**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI**

*Əlyazması hüququnda*

# CIRLAŞAN ELLİPTİK-PARABOLİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN ARAŞDIRILMASI

İxtisas: 1211.01- Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat


İddiaçı: **Mehriban Nurməmməd qızı Kərimova**


Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

**AVTOREFERATI**

**Bakı-2023**

Dissertasiya işi Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Diferensial tənliklər" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
**Tahir Sədi oğlu Hacıyev**

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
**Vəli Məhərrəm oğlu Qurbanov**
riyaziyyat elmləri doktoru, professor
**Yaqub Əmiyar oğlu Şərifov**
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
**Elçin Musa oğlu Məmmədov**

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri:
AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., professor
__________ **Misir Cumail oğlu Mərdanov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: fizika-riyaziyyat elmləri namizədi
__________ **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: AMEA-nın həqiqi üzvü, f.-r.e.d., professor
__________ **Yusif Əbülfət oğlu Məmmədov**

# İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

**Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi.**

Tətbiqi xarakterli bir çox mühüm məsələlərin həlli zamanı elliptik-parabolik tənliklərə rast gəlinir. Bu tənliklər cırlaşan tənliklər sinfindən olub, fırlanan səthlərin kiçik əyilməsi nəzəriyyəsində, momentsiz örtüklər nəzəriyyəsində, fraktal diffuziyanın dalğalar halında öyrənilməsində, qaz dinamikası tənliklərində, riyazi biologiyada, genetikada, tibbdə və s. sahələrdə yaranırlar.

Bu istiqamətdə ilk fundamental nəticələri F.Trikomi, F.İ.Frankl, İ.N.Vekua, A.V.Bitsadze almışlar. Belə tip tənliklərin qaz dinamikasında mühüm tətbiqləri aşkar edilmişdir. Məsələlərin həllində qarışıq tip tənliklərin vacibliyi qeyd olunmuş, səthlərin sonsuz kiçik əyilmələri nəzəriyyəsində yaranmış qarışıq tip tənliklər üçün ekstremum prinsipi formalaşdırılmış, xüsusi halda həllin yeganəliyi göstərilmişdir.

Sonralar bu nəticələr K.İ.Babenkonun, A.M.Naxuşevin, G.Holmgren, S.Gellerstedt, P.Germain və R.Bader, L.Wolfersdorf, M.L.Krasnovun, İ.A. Kipriyanovun, M.S. Salahitdinov və Z.X.Kadırovun, L.S.Parasyukun, X.Nəcəfovun və başqalarının əsərlərində daha da inkişaf etdirilmişdir.

Qarışıq tipli məsələlərin həllində kəsr inteqro-diferensiallanma əməli mühüm rol oynayır. Qarışıq tip tənliklər nəzəriyyəsində kəsr hesabının rolu çoxölçülü oblastlarda cırlaşan parabolik səthlərin fəza orientasiyası Trikomi məsələsinin analogiyasının axtarılması probleminin meydana gəlməsi ilə bağlıdır. Bu problemi A.V.Bitsadze qoymuşdur və son illərdə güclü inkişaf etmişdir. Qeyri-lokal sərhəd və sərhəd məsələlərinin öyrənilməsi cırlaşan diferensial tənliklərin kəsr hesabı üsulu ilə öyrənilməsini tələb edirdi. Cırlaşan elliptik tənliklər nəzəriyyəsində prinsipial nəticə M.V.Keldışın işi ilə bağlıdır. Bu iş belə tip tənliklərin gələcək inkişafı üçün başlanğıc kimi qəbul edilir.

Bu tip məsələlərin çoxölçülü halında Q.Fikeranın, O.A.Oleinikin, M.İ.Vişikin, S.G.Mixlinin, A.M.İlyinin və s. işlərini xüsusi qeyd etmək olar.

Bu dissertasiya işində xətti divergent və qeyri-divergent cırlaşan elliptik-parabolik tip tənliklərə baxılır və onların baş hissəsi də cırlaşandır. Bununla əlaqədar olaraq M.Franciosinin, A.Alvino-nun, G.Trombettinin işlərini qeyd etmək olar. Burada qeyri-divergent hamar əmsallı elliptik-parabolik tənliklər üçün birinci sərhəd məsələsinin güclü həllinin olması isbat edilmişdir. G. Talentinin, V.Iftimie, G.Fiortio, G.C.Wen, İ.T.Məmmədov və onun tələbələrinin işlərində Kordes şərtlərini ödəyən kəsilən əmsallı qeyri-divergent və ikinci tərtib elliptik-parabolik tənliklər üçün və həmçinin müxtəlif tip elliptik-parabolik tənliklər üçün birinci sərhəd məsələsinin birqiymətli güclü həllinin olması isbat edilmişdir. Həmçinin, İ.Kohn, L.Nirenberg, O.A.Ladıjenskayanın, V.A.Solonnikovun, N.N.Uraltse-vanın, E.M.Landisın və s. əsərlərini də qeyd edə bilərik.

H.Gajewski və İ.V.Skripnik, P.Benilan və P.Wittbold işlərində elliptik-parabolik tip tənliklər sistemini nəzərdən keçirmişlər.

T.S.Hacıyev və E.R.Qasımova işlərində kəsilən əmsallı qeyri-divergent xətti elliptik-parabolik tənliklərə baxmışlar.

Dissertasiya işi elliptik-parabolik tip xətti divergent cırlaşan tənliklərin həllinin keyfiyyət xassələrinin tədqiq etmək və elliptik-parabolik tip xətti qeyri-divergent cırlaşan tənliklər üçün birinci sərhəd məsələsinin birqiymətli güclü həllinin varlığı məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Bu səbəbdən dissertasiya işinin mövzusunu aktual hesab etmək olar.

**Tədqiqatın obyekti və predmeti.**

Dissertasiyanın obyekti elliptik-parabolik tip xətti divergent cırlaşan tənliklər və elliptik-parabolik tip xətti qeyri-divergent cırlaşan tənliklərdir. Dissertasiya işində elliptik-parabolik tip xətti divergent cırlaşan tənliklərin keyfiyyət xassələri və elliptik-parabolik tip xətti qeyri-divergent cırlaşan tənliklərin birinci sərhəd məsələsinin birqiymətli güclü həll olunması tədqiq edilmişdir.

**Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri.**

Dissertasiya işinin məqsədi elliptik-parabolik tip xətti divergent cırlaşan tənliyin həllinin keyfiyyət xassələrini tədqiq etmək və elliptik-parabolik tip xətti qeyri-divergent cırlaşan tənliklər

üçün birinci sərhəd məsələsinin birqiymətli güclü (demək olar ki, hər yerdə) həllinin varlığını tədqiq etməkdir.

**Tədqiqat metodları.**

Əsas nəticələrin alınmasında funksional analizin, funksiyalar nəzəriyyəsinin, eləcə də xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə olunmuşdur.

**Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar**.

Müdafiə üçün aşağıdakı əsas müddəalar irəli sürülmüşdür:

- Cırlaşan elliptik-parabolik xətti divergent tənliklərin həlləri üçün çəkili aprior qiymətləndirmələrin alınması;
- Cırlaşan elliptik-parabolik xətti divergent tənliklərin həllərinin keyfiyyət xassələrinin öyrənilməsi;
- Cırlaşan elliptik-parabolik xətti qeyri-divergent tənliklərin həlləri üçün koersitiv qiymətləndirmələrin alınması;
- Cırlaşan elliptik-parabolik xətti qeyri-divergent tənliklər üçün birinci sərhəd məsələsinin güclü həll olunmasının isbatı.

**Tədqiqatın elmi yeniliyi.**

İşdə aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- Cırlaşan xətti divergent tənliklərin həlləri üçün çəkili aprior qiymətləndirmələr alınmışdır;
- Cırlaşan xətti divergent tənliklərin həlləri üçün keyfiyyət xüsusiyyətləri öyrənilmişdir;
- Cırlaşan xətti qeyri-divergent tənliklərin həlləri üçün koersitiv qiymətləndirmələr alınmışdır;
- Cırlaşan xətti qeyri-divergent tənliklər üçün birinci sərhəd məsələsinin güclü həll olunması isbat edilmişdir.

**Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti.**

Dissertasiya işində əldə edilən nəticələr nəzəri xarakter daşıyır. Onlardan xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsində, fizika və mexanikanın məsələlərində istifadə oluna bilər.

**Aprobasiyası və tətbiqi.**

Dissertasiya işinin əsas nəticələri Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Funksional analiz" (prof. H.İ.Aslanov), "Diferensial tənliklər" (prof. Ə.B.Əliyev) şöbələrinin seminarlarında məruzə

edilmiş, eləcə də “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU, Ukrayna, 2013) XXI Beynəlxalq konfransda, AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 55 illiyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2014), Caucasion Mathematics Conference I (CMCI, Tbilisi, 2014) Beynəlxalq konfransda, International Workshop on Operator Theory and Applications-2015 Beynəlxalq konfransda (IWOTA, Tbilisi,2015), “Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications-7” (MADEA-7, Bakı, 2015) Beynalxalq konfransada, XXVII “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU, Batumi, 2016) Beynəlxalq konfransda, “Operators in Morrey-type Spaces and Applications” (OMTSA, Türkiyə, 2017) Beynəlxalq konfransda, XXXVII “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU, Kiyev, 2023) Beynəlxalq konfransda, Riyaziyyatın Nəzəri və Tətbiqi Problemləri (SDU, Sumqayıt, 2023) Beynəlxalq elmi konfransda məruzə olunmuşdur.

**Müəllifin şəxsi töhfəsi**. Dissertasiya işində alınan bütün nəticə və təkliflər müəllifə məxsusdur.

**Müəllifin nəşrləri.** Dissertasiyanın mövzusu ilə bağlı 15 elmi iş çap edilmiş və bu siyahı avtoreferatın sonunda qeyd olunmuşdur. Məqalələrdən 3-ü beynəlxalq xülasələndirmə və indeksləmə sistemlərində (Scopus, Web of Science və Zentralblatt MATH) nəşr edilmişdir.

**Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı**.

Dissertasiya işi Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunda yerinə yetirilmişdir.

**Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi.**

Dissertasiya işinin ümumi həcmi 218433 işarədir (titul - 588 işarə sayı, mündəricat 1121 işarə sayı, giriş - 56000 işarə sayı, birinci fəsil - 70000 işarə sayı, ikinci fəsil - 90000 işarə sayı, nəticə - 724 işarə sayı). İstifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısı 82 adda ədəbiyyatdan ibarətdir.

# DİSSERTASİYANIN MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, iki fəsil və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiya işinin qısa məzmununa və əsas nəticələrinə nəzər salaq.

Fəsil 1 elliptik-parabolik tip xətti divergent cırlaşan tənliklər üçün birinci sərhəd məsələsinin qoyuluşuna və onun ümumiləşmiş həllinin keyfiyyət xassələrinin öyrənilməsinə həsr edilmişdir.

Tutaq ki, $\Omega$, $R^n$ ilə işarə edilən $n$- ölçülü $x=(x_1,...,x_n)$ nöqtələrinin evklid fəzasında $\partial\Omega$ sərhədli məhdud oblastdır. Fərz edək ki, $\partial\Omega \subset C^2$. Tutaq ki, $Q_T=\Omega\times(0,T)$ silindirdir, $T\in(0,\infty)$. $Q_T$ -də aşağıdakı başlanğıc sərhəd məsələsinə baxılır.

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-\psi(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+$$

$$+c(x,t)u=0, \tag{1}$$

$$u(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \tag{2}$$

$$u(x,0)=h(x),\quad x\in\Omega \tag{3}$$

Fərz edək ki, tənliyin əmsalları və sağ tərəf aşağıdakı şərtləri ödəyirlər: $\|a_{ij}(x,t)\|$, $Q_T$-də elementləri ölçülən funksiyalar olan həqiqi simmetrik matrisdir, ixtiyari $(x,t)\in Q_T$ və $\xi\in R^n$ üçün

$$\gamma\omega(x)|\xi|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\le\gamma^{-1}\omega(x)|\xi|^2 \tag{4}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Burada $\gamma$- $(0,1]$ yarımintervalından olan sabit, $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t)$, $i,j=\overline{1,n}$, $(x,t)\in Q_T$-də olduqda ölçülən funksiyalardır. Həmçinin

$$c(x,t)\le 0,\ c(x,t)\in L_{n+1}(Q_T) \tag{5}$$

$$|b_i(x,t)|^2+k\cdot c(x,t)\le 0,\ b_i(x,t)\ \in L_{n+2}(Q_T), \tag{6}$$

k- hər hansı müsbət sabitdir.

Burada $\omega(x)$ çəki funksiyası $A_p -$ dən olub, Makenhoupt sinfindəndir. Dolğunluq üçün tərifi qeyd edək: $1 < p < \infty$ üçün $\omega : R^n \to [0,\infty)$ çəkisi $A_p$ sinfinə o zaman aiddir ki, əgər $\omega(x)$ lokal inteqrallanan olub və elə $C$ sabiti var ki, istənilən $B \subset R^n$ kürəsi üçün aşagıdakı bərabərsizlik ödənsin.

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1} \le C < \infty,$$

burada $|B| -$ $B$ kürəsinin Lebeq mənada ölçüsüdür. Biz qeyd edirik ki, $\omega : R^n \to [0,\infty)$ $A_1$ sinfinə o zaman aiddir ki, elə $C$ sabiti var ki, bütün $x \in B$ üçün

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx \le C\omega(x),$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Fərz edək ki, çəki funksiyası aşağıdakı şəkildədir.

$$\psi(x,t) = \omega(x)\cdot\lambda(\rho)\cdot\varphi(T-t), \qquad (7)$$

burada $\omega(x) \in A_p$ Makenhoupt sinfindəndir. $\lambda(\rho) \ge 0$, $\lambda(\rho) \in C^1[0, diam\Omega]$, həmçinin

$$|\lambda'(\rho)| \le p\sqrt{\lambda(\rho)}, \text{ haradakı } \rho = dist(x,\partial\Omega), \qquad (8)$$

$$\varphi(z) \ge 0,\ \varphi'(z) \ge 0,\ \varphi(z) \in C^1[0,T],$$

$$\varphi(z) \ge \beta\cdot z\cdot\varphi'(z), \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \qquad (9)$$

burada $p, \beta$ - müsbət sabitlərdir.

Bəzi hallarda çəki funksiyasının törəməsinin olmasını tələb edirik. Bu tətbiqi məsələlərlə bağlıdır. Məhz, yarımkeçiricilər nəzəriyyəsində çəki funksiyası belə seçilir ki, onun törəməsi olsun və burada çəki olaraq $\sigma = F_{\gamma+1}$ Fermi inteqralı seçilsin,

burada $\quad F_\gamma(u)=\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\int_0^\infty \frac{s^\gamma ds}{1+\exp(s-u)}$, $\gamma>-1$, və $\omega(u)=\sigma'$.

Həmçinin bu cür çəkilər fazaların ayrılması problemlərində də görünür. Yəni

$$\sigma(u)=\frac{1}{1+\exp(-u)},\ \omega(u)=\sigma'(u)=\frac{1}{(1+e^u)(1+e^{-u})}.$$

(1)-(3) sağ tərəflərinə əsasən, aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi nəzərdə tutulur.

Fərz edək ki, (1)-( 3) -ün sağ tərəfi aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$f(x,t)\in L_\infty(Q_T)\cap L_\infty\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)\cap L_1\left(0,T;W_\infty^1(\Omega)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}\in L_1\left(0,T;L_\infty(\Omega)\right) \tag{10}$$

$$h(x)\in L_\infty(\Omega)\ . \tag{11}$$

Ümumiliyi pozmadan, hesablamaları asanlaşdırmaq üçün $h(x)$-i sıfıra bərabər götürəcəyik.

$Q_T$ – də sonlu normaya malik funksiyaların hər hansı Banax fəzalarını daxil edək:

$$\|u\|_{W_{2,\omega}^1(Q_T)}=\left(\int_{Q_T}\omega(x)\left(u^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)dxdt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{W_2^2(Q_T)}=\left(\int_{Q_T}\left(u^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+\sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_j}^2\right)dxdt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)}=\|u\|_{W_2^2(Q_T)}+\|u_t\|_{L_2(Q_T)},$$

$$\|u\|_{W_{2,\varphi}^{2,2}(Q_T)}=\left(\left(\int_{Q_T}\omega(x)\left(u^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+\sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_j}^2+u_t^2\right)+\right.\right.$$

$$+\psi^2(x,t)u_{tt}^2+\psi(x,t)\sum_{i=1}^{n}u_{x_it}^2\Bigg)dxdt\Bigg)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{W_{2,\psi}^{1,2}(Q_T)}=\left(\left(\int_{Q_T}\omega(x)\left(u^2+\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2+\sum_{i,j=1}^{n}u_t^2\right)+\psi^2(x,t)u_{tt}^2\right)dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{1,2}(Q_T)$- $W_{2,\psi}^{1,2}(Q_T)$ fəzasının altfəzasıdır, $C^\infty(\overline{Q}_T)$-dən olan bütün funksiyalar yığımı burada sıx çoxluqdur və $\Gamma(Q_T)$ sərhəddində sıfıra bərabərdir.

$R>0$, $x^0\in R^n$ üçün $B_R(x^0)$ ilə $\{x:|x-x^0|<R\}$, kürəsini, $Q_T^R(x^0)$- ilə $B_R(x^0)\times(0,T)$ silindrini işarə edək. Tutaq ki, $\overline{B_R}(x^0)\subset\Omega$. Əgər $u(x,t)\in C^\infty(\overline{Q}_T^R(x^0))$, $u|_{t=0}=0$ və hər hansı $\rho\in(0,R)$ üçün supp$u\subset\overline{Q}_T^\rho(x^0)$ olduqda $u(x,t)\in A(Q_T^R(x^0))$. Əgər $u(x,t)\in C^\infty(\overline{Q}_T^R(x^0))$ $u|_{t=0}=0$ şərtləri ödənərsə, onda deyəcəyik ki, $u(x,t)\in A_1(Q_T^R(x^0))$ (yaxud qısaca, $A_1(Q)$). Nəhayət, $u(x,t)\in B(Q_T^R(x^0))$, əgər $u(x,t)\in A(Q_T^R(x^0))$ və bundan əlavə $u|_{t=T}=u_t|_{t=T}=0$.

$\rho>0$ üçün $\{x:x\in\Omega, dist(x,\partial\Omega)>\rho\}$ çoxluğunu $\Omega_\rho$ ilə işarə edək və tutaq ki, $Q_T(\rho)=\Omega_\rho\times(0,T)$. Bundan sonra $C(.)$ ilə mötərizə daxilindəki ifadədən asılı müsbət $C$ sabiti başa düşülür.

Əgər $\Gamma(Q_T)$ sərhəddində sıfıra çevrilən istənilən $\overline{\varphi}\in C^\infty(\overline{Q}_T)$ funksiyası üçün

$$\int_{Q_T}\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\varphi}dxdt+$$

$$+\int_{Q_T}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\overline{\varphi}+c(x,t)u\overline{\varphi}\right]dxdt-$$

$$-\int_0^T\int_\Omega \psi(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\overline{\varphi}dxdt=0 \qquad (12)$$

inteqral eyniliyi ödənərsə, sanki hər yerdə $\tau\epsilon(0,T)$ üçün $\overline{\varphi}(\tau,x)=0$, $x\in\Omega$ şərti və bütün $t\in(0,T)$ üçün

$$u(x,t)-f(x,t)\in L_2\left(0,T;W_{2,\psi}^{1,2}(\Omega)\right). \qquad (13)$$

şərti ödənərsə, onda $u(x,t)\in L_2\left(0,T;W_{2,\psi}^{1,2}(\Omega)\right)$ funksiyasına (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həlli deyəcəyik.

Əvvəlcə köməkçi məsələyə baxılır, hansı ki, (1)-(3) məsələsindən $\omega_\varepsilon(x)$, $\psi_\varepsilon(x,t)$ requlyarlaşdırılan $\omega(x)$ və $\psi(x,t)$ çəkilərinin əvəz edilməsi ilə alınır. Yəni $\omega(x)=\omega_\varepsilon(x)$, $\varepsilon\in(0,T]$ üçün

$$\omega_\varepsilon(x)=\max\left\{\omega(x),\omega\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\} \qquad (14)$$

$\varepsilon\in(0,T]$, $\omega_0(x)=\omega(x)$.

$\psi(x,t)=\psi_\varepsilon(x,t)$ yazsaq, hansı ki, ixtiyari qeyd olunmuş $\varepsilon\in(0,T)$ üçün

$$\psi_\varepsilon(x,t)=\psi(x,\varepsilon)-\frac{\psi'(x,\varepsilon)\varepsilon}{m}+\frac{\psi'(x,\varepsilon)}{m\varepsilon^{m-1}}t^m\ ,\ t\in[0,\varepsilon]\text{olduqda} \quad (15)$$

və $\psi_\varepsilon(x,t)=\psi(x,t)$, $t\in[\varepsilon,T]$ olduqda, $m=\frac{2}{\beta}$ bütün $x\in\Omega$ üçün. Aydındır ki, $\psi_\varepsilon(x,t)\in C^1[0,T]$. Göstərək ki, $t\in[0,T]$ üçün

$$\psi_\varepsilon(x,t)\geq\frac{1}{2}\psi(x,t)$$

bütün $x \in \Omega$ üçün. $t \in [0, \varepsilon)$ üçün bu bərabərsizlik kafi qədər isbat olunmuşdur. Aydındır ki, $\psi(x,t)$-nin monotonluq şərtinə görə

$$\psi(x,\varepsilon) - \frac{\psi'(x,\varepsilon)\varepsilon}{m} \geq \frac{1}{2}\psi_{\varepsilon}(x,\varepsilon),$$

və ya

$$\psi(x,\varepsilon) \geq \frac{2}{m}\psi'(x,\varepsilon)\cdot\varepsilon .$$

bərabərsizliyi ödənilir. Amma sonuncu qiymətləndirmə (9) şərti daxilində doğrudur. Bundan sonra bizə daha maraqlı olan $x > 0,\ t > 0$ olduqda $\psi(x,t) > 0$ halına baxacağıq. Əgər $\psi(x,t) \equiv 0$ olarsa, onda (1) tənliyi parabolikdir və uyğun nəticəni parabolik tənliklər üçün alınan nəticələrdən almaq olar. Əgər $\psi(x,t) \equiv 0$, $t \in [0, t^0]$ olduqda, onda (1)-(3) məsələsinin həlli $Q_{t^0}$ silindirində $u(x,t)$ həllinin və $\Omega \times (t^0, T)$ silindirində parabolik tənlik üçün başlanğıc sərhəd məsələsinin $v(x,t)$ həllinin bitişdirilməsindən və $v(x,t^0) = u(x,t^0)$, $v(x,t)\big|_{\partial\Omega\times[t^0,T]} = 0$ başlanğıc sərhəd şərtlərinin ödənilməsindən ibarətdir.

(1)-(3) məsələsinin həlli üçün teorem 1 doğrudur.

**Teorem 1.** Tutaq ki, (4)-(11) şərtləri ödənilir. Onda məlum parametrlərdən asılı və $\varepsilon \in (0,1]$-dən asılı olmayan elə $M_1$ sabiti var ki, $\omega_{\varepsilon}(x)$, $\psi_{\varepsilon}(x,t)$ çəkili (1)-(3) məsələsinin $u(x,t)$ həlli üçün aşağıdakı qiymətlədirmə ödənilir:

$$\underset{t\in(0,T)}{ess\ \sup}\int_{\Omega}\{\Lambda_1(u(x,t)) + \Lambda_2(u(x,t))\}dx + \int_{Q_T}\omega_{\varepsilon}(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt +$$

$$+\int_{Q_T}\psi_{\varepsilon}(x,t)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt \leq M_1 \qquad (16)$$

burada

$$\Lambda_1(u) = \int_0^u s\cdot\omega(s)ds,\ \Lambda_2(u) = \int_0^u s\cdot\psi(x,s)ds$$

Həmçinin teorem 2 də doğrudur.

**Teorem 2.** Tutaq ki, teorem 1-in şərtləri ödənilir. Onda yalnız məlum parametrlərdən asılı və $\varepsilon \in (0,1]$-dən asılı olmayan, elə $M_2$ sabiti var ki, (1)-(3) məsələsinin requlyarlaşdırılmış həlli

$$\int_{Q_T}\left[\omega_\varepsilon(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\psi_\varepsilon(x,t)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right]dxdt \le M_2. \qquad (17)$$

qiymətləndirməsini ödəyir.

Teorem 2-nin isbatı üçün bizə köməkçi qiymətləndirmə lazımdır.

**Lemma 1.** Fərz edək ki, teorem 1-in şərtləri ödənilir və bütün $q \in \left(\frac{2n}{n+2}, \frac{n}{2}\right)$ ədədləri üçün, aşağıdakı

$$ess\sup_{t\in(0,\tau)}\int_\Omega u^q(x,t)dx \le C_1 \qquad (18)$$

qiymətləndirməsi ödənilir, $C_1$ sabiti isə yalnız məlum parametrlərdən asılıdır. Onda

$$ess\sup_{t\in(0,\tau)}\left\{\int_\Omega |u(x,t)|^{\frac{pn}{n-2}}dx+\int_\Omega |u(x,t)|^{p-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|dx\right\} \le C_2 \qquad (19)$$

qiymətləndirilməsi bütün $p>2$ ədədləri üçün doğrudur, bu ədədlər

$$p\cdot\frac{n}{n-2}=(p-1)\frac{q}{q-1} \qquad (20)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur və $C_2$ sabiti yalnız məlum parametrlərdən asılıdır və burada $n \neq 2$. $n=2$ olduqda isə digər qiymətləndirmələrdən istifadə olunur.

$u(x,t)$ funksiyasının requlyarlıq xassəsinin isbatı üçün bizə həmçinin aşağıdakı şərt lazımdır.

$$\rho_1^{-1}(u^\gamma+1)\le u \le \rho_1(u^\gamma+1),\ u>0,\ 0\le\gamma\le\frac{2}{n-2}, \qquad (21)$$

$\rho_1$ hər hansı müsbət sabitdir. (21)-dən alınır ki, $u \le \rho_1\left(\frac{u^{\gamma+1}}{\gamma+1}+u\right)$,

$u>0$ üçün, $\gamma+1<\dfrac{n}{n-2}$. Qeyd edək ki, belə tip şərt $n>2$ üçün $\gamma+1<\dfrac{2}{n-2}$ məhdudiyyəti ilə birlikdə meydana gəlmişdir.

Sonralar bizə aşağıdakı lemma lazımdır.

**Lemma 2.** Fərz edək ki, teorem 1 və 2-nin şərtləri ödənilir və

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\tau)}\int_{\Omega} u_+^q(x,t)dx+$$

$$+\iint_{(u>1)}\left[\omega_\varepsilon^2(x)u^{q-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\psi_\varepsilon^2(x,t)u^{q-2}(x,t)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right]dxdt\le C_3 \qquad (22)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Burada $q\in\left[\dfrac{2+\gamma}{1+\gamma},\dfrac{n}{2}\right]$ hər hansı ədəd, $C_3$ isə məlum parametrlərdən asılı sabitdir. Onda elə $C_4$ sabiti var ki,

$$\iint_{(u>1)}\left[\omega_\varepsilon^2(x)u^{q-2+\beta}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\psi_\varepsilon^2(x,t)u^{q-2+\beta}(x,t)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right]dxdt\le C_4 \quad (23)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Bu lemmanın isbatında teorem 2. və lemma 1-dən istifadə olunur.

**Lemma 3.** Fərz edək ki, teorem 2-nin şərtləri ödənilir. Onda elə $\bar{q}$ ədədi var ki, $\bar{q}>\dfrac{n}{2}$ və yalnız məlum parametrlərdən asılı elə $C_5$ sabiti var ki,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\tau)}\int_{\Omega} u_+^{\bar{q}}(x,t)dx+$$

$$\iint_{\{u>1\}}\left[\omega_\varepsilon^2(x)u^{\bar{q}-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\psi_\varepsilon^2(x,t)u^{\bar{q}-2}(x,t)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right]dxdt\le C_5. \quad (24)$$

qiymətləndirilməsi doğrudur.

Qeyd edək ki, $u_+(x,t)$ ilə $\max\{u(x,t);0\}$ işarə edilmişdir. Nəhayət, paraqraf 1.3-də aşağıdakı teorem isbat olunur.

**Teorem 3.** Tutaq ki, teorem 2-nin şərtləri ödənilir. Onda $t \in [0, \tau]$, $x', x'' \in \Omega$ üçün

$$\|u(x,t)\|_{L^\infty(Q_T)} \le M_3,$$

$$|u(x',t)\omega(x') - u(x'',t)\omega(x'')| \le M_4 |x' - x''|^\eta \quad (25)$$

qiymətləndirilməsi doğrudur. Burada $\eta \in (0,1)$ və $M_3$, $M_4$ yalnız məlum parametrlərdən asılı və $\varepsilon$-dan asılı olmayan sabitlərdir.

**Teorem 4.** Tutaq ki, (4)-(11), (21) şərtləri və $\omega'(x) \le \rho_2 \omega(x)$ şərti ödənilir, $\rho_2 > 0$ – sabitdir. Onda $M_5$ məlum parametrlərdən asılı və $\varepsilon$-dan isə asılı olmayan sabit olduqda, (1)-(3) məsələsinin ixtiyari həlli

$$ess\sup\{|u(x,t)| : (x,t) \in Q_T\} \le M_5 \quad (26)$$

bərabərsizliyini ödəyir.

**Teorem 5.** Tutaq ki, teorem 4-ün şərtləri ödənilir. Onda (1)-(3) başlanğıc sərhəd məsələsinin (12) inteqral eyniliyi mənasında heç olmasa bir həlli var.

**Teorem 6.** Tutaq ki, teorem 4-ün şərtləri ödənilir və əlavə olaraq, $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t)$ $x$-dən asılı Lipşis şərtini lokal mənada ödəyən funksiyalardır. Onda (1)-(3) başlanğıc sərhəd məsələsinin yeganə həlli var.

Beləliklə, həllin varlığı və yeganəliyi isbat olunur.

İsbat dörd mərhələdə aparılır, yekun nəticə üçün Qronuol lemmasından istifadə olunur.

Fəsil 2 xətti qeyri-divergent cırlaşan elliptik-parabolik tip tənlik üçün birinci sərhəd məsələsinin güclü həll olunması və aprior qiymətləndirmələrin alınmasına həsr olunmuşdur.

Əvvəlcə birinci sərhəd məsələsinə baxılır:

$$Zu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{x_i x_j} + \psi(x,t) u_{tt} - u_t = f(x,t), \quad (27)$$

$$u|_{\Gamma(Q_T)} = 0, \quad (28)$$

burada $\Gamma(Q_T)=(\partial\Omega\times[0,T])\cup(\Omega\times\{(x,t):t=0\})-$ $Q_T=\Omega\times(0,T)$ silindrinin parabolik sərhəddidir. $T\in(0,\infty)$, $\psi(x,t)$ isə sıfıra yaxınlaşır. Tutaq ki, əmsallar aşağıdakı şərti ödəyir: $\|a_{ij}(x,t)\|$ simmetrik matrisdir və ixtiyari $(x,t)\in Q_T$ və $\xi\in R^n$ üçün

$$\gamma\omega(x)|\xi|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\le\gamma^{-1}\omega(x)|\xi|^2 \tag{29}$$

bərabərsizliyi doğrudur, Burada $\gamma\in(0,1]$, $a_{ij}(x,t)$, $i,j=\overline{1,n}$ $(x,t)\in Q_T$ üçün ölçülən funksiyalar, $\omega(x)\in A_p$ isə Makenhoupt şərtini ödəyir

$$\psi(x,t)=\omega(x)\cdot\lambda(\rho)\cdot\varphi(T-t), \tag{30}$$

burada $\rho=\rho(x)=dist(x,\partial\Omega)$ və $\psi(x,t)$-yə nəzərən aşağıdakı şərtlər ödənilir:

$$\lambda(\rho)\ge 0,\ \lambda(\rho)\in C^1[0,diam\Omega] \text{ və } |\lambda'(\rho)|\le p\sqrt{\lambda(\rho)}, \tag{31}$$

$$\varphi(z)\ge 0,\ \varphi'(z)\ge 0,\ \varphi(z)\in C^1[0,T],$$

$$\varphi(z)\ge\beta\cdot z\cdot\varphi'(z),\varphi(0)=\varphi'(0)=0, \tag{32}$$

burada $p$ və $\beta$ müsbət sabitlər.

Paraqraf 2.1 -də

$$Z_0=\omega(x)\cdot\Delta+\psi(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial t}$$

model operatora baxılır, burada $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – Laplas operatorudur.

**Lemma 4.** Əgər $\omega(x)$ Makenhoupt şərtini ödəyirsə, $\psi(x,t)$ çəki funksiyası isə (30)-(32) şərtlərini ödəyirsə, onda elə $T_1(\psi(x,t),n,\omega(x))$ var ki, $T\le T_1$ olduqda, ixtiyari $u(x,t)\in B(Q_T^R(x_0))$ funksiyaları üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\int_{Q_T^R(x_0)}\left(\omega(x)\left(\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_ix_j}+u_t^2\right)+\psi_\varepsilon^2(x,t)u_{tt}^2+\psi_\varepsilon(x,t)\sum_{i=1}^{n}u_{x_it}^2\right)dxdt\le$$

$$\leq \left(1+2(n+1)q(T)\right) \int\limits_{Q_T^R(x_0)} \left(Z_\varepsilon u\right)^2 dxdt \,. \qquad (33)$$

**Lemma 5.** Tutaq ki, $\psi(x,t)$ çəki funksiyası (30)-(32) şərtlərini ödəyir, $\omega(x)$ Makenhoupt şərtini ödəyir, $Z_\varepsilon$ operatoru isə $\varepsilon > 0$ olduqda lemma 1-dəki mənanı daşıyır. Onda $T \leq T_2(\psi,\omega,n,\Omega)$ olduqda istənilən $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\psi_\varepsilon}(Q_T)$ funksiyaları üçün

$$\left\| u(x,t) \right\|_{\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\psi_\varepsilon}(Q_T)} \leq C_6(\psi,\omega,n,\Omega) \left\| Z_\varepsilon u - \mu u \right\|_{L_2(Q_T)}, \qquad (34)$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Burada $\mu = \dfrac{1}{T}$, $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\psi_\varepsilon}(Q_T)$ $-Q_T$-də verilmiş sonlu normalı $u(x,t)$ funksiyalarının Banax fəzasıdır.

$Z_0$ model operatoru üçün məsələnin həllinin olmasına imkan verən bir neçə köməkçi lemma isbat olunur.

**Lemma 6.** Tutaq ki, $\psi(x,t)$ çəki funksiyası (30)-(32) şərtlərini ödəyir, $\omega(x)$ Makenhoupt şərtini ödəyir, onda elə $T_1(\psi,\omega,n)$ var ki, $T \leq T_1$ olduqda istənilən $u(x,t) \in A\left(Q_T^R\left(x^0\right)\right)$ funksiyaları üçün

$$\int\limits_{Q_T^R\left(x^0\right)} \left( \omega(x) \left( \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j} + u_t^2 \right) + \psi_\varepsilon^2(x,t) u_{tt}^2 + \psi_\varepsilon(x,t) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2 \right) dxdt \leq$$

$$\leq \left(1 + D \cdot S\right) \int\limits_{Q_T^R\left(x^0\right)} \left(Z_0 u\right)^2 dxdt \,. \qquad (35)$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Burada $S = S(\psi,\omega,n)$–hər hansı sabit, $D = D(T) = q(T) + q_1(T)$, $q(T) = \sup\limits_{t\in[0,T]} \varphi'(t)$, $q_1(T) = \sup\limits_{t\in[0,T]} \varphi(t)$.

**Lemma 7.** Əgər $Z$ operatorunun əmsalları (29) şərtini ödəyirsə, $\psi(x,t)$ çəki funksiyası (30)-(32) şərtlərini, $\omega(x)$ Makenhoupt şərtini ödəyirsə, onda $T \leq T_2$ olduqda istənilən $u(x,t) \in A\left(Q_T^R\left(x^0\right)\right)$ funksiyası üçün və ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün.

$$\|u(x,t)\|_{W^{2,2}_{2,\psi_\varepsilon}\left(Q_T^{R/2}(x^0)\right)} \le C_7 \|Zu\|_{L_2\left(Q_T^R(x^0)\right)} +$$

$$+\varepsilon \|u(x,t)\|_{W^{2,2}_{2,\psi_\varepsilon}\left(Q_T^R(x^0)\right)} + \frac{C_8(\psi,\omega,n,\Omega)}{\varepsilon R^2}\|u\|_{L_2\left(Q_T^R(x^0)\right)} \qquad (36)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

**Nəticə 1.** Əgər $Z$ operatorunun əmsalları (29) şərtini, $\psi(x,t)$ çəki funksiyası (30)-(32) şərtlərini, $\omega(x)$ Makenhoupt şərtini ödəyirsə, onda $T \le T_2$ olduqda və istənilən $\varepsilon > 0$ olduqda $u(x,t) \in C^\infty(\overline{Q}_T)$funksiyaları üçün, $u|_{t=0} = 0$ olduqda

$$\|u(x,t)\|_{W^{2,2}_{2,\psi}(Q_T(\rho))} \le C_9(\psi,\omega,\sigma,n,\rho,\Omega)\|Zu\|_{L_2(Q_T)} +$$

$$+\varepsilon\|u(x,t)\|_{W^{2,2}_{2,\psi}(Q_T)} + C_{10}(\psi,\omega,\sigma,n,\rho,\Omega)\|u\|_{L_2(Q_T)} \qquad (37)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

**Lemma 8.** Əgər $Z$ operatorunun əmsalları (29) şərtini, $\psi(x,t)$ çəki funksiyası (30)-(32) şərtlərini, $\omega(x)$ Makenhoupt şərtini ödəyirsə, onda elə $\rho_1(\psi,\omega,n)$ var ki, əgər $T \le T_2$, onda istənilən $c > 0$ olduqda, bütün $u(x,t) \in C^\infty(\overline{Q}_T)$, $u|_{\Gamma(Q_T)} = 0$ funksiyaları üçün

$$\|u(x,t)\|_{W^{2,2}_{2,\psi}\left(Q_T^1(\rho_1)\right)} \le C_{11}(\psi,\omega,\sigma,n,\rho_1,\Omega)\|Zu\|_{L_2(Q_T)} +$$

$$+\varepsilon\|u(x,t)\|_{W^{2,2}_{2,\psi}(Q_T)} + \frac{C_{12}(\psi,\omega,\sigma,n,\rho_1,\Omega)}{\varepsilon}\|u\|_{L_2(Q_T)} \qquad (38)$$

qiymətləndirməsi doğrudur, burada $Q_T^1(\rho_1) = Q_T \setminus Q_T(\rho_1)$.

**Lemma 9.** Lemma 8-in şərtləri daxilində ixtiyari $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\psi}(Q_T)$ üçün $T \le T_2$ olduqda,

$$\|u(x,t)\|_{\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\psi}(Q_T)} \le C_{13}(\psi,\omega,n,\Omega)\|Zu\|_{L_2(Q_T)} +$$

$$+C_{14}(\psi,\omega,n,\Omega)\|u\|_{L_2(Q_T)}. \qquad (39)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Nəticədə koersitiv qiymətləndirmə isbat olunur.

**Teorem 7.** Əgər (29), (30)-(32) şərtləri ödənilirsə, $\omega(x)$ Makenhoupt şərtini ödəyirsə, onda elə $T_0 = T_0(\psi, \omega, \sigma, n, \Omega)$ var ki, $T \le T_0$ olduqda, istənilən $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\psi}(Q)$ funksiyası üçün

$$\|u(x,t)\|_{\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{2,\psi}(Q)} \le C_{15}(\psi, \omega, \sigma, n, \Omega)\|Zu\|_{L_2(Q)}. \qquad (40)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Sonrakı paraqrafda qoyulmuş məsələnin güclü həll olunmasına baxılır və $Z$ operatoru üçün birinci sərhəd məsələsinin sağ tərəfi $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ olduqda uyğun çəkili Sobolev fəzasında birqiymətli güclü (sanki hər yerdə) həllinin olması isbat olunur. İsbat parametrə nəzərən davametmə metodu ilə aparılır.

$Z_0$ model operatoru üçün məsələnin həll olmasına keçək, burada

$$Z_0 = \omega(x) \cdot \Delta + \psi(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

**Lemma 10.** Əgər $\omega(x)$ Makenhoupt şərtini, $\psi(x,t)$ çəki funksiyası isə (30)-(32) şərtlərini ödəyirsə, onda $T \le T_5(\psi, \omega)$, $\tau \in [0,1]$ olduqda istənilən $u(x,t) \in A\left(Q_T^R\left(x^0\right)\right)$ funksiyası üçün

$$\int_{Q_T^R\left(x^0\right)} \left( \omega^2(x)\left( \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}^2 + u_t^2 \right) + \psi^2(x,t)u_{tt}^2 + \psi(x,t)\sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2 \right) dxdt \le$$

$$\le \left(1 + D(T) \cdot S_2\right) \int_{Q_T^R\left(x^0\right)} \left( Z_0 u - \frac{\tau}{T} u \right)^2 dxdt. \qquad (41)$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Burada $S_2 = S_2(\psi, \omega, n)$ – hər hansı sabit, $D = D(T) = q(T) + q_1(T)$, $q(T) = \sup\limits_{t \in [0,T]} \varphi'(t)$, $q_1(T) = \sup\limits_{t \in [0,T]} \varphi(t)$.

**Lemma 11.** Tutaq ki, $Z$ operatorunun əmsalları (29) şərtini, $\psi(x,t)$ çəki funksiyası (30)-(32) şərtlərini, $\omega(x)$ Makenhoupt şərtini ödəyir. Onda bütün $u(x,t) \in C^\infty\left(\overline{Q}_T\right)$, $u|_{\Gamma(Q_T)} = 0$ funksiyaları üçün $T < T_6(\gamma, \sigma, \psi, \omega, n, \Omega)$ olduqda və ixtiyari $\tau \in [0,1]$ üçün

$$\|u(x,t)\|_{W_{2,\psi}^{2,2}(Q_T)} \le C_{16}(\gamma,\sigma,\psi,\omega,n,\Omega)\left\| Zu - \frac{\tau}{T}u \right\|_{L_2(Q_T)} \qquad (42)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Əvvəlcə köməkçi operator üçün güclü həllin olması haqqında teoremi daxil edək. $M_0$ ilə $Z_0 - \mu$ operatorunu, $T_0$ ilə lemma 10 və lemma 11-də sabitin minumum qiymətini işarə edək.

**Teorem 8.** Tutaq ki, $\psi(x,t)$ çəki funksiyası (30)-(32) şərtlərini, $\omega(x)$ Makenhoupt şərtini ödəyir. Onda $T \le T^0$ olduqda birinci sərhəd məsələsi

$$M_0 u = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T$$

$$u\big|_{\Gamma(Q_T)} = 0$$

bütün $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ funksiyaları üçün $\overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}(Q_T)$ fəzasında birqiymətli güclü həll olunandır.

İndi əsas məsələnin güclü həll olunması haqqında teoremi göstərək.

**Teorem 9.** Tutaq ki, $Z$ operatorunun əmsalları (29) şərtini, $\psi(x,t)$ çəki funksiyası (30)-(32) şərtlərini, $\omega(x)$ isə Makenhoupt şərtini ödəyir. Onda $T \le T^0$ olduqda (27)-(28) birinci sərhəd məsələsinin bütün $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ funksiyası üçün $\overset{\circ}{W}{}_{2,\psi}^{2,2}(Q_T)$ fəzasında birqiymətli güclü həlli var və $u(x,t)$həlli üçün

$$\|u(x,t)\|_{W_{2,\psi}^{2,2}(Q_T)} \le C_{17}\|f\|_{L_2(Q_T)}. \qquad (43)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Sonda elmi rəhbərim, f-r.e.d., professor T.S,Hacıyevə mövzunun qoyuluşunda və dissertasiya işinin yerinə yetirilməsində göstərdiyi köməyə və dəyərli məsləhətlərinə görə dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

# NƏTİCƏ

Dissertasiya işi xətti divergent cırlaşan elliptik-parabolik tənliklərin keyfiyyət xassələrinin öyrənilməsinə və xətti elliptik-parabolik qeyri-divergent cırlaşan tənliklərin güclü həllinin olmasına həsr edilmişdir.

Aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- Cırlaşan xətti divergent tənliklərin həlləri üçün çəkili aprior qiymətləndirmələr alınmışdır;
- Cırlaşan xətti divergent tənliklərin həlləri üçün keyfiyyət xüsusiyyətləri öyrənilmişdir;
- Cırlaşan xətti qeyri-divergent tənliklərin həlləri üçün koersitiv qiymətləndirmələr alınmışdır;
- Cırlaşan xətti qeyri-divergent tənliklərin həlləri üçün birinci sərhəd məsələsinin güclü həll olunması isbat edilmişdir.

**Dissertasiyanın əsas məzmunu müəllifin çap olunmuş aşagıdakı elmi əsərlərində öz əksini tapmışdır:**

1. Gadjiev, T., Kerimova, M. The solutions degenerate elliptic-parabolic equations// -India: Journal of Advances in Mathematics, -2013. v.3, №3, -pp. 219-235.

Gadjiev, T., Kerimova, M. On some estimations of solutions for degenerate elliptic-parabolic equations// -Baku: Transactions of ANAS, issue mathematics mechanics, series of phys.-tech. & math. sc. - 2013. XXXIII, №4, -pp. 57-72.

2. Gadjiev, T., Kerimova, M. On solutions of the first boundary-value problem for degenerate elliptic-parabolic equations// XXI İnternational of decision making under uncertainties (PDMU-2013) Abstracts, -Ukraine, Skhidnytsia: -May, -13-17, -2013, -pp.36-37.

3. Gadjiev, T., Kerimova, M., Gasanova, G. The solutions degenerate nonlinear elliptic-parabolic equations.// On actual problems of mathematics and mechanics, Proceedings of the International conference devoted to the 55-th ann. of the Institute of Mathematics and Mechanics, -Bakı: -15-16 May, -2014, -p.141.

4. Gadjiev, T., Kerimova, M., Gasanova, G. The solutions degenerate nonlinear elliptic-parabolic equations.// Caucasion mathematics conference, CMC I, -Tbilisi: -September, -5-6, -2014 , -p.86.

5. Gadjiev, T., Kerimova, M., Aliyev, Kh. The behaviour of solutions of degenerate elliptic-parabolic equations.// International workshop on operator theory and applications, IWOTA, -Tbilisi: -6-10 July, -2015, -p.67.

6. Gadjiev, T., Kerimova, M. Coercive estimate for degenerate elliptic -parabolic equations// -Baku: Proceedings of the İnstitute of mathematics and mechanics, -2015. v. 41, №1, -pp.123-134.

7. Gadjiev, T., Kerimova, M., Aliyev, Kh. The behaviour of solutions of degenerate elliptic-parabolic equations.// MADEA-7, Azerbaijan-Turkey-Ukrainian İnternational Conference, Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications, Abstracts, -Baku: 8-13 September, -2015, p.52.

8. Gadjiev, T., Gasanova, G., Kerimova, M. Solvability of boundary problem for nonlinear degenerate elliptic equations.// XXVII İnternational conference problems of decision making under uncertainties. (PDMU-2016), -Tbilisi- Batumi: -23-27 May, -2016, -p.60.
9. Gadjiev, T., Yagnaliyeva, A., Kerimova, M. The some property of solutions degenerate nonlinear parabolic equations// International conference on "Operators in Morrey-type spaces and applications", dedicated to 60-th birthday of prof. Vagif S.Guliyev, -Kirshehir, Turkey: -10-13 July, -2017, -p.177.
10. Kerimova, M. The boundedness of the solutions of degenerate divergent linear elliptic equations.// International Journal for Research in Mathematics and Statistics, -2018. v.4, issue 11, -pp. 1-5.
11. Kerimova, M. The estimation of solutions nondivergent elliptic-parabolic equations.//- Bulgaria: İnternational Journal of Applied Mathematics, -2019. v.32, №5, -pp.759 -767.
12. Гаджиев, Т., Алиев, С., Керимова, М. Сильная разрешимость краевой задачи для линейных недивергентных вырождаюшихся уравнений эллиптико-параболического типа.//-Baku: Proceeding of IAM, - 2019, v.8, №1, -pp.14-23.
13. Gadjiev, T., Kerimova, M., Gasanova, G. Solvability of a boundary-value problem for degenerate equations//-Ukraine: Ukrainian mathematical journal, -2020. v.72, issue 4, -pp.495-514.
14. Kerimova, M. Investigation of the solution of boundary value problem for elliptic-parabolic equations // XXXVII International Conference problems of decision making under uncertainties (PDMU-2022) Abstracts,-Kyiv:-November,-23-25,-2022,-p.62
15.Kərimova, M. Xətti divergent cırlaşan elliptik-parabolik tənliklərin həlli üçün aprior qiymətləndirmələr.//Riyaziyyatın Nəzəri və Tətbiqi Problemləri Beynəlxalq elmi konfrans,-Sumqayıt: -25-26 Aprel, -2023,-səh.80-82.

Dissertasiyanın müdafiəsi **29 sentyabr 2023-cü il** tarixində **$14^{00}$**-da Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç, 9.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **22 iyun 2023-cü il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 03.05.2023
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 36058
Tiraj: 30