НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

НИГЯР РАГИБ кызы САДЫГОВА

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1211.01-Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2015

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

NİGAR RAHİB QIZI SADIQOVA

CIRLAŞAN ELLİPTİK TİP TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN KEYFİYYƏT XASSƏLƏRİ

1211.01-Diferensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı – 2015

Dissertasiya işi **AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun** «Diferensial tənlikər» şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Tahir S. Hacıyev**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **Nizaməddin Ş.İsgəndərov**

(Bakı Dövlət Universiteti);

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dos. **Əbdürrəhim F. Quliyev**

(AMEA Riyaziyyat və Mexanuka İnstitutu).

Aparıcı təşkilat:

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

«Riyazi analiz» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 30 iyun 2015-ci il saat 16^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç., 9.

Avtoreferat göndərilib 27 may 2015-ci il.

AMEA RMİ-nın D 01.111

Dissertasiya Şurasının

elmi katibi **dosent Rövşən Bəndəliyev**

Работа выполнена в отделе «Дифференциальные уравнения» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, проф. **Таир С.Гаджиев**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф. (Бакинский Государственный Университет); **Низамеддин Ш. Искендеров**

кандидат физико-математических наук, доц. **Абдуррагим Ф. Гулиев**

(Институт Математики и Механики НАН Азербайджана)

Ведущая организация:

Азербайджанский Государственный Педагогический Университет кафедра «Математический анализ».

Защита диссертации состоится 30 июня 2015 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: АZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде., 9.

Автореферат разослан 27 мая 2015 года.

Ученый секретарь

Диссертационного Совета

Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Ровшан Бандалиев**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Нелинейные дифференциальные уравнения возникают в многочисленных задачах современной физики, механики, биофизики, биологии, экологии, биохимии и многих других областях знаний. Важность их исследования особенно велика в настоящее время, когда многие процессы происходят в условиях высокой температуры, больших нагрузок и больших деформаций. Например, нелинейные уравнения в определенных условиях описывают процессы электронной и ионной теплопроводности в плазме, адиабатическую фильтрацию газов и жидкостей в пористых средах, диффузию нейтронов и альфа-частиц, процессы химической кинематики, биохимические реакции и т.д.

Теория нелинейных эллиптических и параболических уравнений как второго порядка, так и произвольного порядка в ограниченных и неограниченных областях со сложной структурой геометрии границы является в настоящее время одной из наиболее активно разрабатываемых направлений теории дифференциальных уравнений в частных производных. Изучение нелинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка в гладких областях имеет давнею историю и основные направления исследований следующие: регулярность решений, разрешимость граничных задач. Исследования С.Н.Бернштейна, Лере, Шаудера, Ч. Морри, Е.де Джорджи, Дж. Неша, М.Миранды, Дж.Серрина, Е.Джусти, Г.Стампаккиа, Ю. Мозера, О.А. Ладыженской, Н.Н. Уральцевой и других авторов привели не только к решению проблем Гильберта, но и к созданию многих методов, играющих фундаментальную роль как в теории дифференциальных уравнений, так и в смежных разделах математики.

Вместе с тем, богатый опыт изучения уравнений второго порядка оказался малоприменимым при исследовании нелинейных уравнений произвольного порядка. Дело в том, что для уравнений высоких порядков и систем М.Миранда, Е. Джусти, В.Г. Мазьей и И.В. Скрыпником был обнаружен новый эффект. Эти уравнения при $n > 2$ могут иметь негладкие обобщенные решения при гладких функциях, образующих уравнения. Мысль о том, что нелинейные эллиптические уравнения высоких порядков и систем с гладкими функциями могут иметь решения с особенностями на множествах нулевой меры, зародилась, в связи с многомерной задачей Плато. Физические эксперименты с мыльными пленками, являющимися “обобщенными решениями” задачи Плато, указывали, что такие решения могут иметь особые точки и даже линии. Это привело к необходимости создания для нелинейных уравнений произвольного порядка новых методов.

В настоящее время построена законченная теория краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений и систем в областях с гладкой границей. Один из центральных результатов этой теории состоит в том, что если коэффициенты уравнения и граничных операторов, их правые части, а также граница области являются достаточно гладкими, то решение задачи-соответственно гладкая функция. Если нарушены условия гладкости границы, то это приводит к появлению у решений особенностей в окрестностях нерегулярных точек границы.

Целью диссертационной работы является нахождение достаточное условие устранимости компакта по отношению к нелинейному уравнению высшего порядка в пространстве $C_{\omega}^{\lambda}(D)$. Эта проблема была исследована многими исследователями. Для уравнения Лапласа соответствующий результат был получен Л. Карлесоном. Что касается эллиптических уравнений второго порядка дивергентного структуры, мы покажем в этом направлении работы Агранович М.С., Вишик М.И., Avantaggiati A., Troisi M.. Для класса недивергентных эллиптических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами условие сменяемости компакта в пространстве $C^{\lambda}(D)$ был найден Борсук М.В. . Отметим также работы Волков Е.А., Viiisiilii J., Wigley N.M., в которых были получены условия сменяемости компакта в пространстве непрерывных функций.

Диссертационная работа посвящена вопросам изучения гладкости и поведения решений нелинейных эллиптических уравнений произвольного порядка в неограниченных областях со сложной структурой геометрии границы и в ограниченных областях с негладкой границей. Поэтому считаем, что тема диссертационной работы является актуальной.

Цель работы. Целью диссертационной работы является нахождение достаточных условий устранимости компакта по отношению к нелинейному уравнению высшего порядка в пространстве $C_{\omega}^{\lambda}(D)$.

Научная новизна. В работе получены следующие основные результаты:

- изучена поведения решений задачи Дирихле для вырождающихся дивергентных квазилинейных эллиптических уравнений в окрестности границы;

- получены априорные оценки интегралов энергии в различных классах областей;

- найдены оценки решений в окрестности граничной точки;

- найдено достаточное условие для устранимости компакта границы области для обобщенного решения задачи Дирихле;

-устанавливаются энергетические априорные оценки для обобщённых решений краевых задач для нелинейных вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях с некомпактными границами зависящие от геометрии области;

-устанавливаются альтернативные теоремы типа теоремы Фрагмена-Линделефа о поведении решений с неограниченным интегралом энергии в неограниченных областях.

Методика исследования. При получении основных результатов используются методы функционального анализа, методы теории нелинейных дифференциальных уравнений, а также теории уравнений в частных производных.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы носят теоретический характер. Их можно использовать в теории уравнений в частных производных, в теории нелинейных дифференциальных уравнений, в качественной теории дифференциальных уравнений.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались: на семинарах отделов «Уравнений математической физики» (рук. д.ф.-м.н., проф. Р.В.Гусейнов), «Дифференциальные уравнения» (рук. д.ф.-м.н., проф. А.Б.Алиев) и «Негармонический анализ» ИММ НАНА (рук. д.ф.-м.н., проф. Б.Т.Билалов), на международной научной конференции, в г. Нахичеван (2009), на межд. конф. «Актуальные проблемы математики и механики» посвящ. 50 летию Института Математики и Механики НАНА в г. Баку (2009), на межд. конф., посвящ. 80 летию акад.

Ф.Г.Максудова в г. Баку (2010), на между. конф., посвящ. 100 летию акад. З.И.Халилова в г. Баку (2011), на межд. семинар «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» в г. Ростов-на-Дону (2011), The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS) в г. Баку (2011), на между. конф. «International Conference Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications» в г. Мерсин (2012),), на между. конф. «IV Annual Conference of the Georgian Mathematical Union Dedicated to academician Victor Kupradze on his 110-th birthday anniversary and Georgian Mathematical Union on his 90-th year from founding» в г. Тбилиси и Батуми (2013), на между. конф. « Caucasian mathematics Conference CMC I», в г. Тбилиси (2014).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 15 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 90 наименований. Объем диссертации 109 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы.

Глава 1 посвящена изучению поведения обобщенных решений вырождающихся нелинейных эллиптических уравнений высокого порядка в нерегулярных областях.

В 1.1 изучаем поведение решений задачи Дирихле для вырождающихся дивергентных квазилинейных эллиптических уравнений в окрестности границы. А именно, в ограниченной области $\Omega \subset R^n, n \geq 2$, рассмотрим обобщенное решение из пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}^{m}_{p,\omega}(\Omega)$ задачи Дирихле для уравнения

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}(x, u, \nabla u, ..., \nabla^m u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} F_{\alpha}(x), \qquad (1)$$

где

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, \quad m \geq 1 .$$

Предполагаем, что коэффициенты $A_\alpha(x,\xi)$ измеримы по $x \in \overline{\Omega}$, непрерывны по $\xi \in R^m$ и удовлетворяют условиям

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha^m \ge \omega(x)\left|\xi^m\right|^p - c_1\omega(x)\sum_{i=1}^{m-1}\left|\xi_i\right|^p - f_1(x),$$

$$\left|A_\alpha(x,\xi)\right| \le c_2\omega(x)\sum_{i=0}^{m}\left|\xi^i\right|^{p-1} + f_2(x), \qquad (2)$$

где

$$\xi = (\xi^0,...,\xi^m)\ ,\ \xi^i = (\xi_\alpha^i)\ ,\ |\alpha| = i\ ,\ c_1,c_2 > 0\ ,\ p > 1\ ,$$

$$f_1(x) \in L_{\frac{p}{p-1},loc}(\Omega), f_2(x) \in L_{1,loc}(\Omega).\ \ F_\alpha \in L_{\frac{p}{p-1},loc}(\Omega)\ .$$

Предполагаем, что $\omega(x), x \in \Omega -$ измеримая неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям: $\omega \in L_{1,loc}(\Omega)$, и для любого $\rho > 0$ и некоторого $\sigma > 1$:

$$\int_{\Omega_\rho} \omega^{-1/(\sigma-1)}dx < \infty\ ,\ \operatorname{ess}\sup_{x\in\Omega_\rho} \omega(x) \le c_3\rho^{n(\sigma-1)}\left(\int_{\Omega_\rho} \omega^{-\frac{1}{(\sigma-1)}}dx\right)^{1-\sigma}. \qquad (3)$$

Здесь $\Omega_\rho = \Omega \cap B_\rho$, $B_\rho = \{x : |x| < \rho\}$, $c_i -$ положительные постоянные, зависящие лишь от данных задачи. Из условий (3), в частности вытекает, что $\omega \in A_\sigma$, т.е

$$\int_{\Omega_\rho} \omega dx\left[\int_{\Omega_\rho} \omega^{-\frac{1}{\sigma-1}}dx\right]^{\sigma-1} \le c_4\rho^{n\sigma}. \qquad (4)$$

Кроме того, предположим, что

$$\frac{\omega(\Omega_s)}{\omega(\Omega_h)} \le c_6\left(\frac{s}{h}\right)^{n\mu}, \qquad (5)$$

$\mu < 1 + p/n$, для любых $s \ge h > 0$, где $\omega(\Omega_s) = \int_{\Omega_s} \omega(x)dx$.

Пусть $0 \in \partial\Omega$, $S_\rho = \Omega \cap \partial\Omega_\rho$. $K(\rho_1,\rho_2) \equiv \Omega_{\rho_2} \setminus \Omega_{\rho_1}$. Основная наша цель получение зависящих от геометрии Ω в окрестности точки 0 оценок поведения интеграла энергии $I_\rho = \int_{\Omega_\rho} \omega(x)\left|\nabla^m u\right|^p dx$, при малых

ρ. Геометрию $\partial\Omega$ будем описывать с нелинейной основной частотой $\lambda_p^p(r)$ сечения S_r:

$$\lambda_p^p(r) = \inf\left(\int\limits_{S_r} \left|\nabla_S v\right|^p ds\right)\left(\int\limits_{S_r} |v|^p ds\right)^{-1},$$

где нижняя грань берется по всем непрерывно дифференцируемым в некоторой окрестности S_r функциям, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$; $\nabla_S v(x)$ – проекция вектора $\nabla v(x)$ на касательную плоскость к S_r в точке x. При $p=2$ число $\lambda_2^2(r)$ есть первое собственное значение оператора Бельтрами-Лапласа на S_r.

$W_{p,\omega}^m(\Omega)$ замыкание функций из $C^m(\overline{\Omega})$ относительно нормы

$$\|u\|_{W_{p,\omega}^m(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} \omega(x) \sum_{|\alpha|\le m} \left|D^\alpha u\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$\overset{\circ}{W}{}_{p,\omega}^m$ замыкание функций из $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $W_{p,\omega}^m(\Omega)$.

Функцию $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_{p,\omega}^m(\Omega)$ будем называть обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения (1), если выполняется следующее интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(x,u,...,D^m u) D^\alpha \eta dx = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\le m} F_\alpha(x) D^\alpha \eta dx, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega). \qquad (6)$$

Будем рассматривать те классы областей , для которых выполняется оценка

$$\int\limits_{S_r} \omega(x)|u|^p dx \le \lambda_p^{-p}(r) \int\limits_{S_r} \omega(x)\left|\nabla u\right|^p dx.$$

Необходимые и достаточные условия на область при которых верна оценка (6) даны, например, в работе Мазья В.Г..

Пусть $0 < \phi_1(r) < c_0 < 1$ некоторая измеримая на $(0, r_0)$ функция, и $\overline{\phi}_0(r)$ – произвольная непрерывная, не убывающая функция, удовлетворяющая неравенству $\overline{\varphi}_0(r) \ge \overline{\varphi}_1(r)$ и $0 < \overline{\varphi}_0(r) < c_0 < 1$, $\forall r \in (0, r_0)$. Здесь $\overline{\varphi}_i(r) = \inf(g(r))$, $i = 0,1$, где нижняя грань берется по всем неубывающим функциям $g(r) \ge \varphi_i(r)$, $\forall r \in (0, r_0)$, $g(r) = r(1-\varphi_1(r))$.

В 1.2 мы получили априорные оценки интегралов энергии в различных классах областей. В дальнейшем рассматриваемые области разделим на два класса. Первый класс-это “узкие” области, т.е. такие, дополнение которых в окрестности точки 0 достаточно массивно, например, содержит некоторый конус с вершиной в этой точке. В терминах частоты множества этот класс областей удовлетворяет условию

$$r\lambda_p(r) > d_1 > 0 \ , \ \forall r \in (0, r_0) \ , \ r_0 > 0 \ . \qquad \text{(A)}$$

Второй класс содержит “широкие области”, т.е. такие, которое, например, имеют “заострение вовнутрь” в точке 0. В терминах частоты множества этот класс областей удовлетворяет условию

$$r\lambda_p(r) < d_2 < \infty \ , \ \forall r \in (0, r_0) \, . \qquad \text{(B)}$$

Определим функцию $\psi(r)$ на $(0, r_0)$ неравенством

$$\inf_{r\psi(r)<|x|<r} \lambda_p(|x|)(r - r\psi(r))\omega(x) \geq \mu > 0 \, , \qquad (7)$$

где μ такое, что $0 < 1 - c_0 < \psi(r) < 1$. Неравенство (7) при монотонно убывающих функциях $\lambda_p(r)$ (которое часто встречается в приложениях) принимает следующий вид

$$r\lambda_p(r)(1-\psi(r))\omega(x) \geq \mu \ , \ \text{при} \ \varphi(r) \equiv 1 - \psi(r) \geq \mu\omega^{-1}(x)(r\lambda_p(r))^{-1} \, .$$

Примем следующие обозначения

$$J(r) = \int_{\Omega_r} \omega(x)\left|D^m u\right|^p dx \, ,$$

$$G(r) = \int_{\Omega_r} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \omega(x)\left(|F_\alpha| + |f_2|\right)^{\frac{p}{p-1}} \lambda_p^{-\frac{m-|\alpha|}{p-1}p}(|x|) + |f_1| \right) dx \ .$$

Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть* $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\omega}(\Omega)$ *обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения (1). Предположим, что коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям (2) , область* Ω *условию (А), вес* $\omega(x)$ *условиям (3), (5). Пусть* $\overline{\psi}$ *-произвольная непрерывная, не возрастающая на* $(0, r_0)$ *функция, удовлетворяющая неравенству* $0 < 1 - c_0 < \overline{\psi}(r) \leq \psi(r) < 1$*, где* $\psi(r)$ *определяется из неравенства (7), и предположим, что выполняется условие*

$$G\left(r\exp\left(-\frac{1-\overline{\psi}(r)}{1-c_0-\theta}\right)\right)<c_{13}\exp\left(-\theta\ln\beta^{-1}\int_r^{r_0}\frac{d\tau}{\tau(1-\overline{\psi}(\tau))}\right)G(r_0)\ ,$$

при $c_{13}>0,\theta<1-c_0$, $\beta=const<1$. *Тогда для* $J(r)$ *справедлива оценка*

$$J\left(r\exp\left(-\frac{1-\overline{\psi}(r)}{1-c_0-\theta}\right)\right)<$$

$$<c_{14}(c_{13},\nu)\exp\left(-\theta\ln(\beta+\nu)^{-1}\int_r^{r_0}\frac{d\tau}{\tau(1-\overline{\psi}(\tau))}\right)\big(J(r_0+G(r_0)\big),\ \forall\nu>0.$$

В параграфе **1.3** приводятся некоторые примеры оценки решений. А именно, рассматривается следующая краевая задача для уравнения

$$\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)D^\alpha u=\sum_{|\alpha|\le m}D^\alpha F_\alpha(x),\quad c_1\omega(x)|\xi|^{2m}<\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha\xi^\alpha<c_2\omega(x)|\xi|^{2m}\quad,$$

$\forall x\in\Omega$, $\forall\sigma\in R^n$, $c_1,c_2>0$,

где $F_\alpha(x)\in L_{2,\omega}(\Omega)$, $a_\alpha(x)\in C^{|\alpha|-m}(\overline{\Omega})$, при $|\alpha|>m$. $a_i(x)-$измеримые ограниченные функции при $|\alpha|\le m$. Обобщенное решение ищется из $\overset{\circ}{W}{}^m_{2,\omega}(\Omega)$. Установлены соответствующие оценки.

В параграфе **1.4** мы получили оценки решений в окрестности граничной точки.

Доказана следующая

Теорема 2. *Пусть* $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\varpi}(\Omega)$ *обобщенное решение краевой задачи Дирихле для уравнения (1) и точка* $0\in\partial\Omega$.*Область* Ω *в окрестности точки 0 имеет границу такую , что* $\lambda_p(r)>\lambda^{(0)}r^{-1}$ *для любого* $r\in(0,r_0)$, $\lambda^{(0)}>0$. *Тогда существует* $\gamma_0>0$ *такое , что если для* $G(r)$ *верна оценка*

$$G(r)<Ar^{\gamma_0+\varepsilon}G(r_0)\ ,\ \forall r\in(0,r_0)\ ,\ A>0,$$

при сколь угодно малом $\varepsilon>0$ *,то для любого* $x\in\Omega_{\bar r_0}$, $\bar r_0<r_0$ *, при* $\delta>0$ *справедлива оценка*

$$\nu(x)\left|D^ju(x)\right|<C|x|^{m-\frac{n}{p}-j+\gamma_0}(J(r)+G(r))^{1/p}\quad,\ j=0,1,...,\left[m-\frac{n}{p}\right],$$

где $\delta = m - \frac{n}{p} - \left[m - \frac{n}{p} \right]$, $m - \frac{n}{p} \geq 0$, C *- не зависит от* $u(x)$ *,* $\Omega_R = \Omega$.

Целью главы II является изучение устранимых особенностей решений задачи Дирихле для вырождающихся нелинейных эллиптических уравнений на границе области. При этом применяется метод получения априорных энергетических оценок решений эллиптических граничных задач для изучения растущих в окрестности граничной точки (конечной или бесконечно удаленной) обобщенных решений. Применяемый метод отличается от техники получение соответствующих результатов в линейной ситуации.

В параграфе **2.1** приведены некоторые вспомогательные предложения. Рассматривается тоже самое уравнение (1) с тем же самыми условиями (2).

В параграфе **2.2** выделены классы областей и получены априорные оценки решений. Рассмотрим функцию расстояния от точки x до $\partial\Omega : g(x) = \rho(x, \partial\Omega)$. Известно, что $\exists \delta > 0$ такое, что в $\Gamma_\delta = \{x : \ 0 < \rho(x, \partial\Omega) < \delta\}$, $g(x) \in C^m$, $|\nabla g(x)| = 1$. Кроме того, из работы Гилбарг Д., Трудингер Н. следует оценка

$$\left|\nabla^j g(x)\right| \leq h_0 (g(x))^{1-j}, \quad \forall x \in \Gamma_\delta \ , j = \overline{1, m} \ .$$

Обозначим, $\Omega_r = \Omega \cap \{x : g(x) < r\}$. Для произвольного $\Gamma \subset \partial\Omega$ через $\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\omega}(\Omega, \Gamma)$ обозначим замыкание по норме $W^m_{p,\omega}(\Omega)$ множества функций из $C^\infty(\Omega)$, обращающихся в нуль вблизи $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Будем говорить, что $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\omega,loc}(\Omega, \Gamma)$, если $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\omega}(\Omega', \partial\Omega' \setminus \partial\Omega)$ для любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$, такой, что $\Gamma \cap \partial\Omega' = \varnothing$.

Пусть $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\omega}(\Omega, \Gamma)$ – обобщенное решение уравнения (1), т.е. $u(x)$ удовлетворяет интегральному тождеству (6) при любой функции $\eta(x) \in C_0^\infty(\Omega')$, $\Omega' \subset \Omega$, $\Gamma \cap \partial\Omega' = \varnothing$.

В параграфе **2.3** получены априорные оценки интегралов энергии. Обозначим

$$I(r) \equiv \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_r} \omega(x) \left| D^m u \right|^p dx \ .$$

Обозначим $\psi(r)\equiv d$, $0<d<1$ и $\bar{\lambda}_p(r)=\inf\limits_{dr<\tau<r}\lambda_p(\tau)$. Верна

Теорема 3. *Пусть* $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{p,\omega,loc}(\Omega,\Gamma)$ *обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения (1). Предположим, что коэффициенты уравнения удовлетворяют условию (2), а область* Ω *условию (B). Пусть* $\bar{\varphi}(r)$*-произвольная неубывающая функция на* $(0,r_0)$*, удовлетворяющая неравенству* $\bar{\varphi}(r)\le\varphi(r)\equiv r\bar{\lambda}_p(r)$*. Тогда для* $I(r)$ *справедлива следующая альтернатива:*

1. Либо $I(r_i)<c_1(1+G(r_i))$ *для некоторой последовательности* $r_i\to 0$*, где* $c_1<\infty-$*постоянная.*

2. Либо $I(r)$ *растет достаточно быстро при* $r\to 0$*, а именно, справедливо*

$$I(r)>c_2(\gamma)\exp\left(-\frac{(1-d)^m(1-\gamma)}{\ln d^{-1}}\int\limits_r^{r_0}\frac{\bar{\varphi}^m(\tau)\tau^{-1}d\tau}{A_2+(1-d)^m\bar{\varphi}(\tau)}\right),\ \forall\gamma>0, \quad (8)$$

и кроме того, в случае $\bar{\varphi}(r)\to 0$ *при* $r\to 0$ *оценка (8) переходит в оценку*

$$I(r)>c_2(\gamma)\exp\left(-\frac{m(1-e^{-1})(1-\gamma)}{A_2}\int\limits_r^{r_0}\frac{\bar{\varphi}(\tau)}{\tau}d\tau\right),\ \forall r<r_0(\gamma).$$

В параграфе **2.4** мы получаем устранимую особенность решения. Доказываются следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{p,\omega,loc}(\Omega,\Gamma)$ *обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения (1). Предположим, что коэффициенты уравнения удовлетворяют условию (2), а область* Ω *условию (A).* $G(r)$*-ограниченная функция и для некоторого* $\gamma>0$ *имеет место оценка*

$$I(r)<c\exp\left(c_0\nu\ln(k_0+\gamma)^{-1}\int\limits_r^{r_0}\frac{d\tau}{\tau(1-\psi(\tau))}\right),\forall r<r_0.$$

Тогда особое множество Γ *решения* $u(x)$ *устраняется, то есть* $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{p,\omega}(\Omega)$.

Также справедлива

Теорема 5. *Пусть* $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{p,\omega,loc}(\Omega,\Gamma)$ *обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения (1). Предположим, что коэффициенты уравнения удовлетворяют условию (2), а область* Ω *условию (B).* $G(r)$*-ограниченная функция и для некоторого* $\gamma>0$ *имеет место оценка*

$$I(r)<c_8(\gamma)\exp\left(-\frac{(1-d)^m(1-\gamma)}{\ln d^{-1}}\int_r^{r_0}\frac{\overline{\varphi}^m(\tau)\tau^{-1}d\tau}{A_2+(1-d)^m\overline{\varphi}(\tau)}\right),\ \forall r<r_0 .$$

Тогда особое множество Γ *решения* $u(x)$ *устраняется, т.е.* $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}^{m}_{p,\omega}(\Omega)$.

В главе III устанавливаются зависящие от геометрии области энергетические априорные оценки обобщённых решений краевых задач для нелинейных вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях с некомпактными границами. На основе полученных оценок устанавливаются альтернативные теоремы типа теоремы Фрагмена-Линделефа о поведении решений с неограниченным интегралом энергии в неограниченных областях.

В параграфе **3.1** рассматривается поведение обобщённого решения $u(x)\in W^m_{p,loc,\omega}(\Omega)$ задачи Дирихле уравнения (1) в неограниченной области с некомпактной границей $\partial\Omega=\Gamma_1\cap\Gamma_2$. Будем рассматривать.

В параграфе **3.2** получены следующие результаты. Как и в случае ограниченных областей, в дальнейшем области, удовлетворяющие изопериметрическим условиям, разделим на два класса. Будем различать два класса неограниченных областей по поведению функции $\lambda_p(r)$ при $r\to\infty$. Первый класс-это "узкие области" и в терминах частоты множества этот класс областей удовлетворяет условию

$$r\lambda_p(r)>C>0\ ,\ \ \forall r>r_0>0 . \qquad (A_1)$$

Второй класс-это "широкие области" и в терминах частоты множества этот класс областей удовлетворяет условию

$$r\lambda_p(r)\le C_1<\infty,\ \ \forall r>r_0>0 . \qquad (B_1)$$

Определим функцию $\psi(r)$ и постоянную $h_0>0$ неравенствами

$$\inf_{r<\tau<r\psi(r)} r\lambda_p(\tau)(\psi(r)-1)\geq h_0\ ,\ \psi(r)>1,\forall r>r_0\,. \qquad (9)$$

При монотонно неубывающих функциях $\lambda_p(r)$ можно взять

$$\psi(r)\geq h_0\left(r\lambda_p(r)\right)^{-1}+1\,,$$

для любого $h_0<C$. В случае, когда функция $r\lambda_p(r)$, является монотонно неубывающей тогда достаточно, чтобы $\psi(r)$ удовлетворяла неравенству

$$\psi(r)\geq 1+h_0\left(r\lambda_p(r)-h_0\right)^{-1},\ \ h_0<C\,.$$

Сделаем следующие обозначения

$$J(r)=\int_{\Omega_r}\omega(x)\left|D^m u\right|^p dx\ ,\ G(r)=\int_{\Omega_r}\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\left(|F_\alpha|+|f_2|\right)^{\frac{p}{p-1}}\lambda_p^{-\frac{m-|\alpha|}{p-1}p}\left(g(x)\right)+|f_1|\right)dx\,.$$

Доказана следующая

Теорема 6. *Пусть $u(x)\in W^m_{p,\omega(x),loc}(\Omega)$ – обобщённое решение задачи Дирихле для уравнения (1). Вес $\omega(x)$ удовлетворяют условию (3)-(5). Предположим, область Ω изопериметрическому условию и кроме того область Ω достаточно узка в том смысле, что $\lambda_p(r)>\delta^{-1}>\delta_0^{-1}$, для любого $r\in(0,\infty)$. Пусть $\psi(r)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию (9). Тогда существует постоянная $0<\theta_0(h_0)<\theta<1$, зависящая лишь от известных постоянных, что для $I(r)$ имеет место альтернатива*

1. *Либо имеет соотношение*

$$\underline{\lim}_{r\to\infty}\left(I(r)G^{-1}(r)\right)<\infty\,; \qquad (10)$$

2. *Либо выполнено*

$$I\left(r\exp\left(\frac{\varphi_0(r)}{1-\nu}\right)\right)\geq\theta\exp\left(\nu\ln\theta^{-1}\int_{r_0}^{r}\frac{d\tau}{\tau\varphi_0(\tau)}\right)I(r_0), \qquad (11)$$

для $\forall\nu\in(0,1)$, и для $\forall r>r_0$, при достаточно большом r_0. Если дополнительно выполнено условие (10) для функции $\varphi_0(r)$, тогда вместе с (11) верна оценка

$$I(r)\geq\theta\exp\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\ln\theta^{-1}\int_{r_0}^{r}\frac{d\tau}{\tau\varphi_0(\tau)}\right)I(r_0), \qquad (12)$$

для некоторой постоянной $\gamma > 0$.

В параграфе **3.3.** приводятся некоторые примеры априорных оценок решений в различных классах областей.

***Теорема** 7. Пусть* $u(x) \in W^m_{p,\omega(x),loc}(\Omega)$ *– обобщённое решение смешанной краевой задачи для уравнения (1) Вес* $\omega(x)$ *удовлетворяют условию (3)-(5). Предположим, что коэффициенты уравнения удовлетворяют условию (2), а область* Ω *изопериметрическому условию и условию (A₁). Кроме того, для уравнения (1) дополнительно выполнено условие*

$$A_\alpha(x,\xi) = 0 \quad \text{при} \quad |\alpha| < m;\, C_2 = 0. \qquad (13)$$

Пусть $\psi(r)$, $h_0 > 0$*, определяются из условия (9). Тогда существует постоянная* $0 < \theta_0 < 1$*, такая, что для любых* $r_0 > 0$, $0 < \nu < 1$*, справедлива оценка*

$$I\left(r \exp\left(\frac{\varphi_0(r)}{1-\nu}\right)\right) \geq \theta_0 \exp\left(\nu \ln \theta_0^{-1} \int_{r_0}^{r} \frac{d\tau}{\tau \varphi_0(\tau)}\right) I(r_0),$$

при любом $r > r_0$.

Эта теорема показывает, что энергетические оценки типа (11), (12) верны для более широкого класса областей при дополнительных ограничениях на функции, образующие уравнения (1).

Пусть d – произвольное число $0 < d < 1$. Определим функцию $0 < \varphi(r) < C_1$ следующим равенством

$$\varphi(r) = r\widetilde{\lambda}_p(r), \quad \widetilde{\lambda}_p(r) = \inf_{dr<\tau<r} \lambda_p(\tau), \qquad (14)$$

где C_1 – из условия (B₁). В приложениях для областей класса (B₁) обычно $\lambda_p(r)$ – невозрастающая функция и следовательно $\widetilde{\lambda}_p(r) = \lambda_p(r)$.

***Теорема** **8.** Пусть* $u(x) \in W^m_{p,0,loc}(\Omega)$ *– обобщённое решение смешанной краевой задачи для уравнения (1). Предположим, что коэффициенты уравнения удовлетворяют условию (2), а область* Ω *изопериметрическому условию и условию (B₁). Дополнительно выполнено условие (13) и пусть* $\overline{\varphi}(r)$ *– произвольная невозрастающая функция, удовлетворяющая условию* $\overline{\varphi}(r) \leq \varphi(r)$*, для* *любого* $r>r_0$, *где* $\varphi(r)$ *из условия (14). Тогда существует постоянная* $\omega=\omega(d)\geq 0$, *такая, что для* $I(r)$ *верна оценка*

$$I(r)\geq C\exp\left(\frac{(1-d)^m}{\ln d^{-1}}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\overline{\varphi}^m(\tau)\tau^{-1}d\tau}{(1-d)^m\overline{\varphi}^m(\tau)+\omega(d)}\right)I(r_0),$$

где $C>0$ *– некоторая постоянная.*

В параграфе **3.4** получены теоремы типа Фрагмена-Линделефа.

В параграфе **3.5** рассматривается краевая задача для уравнения

$$\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}A_{\alpha}\left(x,u,...,D^m u\right)=\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}F_{\alpha}(x), \qquad (15)$$

в области $\Omega\subset R^n$, $n\geq 2$, граница которой есть $\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2$. На Γ_1 задано условие Дирихле, на Γ_2 условие Неймана.

Пусть $0\in\overline{\Gamma_1}\cap\Gamma_2$. Обозначим $\Omega_R=\Omega\cap B_R(0)$, где $B_R(0)=\{x:|x|\leq R\}$; $S(R)=\Omega\cap\partial\Omega_R$. Введем понятие основной частоты сечения $S(R)$, характеризующей геометрию границы $\partial\Omega$:

$$\lambda_p^p(R)=\inf\left(\int\limits_{S(R)}|\nabla_S\vartheta|^p ds\right)\left(\int\limits_{S(R)}|\vartheta|^p ds\right)^{-1},$$

где нижняя грань берется по всем непрерывно дифференцируемым в некоторой окрестности $S(R)$ функциям, обращающимся в нуль на $\overline{S(R)}\cap\Gamma_1$; $\nabla_S u(x)$ – проекция вектора $\nabla u(x)$ на касательную плоскость к $S(R)$ в точке x.

Относительно коэффициентов предполагаем выполнение следующих условий: при $x\in\Omega$, $\xi=\{\xi_\alpha:|\alpha|\leq m\}\in R^m$, m – число мультииндексов длины, не большей чем m, функции $A_\alpha(x,\xi)$ непрерывны по ξ для почти всех $x\in\overline{\Omega}$, измеримы по x для всех ξ и удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{|\alpha|=m}A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha>C_1\omega(x)\sum_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha|^p-C_2\omega(x)\sum_{|\alpha|<m}|\xi_\alpha|^p-f_1(x), \qquad (16)$$

$$|A_\alpha(x,\xi)|\leq C_3\omega(x)\sum_{|\alpha|\leq m}|\xi_\alpha|^{p-1}+f_2(x).$$

Здесь $p>1$, C_1, C_2, C_3 – положительные константы, $f_1(x)\in L_{1,loc}(\Omega)$, $f_2(x)\in L_{\frac{p}{p-1},loc}(\Omega)$ и $F_\alpha \in L_{\frac{p}{p-1},loc}(\Omega)$.

$u(x)\in W^m_{p,\omega}(\Omega)$ будем называть обобщённым решением смешанной краевой задачи, если выполняется следующее интегральное тождество

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha\left(x,u,...,D^m u\right) D^\alpha \eta dx = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le m} F_\alpha\left(x\right) D^\alpha \eta dx\ ,\ \forall\, \eta(x)\in W^m_{p,\omega,0}(\Omega)\ ,$$

где $W^m_{p,0}(\Omega)$ – подпространства $W^m_{p,\omega}(\Omega)$, плотным множеством в котором являются функции из $C^\infty(\Omega)$, превращающиеся в нуль вблизи Γ_1.

Предположим, что область Ω удовлетворяет изопериметрическим условиям. Более подробное описание этих условий мы дадим далее в тексте. В работе Мазья В.Г. даются необходимые и достаточные условия на область, при выполнении которых верно неравенство

$$\int_{S(R)} |u|^p ds \le \lambda_p^{-p}(R) \int_{S(R)} |\nabla u|^p ds\ .$$

Определим функцию $\psi(r)$ на $(0,r_0)$ неравенством

$$\inf_{r\psi(r)<|x|<r} \lambda_p(\rho)(r-r\psi(r)) \ge \mu > 0\ , \tag{17}$$

где μ такое, что $0<1-C_0<\psi(r)<1$ и $s=\|x\|$. Неравенство (17) при монотонно убывающих функциях $\lambda_p(r)$ (которое часто встречается в приложениях) принимает следующий вид

$$r\lambda_p(r)(1-\psi(r)) \ge \mu\ \text{ , при } \varphi(r)\equiv 1-\psi(r) \ge \mu(r\lambda_p(r))^{-1}\ .$$

Примем следующие обозначения

$$J(r) \equiv \int_{\Omega_r} \omega(x)\left|D^m u\right|^p dx\ ,$$

$$G(r) = \int_{\Omega_r} \left(\sum_{|\alpha|\le m} \left(|F_\alpha| + |f_2|\right)^{\frac{p}{p-1}} \lambda_p^{-\frac{m-|\alpha|}{p-1}p}(\rho) + dx + |f_1| \right) dx\ .$$

Доказана

Теорема 9. *Пусть* $u(x)\in W^m_{p,0}(\Omega)$ *обобщенное решение смешанной краевой задачи для уравнения (15). Предположим, что коэффициенты уравнения удовлетворяют условию (16), а область* Ω *изопериметрическому условию и условию (A). Вес* $\omega(x)$ *удовлетворяет условиям (3), (5). Пусть* $\overline{\psi}$ *-произвольная непрерывная, невозрастающая на* $(0,r_0)$ *функция, удовлетворяющая неравенству* $0<1-C_0<\overline{\psi}(r)\le\psi(r)<1$, *где* $\psi(r)$ *определяется из неравенства (17), и предположим, что имеет место*

$$G\left(r\exp\left(-\frac{1-\overline{\psi}(r)}{1-C_0-\theta}\right)\right)<C_1\exp\left(-\theta\ln\omega^{-1}\int_r^{r_0}\frac{d\tau}{\tau(1-\overline{\psi}(\tau))}\right)G(r_0)\,,$$

при $C_1>0,\ \theta<1-C_0,\ \omega=const<1$. Тогда для $J(r)$ справедлива оценка

$$J\left(r\exp\left(-\frac{1-\overline{\psi}(r)}{1-C_0-\theta}\right)\right)<C_2(C_1,\nu)\times$$

$$\times\exp\left(-\theta\ln(\omega+\nu)^{-1}\int_r^{r_0}\frac{d\tau}{\tau(1-\overline{\psi}(\tau))}\right)\left(J(r_0)+G(r_0)\right),\ \forall\nu>0\,.$$

Также верна следующая

Теорема 10. *Пусть* $u(x)\in W^m_{p,0}(\Omega)$ *обобщенное решение краевой задачи для уравнения (15) . Предположим , что коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям (16) , область* Ω *изопериметрическому условию и условию (B). Пусть* $\overline{\varphi}(r)$ *- произвольная неубывающая функция на* $(0,r_0)$ *, удовлетворяющая неравенству* $\overline{\varphi}(r)<\varphi(r)\equiv r\widetilde{\lambda}_p(r)$ *, и предположим, что имеет место*

$$G(r)<C_1\exp\left(-\frac{(1-d)^m}{2C_4\ln d^{-1}}\int_r^{r_0}\frac{\overline{\varphi}^m(\tau)d\tau}{\tau}\right)G(r_0)\,.$$

Тогда для $J(r)$ *справедлива оценка*

$$J(r)<C_5\exp\left(-\frac{(1-\nu)(1-d)^m}{2C_4\ln d^{-1}}\int_r^{r_0}\frac{\overline{\varphi}^m(\tau)d\tau}{\tau}\right)\left(J(r_0)+G(r_0)\right),\ \forall\nu>0\,.$$

На основании полученных априорных оценок можно получить оценки решений в окрестности граничной точки.

Теорема 11. *Пусть* $u(x)\in W^m_{p,0}(\Omega)$ *обобщенное решение смешанной краевой задачи для уравнения (15) и* $0\in\overline{\Gamma_1}\cap\Gamma_2$. *Область* Ω *удовлетворяет изопериметрическому условию, кроме того в окрестности точки 0 граница такова, что* $\lambda_p(r)>\lambda^{(0)}r^{-1}$ *для* $\forall r\in(0,r_0)$, $\lambda^{(0)}>0$. *Тогда существует* $\gamma_0>0$ *такое, что если для* $G(r)$ *верна оценка*

$$G(r)<Ar^{\gamma_0+\varepsilon}G(r_0)\ ,\ \forall r\in(0,r_0)\ ,\ A>0\,,$$

при сколь угодно малом $\varepsilon>0$, *то для* $\forall x\in\Omega_{\overline{r}_0}$, $\overline{r}_0<r_0$, *при* $\delta>0$ *справедлива оценка*

$$\left|D^j u(x)\right|<C\left|x\right|^{m-\frac{n}{p}-j+\gamma_0}\left(J(R)+G(R)\right)^{\frac{1}{p}}\ ,\ j=0,1,...,\left[m-\frac{n}{p}\right]\ , \qquad (18)$$

где $\delta=m-\frac{n}{p}-\left[m-\frac{n}{p}\right]$, $m-\frac{n}{p}\ge 0$, $C-$ *не зависит от* $u(x)$, $\Omega_R=\Omega$. *В случае* $\delta=0$ *утверждается справедливость оценки (18) лишь при* $j=0,1,...,\left[m-\frac{n}{p}\right]-1$.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Гаджиев Т.С., Садыгова Н.Р. О поведении решений вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Матер. межд. конф. по астр., физ. и мат., посвящ. Межд. году Астр., Нахичеван, 2009.
2. Гаджиев Т.С., Садыгова Н.Р. О поведении решений нелинейных эллиптических уравнений с вырождением в негладкий областях. Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 50 illiyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika üzrə Beynəlxalq konfransın tezisləri, 2009.
3. Gadjiev T.S., Sadigova N.R. On behavior of higher order degenerate elliptic equations. Тезисы межд. конф. посвящ. 80л. акад. Ф.Г.Максудова, ИММ НАН Аз., Баку, 2010.
4. Gadjiev T.S., Sadigova N.R. Removability of compacts on the boundary and behaviour of solution degenerate elliptic equations. Mathematical

Analysis, Differential Equations and their Applications. 15-20/09/2010, Bulgaria.
5. Gadjiev T.S., R.Rasulov, Sadigova N.R. Behavior of solutions of degenerate nonlinear elliptic equations near of boundary. Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications, 2010, Bulgaria, p.93-100.
6. Sadigova N.R. On behavior of solutions of higher order degenerate elliptic equations. Trans. of IMM of NAS of Az., vol. XXX, №1, 2010, p. 177-184.
7. Гаджиев Т.С., Садыгова Н.Р. О поведении решений вырождающихся нелинейный эллиптических уравнений на границе. Известия Педагогического Университета , Баку-№2-2011, с.20-27.
8. Gadjiev T.S., Sadigova N.R. Behaviour of solution nonlinear degenerate elliptic equations. Международной конференции, посв. 100-летнему юбилею академика З.И.Халилова,12-14 январь.Баку-2011, с.125-128.
9. Gadjiev T.S., Sadigova N.R., Mamedova K. N. Behaviour of solution degenerate parabolic equations. The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS) Baku, Azerbaijan, 1-3 July, 2011, p. 56
10. Gadjiev T.S., Sadigova N.R., Aliyev X. Behaviour of solution degenerate elliptic equations. Межд. Семинар «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», Ростов-на-Дону, 2011, с. 40.
11. Sadigova N.R. Removable singularities of solutions of degenerating nonlinear elliptic equations on domain boundary. Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2011, vol. XXXIV (XLII), pp. 91-98.
12. Gadjiev T.S., Rasulov R., Sadigova N.R., Removable singularities of solutions of degenerate nonlinear elliptic equations on the boundary of a domain. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 74, Issue 16, November 2011, pp. 5566–5571.
13. Gadjiev T.S., Sadigova N.R., Mamedova K. N. Behaviour of solution degenerate elliptic and parabolic equations. International Conference Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications, 04-09 September, 2012, p.48, Mersin, Turkey.
14. Gadjiev T.S., Sadigova N.R., Mamedova K. N. The removable of solution degenerate elliptic and parabolic equations. IV annual conference of the Georgian Mathematical Union Dedicated to academician Victor Kupradze on his 110-th birthday anniversary and Georgian Mathematical Union on

his 90-th year from founding September 9-15, 2013, in Tbilisi and Batumi, Georgia, p. 96.
15. Gadjiev T.S., Sadigova N.R. Removable singularities of solutions of degenerate nonlinear elliptic equations. Caucasian mathematics Conference CMC I, 5-6 September, 2014, Tbilisi, pp. 87-88

NİGAR RAHİB qızı SADIQOVA

CIRLAŞAN ELLİPTİK TİP TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN KEYFİYYƏT XASSƏLƏRİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi mürəkkəb sərhədə malik qeyri-məhdud oblastlarda və qeyri-hamar sərhədə malik məhdud oblastlarda ixtiyari tərtib qeyri-xətti elliptik tip tənliklərin həllərinin özünü aparmasının və hamarlıq xassələrinin öyrənilməsinə həsr olunub.

Dissertasiyada alınan əsas nəticələr aşağıdakılardır:

- sərhədin ətrafında cırlaşan divergent kvazixətti elliptik tənliklər üçün Dirixle məsələsinin həllinin özünü aparması öyrənilmişdir;

- müxtəlif sinif oblastlarda enerji inteqralları üçün aprior qiymətləndirmələr alınmışdır;

- sərhəd nöqtəsinin ətrafında həll üçün qiymətləndirmə tapılmışdır;

- Dirixle məsələsinin ümumi həlli üçün oblastın sərhədində kompaktin aradan qaldırıla bilməsi üçün kafi şərt tapılmışdır;

-oblastın həndəsi quruluşundan asılı, qeyri kompakt sərhədə malik qeyri-məhdud oblastlarda yüksək tərtib qeyri-xətti cırlaşan elliptik tip tənlik üçün sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həlli üçün energetik aprior qiymətləndirmələr alınmışdır;

-qeyri-məhdud oblastlarda qeyri-məhdud enerji inteqralına malik həllin özünü aparması haqqında Fraqmen-Lindelyof tip teoremlərə alternativ teoremlər alınmışdır.

NİGAR RAHİB kızı SADİGOVA

QUALİTATİVE PROPERTİES OF SOLUTİONS OF DEGENERATE ELLİPTİC EQUATİONS

SUMMARY

This thesis is focused on the study of the smoothness and the behavior of solutions of nonlinear arbitrary order elliptic equations in unbounded domains with complex structure geometry of boundary and in bounded domains with non-smooth boundary.

The following results are obtained:

-The behavior of solutions of the Dirichlet problem for degenerate divergent quasilinear elliptic equations in the neighborhood of the boundary is studied;

-a priori estimates for energy integrals in different classes of domains are obtained;

-estimates for the solutions in the neighborhood of a boundary point is found;

-a sufficient condition for the removability of a particular subset of the boundary for the generalized solution of the Dirichlet problem is obtained;

-a priori energy estimates for generalized solutions of boundary value problems for degenerate nonlinear higher order elliptic equations in unbounded domains with non-compact boundaries dependent on the geometry of the domain are established;

-alternative Phragmen-Lindelöf type theorems on the behavior of solutions with unbounded energy integral in unbounded domains are proved.