AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Əlyazma hüququnda

RƏNA SƏTTAR QIZI QASIMOVA

ELLİPTİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN OBLASTIN SƏRHƏDDİ ÜZRƏ KEYFİYYƏT MEYARLI BƏZİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİ

1211.01-Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2018

Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin "Optimallaşdırma və idarəetmə" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:	Riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor **Rafiq Qələndər oğluTağıyev**
Rəsmi opponentlər:	Riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor **Yaqub Əmiyar oğlu Şərifov** (Bakı Dövlət Universiteti)
	Riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor **Ədalət Yavuz oğlu Axundov** (AMEA RMİ)
Aparıcı təşkilat:	Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti ("Riyazi analiz" kafedrası)

Dissertasiya işinın müdafiəsi 30 oktyabr 2018-ci il tarixində saat 14^{00}-da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdindəki FD.02.016 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ 1148, Bakı şəhəri, Z.Xəlilov küç., 23, Bakı Dövlət Universiteti

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin elmi kitabxanasında tanış olmaq olar.

Avtoreferat 27 sentyabr 2018-ci il tarixində göndərilmişdir.

FD.02.016 Dissertasiya Şurasının elmi katibi: **dosent A.T.Əfəndiyeva**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Hazırda optimal idarəetmə nəzəriyyəsi həm nəzəri, həm də praktikada çoxlu tətbiqləri nöqteyi-nəzərdən ekstremal məsələlər nəzəriyyəsinin sürətlə inkişaf edən istiqamətlərindən biridir. Optimal idarəetmə nəzəriyyəsində əsas problemlər öyrənilən məsələlərin qoyuluşunun korrektliyinin tədqiqindən, optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlərin və ya zəruri şərtlərin çıxarılmasından və bu məsələlərin təqribi həlli üçün ədədi üsullar hazırlamaqdan ibarətdir.

Adi diferensial tənliklərlə izah olunan toplanmış parametrli sistemlər üçün yuxarıda göstərilən problemlər kifayət qədər tam tədqiq olunmuşdur. Lakin xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə izah olunan müxtəlif sinif paylanmış parametrli sistemlər üçün bu problemlər hələ tam hazırlanmamışdır.

Praktikada böyük miqdarda proseslər elliptik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə izah olunur. Paylanmış parametrli sistemlərlə optimal idarəetmə nəzəriyyəsində xüsusi törəməli elliptik tənliklərlə izah olunan sistemlər üçün optimal idarəetmə məsələləri xüsusi yer tutur. Belə məsələlər istilik fizikasının, diffuziya, süzülmə, bütöv mühit mexanikası, konstruksiyaların elementlərinin optimallaşdırılması, ekoloji proqnozlaşdırma və s. proseslər ilə əlaqədar olan idarəetmə məsələlərini öyrənərkən yaranır.

Elliptik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələləri Q.V.Alekseyev, J.L.Arman, A.S.Bratus, A.R.Danilin, M.Goebel R.A.Həmidov, S.A.Həşimov, A.D.Isgəndərov, Ye.A.Kalinin, Yu.A. Kuznetsov, M.M. Kostreva I.R.Qoqadze, J.L.Lions, V.Q.Litvinov, F.V.Lubışev, S.İ. Lyaşko, M.D.Mədətov, C.Ya.Serovayski, V.M.Şaşkov, R.Q.Tağıyev, M.A.Yaqubov, G.Wang , T. Zolezzi və digərlərinin işlərində öyrənilmişdir.

Elliptik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələləri arasında keyfiyyət meyarları oblastın sərhəddi və ya onun bir hissəsi üzrə inteqral funksionallar olan məsələlər xüsusi yer tutur. Bu tip məsələlərin praktika üçün mühüm əhəmiyyəti vardır. Bundan başqa, bir sıra optimal idarəetmə məsələlərində hal tənlikləri üçün qarışıq sərhəd şərtləri verilir. Hazırda elliptik tənliklər üçün yuxarıda göstərilən tip optimal idarəetmə məsələləri az öyrənilmişdir.

Elliptik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin fərqlər approksimasiyalarının yığılması problemləri V.A.Burkovskaya, A.A.Kuleşov, F.V.Lubışev, V.P.Makorov, A.R.Manapova, R.Q.Tağıyev, M.E.Fayruzov və başqalarının işlərində öyrənilmişdir. Lakin bu problemlər elliptik tənliklər üçün oblastın sərhəddi və ya onun bir hissəsi üzrə keyfiyyət meyarlı və qarışıq sərhəd şərtli optimal idarəetmə məsələləri üçün az öyrənilmişdir.

Xüsusi törəməli tənliklər üçün tərs məsələlərin variasiya qoyuluşları V.M.Abdullayev, K.R.Ayda-zadə, O.M.Alifanov, E.A.Artyuxin, R.A.Həmidov, K.T.İskakov, A.D.Isgəndərov, S.İ.Kabanixin, A.L.Karçevski, R.A.Qasımov, Q.F.Quliyev, M.A.Musayeva, A.B.Rəhimov, S.V.Rumyançev, R.Q.Tağıyev, Q.Y.Yaqubov və başqalarının işlərində tədqiq olunmuşdur. Lakin hazırda elliptik tənliklər üçün əlavə inteqral şərtli tərs məsələlərin variasiya qoyuluşları az öyrənilmişdir.

Təqdim olunan dissertasiya işi qarışıq sərhəd şərtli elliptik tənliklər üçün keyfiyyət meyarı oblastın sərhəddi və ya onun bir hissəsi üzrə olan bəzi optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə və elliptik tənliklər üçün əlavə inteqral şərtli bəzi tərs məsələlərin variasiya qoyuluşlarının öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Beləliklə, hesab etmək olar ki, dissertasiya işinin mövzusu hazırda aktualdır.

İşin məqsədi. Elliptik tənliklər üçün oblastın sərhəddi və ya onun bir hissəsi üzrə keyfiyyət meyarlı bəzi optimal idarəetmə məsələlərinin qoyuluşlarının korrektliyini tədqiq etmək, optimallıq şərtlərini çıxarmaq, baxılan optimal idarəetmə məsələlərinin fərqlər approksimasiyalarının yığılma məsələlərini öyrənmək və elliptik tənliklər üçün əlavə inteqral şərtli bəzi tərs məsələlərin variasiya qoyuluşlarını tədqiq etməkdir.

Tədqiqatın ümumi metodikası. Dissertasiya işində optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin, xüsusi törəməli tənliklər nəzəriyyəsinin, funksional analizin, fərq sxemlər nəzəriyyəsinin və qeyri-korrekt məsələlər nəzəriyyəsinin üsulları istifadə olunmuşdur.

Elmi yeniliklər.

-qarışıq sərhəd şərtli xətti və kvazixətti elliptik tənliklər üçün keyfiyyət meyarları oblastın sərhəddi və ya onun bir hissəsi üzrə olan optimal idarəetmə məsələlərinin korrektliyi tədqiq olunmuşdur;

-məqsəd funksionallarının Freşe mənada diferensiallanması isbat olunmuş, onların qradiyentləri üçün işin düsturlar tapılmış və baxılan optimal idarəetmə məsələləri üçün optimallıq əlamətləri göstərilmişdir;

-xətti elliptik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin fərqlər approksimasiyaları qurulmuş, onların vəziyyətə və funksionala görə yığılma sürətləri üçün qiymətləndirmələr alınmış, idarəediciyə görə zəif yığılma isbat olunmuşdur;

-fərqlər approksimasiyalarının requlyarlaşdırılmasi prosesi aparılmış və idarəediciyə görə güclü yığılma isbat olunmuşdur;

-xətti elliptik tənliklər üçün əlavə inteqral şərtli sərhəd və əmsal tərs məsələlərinin variasiya qoyuluşlarının korrektliyi tədqiq olunmuşdur;

-tərs məsələlərin variasiya qoyuluşlarında keyfiyyət meyarlarının qradiyentləri üçün düsturlar tapılmış və optimallıq şərtləri göstərilmişdir;

İşin nəzəri və praktiki qiyməti. İşdə alınan nəzəri xarakterli nəticələr istilik fizikasının, bütöv mühit mexanikasının, konstruksiyaların elementlərinin optimallaşdırılması, ekoloji proqnozlaşdırma və.s proseslərin optimal idarə olunması məsələlərinin tədqiqinə tətbiq oluna bilər. Optimal idarəetmə məsələlərinin fərqlər approksimasiyaları üçün alınmış nəticələr onların təqribi həlli üçün ədədi üsulların hazırlanmasında istifadə oluna bilər.

İşin aprobasiyası. Dissertasiyanın nəticələri BDU-nuin “Optimallaşdırma və idarəetmə” (rəhbər: prof. A.D.İsgəndərov, prof. R.Q.Tağıyev) “Tətbiqi analizin riyazi üsulları ” (rəhbər: akademik M.F.Mehdiyev) kafedralarının seminarlarında, “Qeyri-lokal sərhəd məsələləri və onlarla əlaqədar riyazi biologiya, informatika və fizikanın problemləri” adlı IV beynəlxalq konfransda (Nalçik-Terskol 2013), “XXI əsrin elmi tədqiqatlarının aktual istiqamətləri: nəzəriyyə və praktika” beynəlxalq qiyabi elmi-praktik konfranslarda (Voronej 2014, 2015), AMEA-nin Riyaziyyat və mexanika İnstutunun 55 illiyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri” beynəlxalq konfransında (Bakı, 2014), “Müasir elmin aktual problemləri” adlı respublika konfransında (Lənkəran, 2014), ümumilli lider Heydər Əliyevin 92-ci ildönümünə həsr edilmiş “Azərbaycanın regionlarında təhsilin və elmin inkişafı” adlı respublika konfransında (Lənkəran, 2015), ümumilli lider Heydər Əliyevin 92,93,94-ci ildönümünə həsr edilmiş respublika konfranslarında (Bakı, 2015, 2016, 2017), Əməkdar elm xadimi, professor Ə.Ş.Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü ildönümünə həsr edilmiş “Funksional analiz və onun tətbiqləri” adlı respublika elmi konfransında (Bakı, 2016) məruzə edilmişdir.

Dissertasiyanın həcmi və quruluşu. Dissertasiya işinin həcmi 130 səhifə olub işarələmələr siyahısından, girişdən, üç fəsildən, nəticələrdən və 137 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Çap olunmuş elmi işlər. Disserttasiyanın mövzusu üzrə 21 elmi iş, o cümlədən 9 məqalə və 12 tezis nəşr olunmuşdur.

İŞİN MƏZMUNU

Girişdə mövzunun aktuallığı əsaslandırılır və dissertasiyanın qısa məzmunu şərh olunur.

Birinci fəsil dörd yarımfəsildən ibarət olub, elliptik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

1.1 yarımfəslində xətti elliptik tənlik üçün idarəedicilərin hal tənliyinin və sərhəd şərtinin sağ tərəflərinə daxil olan optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Tutaq ki, Ω - E_n evklid fəzasında məhdud oblast, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ - Ω oblastının Lipşis mənada kəsilməz olan sərhəddi, ν - Γ sərhəddinin xarici normalının istiqaməti, $x = (x_1,...,x_n) \in \Omega$, $s = (s_1,...,s_n) \in \Gamma$ -istənilən nöqtələrdir.

Tutaq ki,

$$J(\upsilon) = \int_{\Gamma_2} | u(s;\upsilon) - z(s) |^2 \, ds \tag{1}$$

funksionalını aşağıdakı şərtlər ödənilməklə

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + q(x)u = f(x), x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u\big|_{\Gamma_1} = 0, \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(s)u\big|_{\Gamma_2} = g(s), s \in \Gamma_2, \tag{3}$$

$$\upsilon = (f(x), g(s)) \in V \subseteq H = L_2(\Omega) \times L_2(\Gamma_2), \tag{4}$$

minimallaşdırmaq tələb olunur, burada $k_i(x)\ \left(i = \overline{1,n}\right)$, $q(x), z(s), \sigma(s)$ - verilmiş funksiyalar, V - H–da verilmiş çoxluq, - $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i=1}^{n} k_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(\nu, x_i)$, $\upsilon = (f(x), g(s))$ -idarəedicisi , $u = u(x;\upsilon)$ - (2), (3) məsələsinin υ idarəedicisinə uyğun həllidir.

Fərz olunur ki,

$0 < \nu_i \le k_i(x) \le \mu_i\ \left(i = \overline{1,n}\right), 0 \le q_0 \le q(x) \le q_1$ Ω -da s.h.y,

$0 < \sigma_0 \le \sigma(s) \le \sigma_1$ Γ_2 -də s.h.y,

burada $\nu_i, \mu_i\ \left(i = \overline{1,n}\right), q_0, q_1, \sigma_0, \sigma_1$ -verilmiş ədədlərdir və s.h.y- "sanki hər yerdə" deməkdir.

Hər bir verilmiş $\upsilon \in H$ üçün (2), (3) sərhəd məsələsinin həlli dedikdə $W_2^1(\Omega)$ fəzasından olan ümumiləşmiş həlli , yəni istənilən $\eta = \eta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega)$ üçün

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i} + qu\eta \right)dx + \int_{\Gamma_2} \sigma u \eta ds = \int_{\Omega} f\eta dx + \int_{\Gamma_2} g\eta ds .$$

integral eyniliyini ödəyən və $W_{2,0}^{1}(\Omega)$ fəzasından olan $u = u(x;\upsilon)$ funksiyasını başa düşürük.

Teorem 1. Tutaq ki, (1)-(4) məsələsinin qoyuluşundakı şərtlər ödənilir və V çoxluğu H-da qabarıq, qapalı, məhduddur. Onda (1)-(4) məsələsində heç olmasa bir $\upsilon_* = (f_*(x), g_*(s)) \in V$ optimal idarəedici vardır, yəni $V_* = \{\upsilon_* \in V : J(\upsilon_*) = J_* = \inf\{J(\upsilon) : \upsilon \in V\}\}$ çoxluğu boş deyildir. Bundan başqa, V_* çoxluğu H – da zəif kompaktdır və (1) funksionalının istənilən minimallaşdırıcı ardıcıllığı H–da V_*-a zəif yığılır.

İlkin (1)-(4) optimal idarəetmə məsələsinə uyğun ikili sərhəd məsələsini daxil edək:

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right) + q(x)\psi = 0, x \in \Omega, \tag{5}$$

$$\psi\big|_{\Gamma_1} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial N} + \sigma(s)\psi\big|_{\Gamma_2} = -2(u(\mathrm{s};\upsilon) - z(s)), s \in \Gamma_2. \tag{6}$$

(5), (6) məsələsinin $\upsilon \in H$ idarəedicisinə uyğun həllini $W_2^1(\Omega)$-dan olan ümumiləşmiş həll kimi təyin edirik.

Teorem 2. Tutaq ki, (1)-(4) məsələsinin qoyuluşundakı şərtlər ödənilir. Onda (1) funksionalı H –da Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $\upsilon \in H$ nöqtəsindəki qradiyenti

$$J'(\upsilon) = (\psi(x;\upsilon), \psi(s;\upsilon)). \tag{7}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Teorem 3. Tutaq ki, (1)-(4) məsələsinin qoyuluşundakı şərtlər ödənilir və V çoxluğu H -da qabarıqdır. Onda $\upsilon_* = (f_*(x), g_*(s)) \in V$ idarəedicisinin optimallığı üçün

$$\int_{Q} \psi(x;\upsilon_*)(f(x) - f_*(x))dx + \int_{\Gamma_2} \psi(s;\upsilon_*)(g(s) - g_*(s))ds \geq 0$$

bərabərsizliyin istənilən $\upsilon = (f(x), g(s)) \in V$ üçün ödənilməsi zəruri və kafidir.

1.2 yarımfəsilində xətti elliptik tənlik üçün hal tənliyinin əmsallarına idarəedicilər daxil olan optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Tutaq ki, $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_i < \ell_i (i = 1,2)\}$-sərhəddi Γ olan düzbucaqlı, $\Gamma_{-1} = \{s = (s_1, s_2) : s_1 = 0, 0 < s_2 < \ell_2\}$- Ω -nın sol şaquli tərəfidir.

Tutaq ki, idarə olunan proses Ω-da xətti elliptik tip tənlik üçün aşağıdakı sərhəd məsələsi ilə izah olunur:

$$-\sum_{i-1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+q(x)u=f(x),\ x\in\Omega, \tag{8}$$

$$-k_1(s)\frac{\partial u}{\partial x_1}=g(s),\ s\in\Gamma_{-1}, \tag{9}$$

$$u(s)=0,\ s\in\Gamma\setminus\Gamma_{-1}, \tag{10}$$

burada $f(x)\in L_2(\Omega),\ \ g(s)\equiv g(s_2)\in W_2^1(0,\ell_2)$-verilmiş funksiyalar, $\upsilon(x)=(k_1(x),k_2(x),q(x))$ -idarəedici, $u(x)=u(x;\upsilon)$ -(8)-(10) məsələsinin $\upsilon=\upsilon(x)$ idarəedicisinə uyğun və $W_2^1(\Omega)$ -dan olan ümumiləşmiş həllidir.

Mümkün idarəedicilər çoxluğunu daxil edək

$$V=\prod_{i=1}^{3}V_i\subset H=W_2^1(\Omega)\times W_2^1(\Omega)\times L_2(\Omega) \tag{11}$$

harada ki,

$$V_i=\left\{k_i(x)\in W_2^1(\Omega):0<\nu_i\le k_i(x)\le\mu_i,\left|\frac{\partial k_i(x)}{\partial x_j}\right|\le d_j^{(i)}\ (j=1,2)\ \Omega\text{–}da\ s.h.y\right\}\ (i=1,2),$$

$$V_3=\{q(x)\in L_2(\Omega):0<q_0\le q(x)\le q_1\ \Omega-da\ s.h.y\}. \tag{12}$$

Burada $\mu_i\ge\nu_i>0,\ d_j^{(i)}>0\ (i,j=1,2),\ q_1\ge q_0>0$-verilmiş ədədlərdir.

Tutaq ki, (8)-(10) şərtləri ödənilməklə V çoxluğunda

$$J(\upsilon)=\alpha_1\int_{\Omega}|u(x;\upsilon)-u_1(x)|^2dx+\alpha_2\int_{\Gamma_{-1}}|u(s;\upsilon)-u_2(s)|^2ds, \tag{13}$$

funksionalını minimallaşdırmaq tələb olunur. Burada $u_1(x)\in L_2(\Omega)$, $u_2(s)\equiv u_2(s_2)\in L_2(0,\ell_2)$ -verilmiş funksiyalardır və $\alpha_1,\alpha_2=const>0$, $\alpha_1+\alpha_2>0$.

Bu yarım fəsildə (8)-(13) məsələsinin qoyuluşunun korrektliyi haqqında teorem isbat olunmuşdur.

Tutaq ki, $\psi(x)=\psi(x;\upsilon)$ -aşağıdakı qoşma sərhəd məsələsinin $W_2^1(\Omega)$ -dan olan ümumiləşmiş həllidir:

$$-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)+q(x)\psi=-2\alpha_1\left[u(x;\upsilon)-u_1(x)\right], x\in\Omega,$$

$$-k_1(s)\frac{\partial\psi(s)}{\partial x_1}=2\alpha_2\left[u(s,\upsilon)-u_2(s)\right], s\in\Gamma_{-1},$$

$$\psi(s)=0,\ s\in\Gamma\setminus\Gamma_{-1}.$$

Hər bir qeyd olunmuş $i\in\{1,2\}$ üçün $\omega_i(x)=\omega_i(x;\upsilon)$ funksiyasının tapılması hqqında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$-\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_j^2}+\omega_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}, x\in\Omega,$$

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial\nu}=0,\ x\in\Gamma\ \ (i=1,2).$$

Bu məsələnin $\upsilon\in V$ idarəedicisinə uyğun həllini $W_2^1(\Omega)$ -dan olan ümumiləşmiş həll kimi təyin edək.

Teorem 4. Tutaq ki, (8)-(13) məsələsinin qoyuluşundakı şərtlər ödənilir. Onda (13) funksionalı V çoxluğunda Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və istənilən $\upsilon\in V$ nöqtəsində onun qradiyenti

$$J'(\upsilon)=(\omega_1(x;\upsilon),\omega_2(x;\upsilon),u(x;\upsilon)\psi(x;\upsilon))$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

(8)-(13) məsələsində optimallıq üçün zəruri şərt aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem 5. Tutaq ki, (8)-(13) məsələsinin qoyuluşundakı şərtlər ödənilir. Onda $\upsilon_*=(k_{1*},k_{2*},q_*)\in V$ idarəedicisinin (8)-(13) məsələsində optimallığı üçün

$$\int_\Omega[\sum_{i=1}^{2}(\omega_{i*}(k_i-k_{i*})+\sum_{j=1}^{2}\omega_{i*x_j}(k_{ix_j}-k_{i*x_j}))+u_*\psi_*(q-q_*)]dx\geq 0$$

bərabərsizliyinin istənilən $\upsilon=(k_1,\,k_2,q)\in V$ üçün ödənilməsi zəruridir, burada $u_*=u_*(x)=u(x;\upsilon_*)$, $\psi_*=\psi_*(x)=\psi(x;\upsilon_*)$, $\omega_{i*}=\omega_{i*}(x)=\omega_i(x;\upsilon_*)$ $(i=1,2)$.

1.3 yarımfəsilində xətti elliptik tənlik üçün hal tənliyinin əmsallarına və sərhəd şərtinin əmsalına idarəedicilər daxil olan halda optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məsələnin korrektliyi tədqiq olunmuş və optimallıq üçün zəruri şərt gösrərilmişdir

1.4 yarımfəsilində kvazixətti elliptik tənlik üçün hal tənliyinin əmsallarına və sərhəd şərtinə idarəedicilər daxil olan optimal idarəetmə məsələsinə baxılır .

Tutaq ki, idarə olunan proses $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_i < 1, i = 1,2\}$ kvadratında kvazixətti elliptik tənlik üçün aşağıdakı qarışıq sərhəd məsələsi ilə izah olunur:

$$-\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + q(x)a(u) + b(x,u) = f(x),\ x \in \Omega\,, \tag{14}$$

$$-k(s)\frac{\partial u}{\partial x_1} + p(s)u = g(s),\ s \in \Gamma_{-1}\,, \tag{15}$$

$$u(s) = 0,\ \ s \in \Gamma \setminus \Gamma_{-1}\,, \tag{16}$$

burada $\Gamma_{-1} = \{s = (0, s_2) : 0 < s_2 < 1\}$, $a(u),\ b(x,u),\ f(x),\ g(s)$ -verilmiş funksiyalar, $k(x),\ q(x),\ p(s)$ -idarəedici funksiyalar, $\upsilon = (k(x), q(x), p(s))$ -idarəedici, $u = u(x) = u(x;\upsilon)$- (14)-(16) məsələsinin υ idarəedicisinə uyğun və $W_2^1(\Omega)$ fəzasından olan ümumiləşmiş həllidir .

Mümkün idarəedicilər çoxluğunu daxil edək

$$V = K \times Q \times P \subset H = W_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega) \times W_2^1(\Gamma_{-1})$$

burada

$$K = \left\{k(x) \in W_2^1(\Omega) : 0 < \nu \le k(x) \le \mu,\ \left|\frac{\partial k(x)}{\partial x_i}\right| \le d_i\ (i = 1, 2)\ \Omega - da\ \ s.\,h.\,y\right\},$$

$$Q = \{q(x) \in L_2(\Omega) : 0 < q_0 \le q(x) \le q_1\ \Omega - da\ \ s.\,h.\,y\}, \tag{17}$$

və $\mu \ge \nu > 0,\ d_1, d_2,\ p_2 > 0,\ p_1 \ge p_0 \ge 0,\ q_1 \ge q_0 > 0$ -verilmiş ədədlərdir.

Tutaq ki,

$$J(\upsilon) = \alpha_1 \int_{\Omega} |u(x;\upsilon) - z_1(x)|^2\, dx + \alpha_2 \int_{\Gamma_{-1}} |u(s;\upsilon) - z_2(s)|^2\, ds\,, \tag{18}$$

funksionalını V çoxluğunda (14)-(16) şərtləri ödənilməklə minimallaşdırmaq tələb olunur. Burada $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 > 0$ -verilmiş ədədlər, $z_1(x),\ z_2(s) \equiv z_2(s_2)$ -məlum funksiyalardır.

Fərz edəcəyik ki, (14)-(18) məsələsində məlum funksiyslar dissertasiyanın 1.4 yarımfəslində göstərilən şərtləri ödəyir.

(8)-(13) məsələsinin qoyuluşunun H fəzasının zəif topologiyasına görə korrektliyi haqqında teorem isbat olunmuşdur.

Aşağıdakı məsələnin $W_2^1(\Omega)$ -dan olan ümumiləşmiş həlli kimi $\psi = \psi(x) = \psi(x;\upsilon)$ qoşma vəziyyətini daxil edək:

$$-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) + \left[q(x)a'(u) + b'_u(x,u)\right]\psi = -2\alpha_1\left[u(x;\upsilon) - z_1(x)\right],\ x\in\Omega, \tag{19}$$

$$-k(s)\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + p(s)\psi = -2\alpha_2\left[u(s;\upsilon) - z_2(s)\right],\ \ s\in\Gamma_{-1}, \tag{20}$$

$$\psi(s;\upsilon) = 0,\ \ s\in\Gamma\setminus\Gamma_{-1}. \tag{21}$$

Aşağıdakı şərtlərdən $\omega = \omega(x) = \omega(x;\upsilon)$ funksiyasının tapılması haqqında sərhəd məsələsini daxil edək:

$$-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i^2} + \omega = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i},\ \ x\in\Omega, \tag{22}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0,\ \ x\in\Gamma. \tag{23}$$

Verilmiş $\upsilon\in V$ idarəedicisi üçün (22), (23) məsələsinin həllini $W_2^1(\Omega)$-dan olan ümumiləşmiş həll kimi başa düşürük.

Tutaq ki, $\theta = \theta(s_2) = \theta(s_2;\upsilon)$ funksiyası aşağıdakı sərhəd məsələsinin $W_2^1(0,1)$-dən olan ümumiləşmiş həllidir:

$$-\theta'' + \theta = u(0,s_2;\upsilon)\psi(0,s_2;\upsilon),\ \ 0 < x_2 < 1,$$

$$\theta'(0) = \theta'(1) = 0.$$

Teorem 6. (18) funksionalının qradiyenti istənilən $\upsilon\in V$ nöqtəsində

$$J'(\upsilon) = \left(\omega(x;\upsilon), a(u)\psi(x;\upsilon), \theta(s_2;\upsilon)\right)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur və $\upsilon\to J'(\upsilon)$ inikası V-dən H-a kəsilməz təsir edir.

Qradiyentin ifadəsindən istifadə edərək (14)-(18) məsələsində idarəedicinin optimallığı üçün inteqral bərabərsizlik şəklində zəruri şərt göstərilmişdir.

İkinci fəsil iki yarımfəsildən ibarətdir və elliptik tənliklər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin fərqlər approksimasiyalarının yığılmasının və requlyarlaşdırılmasının tədqiqinə həsr olunmuşdur.

2.1 yarımfəslində xətti elliptik tənlik üçün vəziyyət tənliyinin və sərhəd şərtinin sağ tərəflərinə idarəedicilər daxil olan halda optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məsələnin fərqlər approksimasiyalarının yığılması öyrənilmiş, onların vəziyyətə və funksionala görə yığılma sürətləri üçün qiymətləndirmələr alınmış, idarəediciyə görə zəif yığılma isbat olunmuş fərqlər approksimasiyalarının requlyarlaşdırılması prosesi aparılmlış və idarəediciyə görə güclü yığılma isbat edilmişdir

2.2 yarımfəslində vəziyyət tənliyinin və sərhəd şərtinin əmsalları idarəedicilər olan xətti elliptik tənlik üçün optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Tutaq ki, idarə olunan prosses $\Omega=\{x=(x_1,x_2):0<x_i<\ell_i,\ i=1,2\}$ düzbucaqlısında xətti elliptik tip tənlik üçün aşağıdakı qarışıq sərhəd məsələsi ilə izah olunur:

$$-\sum_{i-1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+q(x)u=f(x),\ x\in\Omega, \tag{24}$$

$$-k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}+p(x)u=g(x),\ x\in\Gamma_{-1}, \tag{25}$$

$$u(x)=0,\ x\in\Gamma\setminus\Gamma_{-1}, \tag{26}$$

burada Γ - Ω düzbucaqlısının sərhəddi, $\Gamma_{-1}=\{x=(x_1,x_2):x_1=0,0<x_2<\ell_2\}$ - Ω-nın sol şaquli tərəfi; $f(x)\in L_2(\Omega)$, $g(x)=g(0,x_2)\equiv g(x_2)\in W_2^1(0,\ell_2)$ - verilmiş funksiyalar, $k_1(x)$, $k_2(x)$, $q(x)$, $p(x)=p(0,x_2)\equiv p(x_2)$-idarəedici funksiyalar, $\upsilon(x)=(k_1(x),k_2(x),q(x),p(x))$ -idarəedici, $u(x)=u(x;\upsilon)$ - (24)-(26) məsələsinin $\upsilon=\upsilon(x)$ idarəedicisinə uyğun və $W_2^1(\Omega)$ -dan olan ümumiləşmiş həllidir.

Mümkün idarəedicilər çoxluğunu daxil edək

$$V=\prod_{i=1}^{4}V_i\subset H=W_2^1(\Omega)\times W_2^1(\Omega)\times L_2(\Omega)\times W_2^1(\Gamma_{-1}) \tag{27}$$

belə ki,

$$V_i=\left\{k_i(x)\in W_2^1(\Omega):0<\nu_i\le k_i(x)\le\mu_i,\left|\frac{\partial k_i}{\partial x_j}\right|\le d_j^{(i)}\ (j=1,2)\,\Omega-da\ s.h.y\right\},(i=1,2),$$

$$V_3=\{q(x)\in L_2(\Omega):0\le q_0\le q(x)\le q_1,\Omega-da\ s.\ h.\ y\}$$

$$V_4=\{p(x)=p(0,x_2)\equiv p(x_2)\in W_2^1(\Gamma_{-1}):0<p_0\le p(x_2)\le p_1,$$

$$\left|\frac{dp}{dx_2}\right| \le p_2 \quad \Gamma_{-1} - da \;\; s.h.\, y\}. \tag{28}$$

Burada $\mu_i \ge \nu_i > 0$, $d_j^{(i)} > 0(i, j = 1,2)$, $q_1 \ge q_0 \ge 0$, $p_1 \ge p_0 > 0$, $p_2 > 0$ -verilmiş ədədlərdir.

Aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə baxaq : (24)-(26) şərtləri ödənilməklə V çoxluğunda

$$J(\upsilon) = \alpha_1 \int_\Omega |u(x;\upsilon) - u_1(x)|^2 dx + \alpha_2 \int_{\Gamma_{-1}} |u(x;\upsilon) - u_2(x)|^2 dx \tag{29}$$

funksionalını minimallaşdırmaq tələb olunur, burada $u_1(x) \in W_{2,0}^1(\Omega)$,

$u_2(x) = u_2(0, x_2) \equiv u_2(x_2) \in W_2^1(0, \ell_2)$-verilmiş funksiyalar,

$\alpha_1, \alpha_2 = const \ge 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$-verilmiş ədədlərdir.

(24)-(29) məsələsini approksimasiya etmək üçün $[0, \ell_i]$ $(i = 1,2)$ və $\overline{\Omega}$ -da aşağıdakı şəbəkələri daxil edək:

$\overline{\omega}_i = \{x_i^{(j_i)} = j_i h_i \in [0, \ell_i], j_i = 0,1,\cdots, N_i, N_i h_i = \ell_i\}$,

$\omega_i = \overline{\omega}_i \cap (0, \ell_i)$, $\omega_i^+ = \overline{\omega}_i \cap (0, \ell_i]$, $\omega_i^- = \overline{\omega}_i \cap [0, \ell_i)$,

$\overset{\circ}{\omega}_i = \omega_i \setminus \{\ell_i - h_i\}$ $(i = 1,2)$, $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$, $\omega = \omega_1 \times \omega_2$, $\omega^{(+1)} = \omega_1^+ \times \omega_2$,

$\omega_*^{(1)} = \overline{\omega}_1 \times \omega_2$, $\omega^{(-1)} = \omega_1^- \times \omega_2$, $\omega_*^{(2)} = \omega_1 \times \overline{\omega}_2$, $\overset{\circ}{\omega}{}_*^{(1)} = \overline{\omega}_1 \times \overset{\circ}{\omega}_2$,

$\overset{\circ}{\omega}{}_*^{(2)} = \overset{\circ}{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$,

$\gamma = \overline{\omega} \setminus \omega$, $\gamma_{-1} = \{x_1 = 0\} \times \omega_2$, $\overset{\circ}{\gamma}_{-1} = \gamma_{-1} \setminus (0, \ell_2 - h_2)$.

Tutaq ki, $h = (h_1, h_2)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$.

(24)-(29) optimal idarəetmə məsələsinə aşağıdakı sonlu ölçülü optimal idarəetmə məsələlər ailəsini qarşı qoyaq:tutaq ki,

$$J_h(\upsilon_h) = \alpha_1 \sum_{x \in \overline{\omega}} \left|y(x;\upsilon_h) - u_1^h(x)\right|^2 \hbar_1 \hbar_2 + \alpha_2 \sum_{x \in \gamma_{-1}} \left|y(x;\upsilon_h) - u_2^h(x)\right|^2 h_2 \tag{30}$$

şəbəkə funksionalını $y = y(x) = y(x;\upsilon_h)$-funksiyasının (24)-(26) sərhəd məsələsinin $\overline{\omega}$ -da fərqlər approksimasiyası olan aşağıdakı şəbəkə məsələsinin həlli olması şərti ilə minimallaşdırmaq tələb olunur:

$$\left(\frac{k_{1h}(x)+k_{1h}^{(-1_1)}(x)}{2}y_{\bar{x}_1}\right)_{x_1}-\left(\frac{k_{2h}(x)+k_{2h}^{(-1_2)}(x)}{2}y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2}+$$

$$+q_h(x)y=f_h(x),\ x\in\omega, \tag{31}$$

$$-\frac{k_{1h}(x)+k_{1h}^{(+1_1)}(x)}{2}y_{x_1}+p_h(x)y-$$

$$-0{,}5h_1\left\{\left[\frac{k_{2h}(x)+k_{2h}^{(-1_2)}(x)}{2}y_{\bar{x}_2}\right]_{x_2}-q_h(x)y+f_h(x)\right\}=g_h(x),\ x\in\gamma_{-1} \tag{32}$$

$$y(x;\upsilon_h)=0,\ x\in\gamma\setminus\gamma_{-1}, \tag{33}$$

Burada $\upsilon_h=\upsilon_h(x)=\left(k_{1h}(x),k_{2h}(x),q_h(x),p_h(x)\right)$ şəbəkə idarəedicilər aşağıdakı mümkün idarəedicilər çoxluğuna daxildir:

$$V_h=\prod_{i=1}^{4}V_{ih}\subset H_h=W_2^1\left(\omega_*^{(1)}\right)\times W_2^1\left(\omega_*^{(2)}\right)\times L_2\left(\omega^{(-1)}\right)\times W_2^1(\gamma_{-1}) \tag{34}$$

belə ki,

$$V_{ih}=\left\{k_{ih}(x)\in W_2^1\left(\omega_*^{(i)}\right):0<\nu_i\le k_{ih}(x)\le\mu_i,x\in\omega_*^{(i)},\right.$$

$$\left.\left|k_{ihx_i}\right|\le d_i^{(i)},\ x\in\omega^{(+i)},\ \left|k_{ihx_j}(x)\right|\le d_j^{(i)},\ x\in\mathring{\omega}_*^{(i)},\ j=3-i\right\}(i=1,2),$$

$$V_3=\left\{q_h(x)\in L_2\left(\omega^{(-1)}\right):0\le q_0\le q_h(x)\le q_1,x\in\omega^{(-1)}\right\},$$

$$V_4=\left\{p_h(x)=p_h(0,x_2)\equiv p_h(x_2)\in W_2^1(\gamma_{-1}):0\le p_0\le p_h(x_2)\le p_1,\right.$$

$$\left.x_2\in\gamma_{-1},\left|p_{hx_2}(x_2)\right|\le p_2,x_2\in\mathring{\gamma}_{-1}\right\}. \tag{35}$$

Burada $u_1^h(x)=S_1S_2u_1(x),x\in\overline{\omega},u_2^h(x)=u_2^h(0,x_2)=S_2u_2(x),x\in\gamma_{-1}$, $f_h(x)=S_1S_2f(x),x\in\omega^{(-1)}$, $g_h(x)=g_h(0,x_2)\equiv g_h(x_2)=S_2g(x),x\in\gamma_{-1}$, S_1, S_2 -uyğun olaraq x_1 və x_2 dəyişənlərinə görə ortalama operatorlarıdır.

Teorem 7. Tutaq ki, (24)-(29) məsələsinin qoyuluşundakı şərtlər ödənilir. Onda istənilən $\upsilon\in V$ və $\upsilon_h\in V_h$ üçün fərqlər üsulunun vəziyyətə görə aşağıdakı xəta qiymətləndirməsi doğrudur:

$$\left\{\sum_{i=1}^{2}\left\|y_{\bar{x}_i}-u_{\bar{x}_i}\right\|_i^2+\left\|y-u\right\|_{2,\omega^{(-1)}}^2+\left\|y-u\right\|_{2,\gamma_{-1}}^2\right\}^{1/2}\le M\{|h|+$$

$$+\left\|S_2k_1^{(-0,5_1)}(x)-k_{1h}(x)\right\|_{\infty,\omega^{(+1)}}+\left\|S_1k_2^{(-0,5_2)}(x)-k_{2h}(x)\right\|_{\infty,\omega^{(+2)}\cup\gamma_{-1}}+$$

$$+\left\|Sq(x)-q_h(x)\right\|_{\infty,\omega^{(-1)}}+\left\|S_2p(x)-p_h(x)\right\|_{\infty,\gamma_{-1}}\Big\}\|u\|_{2,\Omega}^{(2)},$$

Bu qiymətləndirməyə daxil olan şəbəkə normaları dissertasiyanın 2.2.2 bəndində təyin olunmuşdur.

Nəticə 1. Tutaq ki, $k_{ih}(x)=S_{3-i}k_i^{(-0,5_i)}(x)$, $x\in\omega_*^{(i)}$ $(i=1,2)$, $q_h(x)=Sq(x)$, $x\in\omega^{(-1)}$, $p_h(x)=S_2p(x)$, $x\in\gamma_{-1}$. Onda (31)-(33) fərqlər sxeminin həlli (24)-(26)sərhəd məsələsinin həllinə $W_2^1(\overline{\omega})$ şəbəkə normasında $O(|h|)$ sürətilə yığılır və

$$\left\{\sum_{i=1}^{2}\left\|y_{\bar{x}_i}-u_{\bar{x}_i}\right\|_i^2+\|y-u\|_{2,\omega^{(-1)}}^2+\|y-u\|_{2,\gamma_{-1}}^2\right\}^{1/2}\le M|h|\|u\|_{2,\Omega}^{(2)}$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Tutaq ki, hər bir $h=(h_1,h_2)$ üçün və uyğun $\overline{\omega}$ şəbəkəsində elə $\upsilon_{h\varepsilon}\in V_h$ şəbəkə idarəediciləri tapılmışdır ki,

$$J_{h*}\le J_h(\upsilon_{h\varepsilon})\le J_{h*}+\varepsilon_h,\ \upsilon_{h\varepsilon}\in V_h, \tag{36}$$

burada $J_{h*}=\inf\{J_h(\upsilon_h):\upsilon_h\in V_h\},\varepsilon_h\ge 0$ və $|h|\to 0$ olduqda $\varepsilon_h\to 0$.

Teorem 8. Tutaq ki, teorem 7-nin şərtləri ödənir. Onda (30)-(35) şəbəkə optimal idarəetmə məsələləri (24)-(29) məsələsini funksionala görə approksimasiya edir və yığılma sürəti üçün

$$|J_{h*}-J_*|\le M(\alpha_1+\alpha_2)|h|$$

qiymətləndirməsi doğrudur . Bundan başqa, əgər $\{\upsilon_{h\varepsilon}\}\subset V_h$ şəbəkə idarəedicilər ardıcıllığı (36) şərtlərindən təyin olunmuşsa, onda $\{P_h\upsilon_{h\varepsilon}\}$ ardıcıllığı (24)-(29) məsələsi üçün minimallaşdırıcı ardıcıllıqdır,

$$0\le J(P_h\upsilon_{h\varepsilon})-J_*\le M(\alpha_1+\alpha_2)|h|+\varepsilon_h,$$

qiymətləndirməsi doğrudur və $\{P_h\upsilon_{h\varepsilon}\}$ ardıcıllığı H -da V_* çoxluğuna zəif yığılır. Burada $P_h: H_h\to H$ inikası dissertasiyanın 2.2.4 bəndində təyin olunmuşdur və M=const ≥0.

H fəzasının normasına görə V_* çoxluğuna yığılan minimallaşdırıcı ardıcıllığın qurulması üçün fərqlər approksimasiyalarının Tixonov mənada requlyarlaşdırılması prosesi aparılmışdır.

Üçüncü fəsil üç yarımfəsildən ibarətdir və elliptik tənlik üçün əlavə inteqral şərtli tərs məsələlərin variasional qoyuluşlarının tədqiqinə həsr olunmuşdur.

3.1 yarımfəslində elliptik tənlik üçün sərhəd tərs məsələsinin,

3.2 yarımfəslində isə həllin qarşısındakı əmsalın tapılması haqqında tərs məsələnin variasional qoyuluşlarına baxılır. Baxılan məsələlərin qoyuluşlarının korrektliyi tədqiq olunmuş, keyfiyyət meyarlarının diferensiallanması isbat olunmuş və optimallıq şərtləri çıxarılmışdır.

3.3 yarımfəslində elliptik tənliyin baş əmsalının tapılması haqqında tərs məsələnin variasional qoyuluşuna baxılır.

Tutaq ki,

$$J(\upsilon)=\int_0^1\left|u(0,x_2;\upsilon)-\int_0^1 H(x_1,x_2)u(x_1,x_2;\upsilon)dx_1\right|^2 dx_2 \tag{37}$$

funksionalını

$$-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\upsilon(x_2)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+q(x)u=f(x),\ x\in\Omega, \tag{38}$$

$$-\upsilon(s_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}=g(s),\ s\in\Gamma_{-1}, \tag{39}$$

$$u(s;\upsilon)=0,\ s\in\Gamma\setminus\Gamma_{-1}, \tag{40}$$

sərhəd məsələsinin

$$V=\left\{\upsilon=\upsilon(x_2)\in W_2^1(0,1):0<\nu\le\upsilon(x_2)\le\mu,\left|\upsilon'(x_2)\right|\le\mu_1\ (0,1)-da\ s.h.y\right\} \tag{41}$$

çoxluğundan olan $\upsilon=\upsilon(x_2)$ mümkün idarəedicilərinə uyğun və $W_2^1(\Omega)$-dan olan $u(x)=u(x;v)=u(x_1,x_2;v)$ ümumiləşmiş həlləri çoxluğunda minimallaşdırmaq tələb olunur. Burada $H(x)=H(x_1,x_2)$, $q(x)$, $f(x)$, $g(s)=g(0,s_2)\equiv g(s_2)$–aşağıdakı şərtləri ödəyən verilmiş funksiyalardır: $H(x)\in W_\infty^{0,1}(\Omega)$, $q(x)\in L_\infty(\Omega)$, $f(x)\in L_2(\Omega)$, $g(s_2)\in W_2^1(0,1)$; $|H(x)|\le d_1$, $|\partial H(x)/\partial x_2|\le d_2$ $0<q_1\le q(x)\le q_2$ Ω-da s.h.y., $d_1,d_2,q_1,q_2=const>0$.

(37)-(41) məsələsinin qoyuluşunun H fəzasının zəif topologiyasında korrektliyi haqqında teorem isbat olunmuşdur.

Tutaq ki, $\psi=\psi(x)=\psi(x;\upsilon)$-funksiyası (37)–(41) məsələsinə uyğun aşağıdakı qoşma sərhəd məsələsinin $W_2^1(\Omega)$ -dan olan ümumiləşmiş həllidir:

$$-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\upsilon(x_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)+q(x)\psi=$$

$$=-2H(x_1,x_2)\left[u(0,x_2;\upsilon)-\int_0^1 H(\xi_1,x_2)u(\xi_1,x_2;\upsilon)d\xi_1\right]x\in\Omega,$$

$$-\upsilon(s_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=2\left[u(0,s_2;\upsilon)-\int_0^1 H(\xi_1,s_2)u(\xi_1,s_2;\upsilon)d\xi_1\right],\ s\in\Gamma_{-1},$$

$\psi(s;\upsilon)=0$, $s\in\Gamma\setminus\Gamma_{-1}$.

Bundan başqa , aşağıdakı şərtlərdən $\omega(x_2)=\omega(x_2;\upsilon)$ funksiyasının tapılması üçün daha bir köməkçi sərhəd məsələsini daxil edək:

$$-\omega''+\omega=\int_0^1\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx_1, 0<x_2<1,$$

$$\omega'(0)=\omega'(1)=0.$$

Qeyd olunmuş $\upsilon\in V$ üçün bu sərhəd məsələsinin həlli dedikdə $W_2^1(0,1)$-dan olan ümumiləşmiş həlli başa düşürük.

Teorem 9. Tutaq ki, (37)–(41) məsələsinin qoyuluşundakı şərtlər ödənilir. Onda (37) funksionlı V çoxluğunda Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və istənilən $\upsilon\in V$ nöqtəsində onun qradiyenti

$$J'(\upsilon)=\omega(x_2;\upsilon), 0<x_2<1. \quad (42)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

(42) düsturunu istifadə edərək (37)-(41) məsələsində idarəedicinin optimallığı üçün zəruri şərt göstərilmişdir.

Sonda məsələlərin qoyuluşuna və dissertasiya işinin yerinə yetirilməsində göstərdiyi daimi diqqətə görə elmi rəhbərim riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor R.Q. Tağıyevə dərin təşəkkürümü bildirirəm .

Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakı elmi işlərdə nəşr olunmuşdur

1. Тагиев Р.К., Касымова Р.С. Разностная аппроксимация задачи оптимального управления для эллиптического уравнения / Материалы IV международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии,

информатики и физики», Нальчик-Терскол, 4-8 декабря 2013 г, с.258-261.

2. Тагиев Р.К., Касымова Р.С. О задаче оптимального управления коэффициентами эллиптического уравнения с критерием оптимальности по границе области / Тезисы Международной конференции, посвященной 90-летия со дня рождения Гейдар Алиева, Баку, 29-31 май 2013, с.202-203.
3. Тагиев Р.К., Касымова Р.С. Оптимальное управление коэффициентами в эллиптических системах / Ümumimilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 91–ci ildönümünə həsr olunmuş "Müasir elmin aktual problemləri" respublika elmi konfransının materialları, Lənkəran, 2014, c.8-11.
4. Касымова Р.С. Задача оптимального управления для эллиптического уравнения с критерием оптимальности по границе области / "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 55 illiyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransın materialları. Bakı, 15-16 may 2014, c.205-206.
5. Касымова Р.С. Задача оптимального управления для эллиптического уравнения с управлениями в коэффициентах / Материалы международной заочной научно-практической конференции «Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика». Воронежская государственная лесотехническая академия, Воронеж, 2014, №4, ч.1 (9-1), с.303-305.
6. Касымова Р.С. Об одной задаче оптимального управления для линейного эллиптического уравнения // Lənkəran Dövlət Universitetinin Elmi xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası, 2014, s.53-61.
7. Касымова Р.С. Задача оптимального управлении для квазилинейного эллиптического уравнения с критерием оптимальности по границе области / Материалы международной заочной научно-практической конференции «Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика», Воронеж, 2014, №5, ч.1 (10-1), с.41-42.
8. Касымова Р.С. Об оптимальном управлении коэффициентами эллиптического уравнения / Материалы международной заочной научно-практической конференции «Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика», Воронеж, 2015, №5, ч.1 (16-1),с.49-51.
9. Касымова Р.С. Разностная аппроксимация задачи оптимального

управления для квазилинейного эллиптического уравнения / Ümumimilli Lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 92–ci ildönümünə həsr olunmuş “Azərbaycanın bölgələrində təhsilin və elmin inkişafı” respublika elmi konfransının materialları, Lənkəran, 2015, s.4-6.
10. Тагиев Р.К., Касымова Р.С. Об одной задаче оптимального управления для квазилинейного эллиптического уравнения / Azərbaycanın ümumimilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 92–ci ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyatın tətbiqi problemləri” respublika elmi konfransının materialları. XV, Bakı, 6 may 2015, с.85-87.
11. Тагиев Р.К., Касымова Р.С. Разностная аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для эллиптического уравнения с критерием оптимальности по границе области // Вестник Бакинского Университета. Сер. физ. мат. наук, 2015, №3, с.48-59.
12. Tagiyev R.K., Kasimova R.S. On An Optimal Control of The Coefficients Of An Elliptic Equation With A Quality Criterion On The Boundary Of Domain // Transactions of NAS Azerbaijan, ser. Of phys.-tech. and math. Sci., 2015, vol. XXXV, № 1, p.157-163.
13. Тагиев Р.К., Касымова Р.С. Об оптимизационном постановке коэффициентной обратной задачи для эллиптического уравнения с дополнительном интегральным условием / Əməkdar elm xadimi, professor Ə.Ş.Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü ildönümünə həsr olunmuş “Funksional analiz və onun tətbiqləri” adlı Respublika Elmi Konfransın materialları, Bakı-2016, s.202-204.
14. Касымова Р.С. Об оптимизационной постановке граничной обратной задачи для эллиптического уравнения с дополнительным интегральным условием / Azərbaycanın ümumimilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 93–ci ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyatın tətbiqi problemləri” respublika elmi konfransının materialları, Bakı, 2016, s.131-133.
15. Касымова Р.С. Разностная аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления коэффициентами эллиптического уравнения // Вестник Бакинского Университета. Сер. физ. мат. наук, 2016, №4, с.77-94.
16. Касымова Р.С. Вариационная постановка граничной обратной задачи для эллиптического уравнения с дополнительным интегральным условием // Вестник Бакинского Университета. Сер.

физ. мат. наук, 2017, №1, с.123-130.
17. Касымова Р.С. Обратная задача нахождения коэффициента эллиптического уравнения в вариационной постановке / Azərbaycan ümumi Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 94-cü ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyatın tətbiqi problemləri ” Respublika elmi konfransının materialları, XVII, Bakı, 15 may 2017, s. 158-159.
18. Тагиев Р.К., Касымова Р.С. Задача оптимального управления для квазилинейного эллиптического уравнения с управлениями в коэффициентах // Дифференц.уравнения, 2017,т.53, №8, с.1110-1120.
19. Тагиев Р.К., Касымова Р.С. О задаче оптимального управления коэффициентами эллиптического уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки, 2017, т.21, № 2, с.278-291.
20. Тагиев Р.К., Касымова Р.С. Коэффициентная обратная задача типа управления для эллиптического уравнения с дополнительным интегральным условием // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2017, №48, с.17-29.
21. Тагиев Р.К., Касымова Р.С.Вариационный метод решения коэффициентной обратной задачи для эллиптического уравнения// Вестник ЮУрГУ. Серия ”Математика. Механика.Физика”, 2018, т.10, №1,с.18-26.

РЕНА САТТАР КЫЗЫ КАСЫМОВА

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА ПО ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

РЕЗЮМЕ

Предлагаемая диссертационная работа посвящена исследованию некоторых задач оптимального управления для эллиптических уравнений при смешанных краевых условиях и с критерием качества по границе области или по ее части и изучению вариационных постановок некоторых обратных задач для эллиптических уравнений с дополнительным интегральным условием.

В диссертационной работе получены следующие результаты:

-исследованы вопросы корректности задач оптимального управления для линейных и квазилинейных эллиптических уравнений при смешанных краевых условиях и с критерием качества по границе области или по ее части;

-доказана дифференцируемость по Фреше критерий качества, найдены формулы для их градиентов и для рассматриваемых задач оптимального управления установлены условия оптимальности;

-построены разностные аппроксимации задач оптимального управления для линейного эллиптического уравнения, получены оценки скорости сходимости разностных аппроксимаций по состоянию и по функционалу, доказана слабая сходимость по управлению;

-проведен процесс регуляризации разностных аппроксимаций и доказана сильная сходимости по управлению;

-исследованы вопросы корректности вариационных постановок граничной обратной задачи и коэффициентных обратных задач для линейного эллиптического уравнения с дополнительным интегральным условием;

-в вариационных постановках обратных задач найдены формулы для градиентов критерий качества и установлены условия оптимальности.

RENA SATTAR KIZI KASIMOVA

SOME PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL FOR ELLIPTIC EQUATIONS WITH QUALITY CRITERIA AT THE BORDER OF THE AREA

SUMMARY

The thesis is devoted to the study of the correctness of the formulations of certain optimal control problems for elliptic equations under mixed boundary conditions and with the quality criterion for the boundary of a domain or part of it, the derivation of optimality conditions in these problems, the study of the convergence of their difference approximations and their regularization, inverse problems for elliptic equations with an additional integral condition.

In the thesis the following results are obtained:

-questions of the correctness of optimal control problems for linear and quasilinear elliptic equations under mixed boundary conditions and with a quality criterion for the boundary of a region or for its part;

- Frechet differentiability is proved and the formulas for their gradients are found; for optimal control problems under consideration, optimality conditions are established;

-difference approximations of optimal control problems for a linear elliptic equation are constructed, estimates of the rate of convergence of difference approximations by state and function are obtained, weak convergence in control is proved;

- the process of regularization of difference approximations is carried out and strong convergence in control is proved;

- questions of the correctness of variation statements of the boundary inverse problem and coefficient inverse problems for a linear elliptic equation with an additional integral condition are investigated;

In the variation formulations of inverse problems, formulas for the gradients of the quality criterion are found and the optimality conditions are established.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

РЕНА САТТАР КЫЗЫ КАСЫМОВА

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА ПО ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

1211.01-Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математическим наукам

Баку-2018