AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Əlyazma hüququnda

ƏLİ RƏHİM OĞLU SƏFƏRİ

QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ QURSA-DARBU SİSTEMLƏRİ ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİNİN KEYFİYYƏT TƏDQİQİ

1211.01 – Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

BAKI - 2013

Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi riyyaziyyat və kibernetika fakultəsinin **Tətbiqi analizin riyazi üsulları** kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbərlər:
AMEA-nın müxbir üzvü,fizika-riyaziyyat elmlər doktoru,
professor **M.F. Mehdiyev**
Fizika-riyyaziyyat elmlər namizədi, dosent
Y.Ə. Şərifov

Rəsmi opponentlər:

riyaziyyat elmlər doktoru **R.Q. TAĞIYEV** (Bakı Dövlət Universiteti)

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent **İ.Q. Məmmədov** (AMEA-nın Kibernetika İnstitutu)

Aparıcı təşkilat: AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu
(Qeyri-harmonik analiz söbəsi)

Müdafiə 2014-cü il fevralın 25-də saat 14:00-da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdindəki FD.02.016 Dissertasiya Şurasının iclasında olacaqdır.

Ünvan: AZ1148, Bakı şəhəri, Z.Xəlilov küçəsi, 23.

Dissertasiya ilə Bakı Dövlət Universitetinin elmi kitabxanasında tanış olmaq olar.

Avtoreferat 17 yanvar 2014-cü ildə göndərilmişdir.

FD.02.016 Dissertasiya Şurasının
elmi katibi, r.e.d., professor

N.Q.Əhmədov

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Təbiətşünaslığın müasir problemlərinin həlli, klassik riyazi fizika məsələlərini ümumiləşdirmək və yaxud diferensial tənliklər üçün qeyri-lokal sərhəd məsələlərinin də aid olduğu keyfiyyətcə yeni məsələləri tədqiq etməyi tələb edir. Sərhəd şərti yerinə və yaxud sərhəd şərti ilə birlikdə, oblastın müəyyən daxili nöqtələrində həllin qiymətlərini (həllin törəməsinin də ola bilər) əlaqələndirən şərt qoyulan məsələlər üçün qeyri-lokal sərhəd məsələsi adlanır.

Hidromexanikada meydana çıxan adi diferensial tənlik üçün qeyri-lokal sərhəd məsələsinə hələ A.Zommerfeld tərəfindən baxılmışdır. Sonralar V.A.İlin və E.İ.Moiseyev, A.Krol, M.Pikone,Y.D.Tamarkin və başqaları tərəfindən birölçülü qeyri-lokal sərhəd məsələləri tədqiq olunmuşdur.Son illərdə qeyri-lokal məsələlər-L.S.Pulkina, S.A. Beylin, N.V.Beylina, P.L.Qureviç, A.M.Naxuşev, V.İ.Jeqalov, T.Ş.Kalmenov, N.İ.İoikin, O.A.Repin və bir sıra müəlliflər tərəfindən intensiv olaraq öyrənilir.Onu da qeyd etmək lazımdır ki, bu müəlliflər qeyri-lokal məsələlərin əsasən spektral xassələrini tədqiq etmişlər.

Xətti tənliklər üçün qeyri-lokal sərhəd məsələsi ümumi qoyuluşda ilk dəfə Y.D.Tamarkin tərəfindən tədqiq edilmişdir.

Son illərə kimi, əsasən prosesin dinamikası cəmlənmiş və yaxud paylanmış parametrli diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərinə baxılmışdır və tendensiyaya görə bu məsələlər üçün klassik başlanğıc (Koşi məsələsi) və yaxud sərhəd məsələsi qoyulmuşdur.

Paylanmış parametrli sistemlərlə təsvir optimal idarəetmə nəzəriyyəsinə Ayda-zədə K.R., Haxıyev S.S., Həsənov K.Q., Əhmədov Q., Bağırov Ə.M., Butkovski A.Q., Vasilyev F.P., Vaslyev O.V., Eqorov A.İ., Quliyev H.F., Mərdanov M.C., Mənsimov K.B., Məmmədov İ.Q., Sadıqov M.H., Sirazetdinov T.K., Tağıyev R.Q., Həşimov S.A., Yaqubov M.H., Usubov Ş.Ş., Şərifov Y.Ə., İbiyev F.T., Şirinov T.V. və başqa müəlliflər tərəfindən mühüm töhvələr verilmişlər

Lakin elə fiziki proseslər var ki, onların vəziyyəti müxtəlif müşahidələrdən məlumdur və bu prosesləri modelləşdirdikdə, inteqral şərtli sərhəd məsələsi alınır. Belə məsələlər, Koşi məsələsi ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələləri ilə müqayisədə kifayət qədər mürəkkəbdir və onlar axırıncı məsələni xüsusi hal kimi özündə saxlayır.

Riyazi nöqteyi-nəzərdən qeyri-lokal sərhəd məsələlərinin tədqiqi indivudal yanaşma tələb edir. Son illər qeyri-lokal sərhəd şərtli diferensial tənliklər intensiv tədqiq olunur. Məsələn, A.M. Naxuşev işlərində inteqral sərhəd şərtli hiperbolik tənliklər sisteminə baxilmışdır və məsələnin həllolunanlığı üçün zıruri və kafi sərtlər verilmişdir. Elə həmin işlərdə belə sərhəd məsələsi ilə təsvir konkret proseslər göstərilmişdir. Misal olaraq çoxlu sayda bioloji, sosioloji proseslər göstərimişdir ki, bu proseslərin riyazi modelləri inteqral sərhəd şərtli hiperbolik tənliklərlə təsvir olunur.Son zamanlar qeyri-lokal şərtli hiperbolik tənliklər sistemi ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələləri intensiv öyrənilir. Bu sahədə M.F. Mehdiyevin, Y.Ə. Şərifovun, F.T. İbiyevin, T.V. Şirinovun, İ.Q. Məmmədovun və digərlərinin aldığı nəticələri qeyd etmək olar.

İşin məqsədi:

1. Inteqral sərhəd şərtli Qursa-Darbu sistemlərində həllin varlığı və yeganəliyini təmin edən kafi şərtlərin tapılması.
2. Inteqral sərhəd şərtli Qursa-Darbu sistemləri ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərində sistemin həllinin idarəedici parametrlərdən kəsilməz asılılığınım öyrənilməsi.
3. Baxılan optimal idarəetmə məsələsində funksionalın qradientinin hesablanması və qradientin köməyi ilə optimallıq üçün zəruri şərtlərin alınması.
4. Bir xüsusi halda Pontryaginin maksimum prinsipinin isbst ediməsi.

Tədqiqat üsulları: Dissertasiya işində adi və xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin, variasiya hesabının və optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsullarından istifadə edilmişdir.

Elmi yeniliklər:

Dissertasiyada alınan bütün nəticələr yenidir, nəzəri xarakter daşıyır və müəllif tərəfindən sərbəst alnmışdır. Disertasiyada əsas aşağıdakı nəticılər alınmışdır:

-inteqral sərhəd şərtli Qursa-Darbu sistemlərində həllin varlığı və yeganəliyini təmin edən kafi şərtlərin tapılmışdır;
-nteqral sərhəd şərtli Qursa-Darbu sistemləri ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərində sistemin həllinin idarəedici parametrlərdən kəsilməz asılılığınım öyrənilmişdir;
-baxılan optimal idarəetmə məsələsində funksionalın qradientinin hesablanmışdır və qradientin köməyi ilə optimallıq üçün zəruri şərtlərin alınmışdır;
-bir xüsusi halda Pontryaginin maksimum prinsipinin isbst edimişdir;

Nəzəri və praktiki əhəmiyyəti: Dissertasiya işində alınmış nəticələrin nəzəri və praktiki əhəmiyyəti vardır.Bu nəticələr qeyri-lokal şərtli tətbiq məsələlərinin həllində, işdə istifadə olunan sxemlər isə qeyri-lokal şərtli başqa məsələlərin tədqiqinə istifadə oluna bilər.

İşin aprobasiyası: Dissertasiya işində alınmış nəticələr dəfələrlə «Tətbiqi analizin riyazi üsulları» kafedrasının elmi seminarlarında (rəhbər AMEA-nın müxbir üzvü, professor M.F.Mehdiyev), II International Conference of Operations Research (20-22 may,2009, Mazandaran University,Babolsar-Iran), professor İ.A.Bəxtiyarovun 80 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konfransda (Bakı, 2008), Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2010), Akademik F.Q. Maqsudovun 80 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2010), "Funksional analiz və onun tətbiqləri" Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2011) müzakirə olunmuşdur.Dissertasiya işinin.əsas məzmunu 10 işdə çap olunmuşdur.

Dissertasiya işinin strukturu və həcmi. Dissertasiya işi giriş, üç fəsil və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiyanın həcmi 140 səhifədir.

Dissertasiya işinin qısa məzmunu

Disertasiya işi giriş, üç fəsil və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Girişdə mövzunun aktuallığı əsaslandırılmış, mövzuya aid əvvəllər alınmış nəticələrin icmalı verilmiş, onların qısa analizi verilmiş və dissertasiyanın əsas nəicələri göstərilmişdir.

1-ci fəsildə inteqral sərhəd şərti ilə verilmiş hiperbolik sistemlərin həllinin varlığı və yeganəliyi araşdırılmışdır.

1.1. yarımfəslində Qursa-Darbu sistemi üçün qeyri-lokal (inteqral) şərtli sərhəd məsələsi qoyulmuşdur. Məsələnin mahiyyətini anlamaq üçün sadə misallar araşdırılmışdir.

1.2. yarımfəslində optimal idarəetmə məsələsinin qoyuluşu verilmişdir və fərz olunur ki, idarəedici obyekt hiperbolik tənliklər sistemi ilə təsvir olunur

$$\frac{\partial^2 y(t,s)}{\partial t \partial s} = f\left(t, s, y(t,s), \frac{\partial y(t,s)}{\partial t}, \frac{\partial y(t,s)}{\partial s}, u(t,s)\right), \text{ s.h.y. } (t,s) \in Q, \tag{1}$$

başlanğıc və sərhəd şərtləri ilə

$$\frac{\partial y(t,0)}{\partial t} = \varphi(t, y(t,0), v(t)), \quad \text{s.h.y. } t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\frac{\partial y(0,s)}{\partial s} = \psi(s, y(0,s), \omega(s)), \text{ s.h.y. } s \in [0,l], \tag{3}$$

$$y(0,0) + \int_0^T n(t)\, y(t,0)\, dt = c, \tag{4}$$

burada $Q = \{(t,s): 0 \le t \le T, 0 \le s \le l\}$ verilmiş düzbucaqlı, $T, l > 0$ -verilmiş ədədlər; $y = (y_1, y_2, .., y_n)$- faza koordinatı; $u = (u_1, u_2, .., u_r)$, $v = (v_1, v_2, .., v_m)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, .., \omega_q)$- idarəedici parametrlər; $\frac{\partial y(t,s)}{\partial t}, \frac{\partial y(t,s)}{\partial s}, \frac{\partial^2 y(t,s)}{\partial t \partial s}$ - $y = y(t,s)$ -in Soboleva əsasən törəmələri; $f = (f_1, f_2, .., f_n), \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_n), \psi = (\psi_1, \psi_2, .., \psi_n)$- verilmiş vektor funksiyalar; $n(t)$- $n \times n$ ölçülü matris funksiya ; $c \in R^n$ - məlum daimi vektordur.

Tutaqki, $w = w(t,s) = (u(t,s), v(t), \omega(s))$ idarəetmə funksiyaları $W = U \times V \times \Omega$, çoxluğundan seçilir:

$$U \subseteq L_2^r(Q), \ V \subseteq L_2^m([0,T]), \ \Omega \subseteq L_2^q([0,l]). \tag{5}$$

Optimal idarəetmə məsələsi aşağıdakı şəkildə qoyulur:
$w = w(t,s) \in W$ idarəetmələr arasında eləsini tapmaq tələb olunur ki,

$$J(w) = \iint_Q F\left(t, s, y(t,s), \frac{\partial y(t,s)}{\partial t}, \frac{\partial y(t,s)}{\partial s}, u(t,s)\right) dt ds + \sum_{i=1}^{K} \Phi(y(t_i, s_i)), \tag{6}$$

funksionalı minimum qiymət alsın.

Burada $F(t,s,y,p,q,u)$ və $\Phi(y)$ skalyar funksiyalar; (t_i,s_i), $i=\overline{1,K}$ - Q düzbucaqlının ixtiyari nöqtələri toplusu; K - qeyd olunmuş natural ədəddir.

1.3. yarımfəslində 1.2. yarımfəslində baxılan sərhəd məsələsi ekvivalent inteqral tənliyə gətirilir və göstərilir ki, (1)-(4) məsələsi

$$y(t,s)=\left[E+\int_0^T n(t)dt\right]^{-1} C+\int_0^T K(t,\tau)\varphi(\tau,y(\tau,0),\upsilon(\tau))d\tau+ \tag{7}$$

$$+\int_0^s \psi(\xi,y(0,\xi),\omega(\xi))d\xi+\int_0^t\int_0^s f\left(\tau,\xi,y(\tau,\xi),\frac{\partial y(\tau,\xi)}{\partial\tau},\frac{\partial y(\tau,\xi)}{\partial\xi},u(\tau,\xi)\right)d\xi d\tau$$

inteqral diferensial tənliyinə ekvivalentdir, burada

$$K(t,\tau)=\begin{cases}\left[E+\int\limits_0^T n(t)dt\right]^{-1}\left[E+\int\limits_0^\tau n(\tau)d\tau\right], & 0\le\tau\le t\\ -\left[E+\int\limits_0^T n(t)dt\right]^{-1}\int\limits_\tau^T n(\tau)d\tau, & t\le\tau\le T\end{cases}$$

.

1.4. yarımfəslində (1)-(4) sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi öyrənilir. Əsas hökmləri vermək üçün məsələnin ilkin verilənləri üzərinə aşağıdakı şərtlər qoyulmuşdur:

I) Fərz edək ki, $f(t,s,y,p,q,u)$ funksiyası sanki bütün $(t,s)\in Q$ üçün $(y,p,q,u)\in R^{3n}\times R^r$ dəyişənlərinə nəzərən kəsilməzdir və hər bir qeyd olunmuş $(y,p,q,u)\in R^{3n}\times R^r$ üçün $(t,s)\in Q$ dəyişənlərinə nəzərən ölçüləndir.

II) Fərz olunur ki, $f(t,s,y,p,q,u)$ funksiyası sanki bütün $(y,p,q,u)\in R^{3n}\times R^r$ üçün (y,p,q) dəyişənlərinə nəzərən kəsilməz törəmələri vardır. Bu zaman

$$f\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_2(Q);$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_\infty(Q);$$
$$\frac{\partial f}{\partial p}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_\infty(Q);$$
$$\frac{\partial f}{\partial q}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_\infty(Q).$$

münasibətləri doğrudur.

III) Fərz edək ki, $f(t,s,y,p,q,u)$ funksiyası üçün

$$f(t,s,0,0,0,0)\in L_2(Q)$$

münasibətləri doğrudur.

IV) $f(t,s,y,p,q,u)$ funksiyası $(y,p,q)\in R^{3n}$ dəyişənlərinə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir, yəni

$$\left|f(t,s,y,p,q,u)-f(t,s,\overline{y},\overline{p},\overline{q},u)\right|\le K\left(\left|y-\overline{y}\right|+\left|p-\overline{p}\right|+\left|q-\overline{q}\right|\right),$$

ixtiyari (y,p,q,u) və $(\overline{y},\overline{p},\overline{q},u)\in R^{3n}\times R^r$ üçün.

V) $\varphi(t,y,\upsilon)$ funksiyası sanki bütün $t\in[0,T]$ üçün $(y,\upsilon)\in R^n\times R^m$ dəyişənlərinə nəzərən kəsilməzdir və hər bir qeyd olunmuş $(y,\upsilon)\in R^n\times R^m$ üçün $t\in[0,T]$ dəyişəninə nəzərən ölçüləndir.

VI) $\varphi(t,y,\upsilon)$ funksiyası sanki bütün $t\in[0,T]$ üçün və hər bir $(y,\upsilon)\in R^n\times R^m$ üçün $y\in R^n$ dəyişəninə nəzərən kəsilməz törəməsi vardır və bu zaman

$$\varphi(\cdot,y(t,0),v(t)):C([0,T])\times V\to L_2([0,T]),$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\cdot,y(t,0),v(t)):C([0,T])\times V\to L_\infty([0,T]).$$

VII) $\varphi(t,y,\upsilon)$ funksiyası üçün

$$\varphi(t,0,0)\in L_2([0,T])$$

münasibəti doğrudur.

VIII) $\varphi(t,y,\upsilon)$ funksiyası $y\in R^n$ dəyişənlərinə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir, yəni ixtiyari (t,y,υ) və $(t,\overline{y},\upsilon)\in[0,T]\times R^n\times R^m$ üçün

$$\left|\varphi(t,y,\upsilon)-\varphi(t,\overline{y},\upsilon)\right|\le L\left|y-\overline{y}\right|$$

münasibəti doğrudur.

IX) $\psi(s,y,\omega)$ funksiyası sanki bütün $s\in[0,l]$ üçün $(y,\omega)\in R^n\times R^q$ dəyişənlərinə nəzərən kəsilməzdir və hər bir qeyd olunmuş $(y,\omega)\in R^n\times R^q$ üçün $s\in[0,l]$ dəyişəninə nəzərən ölçüləndir.

X) $\psi(s,y,\omega)$ funksiyası sanki bütün $s\in[0,l]$ üçün və hər bir $(y,\omega)\in R^n\times R^q$ üçün y dəyişəninə nəzərən kəsilməz törəməsi vardır və bu zaman

$$\psi(\cdot,y(0,s),\omega(s)):C([0,l])\times\Omega\to L_2([0,l]),$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(\cdot,y(0,s),\omega(s)):C([0,l])\times\Omega\to L_\infty([0,l]).$$

XI) Fərz edək ki,

$$\psi(s,0,0)\in L_2([0,l])$$

münasibəti ödənir.

XII) $\psi(s,y,\omega)$ funksiyası $y\in R^n$ dəyişəninə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir, yəni ixtiyari (s,y,ω) və $(s,\bar{y},\omega)\in[0,l]\times R^n\times R^q$ üçün

$$|\psi(s,y,\omega)-\psi(s,\bar{y},\omega)|\le N|y-\bar{y}|$$

münasibəti ödənir.

XIII) $n(t)$ matris funksiyası $n\times n$ tərtiblidir və $n_{ij}(t)\in L_\infty([0,T]),\ i,j=\overline{1,n}$ münasibətini ödəyir və bundan əlavə

Teorem 1. Fərz edək ki, (1.30)-(1.33) məsələlərinin ilkin verilənləri I-XIII şərtlərini və

$$LT\left(1-\left\|\int_0^T n(t)dt\right\|\right)^{-1}\left(1+\left\|\int_0^T n(t)dt\right\|\right)<1$$

şərtini ödəyir. Onda hər bir qeyd olunmuş $w\in W=U\times V\times\Omega$ idarəedicisi üçün (1)-(4) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır.

1.4. yarımfəslində (1)-(4) məsələsinin $L_2^r\times L_2^m\times L_2^q$ fəzasında idarəedici funksiyalardan dayanıqlılığı məsələlərinə baxılmışdır.

XIV) Fərz edək ki, (y,p,q,u) dəyişənlərinə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir: sanki bütün $(t,s)\in Q$ və $(y,p,q,u),(\bar{y},\bar{p},\bar{q},\bar{u})\in R^{3n}\times R^r$ üçün

$$|f(t,s,y,p,q,u)-f(t,s,\bar{y},\bar{p},\bar{q},\bar{u})|\le k(|y-\bar{y}|+|p-\bar{p}|+|q-\bar{q}|)+k_0|u-\bar{u}|.$$

XV) Fərz edək ki, $\varphi(t,y,\upsilon)$ funksiyası (y,υ) dəyişənlərinə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir, yəni $(y,\upsilon),(\bar{y},\bar{\upsilon})\in R^n\times R^n$ üçün

$$\left|\varphi(t,y,\upsilon)-\varphi(t,\bar{y},\bar{\upsilon})\right|\le L\left|y-\bar{y}\right|+L\left|\upsilon-\bar{\upsilon}\right|.$$

XVI) Fərz edək ki, $\psi(s,y,\omega)$ funksiyası (y,ω) dəyişənlərinə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir, yəni ixtiyari $(y,\omega),(\bar{y},\bar{\omega})\in R^n\times R^m$ və $s\in[0,l]$ üçün

$$\left|\psi(s,y,\omega)-\psi(s,\bar{y},\bar{\omega})\right|\le N\left|y-\bar{y}\right|+N_0\left|\omega-\bar{\omega}\right|$$

şərti ödənir.

Teorem. Fərz edək ki, I-XVI şərtləri ödənir. Onda (1)-(4) sərhəd məsələsinin həlləri $U\times V\times\Omega\subset L_2(Q)\times L_2([0,T])\times L_2([0,l])$ fəzasında idarəedici parametrlərə nəzərən kəsilməzdir və

$$\max_Q\left|\Delta y(t,s)\right|^2+vrai\max_{[0,l]}\int_0^T\left|\frac{\partial\Delta y(t,s)}{\partial t}\right|^2dt+vrai\max_{[0,T]}\int_0^l\left|\frac{\partial\Delta y(t,s)}{\partial s}\right|^2ds\le S\left\|w-\bar{w}\right\|^2$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

2-ci fəsil inteqral şərtləri ilə Qursa-Darbu sistemləri üçün optimal idarəetmə məsələlərinin araşdırılmasına həsr olunmuşdur.

2.1. yarımfəslində (6) funksionalının (1)-(5) məhdudiyyətləri daxilində artım formulları alınmışdır. Göstərilir ki, artım düsturları aşağıdakı şəkildədir:

$$J(w+\bar{w})-J(w)=\sum_{i=1}^{K}\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial y}\left(y(t_i,s_i)\right),z(t_i,s_i)\right\rangle+$$

$$+\iint_Q\left\langle\frac{\partial}{\partial y}\left(F\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),u(t,s)\right)-\left\langle\psi(t,s),f\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),u(t,s)\right)\right\rangle\right),z(t,s)\right\rangle dtds+$$

$$+\iint_Q\left\langle\frac{\partial}{\partial p}\left(F\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),u(t,s)\right)-\left\langle\psi(t,s),f\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),u(t,s)\right)\right\rangle\right),\frac{\partial z}{\partial t}(t,s)\right\rangle dtds+$$

$$+\iint_Q\left\langle\frac{\partial}{\partial q}\left(F\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),u(t,s)\right)-\left\langle\psi(t,s),f\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),u(t,s)\right)\right\rangle\right),\frac{\partial z}{\partial s}(t,s)\right\rangle dtds+$$

$$
\begin{aligned}
&+\iint_Q \Bigg\langle \frac{\partial}{\partial u} F\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),u(t,s)\right)-\\
&-\left\langle \psi(t,s), f\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),u(t,s)\right)\right\rangle, \bar{u}(t,s) dtds \Bigg\rangle + \qquad (8)\\
&+\iint_Q \left\langle \psi(t,s), \frac{\partial^2 z(t,s)}{\partial t \partial s}\right\rangle dtds - \int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial y}\langle \mu(t), \varphi(t,y(t,0),v(t))\rangle, z(t,0)\right\rangle dt -\\
&-\int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial v}\langle \mu(t), \varphi(t,y(t,0),v(t))\rangle, \bar{v}(t,0)\right\rangle dt - \int_0^T \left\langle \mu(t), \frac{\partial z(t,0)}{\partial t}\right\rangle dt -\\
&-\int_0^l \left\langle \frac{\partial}{\partial y}\langle \eta(s), \psi(s,y(0,s),\omega(s))\rangle, z(0,s)\right\rangle ds -\\
&-\int_0^l \left\langle \frac{\partial}{\partial \omega}\langle \eta(s), \psi(s,y(0,s),\omega(s))\rangle, \bar{\omega}(0,s)\right\rangle ds +\\
&+\int_0^l \left\langle \eta(s), \frac{\partial z(0,s)}{\partial s}\right\rangle ds + \left\langle \lambda, z(0,0) + \int_0^T n(t) z(t,0) dt \right\rangle + R,
\end{aligned}
$$

burada R -qalıq həddidir və onun aşkar ifadəsi dissertasiyada verilmişdir, $z(t,s)$ -isə variasiyada tənliyin həllidir,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z(t,s)}{\partial t \partial s} &= \frac{\partial f}{\partial y}\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right) z(t,s) +\\
&+\frac{\partial f}{\partial p}\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right)\frac{\partial z}{\partial t}(t,s) + \frac{\partial f}{\partial q}\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right)\frac{\partial z}{\partial s}(t,s) +\\
&+\frac{\partial f}{\partial u}\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right)\bar{u}(t,s)
\end{aligned}
$$

2.2. yarımfəsli qoşma tənliklərin alınmasına həsr olunmuşdur. Göstərilmişdir ki, (1)-(6) məsələsində $(\psi(t,s),\mu(t),\eta(s),\lambda)$ funksiyaları qoşma tənliklərin həllidir və aşağıdakı şəkildə təyin olunur.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{K} \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y(t_i,s_i)) + \left(E + \int_0^T n(t) dt\right)' \lambda -\\
&-\iint_Q \frac{\partial H}{\partial y}\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),\psi(t,s),u(t,s)\right) dtds - \qquad (12))\\
&-\int_0^T \frac{\partial}{\partial y} H^1(t,y(t,0),\mu(t),v(t)) dt - \int_0^l \frac{\partial}{\partial y} H^2(s,y(0,s),\eta(s),\omega(s)) ds = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{K} \mathrm{E}\chi(t-t_i)\frac{\partial \Phi}{\partial y}(y(t_i,s_i))- \\
&-\int_0^l\int_t^T \frac{\partial H}{\partial y}\left(\tau,s,y(\tau,s),\frac{\partial y}{\partial \tau}(\tau,s),\frac{\partial y}{\partial s}(\tau,s),\psi(\tau,s),u(\tau,s)\right)d\tau ds- \\
&-\int_0^l \frac{\partial}{\partial p}H\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),\psi(t,s),u(t,s)\right)ds- \\
&-\int_t^T \frac{\partial}{\partial y}H^1(\tau,y(\tau,0),\mu(\tau),v(\tau))d\tau+\left(\int_t^T n(\tau)d\tau\right)'\lambda+\mu(t)=0,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{K} \mathrm{E}\chi(s-s_i)\frac{\partial \Phi}{\partial y}(y(t_i,s_i))- \\
&-\int_0^T\int_s^l \frac{\partial H}{\partial y}\left(t,r,y(t,r),\frac{\partial y}{\partial t}(t,r),\frac{\partial y}{\partial r}(t,r),\psi(t,r),u(t,r)\right)drdt- \\
&-\int_0^T \frac{\partial}{\partial q}H\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),\psi(t,s),u(t,s)\right)dt- \\
&-\int_s^l \frac{\partial}{\partial y}H^2(r,y(0,r),\eta(r),\omega(r))dr+\eta(s)=0,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{K} \mathrm{E}\chi(t-t_i)\chi(s-s_i)\frac{\partial \Phi}{\partial y}(y(t_i,s_i))- \\
&-\int_t^T\int_s^l \frac{\partial H}{\partial y}\left(\tau,r,y(\tau,r),\frac{\partial y}{\partial \tau}(\tau,r),\frac{\partial y}{\partial r}(\tau,r),\psi(\tau,r),u(\tau,r)\right)d\tau dr- \\
&-\int_s^l \frac{\partial H}{\partial p}\left(t,r,y(t,r),\frac{\partial y}{\partial t}(t,r),\frac{\partial y}{\partial r}(t,r),\psi(t,r),u(t,r)\right)dr- \\
&-\int_t^T \frac{\partial}{\partial q}H\left(\tau,s,y(\tau,s),\frac{\partial y}{\partial \tau}(\tau,s),\frac{\partial y}{\partial s}(\tau,s),\psi(\tau,s),u(\tau,s)\right)d\tau+\psi(t,s)=0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Qoşma tənliklər sisteminin yeganəliyi araşdırılır. Göstərilir ki, əgər verilmiş məsələnin həlli varsa, onda qoşma məsələlərin də həlli var.

2.3. yarımfəslində (6) funksionalının (1)- (5) məhdudiyyətləri daxilində qradienti tapılır. Fərz olunur ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:
Aşağıdakı kimi şərtlər daxil edək:
XVII $f(t,s,y,p,q,u)$ funksiyası aşağıdakı şərti ödəyir.

$$\Big| f(t,s,y+\bar{y},p+\bar{p},q+\bar{q},u+\bar{u}) - f(t,s,y,p,q,u) -$$

$$-\frac{\partial f}{\partial y}\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right)\bar{y} - \frac{\partial f}{\partial p}\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right)\bar{p} -$$

$$-\frac{\partial f}{\partial q}\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right)\bar{q} - \frac{\partial f}{\partial u}\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right)\bar{u}\ \Big| \le$$

$$\le \bar{k}\left(|\bar{y}|^2+|\bar{p}|^2+|\bar{q}|^2+|\bar{u}|^2\right),$$

XVIII). $\varphi(t,y,v)$ funksiyası aşağıdakı şərti ödəyir.

$$\left|\varphi(t,y+\bar{y},v+\bar{v}) - \varphi(t,y,v) - \frac{\partial}{\partial y}\varphi(t,y,v)\bar{y} - \frac{\partial}{\partial v}\varphi(t,y,v)\bar{v}\right| \le$$

$$\le \bar{L}\left(|\bar{y}|^2+|\bar{v}|^2\right),$$

XIX). $\psi(s,y,\omega)$ funksiyası aşağıdakı şərti ödəyir.

$$\left|\psi(s,y+\bar{y},\omega+\bar{\omega}) - \psi(s,y,\omega) - \frac{\partial}{\partial y}\psi(s,y,\omega)\bar{y} - \frac{\partial}{\partial \omega}\psi(s,y,\omega)\bar{\omega}\right| \le$$

$$\le \bar{N}\left(|\bar{y}|^2+|\bar{\omega}|^2\right),$$

burada (y,v), $(y+\bar{y},v+\bar{v}) \in R^n \times R^m$, (y,ω), $(y+\bar{y},\omega+\bar{\omega}) \in R^n \times R^q$,

$$(y,p,q,u),\ (y+\bar{y},p+\bar{p},q+\bar{q},u+\bar{u}) \in R^{3n} \times R^r,$$

Göstərilir ki, yuxarıdakı şərtlər ödəndikdə funksionalın qradienti

$$J'(w) = -(\frac{\partial H}{\partial u}\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),\psi(t,s),u(t,s)\right),$$

$$\frac{\partial H^1}{\partial v}(t,y(t,0),\mu(t),v(t)),\ \frac{\partial}{\partial \omega}H^2(s,y(0,s),\eta(s),\omega(s))) \in L_2^r \times L_2^m \times L_2^q.$$

düsturu ilə verilir.

2.4. yarımfəslində (1)-(6) məsələsinin optimallıq üçün zəruri şərtləri çıxarılır.

Teorem 2. (optimallıq üçün zəruri şərt) Fərz edək ki, $w_* = (u_*(t,s), v_*(t), \omega_*(s)) \in W$ (1)-(6) məsələsində optimal idarəedicidir. Onda

$$\iint_Q \left\langle \frac{\partial}{\partial u} H\left(t,s,y(t,s;w_*), \frac{\partial y}{\partial t}(t,s;w_*), \frac{\partial y}{\partial s}(t,s;w_*), \psi(t,s;w_*), u_*(t,s) \right), \bar{u}(t,s) \right\rangle dtds +$$

$$+ \int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial v} H^1(t, y(t,0;w_*), \mu(t;w_*), v_*(t)), \bar{v}(t) \right\rangle dt +$$

$$+ \int_0^l \left\langle \frac{\partial}{\partial \omega} H^2(s, y(0,s;w_*), \eta(s;w_*), \omega_*(s)), \bar{\omega}(s) \right\rangle ds \le 0,$$

burada $y(t,s;w_*)$ funksiyası $w_* = (u_*, v_*, \omega_*) \in W = U \times V \times \Omega$ idrəedicinə uyğun (1)-(6) məsələsinin həllidir, $(\psi(t,s;w_*), \mu(t;w_*), \eta(s;w_*))$ (12)-(15) uyğun qoşma sistemin həllidir.

$\Phi(y)$ funksiyası y dəyişəninə görə' $F(t,s,y,p,q,u)$ funksiyası isə (y,p,q,u) dəyişənlərinə görə qabarıqdır. Bu şərtlər ödəndikdə optimallıq üçün zəruri şərt həm də kafidir.

Teorem 3. $w_* = (u_*, v_*, \omega_*) \in W$ idarəedicisinin (1)-.(6) məsələsində optimallığı üçün ixtiyari $w = (u,v,\omega) \in W$ üçün

$$\iint_Q \left\langle \frac{\partial}{\partial u} H\left(t,s,y(t,s;w_*), \frac{\partial y}{\partial t}(t,s;w_*), \frac{\partial y}{\partial s}(t,s;w_*), \psi(t,s;w_*), u_*(t,s) \right), u(t,s) - u_*(t,s) \right\rangle dtds +$$

$$+ \int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial v} H^1(t, y(t,0;w_*), \mu(t;w_*), v_*(t)), v(t) - v_*(t) \right\rangle dt +$$

$$+ \int_0^l \left\langle \frac{\partial}{\partial \omega} H^2(s, y(0,s;w_*), \eta(s;w_*), \omega_*(s)), \omega(s) - \omega_*(s) \right\rangle ds \le 0,$$

$$R_1 \ge 0,$$

buradakı R_1 -in aşkar ifadəsi dissertasiyasada verilmişdir.

Dissertasiyanın üçüncü fəslində aşağıdakı kimi optimal idarəetmə məsələsinə baxılır: fərz edək ki, idarəolunun sistemin vəziyyəti aşağıdakı kimi inteqral sərhəd şərtli diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunur

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u(t)), \quad 0 \le t \le T \tag{16}$$

$$x(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = C \tag{17}$$

$$u(t) \in U,\ t \in [0, T], \tag{18}$$

. Məqsədimiz (16)-(18) məsələsinin həlləri üzrə

$$\mathrm{J}(u) = \varphi(x(0), x(T)) + \int_0^T F(t, x(t), u(t))dt \tag{19}$$

funksionalının minimallaşdırılmasından ibarətdir.
Məsələnin ilkin verilənləri üzərinə müəyyən şərtlər qoymaqla (16)-(18) sərhəd məsələsinin hər bir qeyd olunmuş mümkün idarəedici üçün həllinin varlığı və yeganəliyi isbat edilmiş və (16)-(19) optimal idarəetmə məsələsində Pontryaginin maksimum prinsipi şəklində optimallıq üçün zəruri şərt alınmışdır.

ÇAP OLUNMUŞ İŞLƏRİN SİYAHISI

1. А.Р.Сафари. Градиент в задаче оптимального управления для гиперболических систем с нелокальными условиями / Professor İ.A. Bəxtiyarovun 80 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konfransın materialları, 18 dekabr 2008-ci il, Bakı-2008, s.139-144.
2. A.R.Safari, Sharifov Y.A. Necessary optimality condition in an optimal control problem for Goursat-Darboux systems with boundary and distributed controls under nonlocal conditions/ The abstract of the II International Conference of Operations Research 20-22 may 2009, Mazandaran University, Babolsar-Iran, p. 21.
3. А.Р.Сафари. Необходимое условие оптимальности в одной задаче оптимального управления для систем Гурса-Дарбу при нелокальных условиях/ Spektral nəzəriyyə və onun tətbiqləri. Akademik F.Q. Maqsudovun 80 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransın tezisləri, s.309-312.
4. А.Р.Сафари. Необходимое условие в задаче оптимального управления для систем Гурса-Дарбу с граничными и распределенными управлениями при нелокальных условиях // Bakı universitetinin xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası N3, 2010, s. 65-71.

5. А.Р.Сафари. Необходимое условие оптимальности в задаче оптимального управления для систем Гурса-Дарбу с неклассическими условиями/ Yəhya Məmədovun anadan olmasının 80 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" Beynəxalq konfransın materialları, Bakı 27 dekabr 2010, s. 120-121.
6. А.Р.Сафари, Я.А.Шарифов. Непрерывная зависимость решений от управляющих параметров для систем Гурса-Дарбу с неклассическими условиями// Технологии и методики в образовании. Научно-технический журнал N1, 2011, стр. 20-25.
7. А.Р.Сафари.Необходимое условие оптимальности в задаче оптимального управления для систем Гурса-Дарбу с интегральными условиями/ Funksional analiz və onun tətbiqləri. Akademik Z.İ. Xəlilovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynaxalq konfransın materialları. Bakı 2011, s.316-319.
8. A.R.Safari, Y.A. Sharifov. Necessary optimality condition in the problems of control of Goursat-Darboux systems with integral conditions// Transactions of National Academyof Science of Azerbaijan. Series of phical-technical and mathematical scinces, N1, 2011, pp.125-136.
9. М.Ф.Мехтиев, А.Р.Сафари, Я.А.Шарифов. Алгоритм численного решения для задачи оптимального управления систем Гурса-Дарбу с интегральными условиями // Bakı universitetinin xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası N4, 2012, s.5-16.
10. A.R.Safari, M.F. Mekhtiyev, Y.A. Sharifov. Maximum Principle in the Optimal Control Problems for Systems with Integral Boundary Conditions and Its Extension // Abstract and Applied Analysis, vol. 2013, ID 946910, 9 pages.

ALI RAHIM oglu SAFARI

QUALITY INVESTIGATION OF AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM DESCRIBED BY QOURSAT-DARBOUX SYSTEMS WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS

SUMMARY

The thesis is devoted to the investigation of controlled hyperbolic systems with non local boundary conditions. For the optimization of the correctness of the considered system there were found conditions and for the existence of optimal controllability there were found sufficient conditions. The following results were obtained in the work:

1. The existence and uniqueness of the solution of the hyperbolic system with integral boundary conditions were proved.
2. The continuous dependence of the solution of the boundary problem from the control parameter was investigated.
3. The functional gradient in the optimal control problem was found.
4. The necessary and sufficient conditions for the optimization in the optimal control problem were found.
5. In special case Pontryagin's maximum principle is proved.

АЛИ РАГИМ оглы САФРИ

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ГУРСА-ДАРБУ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

РЕЗЮМЕ

В диссертационной работе исследована задача оптимального управление для систем Гурса-Дарбу с нелокальными условиями и получены следующие основные результаты:

-доказана теорема существования и единственности решения гиперболических систем с интегральными краевыми условиями;

-получены различные формы приращения функционала;

-получен вид градиента функционала и выведены необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче оптимального управления для систем Гурса-Дарбу с интегральными краевыми условиями;

-в одном частном случае доказана принцип максимума Понтрягина;

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

АЛИ РАГИМ оглы САФАРИ

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ГУРСА-ДАРБУ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

1211.01 – Дифференциальные уравнения

АФТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора философии по математики

БАКУ - 2013