных операторов.

Научная новизна.

В диссертации получены следующие основные результаты:

– найдена общая характеристика расположения собственных значений на вещественной оси;

– полностью изучены осцилляционные свойства собственных функций;

– получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций;

– найдено необходимое и достаточное условие дефектной базисности (с дефектным числом 2) в пространстве $L_2(0,1)$ системы собственных функций;

– найдено достаточное условие дефектной базисности (с дефектным числом 2) в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, системы собственных функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы в различных вопросах спектральной теории дифференциальных операторов, при изучении различных задач математической физики, в теории колебаний, в теории тепловой конвекции.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры «Математический анализ» БГУ (рук.– проф. Н.Б.Керимов, проф. С.К.Абдуллаев), на семинаре отделов «Функциональный анализ» (рук.–проф. И.М.Гусейнов и проф. Н.Ш.Искендеров) и «Негармонический анализ» (рук.–проф. Б.Т.Билалов) ИММ НАН Азерб.; на научной конференции, посвященной 70-летию чл.-корр. НАН Азерб., заслуженного деятеля науки, проф. А.А.Бабаева (Баку, 2004), на международной конференции по математике и механике, посвященной 45-летию ИММ НАН Азербайджана (Баку, 2004), на 15-й Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» посвященной 125-летию со дня рождения В.В. Голубева и 100-летию СГУ (Саратов, 2010), на научной конференции, посвященной 50-летию кафедры «Вычис. матем.» БГУ (Баку, 2012).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертационная работа изложена на 107 страницах, состоит из введения и трех глав и списка литературы, содержащий 64 наименования**.**

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля со спектральным параметром граничных условиях:

$$(\ell y)(x) \equiv -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda\, y(x),\ x \in (0,1), \tag{1}$$

$$(a_0\lambda + b_0)y(0) = (c_0\lambda + d_0)\,y'(0), \tag{2}$$

$$(a_1\lambda + b_1)y(1) = (c_1\lambda + d_1)\,y'(1), \tag{3}$$

где $\lambda -$ спектральный параметр, $q(x) -$ действительная непрерывная функция на $[0,1]$, $a_i, b_i, c_i, d_i,\ i = \overline{0,1} -$ действительные постоянные, причем

$$\sigma_0 = a_0 d_0 - b_0 c_0 < 0,\ \sigma_1 = a_1 d_1 - b_1 c_1 > 0. \tag{4}$$

Первая глава, состоящая из трех параграфов, посвящена исследованию осцилляционных свойств собственных функций, получению асимптотических формул для собственных значений и собственных функций задачи (1)-(3) при условии (4).

В 1.1 доказываются теорема сравнения типа Штурма, изучаются осцилляционные и некоторые важные свойства начальной задачи (1), (2).

Наряду задачей (1)-(3) рассмотрим следующие краевые задачи:

$$\left.\begin{aligned} -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),\ x \in (0,1),\\ y(0) = 0,\ y(1) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),\ x \in (0,1),\\ (a_0\lambda + b_0)y(0) = (c_0\lambda + d_0)y'(0),\ y(1) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Собственные значения задачи (5) обозначим через μ_n',

$n = 0,1,...$: $\mu'_0 < \mu'_1 < ... < \mu'_n < ...$.

В случае $c_0 \neq 0$ целое неотрицательное число N_0 определим из неравенства $\mu'_{N_0-1} < -d_0/c_0 \leq \mu'_{N_0}$, при этом предполагается, что $\mu'_{-1} = -\infty$.

В работе П.А.Байдинга, П.Дж.Брауна, К.Седдиги установлено, что собственные значения краевой задачи (6) образуют неограниченно возрастающую последовательность $\mu_0 < \mu_1 < ... < \mu_n < ...$, при этом предполагается, что $\mu_{-1} = -\infty$.

Лемма 1.1. *Существует единственное решение $y(x,\lambda)$ уравнения (1) удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(0,\lambda) = c_0\lambda + d_0, \; y'(0,\lambda) = a_0\lambda + b_0. \tag{7}$$

Для каждого фиксированного $x \in [0, 1]$ функция $y(x,\lambda)$ является целой функцией λ .

Отметим, что действительность и простота собственных значений спектральной задачи (1)-(3) при условии (4) доказаны в работах Н.Б.Керимова, Т.И.Аллахвердиева и П.А.Байдинга, П.Дж.Брауна, К.Седдиги.

Для изучения осцилляционных свойств собственных функций задачи (1)-(3) нам понадобится следующие

Лемма 1.2. *Пусть $h_k(x) \in C[0,1]$ и $u_k(x)$ есть решение уравнения $u''(x) + h_k(x)u(x) = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = c_0\rho_k + d_0$, $u'(0) = a_0\rho_k + b_0$, $k = 1, 2$. Кроме того, пусть $h_1(x) < h_2(x)$, $x \in [0,1]$, и выполняется одно из следующих условий: (a) $c_0 = 0$, $\rho_1 < \rho_2$; (б) $c_0 \neq 0, \rho_1 < \rho_2 < -d_0/c_0$; (в) $c_0 \neq 0$, $-d_0/c_0 \leq \rho_1 < \rho_2$. Тогда, если $u_1(x)$ в полуинтервале (0,1] имеет m нулей, то $u_2(x)$ в том же полуинтервале имеет не меньше m нулей и k –й нуль $u_2(x)$ меньше k –го нуля $u_1(x)$.*

Лемма 1.3. *Если $x_0, 0 < x_0 < 1$, есть нуль функции $y(x_0, \lambda_0)$, то любому достаточно малому числу $\varepsilon > 0$ соответствует такое число $\delta > 0$, что при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ функция $y(x,\lambda)$, имеет в точности один нуль в интервале $|x - x_0| < \varepsilon$.*

Следствие 1.1. *При изменении λ решение $y(x,\lambda)$, только* *тогда может потерять нуль или приобрести новый, если он войдет внутрь интервала (0,1) или выйдет оттуда через краевые точки.*

Обозначим через $m(\lambda)$ количество нулей функции $y(x,\lambda)$ содержащихся в интервале (0,1).

Лемма 1.4. *Пусть k – произвольное фиксированное целое неотрицательное число. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) если $c_0 = 0$ и $\lambda \in (\mu_{k-1}, \mu_k]$, то $m(\lambda) = k$;

(б) если $c_0 \neq 0$, $\lambda \in (\mu_{k-1}, \mu_k]$ и $k \leq N_0$, то $m(\lambda) = k$;

(в) если $c_0 \neq 0$, $\lambda \in (\mu_{k-1}, \mu_k]$ и $k \geq N_0 + 2$, то $m(\lambda) = k-1$;

(г) если $c_0 \neq 0$ и $\lambda \in (\mu_{N_0}, -d_0/c_0)$, то $m(\lambda) = N_0 + 1$;

(д) если $c_0 \neq 0$ и $\lambda \in [-d_0/c_0, \mu_{N_0+1}]$, то $m(\lambda) = N_0$.

Заметим, что функция $R(\lambda) = \dfrac{y'(1,\lambda)}{y(1,\lambda)}$ определена для значений $\lambda \in K \equiv \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n\right) \bigcup (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, где $K_n = (\mu_{n-1}, \mu_n)$, $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, $\mu_{-1} = -\infty$, и является мероморфной функцией конечного порядка, ν_n и μ_n, $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ –нули и полюсы этой функций соответственно, где ν_n, $n = 1,2,...,$ – собственные значения задачи

$$\begin{cases} -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),\ x \in (0,1), \\ (a_0\lambda + b_0)y(0) = (c_0\lambda + d_0)y'(0),\ y'(1) = 0, \end{cases}$$

которые являются простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность.

Лемма 1.5. *Справедлива следующая формула*

$$\frac{dR(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{1}{y^2(1,\lambda)}\left\{\int_0^1 y^2(x,\lambda)dx - \sigma_0\right\},\ \lambda \in K. \tag{8}$$

Лемма 1.6. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda \to -\infty} R(\lambda) = +\infty. \tag{9}$$

В 1.2 изучены осцилляционные свойства собственных функций задачи (1)-(3). В случае $c_1 \neq 0$ целое неотрицательное число определим из неравенства $\mu_{N_1-1} < -d_1/c_1 \leq \mu_{N_1}$.

Основным результатом данной главы является следующая осцилляционная теорема

Теорема 1.1. *Собственные значения краевой задачи (1)-(3) образуют неограниченно возрастающую последовательность* $\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_k < ...$. *Соответствующие им собственные функции* $y_0(x), y_1(x), ..., y_k(x), ...$ *обладают следующими осцилляционными свойствами:*

(a_1) *если* $c_0 = c_1 = 0$, *то собственная функция* $y_k(x)$, $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, *имеет ровно* k *простых нулей в интервале (0,1);*

$(б_1)$ *если* $c_0 = 0$ *и* $c_1 \neq 0$, *то собственная функция* $y_k(x)$ *при* $k \le N_1$ *имеет ровно* k, *а при* $k > N_1$ *ровно* $k-1$ *простых нулей в интервале (0,1)*;

$(в_1)$ *если* $c_0 \neq 0$, *и* $c_1 = 0$, *то собственная функция* $y_k(x)$ *при* $k \le N_0$ *имеет ровно* k, *а при* $k > N_0 + 1$ *ровно* $k-1$ *простых нулей в интервале (0,1), собственная функция* $y_{N_0+1}(x)$ *имеет либо ровно* $N_0 + 1$ *(в этом случае* $\mu_{N_0} < \lambda_{N_0+1} < -d_0/c_0$), *либо ровно* N_0 *(в этом случае* $-d_0/c_0 \le \lambda_{N_0+1} < \mu_{N_0+1}$) *простых нулей в интервале (0,1)*;

$(г_1)$ *если* $c_0 c_1 \neq 0$, *и* $N_0 + 2 \le N_1$, *то собственная функция* $y_k(x)$ *имеет при* $k \le N_0$ *ровно* k, *при* $N_0 + 2 \le k \le N_1$ *ровно* $k-1$, *а при* $k > N_0 + 1$ *ровно* $k-2$ *простых нулей в интервале (0,1), собственная функция* $y_{N_0+1}(x)$ *имеет либо ровно* $N_0 + 1$ *(в этом случае* $\mu_{N_0} < \lambda_{N_0+1} < -d_0/c_0$), *либо ровно* N_0 *(в этом случае* $-d_0/c_0 \le$ $\le \lambda_{N_0+1} < \mu_{N_0}$) *простых нулей в интервале (0,1);*

$(д_1)$ *если* $c_0 c_1 \neq 0$, $N_0 + 1 = N_1$ *и* $-d_0/c_0 \le -d_1/c_1$, *то собственная функция* $y_k(x)$ имеет *при* $k \le N_0$ *ровно* k, *а при* $k > N_1 + 1$ *ровно* $k-2$ *простых нулей в интервале (0,1); собственная функция* $y_{N_0+1}(x)$ *имеет либо ровно* $N_0 + 1$ *(в этом случае* $\mu_{N_0} < \lambda_{N_0+1} < -d_0/c_0$), *либо ровно* N_0 *(в этом случае* $-d_0/c_0 \le \lambda_{N_0+1} < -d_1/c_1$) *простых нулей в интервале (0,1);*

$(е_1)$ *если* $c_0 c_1 \neq 0$, $N_0 + 1 = N_1$ *и* $-d_1/c_1 \le -d_0/c_0$, *то собственная функция* $y_k(x)$ имеет *при* $k \le N_0 + 1$ *ровно* k *(при этом* $\lambda_{N_0+1} < -d_1/c_1$), *а при* $k \ge N_1 + 2$ *ровно* $k-2$ *простых нулей в интер-*

вале (0,1); собственная функция $y_{N_0+2}(x)$ *имеет либо ровно* N_0+1 *(в этом случае* $-d_1/c_1 \le \lambda_{N_0+2} < -d_0/c_0$*), либо ровно* N_0 *(в этом случае* $-d_0/c_0 \le \lambda_{N_0+2} < \mu_{N_0+1}$*) простых нулей в интервале (0,1)*;

(ж$_1$) если $c_0c_1 \ne 0$ *и* $N_1 \le N_0+1$, *то собственная функция* $y_k(x)$ *имеет при* $k \le N_1$ *ровно* k *(при этом* $\lambda_{N_1} < -d_1/c_1$*), при* $N_1+1 \le k \le N_0+1$ *ровно* $k-1$ *(при этом либо* $-d_1/c_1 \le \lambda_{N_1+1} < \mu_{N_1}$, *либо* $\lambda_{N_1+1} = -d_1/c_1 = \mu_{N_1}$*), а при* $k \ge N_0+3$ *ровно* $k-2$ *простых нулей в интервале (0,1); собственная функция* $y_{N_0+2}(x)$ *имеет либо ровно* N_0+1 *(в этом случае* $\mu_{N_0} < \lambda_{N_0+2} < -d_0/c_0$*), либо ровно* N_0 *(в этом случае* $-d_0/c_0 \le \lambda_{N_0+2} < \mu_{N_0+1}$*) простых нулей в интервале (0,1).*

Из теоремы 1.1 видно, что задача (1)-(3) обнаруживает такое богатство осцилляционных явлений, которое не идет ни в какое сравнение с задачей Штурма-Лиувилля, когда спектральный параметр λ не участвует в граничных условиях. Наиболее интересным является случай (e_1): $c_0c_1 \ne 0$, $N_0+1 = N_1$ и $-d_1/c_1 \le -d_0/c_0$. В этом случае собственная функция $y_{N_0+1}(x)$ имеет ровно N_0+1 простых нулей, собственная функция $y_{N_0+2}(x)$ имеет либо N_0+1 либо N_0 простых нулей в интервале (0,1), собственная функция $y_{N_0+3}(x)$ имеет ровно N_0+1 простых нулей в интервале (0,1). Отсюда следует, что если $y_{N_0+2}(x)$ имеет N_0 нулей, то при переходе от N_0+1 к N_0+2 число нулей собственных функций уменьшается, а при переходе от N_0+2 к N_0+3 число нулей собственных функций увеличивается.

Отметим, что в работе П.А.Байдинга, П.Дж.Брауна, К.Седдиги исследована осцилляционные свойства собственных функций задачи (1)-(3) также и в случае $c_0c_1 \ne 0$. Из утверждения теоремы 4.2 этой работы следует, что при возрастании порядковых номеров собственных функции число их нулей не уменьшается. А это означает, что утверждение теоремы 4.2 работы не справедливо.

В 1.3 получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функции задачи (1)-(3), а именно доказана следующая

Теорема 1.2. *Справедливы следующие асимптотические формулы для собственных значений* λ_k *и соответствующих собственных функций* $y_k(x)$ *краевой задачи (1)-(3):*

$$\lambda_k = (\pi(k-\sigma))^2 + O(1) \tag{10}$$

$$y_k(x) = \sqrt{2}\,\{\operatorname{sgn}|c_0|\cdot\cos(k-\sigma)\pi x + (1-\operatorname{sgn}|c_0|)\sin(k-\sigma)\pi x\} + O(k^{-1}), \tag{11}$$

где $\sigma = 1 + (1/2)(\operatorname{sgn}|c_0| + \operatorname{sgn}|c_1|)$.

Отметим, что базисные свойства систем корневых функций в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, задачи (1)-(3) в случае когда спектральный параметр участвует в обоих граничных условиях исследована лишь в работах Н.Ю.Капустина и З.С.Алиева. В случае $q \equiv 0,\ b_j = c_j = 0,\ (-1)^{j+1} a_j > 0,\ d_j = 1,\ j = \overline{0,1}$, (при этом $\sigma_0 < 0,\ \sigma_1 > 0$) Н.Ю.Капустиным доказано, что если $a_0 \neq -a_1$, то система собственных функций задачи (1)-(3) с двумя удаленными произвольными функциями образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$; если $a_0 \neq -a_1$, то система собственных функций с двумя удаленными произвольными функциями, имеющие номера разной четности, образует базис пространстве $L_p(0,1), 1 < p < \infty$, а если $a_0 = -a_1$, то система собственных функций с двумя произвольными удаленными функцииями, имеющие номера одиноковой четности, не полна и не минимальна в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$. В случае $q \equiv 0,\ b_j = c_j = 0$, $a_j < 0,\ d_j = 1,\ j = \overline{0,1}$, (при этом $\sigma_0 < 0,\ \sigma_1 < 0$) З.С.Алиевым найдено необходимое и достаточное условия базисности в $L_p(0,1), 1 < p < \infty$, систем корневых функций задачи (1)-(3) с двумя удаленными корневыми функциями.

Вторая глава посвящена установлению базисности в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, системы собственных функций краевой задачи (1)-(3) в общем случае.

В 2.1 вводятся понятия полных и минимальных систем, базиса и дефектного базиса и кратко излагаются критерии минимальности и базисности систем банаховых пространств.

В 2.2 дается операторная трактовка граничной задачи (1)-(3) и доказывается необходимое и достаточное условие дефектной базисности в $L_2(0,1)$ системы собственных функции этой задачи.

В гильбертовом пространстве $H = L_2(0,1) \oplus \mathrm{C}^2$ со скалярным произведением

$$\left(\hat{y},\hat{u}\right) = (\{y(x),m,n\},\{u(x),s,t\}) = (y,u)_{L_2} - \sigma_0^{-1} m\bar{s} + \sigma_1^{-1} n\bar{t}. \quad (12)$$

где $(\cdot,\cdot)_{L_2}$ -скалярное произведение в $L_2(0,1)$, определим оператор

$$A\hat{y} = A(\{y(x),m,n\}) = \{(\ell(y)(x)),\ b_0 y(0) - d_0 y'(0),\ b_1 y(1) - d_1 y'(1)\},$$

с областью определения

$$D(A) = \{\{y(x),m,n\} \in H : y(x) \in W_1^2(0,1), (\ell y)(x) \in L_2(0,1),$$
$$m = c_0 y'(0) - a_0 y(0),\ n = c_1 y'(1) - a_1 y(1)\}.$$

Очевидно, что оператор A определен в H корректно. Задача (1)-(3) принимает вид

$$A\hat{y} = \lambda\,\hat{y},\quad \hat{y} \in D(A), \quad (13)$$

т.е. собственные значения λ_k задачи (1)-(3) и оператора A совпадают вместе с их кратностями, а между собственными и присоединенными функциями имеется соответствие

$$y_k(x) \leftrightarrow \hat{y}_k = \{y_k(x),\ m_k, n_k\},\ m_k = c_0 y_k'(0) - a_0 y_k(0),\ n_k = c_1 y_k'(1) - a_1 y_k(1).$$

Теорема 2.1. *Пусть выполняется условие (4). Тогда A является самосопряженным, дискретным, полуограниченным оператором в H. Система собственных векторов $\{\hat{y}_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\hat{y}_k = \{y_k(x), m_k, n_k\}$, оператора A образует базис Рисса в H.*

В силу (12) имеем

$$(\hat{y}_k,\hat{y}_k)_H = \|y_k\|_{L_2}^2 - \sigma_0^{-1} m_k^2 + \sigma_1^{-1} n_k^2\ . \quad (14)$$

Обозначим:

$$\delta_k = \|y_k\|_{L_2}^2 - \sigma_0^{-1} m_k^2 + \sigma_1^{-1} n_k^2,\ k = 0,1,2,... \quad (15)$$

В силу (14), (15) система $\{\hat{\vartheta}_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\hat{\vartheta}_k = \{\vartheta_k(x),\ s_k, t_k\}$, сопряженная к системе $\{\hat{y}_k\}_{k=0}^{\infty}$, определяется равенство

$$\hat{\vartheta}_k = \delta_k^{-1}\ \hat{y}_k\ ,\ k \in \mathrm{N} \cup \{0\}. \quad (16)$$

Обозначим:

$$\Delta_{r,l}^{*} = \begin{vmatrix} c_0 y_r'(0) - a_0 y_r(0) & c_0 y_l'(0) - a_0 y_l(0) \\ c_1 y_r'(1) - a_1 y_r(1) & c_1 y_l'(1) - a_1 y_l(1) \end{vmatrix}.$$

Теорема 2.2. *Пусть r и l – произвольные фиксированные неотрицательные целые числа. Если $\Delta_{r,l}^{*} \neq 0$, то система $\{y_k(x)\}_{k=0,k\neq r,l}^{\infty}$*

собственных функций задачи (1)-(3) образует базис в пространстве $L_2(0,1)$, *при этом система* $\{u_k(x)\}_{k=0,k\neq r,l}^{\infty}$ *сопряженная к системе* $\{y_k(x)\}_{k=0,k\neq r,l}^{\infty}$ *определяется по формуле*

$$u_k(x)=\frac{1}{\delta_k\Delta^*_{r,l}}\begin{vmatrix} y_k(x) & y_r(x) & y_l(x)\\ c_0y_k'(0)-a_0y_k(0) & c_0y_r'(0)-a_0y_r(0) & c_0y_l'(0)-a_0y_l(0)\\ c_1y_k'(1)-a_1y_k(1) & c_1y_r'(1)-a_1y_r(1) & c_1y_l'(1)-a_1y_l(1)\end{vmatrix},$$

если $\Delta^*_{r,\,l}=0$, *то эта система не полна и не минимальна в* $L_2(0,1)$.

В 2.3 устанавливается достаточное условие минимальности и базисности в $L_2(0,1)$ подсистемы собственных функций краевой задачи (1)-(3), а точнее устанавливается достаточное условие дефектной базисности (с дефектным числом 2) системы собственных функций этой задачи.

Основным результатом данной главы является следующая

Теорема 2.3. *Пусть* r *и* $l-$ *целые неотрицательные числа, имеющие разные четности. Тогда система собственных функций* $\{y_k\}_{k=0,k\neq r,l}^{\infty}$ *задачи (1)-(3) образует базис Рисса в пространстве* $L_2(0,1)$.

В 2.4 устанавливается достаточное условие дефектной базисности (с дефектным числом 2) в $L_p(0,1), 1<p<+\infty$, системы собственных функций краевой задачи (1)-(3).

Одним из основных результатов настоящей главы является следующая

Теорема 2.4. *Пусть* r *и* $l-$ *целые неотрицательные числа, имеющие разные четности. Тогда система собственных функций* $\{y_k\}_{k=0,k\neq r,l}^{\infty}$ *задачи (1)-(3) образует базис в пространстве* $L_p(0,1), 1<p<+\infty$.

В третьей главе находится необходимые и достаточные условия дефектной базисности (с дефектным числом 2) в $L_p(0,1), 1<p<+\infty$, системы собственных функции задачи (1)-(3) при $q\equiv 0$.

Рассмотрим задачу (1.1)-(1.3) в случае $q(x)\equiv 0$, т.е. рассмотрим задачу

$$\left.\begin{aligned} & -y''(x)=\lambda\, y(x),\ \ x\in(0,1) \\ & (a_0\lambda+b_0)y(0)=(c_0\lambda+d_0)\,y'(0), \\ & (a_1\lambda+b_1)y(1)=(c_1\lambda+d_1)\,y'(1). \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Из теоремы 2.4 видно, что для исследования базисности собственных функций в пространстве $L_p(0,1), 1<p<+\infty,$ необходимо найти значения собственных функций и их производных в точках $x=0$ и $x=1$. В 3.1 находится значения собственных функций в точке $x=1$.

Теорема 3.1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность собственных значений задачи (17), а $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – соответствующая последовательность собственных функций. Тогда справедлива следующая формула

$$y_k(1)=(-1)^k(c_1\lambda_k+d_1)\left(\frac{(a_0\lambda_k+b_0)^2+(c_0\lambda_k+d_0)^2\lambda_k}{(a_1\lambda_k+b_1)^2+(c_1\lambda_k+d_1)^2\lambda_k}\right)^{1/2}.$$

В 3.2 установлены условия дефектной базисности (с дефектным числом 2) в $L_p(0,1), 1<p<+\infty,$ системы собственных функции задачи (17), т.е. задачи (1)-(3) при $q\equiv 0$.

Теорема 3.2. Пусть r и l – целые неотрицательные числа, имеющие одинаковые четности и пусть выполняется условие

$$a_1=a_0,\ b_1=b_0,\ c_1=-c_0,\ d_1=-d_0.$$

Тогда система собственных функций $\{y_k\}_{k=0,k\neq r,l}^{\infty}$ задачи (17), не полна и не минимальна в $L_p(0,1),\ \ 1<p<+\infty$.

Из этой теоремы видно, что условие теоремы 2.3 (см. также теорему 2.4) о том, что числа r и l имеют разные четности является существенным.

Теорема 3.3. Пусть r и l – целые неотрицательные числа, имеющие одинаковые четности. Тогда существует такое целое неотрицательное число $\bar{k}$ что при $r,l\geq\bar{k}$ система собственных функций $\{y_k(x)\}_{k=0,k\neq r,l}^{\infty}$ задачи (1)-(3) при $q\equiv 0$ в случаях а) $c_0^2+c_1^2>0$ и либо 1) $c_0^2(a_1^2+2c_1d_1)-c_1^2(a_0^2+2c_0d_0)\neq 0;$ либо 2) $c_0^2(a_1^2+2c_1d_1)-$ $-c_1^2(a_0^2+2c_0d_0)=0,\ c_0^2(d_1^2+2a_1b_1)-c_1^2(d_0^2+2a_0b_0)\neq 0;$ либо 3) $c_0^2(a_1^2+2c_1d_1)-c_1^2(a_0^2+2c_0d_0)=0,\ \ c_0^2(d_1^2+2a_1b_1)-c_1^2(d_0^2+2a_0b_0)=0,$ $c_0^2b_1^2-c_1^2b_0^2\neq 0,$ б) $c_0=c_1=0$ и либо 1) $a_0^2(d_1^2+2a_1b_1)-\ a_1^2(d_0^2+$

$+2a_0b_0)\neq 0,$ либо 2) $a_0^2(d_1^2+2a_1b_1)-a_1^2(d_0^2+2a_0b_0)=0,\ a_0^2b_1^2-a_1^2b_0^2\neq 0,$ образует базис в пространстве $L_p(0,1),\ 1<p<\infty,$ а при $p=2-$ базис Рисса. А в случаях в) $c_0^2+c_1^2>0$ и $c_0^2(a_1^2+2c_1d_1)-c_1^2(a_0^2+2c_0d_0)=0,$ $c_0^2(d_1^2+2a_1b_1)-c_1^2(d_0^2+2a_0b_0)=0,\ c_0^2b_1^2-c_1^2b_0^2=0;$ г) $c_0=c_1=0$ и $a_0^2(d_1^2+2a_1b_1)-a_1^2(d_0^2+2a_0b_0)=0,\ \ a_0^2b_1^2-a_1^2b_0^2=0,$ система собственных функций $\{y_k(x)\}_{k=0,k\neq r,l}^{\infty}$ не полна и не минимальна в пространстве в $L_p(0,1),\ 1<p<+\infty$.

Заметим, что в случае $c_0=c_1=0$ и $b_0=b_1=0$, система собственных функций $\{y_k(x)\}_{k=0,k\neq r,l}^{\infty}$, задачи (17) (задачи (1)-(3) при $q\equiv 0$) образует базис в пространстве $L_p(0,1), 1<p<\infty,$ (при $p=2-$ базис Рисса), если $a_0^2d_1^2-a_1^2d_0^2\neq 0.$ А если $a_0^2d_1^2-a_1^2d_0^2=0,$ то эта система не полна и не минимальна в $L_p(0,1),\ 1<p<+\infty$. Напомним, что этот результат в случае $d_0=-1,\ d_1=1$ получен Н.Ю.Капустиным.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Н.Б.Керимову за постановку задач и постоянное внимание к работе, а также научному консультанту доктору наук по математике З.С.Алиеву за постоянное внимание к работе и ценные советы.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИИ

1. Поладов Р.Г. О базисных свойствах одной спектральной задачи / Тезисы II научной конференции магистрантов, Западный Университет, Баку, 2002, с. 76-77.
2. Керимов Н.Б., Поладов Р.Г. Об одной краевой задаче со спектральным параметром в граничных условиях / Тезисы X межд. конф. по матем. и мех. посвящ. 45-летию Института Математики и Механики, Баку, 2004, с. 88.
3. Керимов Н.Б., Поладов Р.Г. О базисных свойствах в $L_p(0,1)$, $1<p<\infty,$ одной краевой задачи / Тезисы научной конф. посвящ. 70-летию чл. корр. НАНА, засл. деят. науки, проф. А.А. Бабаева, Баку, 2004, с. 97-98.

4. Kerimov N.B., Poladov R.G. On basicity in $L_p(0,1), 1 < p < \infty,$ of the system of eigenfunctionsof one boundary value problem I // Proc. of IMM of NAS of Azerb., 2005, v.22, p. 53-64.
5. Kerimov N.B., Poladov R.G. On basicity in $L_p(0,1), 1 < p < \infty,$ of the system of eigenfunctions of one boundary value problem II // Proc. of IMM of NAS of Azerb., 2005, v.23, p. 65-76.
6. Керимов Н.Б., Поладов Р.Г. О базисности системы собственных функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях / Тезисы докл. 15-й зимней школы, посвящ. 125-летию со дня рожд. В.В.Голубева и 100-летию СГУ «Современные проблемы теории функций и их приложения» Саратов: Изд. СГУ, 2010, с. 87.
7. Алиев З.С., Поладов Р.Г. Базисные свойства собственных функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, Баку, 2012, №1, с.55-61.
8. Керимов Н.Б., Поладов Р.Г. Базисные свойства системы собственных функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // Докл. РАН, 2012, т.442, №1, с. 583-586.
9. Poladov R.Q. On the basis in the space $L_p(0,1), 1 < p < \infty,$ of the system of eigenfunctions of Sturm-Liouville problem with a spectral parameter in boundary counditions // Transactions of NAS of Azerbaijan, 2012, vol. XXXII №4, p. 87-94.
10. Поладов Р.Г. О базисности в пространстве $L_p(0,1), 1 < p < \infty,$ системы собственных функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях / BDU-nun «Hesablama riyaziyyatı» kafedrasının 50 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konfransın materialları, (Bakı, 2012), s. 109-113.

RÖVŞƏN QULU oğlu POLADOV

DIFERENSIAL OPERATORLARIN SPEKTRAL NƏZƏRIYYƏSININ BƏZI MƏSƏLƏLƏRI

XÜLASƏ

Dissertasiya işi sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan Şturm-Liuvill məsələsinin spektral xasssələrinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Baxılan məsələnin məxsusi funksiyalarının osillyasiya xassələri öyrənilmiş, məxsusi funksiyalar sisteminin $L_p(0,1),\ 1<p<\infty$, fəzasında bazislik xassələri araşdırılmışdır.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

–məxsusi ədədlərin kompleks müstəvidə yerləşməsinin ümumi xarakteristikası verilmişdir;

–məxsusi funksiyalarin osillyasiya xassələri tam öyrənilmişdir; məxsusi ədələr və məxsusi funksiyalar üçün asimptotik düsturlar alınmışdır;

–məxsusi funksiyalar sisteminin alt sisteminin $L_2(0,1)$ fəzasında defekt ədədi 2 olan defekt bazisi əmələ gətirməsi üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır;

–məxsusi funksiyalar sisteminin alt sisteminin $L_p(0,1),\ \ 1<p<+\infty$, fəzasında defekt ədədi 2 olan defekt bazisi əmələ gətirməsi üçün kafi şərtlər tapılmışdır.

ROVSAN QULU oglu POLADOV

SOME QUESTIONS OF THE SPECTRAL THEORY OF DIFFERENTIAL OPERATORS

SUMMARY

The dissertation is dedicated to the investigation of spectral properties of the Sturm-Liouville problem with spectral parameter in boundary conditions. Studied the oscillation properties of eigenfunctions, investigated the basis properties in the space $L_p(0,1), 1 < p < \infty$, of the system of eigenfunctions of this problems.

The following results were obtained in the dissertation work:

–the general characteristic of the location of the eigenvalues in the complex plane are obtained;

–fully studied oscillation properties of eigenfunctions;

–received asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions;

–necessary and sufficient conditions of the defect basisity (with the defect number to equal 2) of the system of eigenfunctions in space $L_2(0,1)$ are obtained;

–sufficient conditions of the defect basisity (with the defect number to equal 2) of the system of eigenfunctions in space $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, are obtained.

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

RÖVŞƏN QULU OĞLU POLADOV

DİFERENSİAL OPERATORLARIN SPEKTRAL NƏZƏRİYYƏSİNİN BƏZİ MƏSƏLƏLƏRİ

1202.01 – Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2014