AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ
BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Əlyazması hüququnda

TAĞIYEV RƏŞAD MÜSRƏDDİN OĞLU

NEFTÇIXARMANIN MODELLƏŞDİRİLMƏSİNDƏ ALINAN BİR SİNİF XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN HƏLL ÜSULLARI

1211.01 – Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim olunmuş dissertasiyanın

A F TO R E F E R A T I

BAKI - 2018

Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin “Diferensial və inteqral tənliklər” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: akademik **F. Ə. Əliyev**

Rəsmi opponentlər: Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, prof. **İ. M. Nəbiyev**

Riyaziyyat elmləri doktoru, dos. **İ. Q. Məmmədov**

Aparıcı təşkilat: Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti “Ali riyaziyyat” kafedrası.

Dissertasiya işinin müdafiəsi 22 may 2018-ci il tarixində saat 14^{00} da Bakı Dövlət Universitetinin nəzdindəki FD.02.016 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya ilə Bakı Dövlət Universitetinin kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1148, Bakı ş., Zahid Xəlilov küçəsi, 23.

Avtoreferat 19 aprel 2018-ci il tarixində göndərilmişdir.

FD.02.016 Dissertasiya
Şurasının elmi katibi **dosent A.T. Əfəndiyeva**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı. Neft kimya kompleksinin inkişafı yeni innovasiya texnologiyaların tətbiqində bir sıra mühüm riyazi məsələlərin həll edilməsi vəzifəsini ortaya qoyur. Bu cür riyazi məsələlərə misal olaraq neft quyularının qaz-lift üsulu ilə istismarı zamanı optimal proqram trayektoriya və idarəedicinin tapılmasını göstərmək olar. Bu isə öz növbəsində bir sıra riyazi məsələləri həll etmək üçün yeni riyazi üsulların işlənməsini zəruri edir. Neft quyularının istismarının ilkin üsulu fontan üsuludur. Bu zaman neft layın daxili enerjisi hesabına yer səthinə çıxır. Müəyyən müddətdən sonra lay enerjisi azalır və neftçıxarma dayanır. Fontan üsulunun sona çatmasından sonra neftçıxarmanın yenidən bərpası üçün quyuya kənardan sıxılmış qaz vurulur. Qaz layda nefti yüngülləşdirir və nəticədə neft yer səthinə çıxır. İqtisadi baxımdan qaz-lift üsulu ən sərfəli üsullardan biridir. Neft quyularının qaz-lift üsulu ilə istismarı zamanı yaranan bəzi çətinliklərin aradan qaldırılması məqsədilə bir çox işlər görülmüşdür. Bunlara misal olaraq Şurov V.İ., Mirzəcanzadə A., Eikrem G.O., Əliyev F.Ə., İlyasov M.X., İsmayılov N.A., Yusifov S.İ.,. Aamo O.M, Nuriyev N.B. və b. müəlliflərin işlərində qaz-lift prosesinin riyazi modelləri verilmişdir.

Azərbaycanda neft və ümumiyyətlə neftçıxarma sənayesinə aid olan hər bir məsələ və həmin məsələlərə elmi nöqteyi nəzərdən yanaşmaq xüsusi əhəmiyyətə malikdir. Dissertasiya işinin neftçıxarmaya aid olmasını nəzərə alaraq qeyd etmək olar ki, iş kifayət qədər aktual bir məsələyə həsr edilmişdir.

İşin əsas məqsədi. Dissertasiya işinin məqsədi neftçıxarma sənayesində iqtisadi nöqteyi nəzərdən ən sərfəli üsul hesab edilən qaz-liftdə, hərəkəti təsvir edən hiperbolik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həlli üçün yeni üsullar, alqoritmlərin işlənməsi və tətbiqindən ibarətdir.

Tədqiqat üsulları. İşdə xüsusi törəməli diferensial tənliklərdən, kəsilməz və diskret çevirmələrdən, təqribi hesablamanın bəzi üsullarından, müasir proqramlaşdırma və tətbiqi proqram paketlərindən istifadə olunmuşdur.

Elmi yenilik. Dissertasiyada aşağıdakı nəticələr yenidir:

- Qaz-lift prosesində sərhəd məsələsinin həlli sıra şəklində axtarılaraq həll alqoritmi verilmişdir. İstənilən dəqiqliyə görə təqribi həlldəki toplananların sayının təyini üçün yeni ifadələr verilmişdir.
- Xüsusi halda qaz-lift prosesi üçün qaldırıcı boruda hidravlik müqavimət əmsalının təyini üçün yeni üsul təklif olunmuşdur.
- Qaz-lift prosesi üçün ilk dəfə qovma üsulundan istifadə edərək həll alqoritmləri təklif edilmişdir ki, bu da həllin qurulması üçün iki kiçik tərtibli məsələlərin həll olunmasını tələb edir.
- Qovma üsulu vasitəsi ilə həll olunmuş hərəkət tənliklərində ortaya çıxmış kvazixətti tənliklərin həll alqoritmləri qurulmuşdur.
- Qaz-lift prosesi üçün ilk dəfə kəsilməz Rosser modeli qurulub və ona uyğun diskret Rosser tip tənliklərin həlli üçün alqoritm təklif edilmişdir.
- Diskret Rosser tənlikləri üçün qovma üsulu təklif olunmuşdur, göstərilmişdir ki, bölgü intervalları sıfıra yaxınlaşdıqda həllər praktikadan məlum olan həllərə yaxınlaşır.

Qeyd edək ki, bunlar daha sadə kompüter realizasiyasının aparılmasına şərait yaradır.

İşin elmi və praktiki dəyəri. Təqdim olunan dissertasiya işinin mövzusu neftçıxarma sənayesinə aid qaz-lift prosesinə həsr olunduğuna görə, hazırlanan alqoritmlər qaz-lift üsulu ilə işləyən real bir neft quyusu üzərində realizasiya edilmişdir. Dissertasiya işinin praktiki dəyəri olaraq qeyd edə bilərik ki, verilmiş alqoritmlər əsasında riyazi proqramlar tərtib olunaraq müvafiq praktiki məsələnin həlli üçün kompüterdə hesablamalar aparılmış və bu üsulun üstünlükləri məlum modellərlə müqayisədə təsdiqlənmişdir.

İşin aprobasiyası. Dissertasiya işinin əsas elmi-nəzəri və praktiki nəticələri aşağıdakı konfranslarda və elmi seminarlarda məruzə edilmiş və müzakirə olunmuşdur:

1) BDU-nun Tətbiqi Riyaziyyat ETİ-nin seminarında (rəhbər akad. F.Ə. Əliyev),
2) BDU-nun “Diferensial və inteqral tənliklər” (rəhbər prof. N.Ş. İsgəndərov), kafedrasının seminarında,

3) 5th İnternational Conference of Control and Optimization with industrial Applications,COIA-2015 (Baku, 2015)

Çap olunmuş elmi əsərlər. Dissertasiya işinin mövzusu üzrə müəllifin 8 məqalə və 1 tezisi çap olunmuşdur.

Dissertasiyanın həcmi və quruluşu: Dissertasiya işi girişdən, üç fəsildən, nəticədən, istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından, 11 şəkil və 1 cədvəldən ibarətdir.

DİSSERTASİYANIN MƏZMUNU

Dissertasiyanın girişində mövzunun aktuallığı, tədqiqatın məqsədi qeyd olunmuş və dissertasiyanın əsas nəticələri şərh olunmuşdur.

Birinci fəslin birinci yarımfəslində halqavari fəzada qaz və qaldırıcı boruda qaz-maye qarışığının hərəkət tənlikləri aşağıdakı kimi xüsusi törəməli hiperbolik tip diferensial tənliklər sistemi vasitəsilə təsvir olunur:

$$\begin{cases} -F_i \dfrac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + 2a_i Q(x,t), \quad i = 1,2; \\ -F_i \dfrac{\partial P(x,t)}{\partial t} = c_i^2 \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x}, \qquad x \in (0,l) \cup (l,2l); \;\; t \in (0,T), \end{cases} \tag{1}$$

$$2a_i = \frac{g}{\omega_i} + \frac{\lambda_i \omega_i}{2D} = const.$$

Burada $P(x,t)$ - təzyiq, $Q(x,t)$ isə borudakı mayenin həcmidir. $i=1$ olduqda hərəkət halqavari boruda (yəni, $x \in (0,l)$), $i=2$ olduqda isə qaldırıcıda (yəni, $x \in (l,2l)$) yerinə yetirilir. Burada F_i – borunun eninə kəsiyinin sahəsidir və sabitdir; ω_i − axının orta sürəti; c_i − uyğun mühitdə səs sürəti (məsələn, $i=1$ olduqda halqavari fəzada, hansı ki, qazdan ibarətdir, $i=2$ olduqda isə qaldırıcıda maye qaz qarışığında); D_i – hərəkətin istiqamətindən asılı olaraq halqavari fəzanın və qaldırıcının daxili və effektiv diametri; g − ağırlıq qüvvəsinin təcili; λ_i − isə hidravlik müqavimət əmsalıdır.

Sərhəd şərtləri isə aşağıdakı şəkildə qəbul edilmişdir:

$$\begin{cases} P(0,t) = P_0(t) \\ Q(0,t) = Q_0(t) \qquad t \in [0,T] \end{cases} \tag{2}$$

Burada $P_0(t)$ və $Q_0(t)$ verilən kəsilməz funksiyalardır.
Bu sərhəd məsələsinin həlli aşağıdakı sıra şəklində axtarılmışdır.

$$\begin{cases} P(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k(t)\dfrac{x^k}{k!}, \\ Q(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k(t)\dfrac{x^k}{k!}. \end{cases} \tag{3}$$

Göstərilmişdir ki, $P_k(t)$ və $Q_k(t)$ aşağıdakı kimidir.

$$\begin{cases} P_{2k}(t) = \left(\dfrac{d}{dt} + 2a_2\right)^k \dfrac{P_0^{(k)}(t)}{c_2^k}, \\ Q_{2k}(t) = \left(\dfrac{d}{dt} + 2a_2\right)^k \dfrac{Q_0^{(k)}(t)}{c_2^k} \qquad k \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} P_{2k+1}(t) = -\left(\dfrac{d}{dt} + 2a_2\right)^{k+1} \dfrac{Q_0^{(k)}(t)}{F_2 c_2^k}, \\ Q_{2k+1}(t) = -\left(\dfrac{d}{dt} + 2a_2\right)^k \dfrac{F_2 P_0^{(k+1)}(t)}{c_2^{k+1}}, \qquad k \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Teorem 1: *Əgər F_2, a_2, c_2 həqiqi sabit ədədlər və $\overline{P}_0(t)$, $\overline{Q}_0$ funksiyaları $C^\infty(0,T)$ sinfinə daxil olmaqla,*

$$\left|\overline{P}_0^{(k)}(t)\right| \leq L, \ \left|\overline{Q}_0^{(k)}(t)\right| \leq L, \ k \geq 0, \ \left|\frac{1+2a_2}{c_2}\right| < 1,$$

şərtlərini ödəyərsə, (burada L hər hansı sabit həqiqi ədəd), $\overline{P}_k(t)$ və $\overline{Q}_k(t)$ (4), (5)-in köməyi ilə verilmiş, məhdud funksiyalardırsa, onda həll üçün (3) şəklində olan sıralar mütləq və müntəzəm yığılır.

Qeyd etmək lazımdır ki, belə sıraların istənilən dəqiqliklə həllə yaxınlaşması ən ümdə olan məsələlərdən biridir. Dissertasiya işində istənilən dəqiqlikdə həllin alınması üçün sıradan götürüləcək toplananların sayını təyin edən aşağıdakı ifadə təklif edilmişdir.

$$2N_2+1=\left[\left(\frac{2l\sqrt{\frac{1+2a_2}{c_2}}}{\varepsilon}\right)^{\frac{10}{9}}\right]$$

Burada $[A]$ $A-$nın tam hissəsidir.

Birinci fəslin ikinci yarımfəslində isə ümumi halda məsələnin həlli fərqlər üsulu ilə tapılmış və sıralar üsulu ilə müqayisə edilmişdir. $P(x,t)$ və $Q(x,t)$ funksiyalarının törəmələri aşağıdakı diskret formada yazılmışdır:

$$\frac{\partial P}{\partial t}\approx\frac{P_{ij}-P_{ij-1}}{\tau},\quad \frac{\partial Q}{\partial t}\approx\frac{Q_{ij}-Q_{ij-1}}{\tau},\tag{6}$$
$$\frac{\partial P}{\partial x}\approx\frac{P_{ij}-P_{i-1j}}{\tau},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}\approx\frac{Q_{ij}-Q_{i-1j}}{\tau}.$$

Burada $i=0,1.....n;\ j=0,1.....k.$

Törəmələr üçün aldığımız (6) diskret formalarını (1) sistem tənliyində nəzərə almaqla və uyğun sadələşmələrdən sonra Q_{ij} qaz həcmi və P_{ij} təzyiqinin təyini üçün aşağıdakı şəkildə fərqlər tənlikləri alınmışdır:

$$\begin{aligned}P_{i+1,j}&=P_{ij}-\frac{h}{F_1\tau}\left(Q_{ij}-Q_{i,j-1}\right)-2a_1hQ_{ij},\\ Q_{i+1,j}&=Q_{ij}-\frac{F_1h}{c_1^2\tau}\left(P_{ij}-P_{i,j-1}\right),\qquad i=\overline{0,n-1},\ j=\overline{1,k}.\end{aligned}\tag{7}$$

Üçüncü yarımfəsildə isə hiperbolik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklər vasitəsi ilə təsvir olunan qaz-lift prosesində hidravlik müqavimət əmsalının təyininə baxılmışdır. Bunun üçün birinci yarımfəslin nəticələri olaraq $\overline{P}_2(x,t,a_2)$ və $\overline{Q}_2(x,t,a_2)$ funksiyalarından istifadə edərək aşağıdakı kimi funksional qurulmuşdur:

$$I=\int_0^T\left\{\left[\overline{P}_2(2l,t,a_2)-\widetilde{P}_2(2l,t)\right]^2+\left[\overline{Q}_2(2l,t,a_2)-\widetilde{Q}_2(2l,t)\right]^2\right\}dt,\tag{8}$$

Burada $\widetilde{P}_2(2l,t)$ və $\widetilde{Q}_2(2l,t)$ verilmiş funksiyalardır. Bu funksionala minimum qiymət verən a_2 – ni təyin etmək üçün funksionalın törəməsi (a_2 – yə nəzərən) alınıb sıfıra bərabər edilmişdir və (3) sıralarında yerinə yazmaqla aşağıdakı ifadə alınmışdır:

$$\int_0^T \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_k(t,a_2)\frac{(2l)^k}{k!} - \widetilde{P}_2(2l,t) \right] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial \overline{P}_m(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^m}{m!} + \right.$$
$$\left. + \left[\sum_{k=0}^{\infty} \overline{Q}_k(t,a_2)\frac{(2l)^k}{k!} - \widetilde{Q}_2(2l,t) \right] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial \overline{Q}_m(t,a_2)}{\partial a_2}\frac{(2l)^m}{m!} \right\} dt = 0 \qquad (9)$$

Verilmiş sıralardan iki hədd və üç hədd götürdükdə a_2 – yə nəzərən xətti tənliklər, dörd və beş hədd götürdükdə isə kub tənliklər alınmışdır.
Hesablamaları davam etdirməklə aşağıdakı teorem verilmişdir.
Teorem 2: *Əgər* $\overline{P}_0(t)$ *və* $\overline{Q}_0(t)$ *funksiyaları 2n tərtibdən kəsilməz diferensiallanan,* $\widetilde{P}_2(2l,t)$ *və* $\widetilde{Q}_2(2l,t)$ *kəsilməz funksiyalardırsa, onda (8) funksionalının minimum qiymət alması üçün (9)-dakı sıralardan 2n və ya (2n+1) hədd götürsək,* a_2 *parametrinə nəzərən (2n-1) dərəcəli cəbri tənlik almış olarıq.*
Təklif olunan sxemə əsasən hesablamalar aparılmış və göstərilmişdir ki, sıradan götürülən hədlərin sayını artırmaqla hidravlik müqavimət əmsalının qiyməti praktikadan məlum olan $(\lambda_c = 0.2385)$ qiymətinə yaxınlaşır.

Dissertasiya işinin ikinci fəslində hərəkət tənliklərinin həlli üçün qovma üsulu işlənmişdir.
Belə ki, təzyiqin qaz və ya maye-qaz həcmi ilə müəyyən əmsallarla münasibətləri aşağıdakı kimi olduğu qəbul edilmişdir.

$$P(x,t) = S(x,t)\cdot Q(x,t) + \alpha(t)R(x) \qquad (10)$$

Burada $S(x,t)$ və $R(x)$ təyin olunmalıdır.
$\alpha(t)$ skalyar funksiyası isə aşağıdakı şərti ödəyən ixtiyari funksiyadır.

$$\alpha(0) = 0, \quad \int_0^{\infty} \alpha(t)dt = 1$$

Qovma üsulunu tətbiq etmək üçün (10)-dan x və $t-$ ə nəzərən törəmə alınmışdır.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(x,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial S(x,t)}{\partial x} Q(x,t) + S(x,t)\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + \alpha(t)R'(x) \\ \dfrac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial S(x,t)}{\partial t} Q(x,t) + S(x,t)\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + \alpha'(t)R(x) \end{cases} \tag{11}$$

Bu törəmələri (1) sistemində yerinə yazmaqla və müəyyən hesablamalardan sonra aşağıdakı ifadələr alınmışdır:

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} + FS(x,t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} - 2aS(x,t) = 0 \tag{12}$$

$$R'(x) - F\left(\int_0^\infty S(x,t)\cdot\alpha'(t)dt\right)R(x) = 0 \tag{13}$$

Məlumdur ki, alınan tənliklərdən biri kvazixətti, digəri isə adi diferensial tənlikdir.

İkinci fəslin ikinci yarımfəslində alınmış kvazixətti tənlik üçün xüsusi halda analitik həllər tapılmışdır.

Bunun üçün başlanğıc şərtləri

$$S(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \tag{14}$$

şəklində qəbul edilmişdir. Burada $\varphi(x)$ –məlum kəsilməz həqiqi (həqiqi qiyməti olan) funksiyadır, $S(x,t)$ –axtarılan funksiyadır. (12) tənliyinin həlli qeyri-aşkar şəkildə axtarılmışdır:

$$\chi(x,t,S(x,t)) = 0 \tag{15}$$

Daha sonra (15)-i həm x, həm də t-yə görə diferensiallayıb (12) - də yerinə yazsaq, alarıq:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} + FS\frac{\partial \chi}{\partial t} + 2aS\frac{\partial \chi}{\partial S} = 0, \tag{16}$$

İndi isə (16) tənliyinin xarakteristikasını təyin edək:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{FS} = \frac{dS}{2aS}$$

$$\frac{dS}{S}=2adx, \qquad dS=\frac{2a}{F}dt$$

Sonuncunu inteqrallamaqla aşağıdakı xarakteristik tənliklər alınmışdır.

$$\begin{cases} \ln S(x,t)-2ax=C_1 \\ S(x,t)-\dfrac{2at}{F}=C_2. \end{cases} \tag{17}$$

Burada C_1 və C_2 xarakteristikanı təyin edən əmsallardır. (17)-də $t=0$ şərti daxilində riyazi çevrilmələrdən istifadə etməklə C_2 üçün aşağıdakı ifadə alınmışdır.

$$C_2=\varphi\left(\frac{1}{2a}\ln C_2-\frac{C_1}{2a}\right).$$

Bu ifadəni (17)-nin ikinci tənliyində nəzərə almaqla $S(x,t)$ üçün aşağıdakı düstur alınmışdır.

$$S(x,t)-\frac{2a}{F}t=\varphi\left(\frac{1}{2a}\ln\left(1-\frac{2at}{FS(x,t)}\right)+x\right).$$

İkinci fəslin üçüncü yarımfəslində isə kvazixətti tənliyin həlli şəbəkə üsulundan istifadə etməklə qurulmuşdur. Bu səbəbdən $S(x,t)$-üçün uyğun diskretləşmə aşağıdakı şəkildə verilmişdir.

$$S(x_i,t_j)=S(ih,j\tau)=S_{ij},$$

Bu işarələmələri qəbul edərək, $\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial x}$ və $\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial t}$ törəmələrini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik.

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\approx\frac{S_{i+1,j}-S_{i,j}}{h}, \qquad \frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\approx\frac{S_{i,j+1}-S_{i,j}}{\tau}$$

Bunu nəzərə almaqla (12) tənliyini aşağıdakı üsulla diskretləşdirək.

$$\frac{S_{i+1,j}-S_{i,j}}{h}+FS_{i,j}\frac{S_{i,j+1}-S_{i,j}}{\tau}-2aS_{i,j}=0, \quad i=\overline{0,N-1}; \ j=\overline{0,M-1}.$$

Sonuncudan $S_{i,j+1}$ üçün aşağıdakı ifadəni alarıq.

$$S_{i,j+1} = S_{ij} + \frac{\tau}{Fh}(1+2ah) - \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{i+1,j}}{S_{ij}} \tag{18}$$

$$i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1}.$$

Qeyd edək ki, yuxarıda göstərilən sxemə əsasən $S_{i,j}$ -ləri bütün düyün nöqtələrində hesablamaq mümkün olmadığı üçün əlavə olaraq aşağıdakı şəkildə diskretləşdirmə qəbul edilmişdir.

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} \approx \frac{S_{i,j} - S_{i-1,j}}{h}$$

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} \approx \frac{S_{i,j+1} - S_{ij}}{\tau}$$

$$S_{i,j+1} = S_{ij} + (2ah-1)\frac{\tau}{Fh} + \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{i-1,j}}{S_{ij}} \tag{19}$$

$$i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1}.$$

Bu iki diskretləşmənini birgə həlli bizə imkan verir ki, şəbəkənin bütün düyün nöqtələrini qapaya bilək. Beləliklə, aşağıdakı teoremi verə bilərik.

Teorem 3: *Əgər c, F və α verilən həqiqi sabit ədədlər, $P_0(x)$ və $Q_0(x)$ verilən kəsilməz funksiyalar, $\alpha(t)$ -də $\alpha(0)=0$, $\int_0^\infty \alpha(t)dt = 1$ şərtini ödəyərsə və $R(\infty)=0$ olarsa, onda $S_{i,j}$ -lər uyğun olaraq 2 sütunun (18) və (19)-un köməyi ilə bütün düyün nöqtələrdə təyin edilir.*

Üçüncü fəsildə hərəkət tənliklərinin Rosser modelinə uyğun həll edilməsi üçün alqoritm təklif edilmişdir. Obyektlərin hərəkəti halqavari fəzada və qaldırıcı boruda hiperbolik tip xüsusi törəməli diferensial tənliklə, quyu dibində isə fərqlər tənliyi ilə yazıldığından uyğun məsələlərin həlli mürəkkəbləşir. Ona görə bu məsələləri həll etmək üçün diskretləşdirmək əsas məqsədlərdən biridir. Bu səbəbdən verilmiş məsələlər üçün ilk dəfə kəsilməz Rosser modeli qurulub və uyğun olaraq diskret hala keçirilir ki, bu da belə məsələləri sona qədər həll etməyə kömək edir. Hərəkət tənliklərinə Rosser modelini tətbiq etmək üçün aşağıdakı əvəzləməni etmək zəruridir.

$$P(x,t) = R(x,t) + \alpha Q(x,t), \tag{20}$$

Burada $R(x,t)$, $P(x,t)$ -ni əvəz edən yeni naməlum funksiyadır, α kəmiyyətinin vahidi isə elə seçilməlidir ki, $R(x,t)$ və $\alpha Q(x,t)$ dəyişənlərinin vahidləri eyni olsun.

(20) əvəzləməsini hərəkət tənliklərində yerinə yazmaqla aşağıdakı ifadələr alınmışdır.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(x,t)}{\partial x} = -\alpha \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - \dfrac{1}{F}\left(-\dfrac{c}{\alpha F}\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial R(x,t)}{\partial t} \right) - \dfrac{2a}{F} Q(x,t), \\ \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{R(x,t)}{\partial t} - \dfrac{c}{\alpha F}\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x}. \end{cases} \tag{21}$$

Burada $\dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x}$ və $\dfrac{\partial R(x,t)}{\partial t}$ törəmələrini uyğun olaraq $W(x,t)$ və $\chi(x,t)$ işarələmələri qəbul etsək, alarıq:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = W(x,t), \\ \dfrac{\partial R(x,t)}{\partial t} = \chi(x,t). \end{cases} \tag{22}$$

Bu ifadəni (21) sistemində yerinə yazsaq:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(x,t)}{\partial x} = \left(\dfrac{c}{\alpha F^2} - \alpha \right) W(x,t) + \dfrac{1}{\alpha F}\chi(x,t) - \dfrac{2a}{F} Q(x,t), \\ \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{\alpha}\chi(x,t) - \dfrac{c}{\alpha F} W(x,t). \end{cases} \tag{23}$$

Alınan (22) və (23) tənliklər sisteminin birgə həlli məlum Rosser modelinə uyğun gəlir, lakin, $W(x,t)$ və $\chi(x,t)$ ifadələrini kəsilməz halda təyin etmək mümkün deyil, bu səbəbdən üçüncü fəslin ikinci yarımfəslində bu tənlikləri həll etmək üçün şəbəkə üsulundan istifadə edilmişdir.
Onda (22) və (23) tənliklər sistemi aşağıdakı şəkildə diskretləşər.

$$
\begin{cases}
R_{i+1}^{j} = R_i^j + h\left(\dfrac{c}{\alpha F^2} - \alpha\right) W_i^j + \dfrac{h}{\alpha F}\chi_i^j - \dfrac{2ah}{F} Q_i^j, \\
Q_{i+1}^{j} = Q_i^j + hW_i^j, \\
R_i^{j+1} = R_i^j + \tau\chi_i^j, \\
Q_i^{j+1} = Q_i^j - \dfrac{\tau}{\alpha}\chi_i^j - \dfrac{c\tau}{\alpha F} W_i^j.
\end{cases} \tag{24}
$$

(24) sisteminin həllinin aşağıdakı şəkildə olacağını görmək asandır.

$$
\begin{cases}
R_i^j = R_0^j + h\left(\dfrac{c}{F^2} - 1\right)\sum\limits_{k=0}^{i-1} W_k^j + \dfrac{h}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\chi_k^j - \dfrac{2ahi}{F} Q_0^j - \dfrac{2ah^2}{F}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\sum\limits_{s=0}^{k-1} W_s^j, \\
Q_i^j = Q_0^j + h\sum\limits_{k=0}^{i-1} W_k^j, \\
R_i^j = R_i^0 + \tau\sum\limits_{k=0}^{j-1}\chi_i^k, \\
Q_i^j = Q_i^0 - \dfrac{\tau}{\alpha}\sum\limits_{k=0}^{j-1}\chi_i^k - \dfrac{c\tau}{\alpha F}\sum\limits_{k=0}^{j-1} W_i^k, \qquad i \ge 0,\ j \ge 0
\end{cases} \tag{25}
$$

Bu sistemdən müəyyən çevrilmələr aparmaqla bütün χ_i^k və W_i^k parametrləri tapılması üçün aşağıdakı xətti münasibətləri alarıq:

$$
\begin{cases}
\chi_i^{j-1} = \dfrac{\alpha}{\tau}\left(R_0^j - R_0^0\right) - \dfrac{2ahi}{F\tau}\left(Q_0^j - Q_0^0\right) + \dfrac{\alpha h}{\tau}\left(\dfrac{c}{F^2} - 1\right)\sum\limits_{k=0}^{i-1}\left(W_k^j - W_k^0\right) + \\
+ \dfrac{h}{F\tau}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\left(\chi_k^j - \chi_k^0\right) - \dfrac{2ah^2\alpha}{F\tau}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\sum\limits_{s=0}^{k-1}\left(W_s^j - W_s^0\right) - \sum\limits_{k=0}^{j-2}\chi_i^k \\
W_i^{j-1} = \dfrac{\alpha F}{c\tau}\left(Q_0^0 - Q_0^j\right) - \dfrac{\alpha h F}{c\tau}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\left(W_k^0 - W_k^j\right) - \dfrac{\alpha F}{c\tau}\left(R_0^j - R_0^0\right) + \dfrac{2ahi}{c\tau}\left(Q_0^j - Q_0^0\right) - \\
\dfrac{Fh}{c\tau}\left(\dfrac{c}{F^2} - 1\right)\sum\limits_{k=0}^{i-1}\left(W_k^j - W_k^0\right) - \dfrac{h}{c\tau}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\left(\chi_k^j - \chi_k^0\right) + \dfrac{2ah^2}{c\tau}\sum\limits_{k=0}^{i-1}\sum\limits_{s=0}^{k-1}\left(W_s^j - W_s^0\right) - \sum\limits_{k=0}^{j-2} W_i^k
\end{cases}
$$

(25) sisteminin I və IV tənlikləri (x,t) oblastının bütün nöqtələrini təsvir edir. Yəni, (25) tənliyi aşağıdakı Rosser modeli şəklinə düşər.

$$\begin{bmatrix} R_{i+1}^{j} \\ P_i^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1+\dfrac{2ah}{F}\right) & -\dfrac{2ah}{F} \\ \dfrac{2ah}{F} & -\dfrac{2ah}{F}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i^j \\ P_i^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h\left(\dfrac{c}{\alpha F^2}-\alpha\right) & \dfrac{h}{\alpha F} \\ h\left(\dfrac{c}{\alpha F^2}-\alpha\right)-\tau & \dfrac{h}{\alpha\tau}-\alpha\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i^j \\ \chi_i^j \end{bmatrix}$$

Sonuncu yarımfəsildə isə alınan Rosser tipli tənliklərə qovma üsulunu tətbiq etmək üçün aşağıdakı əvəzləmələr qəbul edilmişdir.

$$R_i^j = S_i^j Q_i^j + K_i^j \tag{26}$$

Bu əvəzləməni (25) sistemində nəzərə alsaq, o aşağıdakı şəklə düşər.

$$\begin{cases} Q_{i+1}^j = Q_i^j + hW_i^j \\ S_i^{j+1}Q_i^{j+1} + K_i^{j+1} = S_i^j Q_i^j + K_i^j + \tau\chi_i^j \\ S_{i+1}^j Q_{i+1}^j + K_{i+1}^j = S_i^j Q_i^j + K_i^j + \left(\dfrac{ch}{F^2\alpha}-\alpha h\right)W_i^j + \dfrac{ch}{F\alpha}\chi_i^j + \dfrac{2ach}{F^2\alpha}Q_i^j, \\ Q_i^{j+1} = Q_i^j - \dfrac{\tau}{F\alpha}W_i^j - \dfrac{\tau}{\alpha}\chi_i^j - \dfrac{2a\tau}{F\alpha}Q_i^j. \end{cases}$$

Hesablamalar nəticəsində S, Q, R və P üçün aşağıdakı ifadə alınmışdır.

$$S_i^{j+1} - S_i^j = \frac{\dfrac{c}{F\alpha} - \dfrac{1}{F\alpha} + \dfrac{2a\tau}{F\alpha} \pm \sqrt{\left(\dfrac{c}{F\alpha} - \dfrac{1}{F\alpha} + \dfrac{2a\tau}{F\alpha}\right)^2 + \dfrac{8}{\alpha}\left(\dfrac{2a\tau}{F} - \dfrac{2ach}{F^2\alpha} + \dfrac{2a\tau}{F\alpha}S_i^j\right)}}{-\dfrac{4}{\alpha}}$$

$$Q_i^{j+1} = \frac{1-\dfrac{1}{F\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}S_i^j - \dfrac{2a\tau}{F\alpha}}{1-\dfrac{1}{F\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}S_i^{j+1}}Q_i^j,$$

$$R_i^j = S_i^j \frac{1-\dfrac{1}{F\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}S_i^{j-1} - \dfrac{2a\tau}{F\alpha}}{1-\dfrac{1}{F\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}S_i^j}Q_i^{j-1}.$$

$$P_i^j = R_i^j + \alpha Q_i^j = S_i^j \frac{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha} S_i^{j-1} - \frac{2a\tau}{F\alpha}}{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha} S_i^j} Q_i^{j-1} + \alpha \frac{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha} S_i^{j-1} - \frac{2a\tau}{F\alpha}}{1 - \frac{1}{F\alpha} + \frac{1}{\alpha} S_i^j} Q_i^{j-1},$$

Qeyd edək ki, bu üsulla qaz-lift prosesində hərəkəti təsvir edən hiperbolik tənliklər sistemi üçün birinci dəfə olaraq diskret Rosser tip tənliklərə qovma üsulu tətbiq edilmişdir.

Müəllif dissertasiya mövzusunun qoyulmasında, işin yerinə yetirilməsində daimi diqqətinə görə elmi rəhbər, akademik F.Ə. Əliyevə və dəyərli məsləhətlərinə görə BDU-nun professoru N.Ə. Əliyevə öz dərin minnətdarlığını bildirir.

Dissertasiya mövzusuna aid nəşr olunmuş əsərlərin siyahısı:

1. Алиев Н.А., Гулиев А.П., Тагиев Р.М, Существование и единственность решения одной краевой задачи, описываемой системой уравнений гиперболического типа, Доклад НАН Азерб. -2014.TOM LXX, N.2, c. 10-13
2. Гулиев А.П., Тагиев Р.М, Касымова К.Г., Вычислительный алгоритм для решения краевой задачи гиперболической системы возникающих в задачах газлифтного процесса, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.3, No.1, 2014, c.105-111.
3. Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Муталлимов М.М., Тагиев Р.М., Алгоритм построения модели Россера для газлифтного процесса при добыче нефти, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.3, No.2, 2014, c.173-184.
4. Гулиев А.П., Тагиев Р.М., Махмудова З.А., Численный алгоритм нахождения решения дискретного уравнения типа россера, описывающего движение в газлифтном процессе, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, V.4, N.2, 2015, pp.195-205.
5. Алиев Ф. А., Алиев Н.А.., Гулиев А.П., Раджабов М.Ф., Тагиев Р.М.. Метод прогонки для решения уравнения типа россера, описывающего движение в трубопроводе, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, V.4, N.2, 2015, pp.136-148.

6. Aliev N.A, Tagiev R.M., Model of Roesser for gas-lift process in oil production., Control and optimization with industrial applications, 27-29 August, Baku 2015, pp. 43-46
7. Tağıyev R. M., Əliyev N. Ə., Quliyev A. P. Rəcəbov M.F., BDU "Xəbərlər" №4, 2016, səh. 30-36
8. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Tagiev R.M., Rajabov M.F., Sweep method for solving the Roesser type equation describing the motion in the pipeline //Applied Mathematics and Computation, 2017, V.295, pp. 16-23
9. Алиев Н.А., Алиева Г.С., Тагиев Р.М., Фараджев А.С., Ханбабаева М., Определение коэффициента гидравлического сопротивления в газлифтном процессе, описываемом гиперболическим уравнением с частными производными, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, V.6, N.2, 2017, pp.186-201.

Тагиев Решад Мусраддин оглы

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПОЛУЧЕННОЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ НЕФТЕДОБЫЧИ

РЕЗЮМЕ

Диссертационная работа посвящена разработке и применению новых методов для решения дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа, представляющих движение считаемое наиболее выгодным в процессе газ-лифта с экономической точки зрения. На основе предложенных способов разработаны численный алгоритм и соответствующее программное обеспечение для нахождения решения рассмотренной задачи. Адекватность предложенной математической модели и эффективность алгоритмов показаны на конкретных практических примерах.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. В процессе газ-лифт решение граничной задачи дано с помощью способа рядов. Получены формулы для определения количества слагаемых приближенного решения по требуемой точности.
2. В частности определен коэффициент гидравлического сопротивления для процесса газ-лифт в подъемном проводе.
3. Для процесса газ-лифт, пользуясь методом прогонки, предложены алгоритмы решения.
4. Построены алгоритмы решения квазилинейных уравнений, полученных в решаемых уравнениях движения с помощью метода прогонки.
5. Впервые для процесса газ-лифт построена непрерывная модель Россера и предложен алгоритм для дискретной модели Россера.
6. Предложен метод прогонки для модели Россера.

Tagiev Reshad Musraddin oglu

METHODS FOR SOLVING ONE CLASS OF SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OBTAINED IN THE MODELING OF OIL PRODUCTION

SUMMARY

The thesis is devoted to the development and application of new methods for solving differential equations with partial differential equations of hyperbolic type, representing the motion of the most advantageous way in the gas lift process from an economic point of view. On the basis of proposed methods, the numerical algorithm and corresponding software are developed for finding the solution of the considered problem. The adequacy of the proposed mathematical model and the effectiveness of algorithms are shown on concrete practical examples.

The following main results are obtained in the thesis:

1. In the gas-lift process, the solution of the boundary problem is given as a series. The formulas are obtained for determining the number of terms of the approximate solution, by the required accuracy.
2. In particular the coefficient of hydraulic resistance for the gas-lift process in the lifting pipe is determined.
3. Using the sweep method the algorithms of solution for the gas-lift process are proposed.
4. The algorithms for solution of quasilinear equations obtained in the solvable equations of motion by means of the sweep method are constructed.
5. At first the continuous Rosser model for the gas-lift process, is constructed and an algorithm for the discrete Rosser model is proposed.
6. The sweep method for the Rosser model is proposed.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ

АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ТАГИЕВ РЕШАД МУСРАДДИН ОГЛУ

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПОЛУЧЕННОЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ НЕФТЕДОБЫЧИ

1211.01-Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

БАКУ – 2018