НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

СЕВИНДЖ ЗАИД кызы ХАЛЫГОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ АНИЗОТРОПНОГО ДРОБНО-МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И ПОТЕНЦИАЛА РИССА В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ

1202.01 - Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2014

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

SEVİNC ZAİD qızı XALIQOVA

ANİZOTROP KƏSR-MAKSİMAL OPERATORUNUN VƏ RİSS POTENSİALININ ÜMUMİLƏŞMİŞ MORRİ FƏZALARINDA TƏDQİQİ

1202.01 – Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2014

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

SEVİNC ZAİD QIZI XALIQOVA

ANİZOTROP KƏSR-MAKSİMAL OPERATORUNUN VƏ RİSS POTENSİALININ ÜMUMİLƏŞMİŞ MORRİ FƏZALARINDA TƏDQİQİ

1202.01 – Analiz və funksional analiz

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2014

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

СЕВИНДЖ ЗАИД кызы ХАЛЫГОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ АНИЗОТРОПНОГО ДРОБНО-МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И ПОТЕНЦИАЛА РИССА В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ

1202.01 - Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2014

Dissertasiya işi **Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin “Riyazi analiz”** kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər:
fizika-riyaziyyat elmlər doktoru, prof. **Məlikməmməd S. Cəbrayılov**

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmlər doktoru, prof. **Sadiq K.Abdullayev**
(Bakı Dövlət Universiteti).
fizika-riyaziyyat elmlər namizədi, dos. **Mübariz Q.Hacıbəyov**
(Milli Aviasiya Akademiyası).

Aparıcı təşkilat:
Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti
«Ali riyaziyyat» kafedrası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 31 oktyabr 2014-cü il saat 16^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində elmlər doktoru və fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün D 01.111 dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Avtoreferat göndərilib 24 sentyabr 2014-cü il.

AMEA RMİ-nın D 01.111
Dissertasiya Şurasının
elmi katibi **dosent Tamilla Həsənova**

Работа выполнена на кафедре **«Математический анализ» Азербайджанского Государственного Педагогического Университета.**

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор **Меликмамед С. Джабраилов**

Официальные оппоненты:
д.ф.-м.н., профессор **Садиг К. Абдуллаев**
(Бакинский Государственный Университет).
к.ф.-м.н., доц. **Мубариз Г. Гаджибеков**
(Национальная Авиационная Академия Азербайджана).

Ведущая организация
Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет кафедра «Высшая математика».

Защита диссертации состоится 31 октября 2014 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г.Баку, ул.Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 24 сентября 2014 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 ИММ НАНА **доцент Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Идеи и методы теории потенциалов в настоящее время применяются не только в математической физике, но и в теории функций, в функциональном анализе, в теории вероятностей, в задачах теории приближений и в гармоническом анализе. При решении многочисленных краевых задач, встречающихся в теории дифференциальных уравнений с частными производными, в задачах теории аналитических функций, а также в задачах механики метод теории потенциалов имеет богатую историю и успешную практику. Свойства потенциалов Рисса были исследованы в работах М. Рисса, Г. Харди, Дж. Литтлвуд, С.Л. Соболева, И.М. Стейна, Г. Вейса, О.В.Бесова, П.И. Лизоркина, С.Г. Самко, В. Кокилашвили, Б. Рубин и др. Из азербайджанских же математиков в этом направлении результаты принадлежат авторам А.Д. Гаджиев, С.К. Абдуллаев, Е.Г. Гусейнов, Р.Г. Сейфуллаев, В.С. Гулиев, И.А. Алиев, Р.М. Рзаев и др. Изложение ряда свойств потенциалов Рисса содержатся в монографиях И.М. Стейна[1], С.Г. Самко[2] и Б. Рубин[3].

При исследовании вложения анизотропных пространств Соболева, а также регулярности решений квазиэллиптических уравнений и ряд других задач возникают анизотропные потенциалы Рисса свойства которых приходится изучать в разных функциональных пространствах. Свойства анизотропных потенциалов Рисса подробно приведено в монографиях О.В.Бесов, В.П.Ильин, С.М.Никольского[4] и В.С.Гулиева[5].

Исследования, изложенные в данной диссертации, посвящены проблемам ограниченности анизотропного максимального оператора,

---

[1]Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.:Мир, 1973, 342 с.

[2]Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Изд. Ростовского ун.-та, 1984, 208 с.

[3]Rubin B. Fractional integrals and potentials. Addison Wesley Longman Limited, Essex, 1996.

[4]Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975, 480 с.

[5]Гулиев В.С. Функциональные пространства, интегральные операторы и двухвесовые оценки на однородных группах. Некоторые приложения. Баку: Чашыоглы, 1999, с. 1-332.

анизотропного дробно-максимального оператора и анизотропного потенциала Рисса в анизотропных обобщенных пространствах Морри и в модифицированных анизотропных пространствах Морри.

В связи с исследованием дифференциальных уравнений с частными производными в работах Морри стало необходимым изучение пространств с параметрами, которое в дальнейшем стали называть пространством Морри[6] $L_{p,\lambda}(R^n)$. В частности, им было получено широко известное условие гельдеровости функций из этих пространств.

Гельдеровость решений квазиэллиптических уравнений изучены в работах Д. Джорджи, Е. Джусти, Л. Апкепуда, Р.В. Гусейнова, П.С. Филатова др. Отметим, что в работе Р.В. Гусейнова[7] применяя теорему вложения Соболева-Морри, полученное в работе В.П. Ильина,[8] изучил гладкость решений квазиэллиптических уравнений не требуя никакой гладкости от коэффициентов. А.М. Наджафов[9] применяя теорему вложения типа Соболева-Морри полученное в его работе, изучил гладкость решений квазиэллиптических уравнений.

В диссертации, рассматриваются задачи об ограниченности анизотропного максимального оператора M_σ, анизотропного дробно-максимального оператора $M_{\alpha,\sigma}$ и анизотропного потенциала Рисса $I_{\alpha,\sigma}$ в анизотропных обобщенных пространствах Морри $M_{p,\varphi,\sigma}$ и в модифицированных анизотропных пространствах Морри $\widetilde{L}_{p,b,\sigma}$, где

$$M_\sigma f(x) = \sup_{t>0} |E_\sigma(x,t)|^{-1} \int_{E_\sigma(x,t)} |f(y)|\,dy$$

$$M_{\alpha,\sigma} f(x) = \sup_{t>0} |E_\sigma(x,t)|^{-1+\alpha/|\sigma|} \int_{E_\sigma(x,t)} |f(y)|\,dy,\ 0 \le \alpha < |\sigma|,$$

---

[6]Morrey C.B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. A.M.S., 1938, no. 43, pp. 126-166.

[7]Гусейнов Р.В. О гладкости решений одного класса квазиэллиптических уравнений. Вест. МГУ, сер. 1, математика, механика, 1992, no 6, с. 10-14.

[8]Ильин В.П. О некоторых свойствах функций из пространств $W^l_{p,a,æ}(G)$. Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР 23, 1971, с. 33-40.

[9]Najafov A.M. On some properties of the functions from Sobolev-Morrey type spaces. Central European Journal of Mathematics, 2005, vol. 3, no 3, pp. 496-507.

$$I_{\alpha,\sigma} f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)dy}{|x-y|_\sigma^{|\sigma|-\alpha}}, \qquad 0 < \alpha < |\sigma|$$

и $E_\sigma(x,t) = \prod_{i=1}^{n} \left(x_i - t^{\sigma_i}, x_i + t^{\sigma_i}\right)$, $\sigma = (\sigma_1,...,\sigma_n), \sigma_i > 0$, $i = 1,\cdots,n$, $|x|_\sigma = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|^{1/\sigma_i}$. Получена оценка для L_p-нормы анизотропной максимальной функции, анизотропной дробно-максимальной функции, а также анизотропного потенциала Рисса по параллелепипеду, которое позволяет получить достаточные условия ограниченности анизотропного дробно-максимального оператора и анизотропного потенциала Рисса для всех допустимых значений параметров.

Цель работы. Исследование ограниченности анизотропного максимального оператора, анизотропного дробно-максимального оператора и анизотропного потенциала Рисса в анизотропных обобщенных пространствах Морри и модифицированных анизотропных пространствах Морри.

Общая методика исследований. В диссертационной работе использованы методы теории интегральных операторов, гармонического анализа, теории функциональных пространств, максимальных функций и функционального анализа.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

- получены некоторые вложения между анизотропными пространствами Морри и модифицированными анизотропными пространствами Морри;
- получены достаточные условия для ограниченности анизотропного максимального оператора в модифицированных анизотропных пространствах Морри;
- получены достаточные условия для ограниченности анизотропного дробно-максимального оператора и его коммутатора в анизотропных обобщенных пространствах Морри;
- получены некоторые оценки для параболических операторов типа Шредингера в анизотропных обобщенных пространствах Морри;
- получены необходимые и достаточные условия для ограниченности анизотропного потенциала Рисса в модифицированных анизотропных пространствах Морри;
- получены достаточные условия для ограниченности анизотропного

потенциала Рисса и его коммутатора в анизотропных обобщенных пространствах Морри;

- получены некоторые теоремы вложения для функциональных пространств Соболева-Морри и модифицированных пространств Соболева-Морри.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в априорных оценках этих пространств при решении квазиэллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Анизотропные интегральные операторы служат для построения нужного аппарата при исследовании регулярности решений квазиэллиптических, в частности, параболических уравнений. В работе параболические операторы типа Шредингера имеют успешную практическую ценность.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на общем семинаре ИММ НАН Азербайджана (рук. академик А.Д. Гаджиев), на семинаре отделов «Математический анализ» (рук. чл.-корр. НАНА, проф. В.С. Гулиев) и «Негармонический анализ» (рук. чл.-корр. НАНА, проф. Б.Т. Билалов) ИММ НАН Азербайджана, на семинарах кафедры «Математический анализ» (рук. проф. В.М. Курбанов) и «Теории функций» (рук. проф. Р.М. Рзаев) АГПУ, а также на международной конференции по математике "Operators in Morrey-type Spaces and Applications", посвященной 70-летнему юбилею проф. В.Буренкова (2011 г., Кыршеир, Турция), на международной конференции, посвященной 100-летию акад. З.Халилова (2012 г., Баку, Азербайджан), на материалах XXI международной конференции "Mathematics. Education" (2013 г., Чебоксары, Россия).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 11 работах автора, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, включающий 110 наименований. Объем диссертации 125 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулирована ее цель и дан краткий обзор работ, примыкающих к теме диссертации, а также краткое содержание самой работы.

Первая глава диссертации состоит из шести параграфов.

В первой главе получены некоторые вложения между анизотропными пространствами Морри и модифицированными анизотропными пространствами Морри. А также получены достаточные условия для ограниченности анизотропного максимального оператора в модифицированных анизотропных пространствах Морри, анизотропного дробно-максимального оператора и его коммутатора в анизотропных обобщенных пространствах Морри. А как приложение полученных результатов доказаны некоторые оценки для параболических операторов типа Шредингера $V^{\gamma}(\partial/\partial t-\Delta+V)^{-\beta}$ и $V^{\gamma}\nabla^{2}(\partial/\partial t-\Delta+V)^{-\beta}$ в анизотропных обобщенных пространствах Морри.

В 1.1. приводятся общие сведения о пространствах Морри.

В 1.2. получены некоторые вложения между анизотропными пространствами Морри и модифицированными анизотропными пространствами Морри. Прежде чем, перейти к приведению результатов этого параграфа, приведем необходимые обозначения и понятия.

Пусть $0\le b\le 1$, $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ с $\sigma_i>0$ для $i=1,\cdots,n$, $|\sigma|=\sigma_1+\cdots+\sigma_n$ и $t^{\sigma}x\equiv\left(t^{\sigma_1}x_1,\ldots,t^{\sigma_n}x_n\right)$ для $t>0$. Для $x\in\mathrm{R}^n$ и $t>0$, пусть $E_{\sigma}(x,t)=\prod_{i=1}^{n}\left(x_i-t^{\sigma_i},x_i+t^{\sigma_i}\right)$ обозначает открытый параллелепипед с центром в x и с длиной ребра $2t^{\sigma_i}$ для $i=1,\cdots,n$.

Определение 1. Пусть $0\le b\le 1$, $1\le p<\infty$ и $[t]_1=\min\{1,t\}$. Обозначим через $L_{p,b,\sigma}(\mathrm{R}^n)$ анизотропное пространство Морри, а через $\widetilde{L}_{p,b,\sigma}(\mathrm{R}^n)$ модифицированное анизотропное пространство Морри, множество локально интегрируемых функций $f(x)$, $x\in\mathrm{R}^n$, с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{p,b,\sigma}}=\sup_{x\in\mathrm{R}^n,t>0}\left(t^{-b|\sigma|}\int_{E_{\sigma}(x,t)}|f(y)|^p\,dy\right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{\widetilde{L}_{p,b,\sigma}} = \sup_{x\in\mathrm{R}^n,t>0}\left([t]_1^{-b|\sigma|}\int_{E_\sigma(x,t)}|f(y)|^p\,dy\right)^{1/p}$$

соответственно.

Справедливы следующие леммы

Лемма 1. Пусть $1\le p<\infty$ и $0\le b_2\le b_1\le 1$. Тогда

$$\widetilde{L}_{p,b_1,\sigma}(\mathrm{R}^n)\subset_{\succ}\widetilde{L}_{p,b_2,\sigma}(\mathrm{R}^n) \text{ и } \|f\|_{\widetilde{L}_{p,b_2,\sigma}}\le\|f\|_{\widetilde{L}_{p,b_1,\sigma}}.$$

Лемма 2. Пусть $1\le p<\infty$. Тогда $L_{p,1,\sigma}(\mathrm{R}^n)=L_\infty(\mathrm{R}^n)$ и

$$\|f\|_{L_{p,1,\sigma}}=2^{n/p}\|f\|_{L_\infty}.$$

Лемма 3. Пусть $1\le p<\infty$ и $0\le b\le 1$. Тогда

$$\widetilde{L}_{p,b,\sigma}(\mathrm{R}^n)=L_{p,b,\sigma}(\mathrm{R}^n)\cap L_p(\mathrm{R}^n) \text{ и } \|f\|_{\widetilde{L}_{p,b,\sigma}}=\max\left\{\|f\|_{L_{p,b,\sigma}},\|f\|_{L_p}\right\}.$$

Лемма 4. Пусть $0<\alpha<|\sigma|$ и $0\le b\le 1-\alpha/|\sigma|$. Тогда

$$L_{\frac{|\sigma|(1-b)}{\alpha},b,\sigma}(\mathrm{R}^n)\subset_{\succ}L_{1,1-\frac{\alpha}{|\sigma|},\sigma}(\mathrm{R}^n) \text{ и } \|f\|_{L_{1,1-\frac{\alpha}{|\sigma|},\sigma}}\le 2^{n\left(1-\frac{\alpha}{|\sigma|(1-b)}\right)}\|f\|_{L_{\frac{|\sigma|(1-b)}{\alpha},b,\sigma}}.$$

Лемма 5. Пусть $0<\alpha<|\sigma|$ и $0\le b\le 1-\alpha/|\sigma|$. Тогда для $|\sigma|(1-b)/\alpha\le p\le|\sigma|/\alpha$

$$\widetilde{L}_{p,b,\sigma}(\mathrm{R}^n)\subset_{\succ}L_{1,1-\alpha/|\sigma|,\sigma}(\mathrm{R}^n) \text{ и } \|f\|_{L_{1,1-\alpha/|\sigma|,\sigma}}\le 2^{n/p'}\|f\|_{\widetilde{L}_{p,b,\sigma}}.$$

В 1.3. приведены некоторые обозначения и вложения, получены достаточные условия для ограниченности анизотропного максимального оператора в модифицированных анизотропных пространствах Морри.

При $0\le\alpha<|\sigma|$ анизотропную дробно-максимальную функцию обозначим следующим образом

$$M_{p,\alpha,\sigma}f(x)\equiv\left(M_{\alpha,\sigma}|f|^p\right)^{1/p}(x)=$$

$$=\sup_{t>0}\left(|E_\sigma(x,t)|^{-1+\alpha/|\sigma|}\int_{E_\sigma(x,t)}|f(y)|^p\,dy\right)^{1/p}.$$

В случае $\alpha=0$, обозначим $M_{p,0,\sigma}f$ через $M_{p,\sigma}f$.

Справедливы следующие леммы

Лемма 6. Пусть $1 \le p < \infty$, $0 \le \alpha < |\sigma|$ и $f \in L_{p,1-\alpha/|\sigma|,\sigma}(\mathrm{R}^n)$. Тогда

$$M_{p,\alpha,\sigma} f \in L_\infty(\mathrm{R}^n) \text{ и } \left\|M_{p,\alpha,\sigma} f\right\|_{L_\infty} = 2^{(\alpha/|\sigma|-1)n/p} \|f\|_{L_{p,1-\alpha/|\sigma|,\sigma}}.$$

Лемма 7. Пусть $1 \le p < \infty$, $0 \le \alpha < |\sigma|$ и $f \in \widetilde{L}_{p,1-\alpha/|\sigma|,\sigma}(\mathrm{R}^n)$. Тогда

$$M_{p,\alpha,\sigma} f \in L_\infty(\mathrm{R}^n) \text{ и } \left\|M_{p,\alpha,\sigma} f\right\|_{L_\infty} \le 2^{(\alpha/|\sigma|-1)n/p} \|f\|_{\widetilde{L}_{p,1-\alpha/|\sigma|,\sigma}}.$$

В случае $\alpha = 0$ из леммы 2 и 6 для $M_{p,\sigma} f$ получим следующее следствие.

Следствие 1. Пусть $1 \le p < \infty$ и $f \in L_\infty(\mathrm{R}^n)$. Тогда $\left\|M_{p,\alpha} f\right\|_{L_\infty} = \|f\|_{L_\infty}$.

В случае $p = 1$ из леммы 4 и 6 получим для $M_{\alpha,\sigma} f$ следующее следствие.

Следствие 2. Пусть $0 < \alpha < |\sigma|$, $0 \le b \le 1 - \alpha/|\sigma|$ и $f \in L_{|\sigma|(1-b)/\alpha,b,\sigma}(\mathrm{R}^n)$. Тогда $M_{\alpha,\sigma} f \in L_\infty(\mathrm{R}^n)$ и

$$\left\|M_{\alpha,\sigma} f\right\|_{L_\infty} = 2^{n(\alpha/|\sigma|-1)} \|f\|_{L_{1,1-\alpha/|\sigma|,\sigma}} \le 2^{n(\alpha/|\sigma|-\alpha/|\sigma|(1-b))} \|f\|_{L_{|\sigma|(1-b)/\alpha,b,\sigma}}.$$

Из леммы 5 и 6 для $M_{\alpha,\sigma} f$ получим следующее следствие.

Следствие 3. Пусть $0 < \alpha < |\sigma|$, $0 \le b \le 1 - \alpha/|\sigma|$ и $f \in \widetilde{L}_{p,b,\sigma}(R^n)$. Тогда $M_{\alpha,\sigma} f \in L_\infty(\mathrm{R}^n)$ для $|\sigma|(1-b)/\alpha \le p \le |\sigma|/\alpha$ и

$$\left\|M_{\alpha,\sigma} f\right\|_{L_\infty} = 2^{n(\alpha/|\sigma|-1)} \|f\|_{L_{1,1-\alpha/|\sigma|,\sigma}} \le 2^{n(\alpha/|\sigma|-1/p)} \|f\|_{\widetilde{L}_{p,b,\sigma}}.$$

Справедлива следующая лемма

Лемма 8. Пусть $1 \le p < \infty$ и $0 \le b \le 1$. Тогда

$$\widetilde{L}_{p,b,\sigma}(\mathrm{R}^n) = L_{p,b,\sigma}(\mathrm{R}^n) \cap L_p(\mathrm{R}^n) \text{ и}$$

$$\|f\|_{\widetilde{L}_{p,b,\sigma}} = \max\left\{\|f\|_{L_{p,b,\sigma}}, \|f\|_{L_p}\right\}.$$

Доказана следующая

Теорема 1.

1. Если $f \in \widetilde{L}_{1,b,\sigma}(\mathrm{R}^n)$, $0 \le b < 1$, тогда $M_\sigma f \in W\widetilde{L}_{1,b,\sigma}(\mathrm{R}^n)$ и

$$\left\|M_\sigma f\right\|_{W\widetilde{L}_{1,b,\sigma}} \le \overline{C}_{1,b,\sigma} \|f\|_{\widetilde{L}_{1,b,\sigma}},$$

где $\overline{C}_{1,b,\sigma}$ зависит только от b и σ.

2. Если $f \in \widetilde{L}_{p,b,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ и $0 \le b < 1$, тогда $M_\sigma f \in \widetilde{L}_{p,b,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|M_\sigma f\|_{\widetilde{L}_{p,b,\sigma}} \le \overline{C}_{p,b,\sigma} \|f\|_{\widetilde{L}_{p,b,\sigma}},$$

где $\overline{C}_{p,b,\sigma}$ зависит только от p, b и σ.

В 1.4. получены достаточные условия для ограниченности анизотропного дробно-максимального оператора в анизотропных обобщенных пространствах Морри. Прежде чем, перейти к результатам этого параграфа приведем необходимые обозначения и понятия.

В дальнейшем, $a \lesssim b$, ($b \gtrsim a$) означает, что $a \le \lambda b$, $(a \ge \lambda b)$, где $\lambda > 0$ зависит от несущественных параметров. Если $b \lesssim a \lesssim b$, тогда мы пишем $a \approx b$.

Определение 2. Пусть $1 \le p < \infty$ и $\varphi(x,t)$ неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Обозначим через $M_{p,\varphi,\sigma}$ анизотропное обобщенное пространство Морри, пространство всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{M_{p,\varphi,\sigma}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, t>0} \varphi(x,t)^{-1} |E_\sigma(x,t)|^{-1/p} \|f\|_{L_p(E_\sigma(x,t))},$$

Справедливы следующие леммы

Лемма 9. Пусть $1 \le p < \infty$, $0 \le \alpha < |\sigma|/p$ и $1/q = 1/p - \alpha/|\sigma|$. Тогда для $p > 1$ и любого параллелепипеда $E_\sigma = E_\sigma(x,r)$ неравенство

$$\|M_{\alpha,\sigma} f\|_{L_q(E_\sigma(x,r))} \lesssim \|f\|_{L_p(E_\sigma(x,2r))} + r^{|\sigma|/q} \sup_{\tau>2r} \tau^{-|\sigma|+\alpha} \|f\|_{L_1(E_\sigma(x,\tau))}$$

выполняется для всех $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Более того, для $p = 1$ неравенство

$$\|M_{\alpha,\sigma} f\|_{WL_q(E_\sigma(x,r))} \lesssim \|f\|_{L_1(E_\sigma(x,2r))} + r^{|\sigma|/q} \sup_{\tau>2r} \tau^{-|\sigma|+\alpha} \|f\|_{L_1(E_\sigma(x,\tau))}$$

выполняется для всех $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 10. Пусть $1 \le p < \infty$, $0 \le \alpha < |\sigma|/p$ и $1/q = 1/p - \alpha/|\sigma|$. Тогда для $p > 1$ и любого параллелепипеда $E_\sigma = E_\sigma(x,r)$ в $\mathbb{R}^n$, неравенство $\left\|M_{\alpha,\sigma}f\right\|_{L_q(E_\sigma(x,r))} \lesssim r^{|\sigma|/q}\sup\limits_{t>2r} t^{-|\sigma|/q}\left\|f\right\|_{L_p(E_\sigma(x,t))}$ выполняется для всех $f \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Более того, для $p=1$ неравенство

$$\left\|M_{\alpha,\sigma}f\right\|_{WL_q(E_\sigma(x,r))} \lesssim r^{|\sigma|/q}\sup_{t>2r} t^{-|\sigma|/q}\left\|f\right\|_{L_1(E_\sigma(x,t))}$$

выполняется для всех $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $1 \le p < \infty$, $0 \le \alpha < |\sigma|/p$, $1/q = 1/p - \alpha/|\sigma|$ и (φ_1, φ_2) удовлетворяет условию $\sup\limits_{r<t<\infty} t^{\alpha}\varphi_1(x,t) \le C\varphi_2(x,r)$, где C независит от x и r. Тогда для $p>1$, оператор $M_{\alpha,\sigma}$ ограниченно действует из пространства $M_{p,\varphi_1,\sigma}$ в пространство $M_{q,\varphi_2,\sigma}$, а для $p=1$ из пространства $M_{1,\varphi_1,\sigma}$ в слабое пространство $WM_{q,\varphi_2,\sigma}$.

В случае $\alpha = 0$ и $p = q$ из теоремы 2 получим следующее следствие.

Следствие 4. Пусть $1 \le p < \infty$ и (φ_1, φ_2) удовлетворяет условию $\sup\limits_{r<t<\infty} \varphi_1(x,t) \le C\varphi_2(x,r)$, где C независит от x и r. Тогда для $p>1$, оператор M_σ ограниченно действует из пространства $M_{p,\varphi_1,\sigma}$ в пространство $M_{p,\varphi_2,\sigma}$, а для $p=1$ из пространства $M_{1,\varphi_1,\sigma}$ в слабое пространство $WM_{1,\varphi_2,\sigma}$.

Имеет место следующий результат типа Адамса для анизотропного дробно-максимального оператора.

Теорема 3. Пусть $1 \le p < q < \infty$, $0 < \alpha < |\sigma|/p$ и $\varphi(x,t)$ удовлетворяет условию $\sup\limits_{r<t<\infty} \varphi(x,t) \le C\varphi(x,r)$ и $\sup\limits_{r<t<\infty} t^{\alpha}\varphi(x,t)^{1/p} \le$ $\le Cr^{-\alpha p/(q-p)}$, где C независит от $x \in \mathbb{R}^n$ и $r>0$. Тогда оператор $M_{\alpha,\sigma}$ ограниченно действует из пространства $M_{p,\varphi^{1/p},\sigma}$ в пространство $M_{q,\varphi^{1/q},\sigma}$ для $p>1$, и из пространства $M_{1,\varphi,\sigma}$ в слабое пространство $WM_{q,\varphi^{1/q},\sigma}$.

В случае $\varphi(x,t)=t^{(b-1)|\sigma|/p}$, $0<b<1$ из теоремы 3 получается результат типа Адамса для анизотропного дробно-максимального оператора.

Замечание 1. Теоремы 2 и 3 обобщают результаты В.С.Гулиева и его учеников, полученные в изотропном случае .

В 1.5. приведены некоторые понятия и получены достаточные условия для ограниченности коммутатора анизотропного дробно-максимального оператора в анизотропных обобщенных пространствах Морри.

Сублинейный коммутатор анизотропной дробно-максимальной функции определяется как

$$M_{b,\alpha,\sigma}(f)(x)=\sup_{t>0}|E_\sigma(x,t)|^{-1+\alpha/|\sigma|}\int_{E_\sigma(x,t)}|b(x)-b(y)||f(y)|\,dy.$$

Пусть $b_{E_\sigma(x,t)}=\left|E_\sigma(x,t)\right|^{-1}\int_{E_\sigma(x,t)}b(y)dy$, тогда говорят что, локально-интегрируемая функция b принадлежит $BMO_\sigma(\mathrm{R}^n)$ и

$$\|b\|_{BMO_\sigma}=\sup_{x\in\mathrm{R}^n,t>0}|E_\sigma(x,t)|^{-1}\int_{E_\sigma(x,t)}|b(y)-b_{E_\sigma(x,t)}|\,dy<\infty.$$

Имеет место

Лемма 11. Пусть $1<p<\infty$, $0\le\alpha<|\sigma|/p$, $1/q=1/p-\alpha/|\sigma|$ и $b\in BMO_\sigma(\mathrm{R}^n)$. Тогда для любого параллелепипеда $E_\sigma=E_\sigma(x,r)$ неравенство

$$\left\|M_{b,\alpha,\sigma}f\right\|_{L_q(E_\sigma(x,r))}\lesssim\|b\|_{BMO_\sigma}\,r^{|\sigma|/q}\sup_{t>2r}\left(1+\ln(t/r)\right)t^{-|\sigma|/q}\|f\|_{L_p(E_\sigma(x,t))}$$

выполняется для всех $f\in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathrm{R}^n)$.

Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть $1<p<\infty$, $0\le\alpha<|\sigma|/p$, $1/q=1/p-\alpha/|\sigma|$, $b\in BMO_\sigma(\mathrm{R}^n)$ и (φ_1,φ_2) удовлетворяет условию

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln(t/r)\right)\varphi_1(x,t)\le C\varphi_2(x,r),$$

где C независит от x и r. Тогда оператор $M_{b,\alpha,\sigma}$ ограниченно действует из пространства $M_{p,\varphi_1,\sigma}$ в пространство $M_{q,\varphi_2,\sigma}$.

В случае $\alpha = 0$ и $p = q$ из теоремы 4 получим следующее следствие.

Следствие 5. Пусть $1 < p < \infty$, $b \in BMO_\sigma(\mathsf{R}^n)$ и (φ_1, φ_2) удовлетворяет условию $\sup\limits_{r<t<\infty} \left(1 + \ln(t/r)\right)\varphi_1(x,t) \le C\varphi_2(x,r)$, где C независит от x и r. Тогда оператор $M_{b,\sigma}$ ограниченно действует из пространства $M_{p,\varphi_1,\sigma}$ в пространство $M_{p,\varphi_2,\sigma}$.

Имеет место следующий результат типа Адамса для анизотропного дробно-максимального оператора.

Теорема 5. Пусть $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < |\sigma|/p$, $b \in BMO_\sigma(\mathsf{R}^n)$ и пусть $\varphi(x,t)$ удовлетворяет условию $\sup\limits_{r<t<\infty} \left(1 + \ln(t/r)\right)\varphi(x,t) \le C\varphi(x,r)$ и $\sup\limits_{r<t<\infty} t^\alpha \left(1 + \ln(t/r)\right)\varphi(x,t)^{1/p} \le Cr^{-\alpha p/q - p}$, где C не зависит от $x \in \mathsf{R}^n$ и $r > 0$. Тогда оператор $M_{b,\alpha,\sigma}$ ограниченно действует из пространства $M_{p,\varphi^{1/p},\sigma}$ в пространство $M_{q,\varphi^{1/q},\sigma}$.

В случае $\varphi(x,t) = t^{(b-1)|\sigma|/p}$, $0 < b < 1$ из Теоремы 5 получим следующий результат типа Адамса для анизотропного дробно-максимального оператора.

Следствие 6. Пусть $0 < \alpha < |\sigma|$, $1 < p < |\sigma|/\alpha$, $0 < \lambda < |\sigma| - \alpha p$, $1/p - 1/q = \alpha/(|\sigma| - \lambda)$ и $b \in BMO_\sigma(\mathsf{R}^n)$. Тогда оператор $M_{b,\alpha,\sigma}$ ограниченно действует из пространства $L_{p,b,\sigma}$ в пространство $L_{q,b,\sigma}$.

Замечание 2. Теорема 4 обобщает результаты В.С.Гулиева и его учеников, полученные в изотропном случае .

В 1.6. как приложение полученных результатов доказаны некоторые оценки для параболических операторов типа Шредингера $V^\gamma(\partial/\partial t - \Delta + V)^{-\beta}$ и $V^\gamma \nabla^2 (\partial/\partial t - \Delta + V)^{-\beta}$ в анизотропных обобщенных пространствах Морри.

Вторая глава диссертации состоит из четырех параграфов.

Во второй главе найдены необходимые и достаточные условия для ограниченности анизотропного потенциала Рисса в анизотропных модифицированных пространствах Морри, а также достаточные условия для ограниченности анизотропного потенциала Рисса и его коммутатора в анизотропных обобщенных пространствах Морри и доказаны некоторые теоремы вложения для функциональных пространств Соболева-Морри $W^l_{p,b,\sigma}(R^n)$ и модифицированных пространств Соболева-Морри $\widetilde{W}^l_{p,b,\sigma}(R^n)$.

В 2.1. получены необходимые и достаточные условия для ограниченности анизотропного потенциала Рисса в модифицированных анизотропных пространствах Морри.

Справедлива теорема

Теорема 6. Пусть $0<\alpha<|\sigma|$, $0\le b<1-\alpha/|\sigma|$ и $1\le p<(1-b)|\sigma|/\alpha$.

1) Если $1<p<(1-b)|\sigma|/\alpha$, тогда условие $\alpha/|\sigma|\le 1/p-1/q\le$ $\le\alpha/(1-b)|\sigma|$ необходимо и достаточно для ограниченности оператора $I_{\alpha,\sigma}$ из пространства $\widetilde{L}_{p,b,\sigma}(\mathsf{R}^n)$ в пространство $\widetilde{L}_{q,b,\sigma}(\mathsf{R}^n)$.

2) Если $p=1<(1-b)|\sigma|/\alpha$, тогда условие $\alpha/|\sigma|\le 1-1/q\le$ $\le\alpha/(1-b)|\sigma|$ необходимо и достаточно для ограниченности оператора $I_{\alpha,\sigma}$ из пространства $\widetilde{L}_{1,b,\sigma}(\mathsf{R}^n)$ в слабое пространство $W\widetilde{L}_{q,b,\sigma}(\mathsf{R}^n)$.

Замечание 3. Теорема 6 обобщает результаты В.С.Гулиева и его учеников, полученные в изотропном случае.

В 2.2. получены достаточные условия для ограниченности анизотропного потенциала Рисса в анизотропных обобщенных пространствах Морри. Сначала мы введем вспомогательную лемму.

Имеет место

Лемма 12. Пусть $1\le p<\infty$, $0<\alpha<|\sigma|/p$ и $1/q=1/p-\alpha/|\sigma|$. Тогда для $p>1$ и любого параллелепипеда $E_\sigma=E_\sigma(x,r)$ неравенство

$$\left\|I_{\alpha,\sigma}f\right\|_{L_q(E_\sigma(x,r))}\lesssim\|f\|_{L_p(E_\sigma(x,2c_0r))}+r^{|\sigma|/q}\int_{2c_0r}^{\infty}\|f\|_{L_p(E_\sigma(x,t))}t^{-1-|\sigma|/q}dt$$

выполняется для всех $f\in L_p^{loc}(\mathsf{R}^n)$.Более того, для $p=1$ неравенство

$$\left\|I_{\alpha,\sigma}f\right\|_{WL_q(E_\sigma(x,r))} \lesssim \left\|f\right\|_{L_1(E_\sigma(x,2c_0r))} + r^{|\sigma|/q}\int_{2c_0r}^{\infty}\left\|f\right\|_{L_1(E_\sigma(x,\tau))}t^{-1-|\sigma|/q}dt$$

выполняется для всех $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Справедлива следующая

Теорема 7. Пусть $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < |\sigma|/p$, $1/q = 1/p - \alpha/|\sigma|$ и (φ_1, φ_2) удовлетворяет условию $\int_r^\infty t^{\alpha-1}\varphi_1(x,t)dt \le C\varphi_2(x,r)$, где C независит от x и r. Тогда для $p > 1$, оператор $I_{\alpha,\sigma}$ ограниченно действует из пространства $M_{p,\varphi_1,\sigma}$ в пространство $M_{q,\varphi_2,\sigma}$, а для $p = 1$, из пространства $M_{1,\varphi_1,\sigma}$ в слабое пространство $WM_{q,\varphi_2,\sigma}$.

Имеет место

Теорема 8. Пусть $1 \le p < q < \infty$, $0 < \alpha < |\sigma|/p$ и $\varphi(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{r<t<\infty}\varphi_1(x,t) \le C\varphi_2(x,r) \text{ и} \int_r^\infty t^{\alpha-1}\varphi(x,t)^{1/p}dt \le Cr^{-\alpha p/(q-p)},$$

где C независит от $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$. Тогда оператор $I_{\alpha,\sigma}$ ограниченно действует из пространства $M_{p,\varphi^{1/p},\sigma}$ в пространство $M_{q,\varphi^{1/q},\sigma}$ для $p > 1$ и из пространства $M_{1,\varphi,\sigma}$ в пространство $WM_{q,\varphi^{1/q},\sigma}$ для $p = 1$.

В случае $\varphi(x,t) = t^{(b-1)|\sigma|/p}$, $0 < b < 1$ из теоремы 8 получим следующий результат типа Адамса для анизотропного потенциала Рисса.

Следствие 7. Пусть $0 < \alpha < |\sigma|$, $1 \le p < |\sigma|/\alpha$, $0 < \lambda < |\sigma| - \alpha p$ и $1/p - 1/q = \alpha/(|\sigma| - \lambda)$. Тогда для $p > 1$, оператор $I_{\alpha,\sigma}$ ограниченно действует из пространства $L_{p,b,\sigma}$ в пространство $L_{q,b,\sigma}$, а для $p = 1$ из пространства $L_{1,b,\sigma}$ в слабое пространство $WL_{q,b,\sigma}$.

Замечание 4. Теоремы 7 и 8 обобщают результаты В.С.Гулиева и его учеников, полученные в изотропном случае.

В 2.3. получены достаточные условия для ограниченности коммутатора анизотропного потенциала Рисса в анизотропных обобщенных пространствах Морри. Прежде чем, перейти к основным результатам введем некоторое обозначение.

Пусть $\left[b, I_{\alpha,\sigma}\right] f = bI_{\alpha,\sigma} f - I_{\alpha,\sigma}(bf)$ является анизотропным коммутаторным оператором.

Имеет место

Лемма 13. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < |\sigma|/p$, $1/q = 1/p - \alpha/|\sigma|$ и $b \in BMO_{\sigma}$. Тогда для любого параллелепипеда $E_{\sigma} = E_{\sigma}(x,r)$ неравенство

$$\left\| [b, I_{\alpha,\sigma}] f \right\|_{L_q(E_{\sigma}(x,r))} \lesssim \|b\|_{BMO_{\sigma}} r^{\frac{|\sigma|}{q}} \int_{2c_0 r}^{\infty} \left(1 + \ln\frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_p(E_{\sigma}(x,t))} t^{-1-\frac{|\sigma|}{q}} dt$$

выполняется для всех $f \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathrm{R}^n)$.

Справедлива следующая

Теорема 9. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < |\sigma|/p$, $1/q = 1/p - \alpha/|\sigma|$ и (φ_1, φ_2) удовлетворяют условию

$$\int_r^{\infty} t^{\alpha-1} \left(1 + \ln(t/r)\right) \varphi_1(x,t) dt \le C \varphi_2(x,r),$$

где C независит от x и r. Тогда оператор $[b, I_{\alpha,\sigma}]$ ограниченно действует из пространства $M_{p,\varphi_1,\sigma}$ в пространство $M_{q,\varphi_2,\sigma}$.

Справедлива следующая

Теорема 10. Пусть $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < |\sigma|/p$, $b \in BMO_{\sigma}$ и пусть $\varphi(x,t)$ удовлетворяет условию $\sup\limits_{r<t<\infty} \left(1 + \ln(t/r)\right) \varphi_1(x,t) \le C \varphi_2(x,r)$ и $\int_r^{\infty} \left(1 + \ln(t/r)\right) t^{\alpha-1} \varphi(x,t)^{1/p} dt \le C r^{-\alpha p/(q-p)}$, где C независит от $x \in \mathrm{R}^n$ и $r > 0$. Тогда оператор $[b, I_{\alpha,\sigma}]$ ограниченно действует из пространства $M_{p,\varphi^{1/p},\sigma}$ в пространство $M_{q,\varphi^{1/q},\sigma}$.

В случае $\varphi(x,t) = t^{(b-1)|\sigma|/p}$, $0 < b < 1$ из теоремы 10 получается результат типа Адамса для коммутатора анизотропного потенциала Рисса.

Замечание 5. Теоремы 9 и 10 обобщают результаты В.С.Гулиева и его учеников, полученные в изотропном случае.

В 2.4. получены некоторые теоремы вложения между анизотропными пространствами Морри и модифицированными анизотропными пространствами Морри, и между пространствами Соболева-Морри и модифицированными пространствами Соболева-Морри. Сначала введем некоторые обозначения и понятия, а потом перейдем к основным результатам.

Пусть $l=(l_1,\ldots,l_n)$-вектор с натуральными компонентами, $(i=1,...,n)$.

Определение 3. Пространство Соболева-Морри обозначим через $W^l_{p,b,\sigma}(\mathsf{R}^n)$ пространство локально суммируемых на R^n функций f имеющих на R^n обобщенные производные $D_i^{l_i}f$ $(i=1,\ldots,n)$ с конечной нормой $\|f\|_{W^l_{p,b,\sigma}}=\|f\|_{L_{p,b,\sigma}}+\sum\limits_{i=1}^{n}\left\|D_i^{l_i}f\right\|_{L_{p,b,\sigma}}$.

Определение 4. Модифицированное пространство Соболева-Морри обозначим через $\widetilde{W}^l_{p,b,\sigma}(\mathsf{R}^n)$ пространство локально суммируемых на R^n функций f имеющих на R^n обобщенные производные $D_i^{l_i}f$ $(i=1,\ldots,n)$ с конечной нормой $\|f\|_{\widetilde{W}^l_{p,b,\sigma}}=\|f\|_{\widetilde{L}_{p,b,\sigma}}+\sum\limits_{i=1}^{n}\left\|D_i^{l_i}f\right\|_{\widetilde{L}_{p,b,\sigma}}$.

Справедливы следующие леммы

Лемма 14. Пусть $0<a<1$ и $0\le b\le a$. Тогда для $(1-b)/(1-a)\le p\le 1/a$, $\widetilde{L}_{p,a,\sigma}(\mathsf{R}^n)\subset_{\succ}\widetilde{L}_{p,b,\sigma}(\mathsf{R}^n)\subset_{\succ}L_{1,a,\sigma}(\mathsf{R}^n)$ и

$$\|f\|_{L_{1,a,\sigma}}\le 2^{n/p'}\|f\|_{\widetilde{L}_{p,b,\sigma}}\le 2^{n/p'}\|f\|_{\widetilde{L}_{p,a,\sigma}}.$$

Лемма 15. Пусть $0\le a\le 1$, $0\le b\le 1$ и $1\le p<q<\infty$. Тогда для $(1-b)|\sigma|/q\le(1-a)|\sigma|/p\le|\sigma|/q$

$$\widetilde{L}_{q,b,\sigma}(\mathsf{R}^n)\subset_{\succ}L_{p,a,\sigma}(\mathsf{R}^n) \text{ и } \|f\|_{L_{p,a,\sigma}}\le 2^{n/p-n/q}\|f\|_{\widetilde{L}_{p,b,\sigma}}.$$

Лемма 16. Пусть $l=(l_1,\ldots,l_n)$-вектор с натуральными компонентами, $0<a<1$ и $0\le b\le a$. Тогда для $(1-b)/(1-a)\le p\le 1/(1-a)$

$$\widetilde{W}^l_{p,a,\sigma}(\mathsf{R}^n)\subset_{\succ}\widetilde{W}^l_{p,b,\sigma}(\mathsf{R}^n)\subset_{\succ}W^l_{1,a,\sigma}(\mathsf{R}^n) \text{ и}$$

$$\|f\|_{W^l_{1,a,\sigma}}\le 2^{n/p'}\|f\|_{\widetilde{W}^l_{p,b,\sigma}}\le C\|f\|_{\widetilde{W}^l_{p,a,\sigma}}.$$

Лемма 17. Пусть $l=(l_1,\ldots,l_n)$-вектор с натуральными компонентами, $0\le a\le 1$, $0\le b\le 1$ и $1\le p<q<\infty$. Тогда для $(1-b)|\sigma|/q\le(1-a)|\sigma|/p\le|\sigma|/q$

$$\widetilde{W}^{l}_{q,b,\sigma}(\mathrm{R}^n)\subset\!\!\!\succ W^{l}_{p,a,\sigma}(\mathrm{R}^n) \text{ и } \|f\|_{W^{l}_{p,a,\sigma}}\le 2^{n/p-n/q}\|f\|_{\widetilde{W}^{l}_{p,b,\sigma}}.$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору М.С.Джабраилову за постановку задачи, обсуждение полученных результатов и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Dzhabrailov M.S., Khaligova S.Z. Embeddings theorems on modified anisotropic Morrey spaces // News of Pedaqogical University, Baku-2011, № 5, pp. 19-24.
2. Dzhabrailov M.S., Khaligova S.Z. Some embeddings into the anisotropic Morrey and modified anisotropic Morrey spaces / Operators in Morrey-type spaces and Applications. Dedicated to 70 th Birthday of Professor Victor I. Burenkov, may 20-27, Kirsehir-Turkey-2011, p. 64.
3. Khaligova S.Z. Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the anisotropic Riesz potential in anisotropic modified Morrey spaces /Functions theory and problems of harmonic analysis procedings of the international conference devoted to the 100-th anniversary of acad. I. Ibrahimov, Azerbaijan Republic, Baku-AMEA-2012, pp. 262-263.
4. Джабраилов М.С., Халыгова С.З. Ограниченность типа Адамс-Гулиева анизотропного дробно-максимального оператора в анизотропном обобщенном пространстве Морри / Математика, Информатика, Физика в науке и образовании. Сборник научных трудов к 140-летию МГПУ, Москва-МГПУ-2012, pp. 54-57.
5. Dzhabrailov M.S., Khaligova S.Z. Anisotropic fractional maximal operator in anisotropic generalized Morrey spaces // Published by Canadian Center of Science and Education. Journal of Mathematics Research,

Canada-2012, vol. 4, № 6, pp. 109-120.
6. Khaligova S.Z. Commutator of anisotropic fractional maximal operator in anisotropic generalized Morrey spaces // News of Pedaqogical University, Baku-2012, № 4, pp. 15-21.
7. Dzhabrailov M.S., Khaligova S.Z. Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the anisotropic Riesz potential in anisotropic modified Morrey spaces // Analele Stiinti ce ale Universitati Ovidius Constanta, Seria Matematica, 2013, vol. 21(2), pp. 111-130.
8. Khaligova S.Z. Anisotropic Riesz potential in anisotropic generalized Morrey spaces // News of Pedaqogical University, Baku-2013, № 3, pp. 31-37.
9. Dzhabrailov M.S., Khaligova S.Z. Commutator of anisotropic Riesz potential in anisotropic generalized Morrey spaces // Transactions issue mathematics and mechanics series of physical-technical and mathematical of Azerbaijan National Academy of Sciences. 2013,vol. 33, № 4, pp. 43-56.
10. Dzhabrailov M.S., Khaligova S.Z. Adams-Guliyev type boundedness for the anisotropic Riesz potential on anisotropic generalized Morrey spaces. Proceedings of XXI International Conference. Mathematics. Education 27 May – 2 June, 2013, Cheboksary, p. 382.
11. Dzhabrailov M.S., Khaligova S.Z. Some embeddings into the anisotropic Morrey and modified anisotropic Morrey spaces. Some applications // Analele Ştiitifice Ale Universitatii "Al.I. Cuza" Din Iasi (S.N.) Matematica, Tomul LX, Romania-2014, f.1, pp. 245-257.

SEVİNC ZAİD qızı XALIQOVA

ANİZOTROP KƏSR-MAKSİMAL OPERATORUN VƏ RİSS POTENSİALIN ÜMUMİLƏŞMİŞ MORRİ FƏZALARINDA TƏDQİQİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi anizotrop maksimal operatorun, anizotrop kəsr-maksimal operatorun və anizotrop Riss potensialının anizotrop ümumiləşmiş Morri fəzalarında məhdudluğunun öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakılardır:

- anizotrop Morri fəzaların və modifə olunmuş anizotrop Morri fəzaların arasında bəzi daxilolmalar alınmışdır;
- anizotrop maksimal operatorun modifə olunmuş anizotrop Morri fəzalarında məhdudluğu üçün kafi şərtlər alınmışdır;
- anizotrop kəsr-maksimal operatorun və onun kommutatorunun anizotrop ümumiləşmiş Morri fəzalarında məhdudluğu üçün kafi şərtlər alınmışdır;
- Şredinger tipli parabolik operatorlar üçün anizotrop ümumiləşmiş Morri fəzalarında bəzi qiymətləndirmələr alınmışdır;
- anizotrop Riss potensialının modifə olunmuş anizotrop Morri fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır;
- anizotrop Riss potensialının və onun kommutatoru üçün anizotrop ümumiləşmiş Morri fəzalarında məhdudluğu üçün kafi şərtlər alınmışdır;
- Sobolev-Morri və modifə olunmuş Sobolev-Morri funksional fəzaları üçün bəzi daxilolma teoremləri alınmışdır.

SEVINC ZAID kizi XALIQOVA

INVESTIGATION OF ANISOTROPIC FRACTIONAL MAXIMAL OPERATOR AND RIESZ POTENTIAL ON GENERALIZED MORREY SPACES

SUMMARY

The dissertation was devoted to the study of the problems of boundedness of anisotropic maximal, anisotropic fractional maximal operators and anisotropic Riesz potential on anisotropic generalized Morrey spaces.

The principal results of dissertation are as follows:

- some embeddings between the anisotropic Morrey and the modified anisotropic Morrey spaces were obtained;
- sufficient conditions of boundedness of anisotropic maximal operator on modified anizotropic Morrey spaces were obtained;
- sufficient conditions of boundedness of anisotropic fractional maximal operator and his commutator on anizotropic generalized Morrey spaces were obtained;
- some estimates of the parabolic Schrödinger type operators on anizotropic generalized Morrey spaces were obtained;
- necessary and sufficient conditions of boundedness of anisotropic Riesz potential on modified anizotropic Morrey spaces were obtained;
- sufficient conditions of boundedness of anisotropic Riesz potential and his commutator on anizotropic generalized Morrey spaces were obtained;
- some embeddings theorems of the Sobolev-Morrey and modified Sobolev-Morrey functional spaces were obtained.